VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS „KÉPLETTÁR”

Permutáció:
a) ismétlés nélkül
n különböző elem összes lehetséges sorrendje: $P_n = n\,(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n!$ (olv. „n faktoriális”)

b) ismétléses
adott n db elem melyek között $k_1, k_2, \ldots k_s$ db egyforma ($k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$). Ezen n db elem összes lehetséges sorrendje: $P_n(k_1, k_2, \ldots k_s) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots\cdot k_S!}$

Variáció:
a) ismétlés nélkül
n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációja: n elem közül kiválasztott k elem ($k < n$) összes lehetséges sorrendjeinek száma: $V_n^k = n\,(n-1)(n-2)..(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

b) ismétléses
n elem k-ad osztályú ismétléses variációja: adott n-féle elem amelyekből k elemű sorozatokat készítünk úgy, hogy egy féle elem tetszőlegesen sokszor felhasználható, a lehetséges sorrendek száma: $V_n^{k,i} = n^k$

Kombináció:
a) ismétlés nélkül
n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációja: n elemű halmaz k elemű ($0 \le k \le n$) részhalmazainak a száma (a sorrend itt természetesen nem számít):
$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; Ezt a kifejezést $\binom{n}{k}$-val jelöljük (olv. „n alatt a k”) és **binomiális együttható**nak nevezzük.

b) ismétléses:
n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációja: adott n-féle elem, (elvileg minden elemtípus korlátlan mennyiségben) Az ismétléses kombináció ezen n-féle elemből kiválasztható k-elemű részhalmazok száma, melyben mindegyik elemtípusból tetszőleges számú elem szerepelhet.. A lehetséges részhalmazok száma (a sorrend természetesen itt sem számít):

$$C_n^{k,i} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Eseményalgebra (Műveletek eseményekkel):

Komplementer esemény: Az **A** esemény komplementere vagy ellentett eseménye akkor következik be ha A nem következik be. Jele: $\overline{A}$
Események összege: Az az esemény, mely akkor következik be, ha az események közül legalább az egyik bekövetkezik. Jele: $A+B$ vagy $A \cup B$.
Események szorzata: Az az esemény, mely akkor következik be, ha mindegyik esemény bekövetkezik. Jele: $A \cdot B$ vagy $A \cap B$.

Két esemény (A és B) különbsége: Az az esemény, mely akkor következik be, ha az A esemény bekövetkezik és a B esemény nem következik be. Jele: A – B
Az A esemény maga után vonja a B eseményt ha $A \subset B$ tehát ha az A esemény bekövetkezik, akkor ebből következik, hogy b is bekövetkezik.
Események egyenlősége: A=B ha az $A \subset B$ és $B \subset A$ egyidejűleg teljesül.
Teljes eseményrendszer: A B_1, B_2, … B_n események teljes eseményrendszert alkotnak, ha
a) Az események páronként kizáróak, tehát $B_i \cdot B_j = \emptyset$, ha $i \neq j$.
b) Az események összege a biztos esemény: $B_1 + B_2 + \ \ldots + B_n = H$.

Műveleti tulajdonságok:

1. $A+A=A$
2. $A+B=B+A$
3. $(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$
4. $A \cdot A=A$
5. $A \cdot B=B \cdot A$
6. $(A \cdot B) \cdot C=A(B \cdot C)$
7. $(A+B) \cdot C=A \cdot C+B \cdot C$
8. $(A \cdot B)+C=A \cdot C+B \cdot C$
9. $A + \overline{A} = H$
10. $A \cdot \overline{A} = \emptyset$
11. $A + \emptyset = A$
12. $A \cdot \emptyset = \emptyset$
13. $A + H=H$
14. $A \cdot H=A$
15. $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$
16. $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$
17. $\overline{\overline{A}} = A$

<u>A valószínűség axiómái</u> (Kolmogorov):

a) A biztos esemény valószínűsége 1. P(H)=1
b) Bármely $A \in$ T-re $0 \leq P\ A) \leq 1$
c) Bármely A_1, A_2,….$A_n \in$ T esetén, ha A_1, A_2,….A_n események egymást páronként kizáró események, akkor $P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$.

Valószínűségszámítási tételek:

a) $P(A + B) = P(A) + P(B) – P(A \cdot B)$
b) $P(A – B) = P(A) – P(A \cdot B)$
c) $P(\emptyset) = 0$
d) $P(\overline{A}) = 1 – P(A)$

<u>Mintavételi problémák</u>:

N db termékből S db selejtes („kitüntetett tulajdonságú). Az N elemű halmazból n elemű mintát veszünk. Mekkora valószínűséggel lesz a mintában pontosan k db selejtes termék, ha a mintavétel
a) visszatevés /ismétlés/ nélküli (egyszerre veszünk ki n db elemet, vagy egyenként de nem teszünk vissza egyet sem)?
b) visszatevéses /ismétléses/ (egy elemet kiveszünk, feljegyezzük, hogy milyen majd visszatesszük, és újra húzunk egy elemet. Ezt ismételjük n-szer)?

a) Visszatevés nélküli esetben annak a valószínűsége, hogy az n elemű mintában k db selejtes lesz:

$$P_k = \frac{\binom{S}{k}\binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

b) Ha visszatevéses mintavételt alkalmazunk, (bevezetve a $p = \frac{S}{N}$ jelölést) annak a valószínűsége, hogy az egymás után kiválasztott n elemből k db a selejtes,

$$P_k = \binom{n}{k} \cdot \frac{S^k (N-S)^{(n-k)}}{N^n} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \ldots n$$

Feltételes valószínűség

Legyen A, B egyazon H eseménytér két eseménye és $P(B) > 0$. Ekkor az A esemény B-re vonatkozó feltételes valószínűségén az A esemény valószínűségét értjük feltéve, hogy a B esemény bekövetkezik. Ez azt jelenti, hogy az eseményteret leszűkítjük a B-re és az A-t csak akkor tekintjük bekövetkezettnek, ha a B is bekövetkezik. Jele: $P(A|B)$, értéke:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Tétel: Ha A_1, A_2 és B egyazon eseménytér eseményei és $P(B) > 0$, akkor

$$P((A_1+A_2)|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cdot A_2|B)$$

Tétel (A valószínűségek szorzási szabálya):

$$P(A \cdot B) = P(A|B) \cdot P(B) \qquad \text{megfordítva:} \qquad P(B \cdot A) = P(B|A) \cdot P(A)$$

A szorzási szabály általánosítható egy n-tényezős szorzatra:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots P(A_4|A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) \cdot \ldots \ldots P(A_n|A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots A_{n-1})$$

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Tegyük fel, hogy a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ teljes eseményrendszert alkotnak és $P(B_i) \neq 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$. Ekkor

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \ldots + P(A|B_n)P(B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i),$$

Tétel (Bayes-tétel)
Tegyük fel, hogy $B_1, B_2, \ldots, B_n$ teljes eseményrendszert alkotnak, $P(B_i) \neq 0; (i = 1,2,\ldots,n)$, A tetszőleges esemény és $P(A) \neq 0$. Ekkor

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)} \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Valószínűségi változók

Eloszlásfüggvény: A ξ valószínűségi változó **eloszlásfüggvénye**:

$$F: R \to R,\ F(x) = P(\xi < x)$$

Ez a minden valós x-re értelmezett függvény x-hez hozzárendeli annak a valószínűségét, hogy ξ ennél az x-nél kisebb értéket vesz fel.

Diszkrét valószínűségi változók

Definíció ($a\ \xi$ értékkészlete véges)
Azt mondjuk, hogy a $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ valós számok **valószínűségeloszlás**t alkotnak, ha
a) $p_i \geq 0$, i = 1, 2, 3,…n
b) $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$

Definíció ($a\ \xi$ értékkészlete megszámlálhatóan végtelen)
Azt mondjuk, hogy a $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n, \ldots$ ($n \in N$) valós számok **valószínűségeloszlás**t alkotnak, ha
a) $p_i \geq 0$, i = 1, 2, 3,…n,…
b) $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, tehát a p_i nem negatív valós számokból képezett végtelen numerikus sor konvergens és összege 1

Az **eloszlásfüggvény szerkezete** diszkrét valószínűségi változó esetében:

$$F(x) = P(\xi < x) = \sum_{x_i < x} P(\xi = x_i)$$

Tétel: (Az eloszlásfüggvény tulajdonságai):
Legyen $F: R \to R,\ F(x) = P(\xi < x)$ a ξ diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor F(x) rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:
a) Monoton növekvő, azaz ha $x_1 \leq x_2$ akkor $F(x_1) \leq F(x_2)$
b) Balról folytonos, azaz tetszőleges „a” helyen $F(a) = \lim_{x \to a-0} F(x)$
c) $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ és $F(+\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

Tétel:
Legyen F: $R \to R$, $F(x) = P(\xi < x)$ a ξ diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor
a) $P(\xi < b) = F(b)$,
b) $P(a \le \xi) = 1 - F(a)$,
c) $P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$.

Várható érték:(véges eset)
Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó; amelynek lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots x_n$, amely értékeket rendre $p_1, p_2, \ldots p_n$ valószínűséggel vesz fel. A ξ valószínűségi változó **várható érték**ének nevezzük és $M(\xi)$-vel jelöljük:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

A várható érték tehát egy súlyozott átlag, az a valós szám, amely körül a kísérleti eredmények átlaga ingadozik.

Várható érték:(megszámlálhatóan végtelen eset)
Legyenek a ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ $n \in N$ és az ehhez tartozó valószínűségek rendre $p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots$ $n \in N$ és $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, ekkor ξ **várható érték**e:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i ,$$

ha ez a végtelen sor abszolút konvergens, azaz $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i$ konvergens. Ha az abszolút konvergenciára tett kritérium nem teljesül, akkor ξ-nek **nem létezik** várható értéke.

Szórás:
Tegyük fel, hogy a ξ-nek és $(\xi - M(\xi))^2$-nek létezik várható értéke. Ekkor a $(\xi - M(\xi))^2$ valószínűségi változó várható értékét a ξ valószínűségi változó szórásnégyzetének, ennek négyzetgyökét pedig a ξ **szórás**ának nevezzük, és rendre $D^2(\xi)$-vel illetve $D(\xi)$-vel jelöljük.
a) **Szórásnégyzet**: $D^2(\xi) = M\left((\xi - M(\xi))^2\right)$
b) **Szórás**: $D(\xi) = \sqrt{M\left((\xi - M(\xi))^2\right)}$
A szórás az átlagtól való átlagos eltérés mértéke. Egészen pontosan, az átlagtól való eltérések négyzetének várható értékéből vont négyzetgyök.

Tétel: (A szórás tulajdonságai):
a) $D^2(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = M(\xi^2) - M^2(\xi)$. Ez a formula teszi lehetővé, hogy a szórást egyszerűen kiszámítsuk.
b) Ha $\eta = a\xi + b$, ahol a és b tetszőleges valós számok, akkor: $D(\eta) = D(a\xi + b) = |a| D(\xi)$

Második momentum:

Az $M(\xi^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i$ illetve $M(\xi^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \cdot p_i$ mennyiséget a ξ valószínűségi változó **második momentum**ának nevezzük. Utóbbi esetben feltétel hogy a végtelen sor konvergens legyen!
Ha ξ értékkészlete véges halmaz:

$$D^2(\xi) = M\left(\xi^2\right) - (M(\xi))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i\right)^2$$

Ha ξ értékkészlete megszámlálhatóan végtelen halmaz:

$$D^2(\xi) = M\left(\xi^2\right) - (M(\xi))^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i\right)^2$$

Medián:

A ξ diszkrét valószínűségi változó **medián**ja (med(ξ)) az a valós szám amelyre teljesülnek az alábbiak:

$$P(\xi < \text{med}(\xi)) \le \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad P(\xi \le \text{med}(\xi)) \ge \frac{1}{2} \ .$$

Úgy is fogalmazhatjuk, hogy a medián az a valós szám, amelynél kisebb illetve nagyobb értékeket egyenlő valószínűséggel vesz fel a valószínűségi változó!

q-kvantilis:

Legyen $0 < q < 1$. Azt az x_q valós számot amely eleget tesz egy ξ diszkrét valószínűségi változó esetén a

$$P(\xi < x_q) \le q \quad \text{és} \quad P(\xi \le x_q) \ge q \ .$$

egyenlőtlenségeknek a ξ diszkrét valószínűségi változó **q-kvantilis**ének nevezzük.

Binomiális eloszlás

A binomiális eloszlás az ún. **Bernoulli-féle feladat**ra épül. Adott egy A esemény, valószínűsége p. Kísérleteink során megfigyeljük az A eseményt. A megfigyelésünk kétféle eredményt adhat: az A esemény bekövetkezik (valószínűsége p) vagy nem következik be (valószínűsége 1 – p). Végezzünk n számú egymástól **független** megfigyelést. Kérdés: Mi a valószínűsége, hogy az A esemény pontosan k alkalommal következik be?
Legyen a ξ valószínűségi változó az n megfigyelés során az A esemény bekövetkezéseinek a száma, és vezessük be a $p = \frac{S}{N}$ jelölést. Ekkor annak valószínűsége, hogy az A esemény n számú független megfigyelésből k-szor következik be:

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots n$$

A binomiális eloszlás jellemzői:

a) Várható érték: $M(\xi) = n \cdot p$

b) Szórás: $D(\xi) = \sqrt{np(1-p)}$

Hipergeometriai eloszlás:
Ez lényegében a visszatevés nélküli mintavétel esete. A visszatevés nélküli mintavételnél N elem között S rendelkezik egy adott tulajdonsággal. A ξ valószínűségi változó legyen a kiválasztott n elem között az adott tulajdonságúak száma. Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott n elemből pontosan k számú elem rendelkezik az adott tulajdonsággal:

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{S}{k}\binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots n$$

A hipergeometriai eloszlás jellemzői:

a) Várható érték: $M(\xi) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{\binom{S}{k}\binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}} = n \cdot \frac{S}{N} = np$

b) Szórás: $D(\xi) = \sqrt{np(1-p)\frac{N-n}{N-1}}$;

Poisson-eloszlás:

Tegyük fel, hogy olyan eseményeket figyelünk meg, amelyek az alábbi módon jellemezhetők:
a) viszonylag ritkán következnek be abban az értelemben, hogy gyakorlatilag elhanyagolható annak valószínűsége, hogy egy adott, elég rövid intervallumon belül két esemény is bekövetkezzen,
b) elég rövid intervallum esetén egy esemény bekövetkezésének valószínűsége egyenesen arányos az intervallum hosszával.
c) a bekövetkező események száma lényegében csak az intervallum hosszától függ, független az intervallum kezdőpontjától.

Rögzítsünk egy adott intervallumot, és ξ jelentse ebben az intervallumban a bekövetkezett események számát.

Az ilyen feltételekkel definiált valószínűségi változót **Poisson-eloszlású**nak nevezzük, ha lehetséges értékei 0, 1, 2, …, n,… $n \in N$, és a $\xi = k$ esemény valószínűsége:

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

ahol a $\lambda > 0$ valós szám az eloszlás paramétere.

A Poisson-eloszlás jellemzői:
a) Várható érték: $M(\xi) = \lambda$
b) Szórása: $D(\xi) = \sqrt{\lambda}$

Folytonos eloszlású valószínűségi változók

Definíció: A ξ valószínűségi változót folytonos eloszlásúnak nevezzük, ha F(x) eloszlásfüggvénye előállítható az alábbi alakban:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Tétel: (Az eloszlásfüggvény tulajdonságai)
Legyen F: $R \to R$, $F(x) = P(\xi < x)$ a ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor F(x) rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

a) Monoton növekvő, azaz ha $x_1 \le x_2$ akkor $F(x_1) \le F(x_2)$

b) Balról folytonos, azaz tetszőleges „a" helyen $F(a) = \lim_{x \to a-0} F(x)$

c) $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ és $F(+\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Tétel: (A sűrűségfüggvény tulajdonságai)
Legyen f: $R \to R$ a ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Ekkor f(x) rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

a) $f(x) \ge 0$, $x \in R$.

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Tétel: Legyen F(x) a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, f(x) pedig a sűrűségfüggvénye, legyen továbbá a, $b \in R$, $a \le b$. Ekkor

a) $P(a \le \xi < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$

b) $P(\xi < b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b)$

c) $P(a \le \xi) = \int_{a}^{\infty} f(x)dx = 1 - F(a)$.

Tétel: Legyen ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó ekkor:

a) $P(\xi = a) = 0$

b) $P(a \le \xi \le b) = P(a < \xi \le b) = P(a < \xi < b) = P(a \le \xi < b)$

c) $P(a \le \xi) = P(a < \xi)$

d) $P(\xi \le b) = P(\xi < b)$

Várható érték:
A folytonos eloszlású ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen $f(x)$, ekkor ξ várható értéke:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

ha ez az integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < \infty$. Ha az abszolút konvergenciára tett kritérium nem teljesül, akkor ξ-nek nem létezik várható értéke.

Szórás:

Tegyük fel, hogy a ξ-nek és $(\xi - M(\xi))^2$-nek létezik várható értéke. Ekkor a $(\xi - M(\xi))^2$ valószínűségi változó várható értékét a ξ valószínűségi változó szórásnégyzetének, ennek négyzetgyökét pedig a ξ **szórás**ának nevezzük, és rendre $D^2(\xi)$-vel illetve $D(\xi)$-vel jelöljük.

a) **Szórásnégyzet**: $D^2(\xi) = M\left((\xi - M(\xi))^2\right)$

b) **Szórás**: $D(\xi) = \sqrt{M\left((\xi - M(\xi))^2\right)}$

Második momentum:

Az $M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$ mennyiséget a ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó **második momentum**ának nevezzük. A szórás létezéséhez természetesen feltétel hogy ez az improprius integrál konvergens legyen!

A **szórás kiszámítása**:

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \right)^2$$

Medián: A ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó **medián**ja (med(ξ)) az a valós szám amelyre teljesülnek az alábbiak:

a) $F(\text{med}(\xi)) = \frac{1}{2}$; b) $P(\xi < \text{med}(\xi)) = P(\xi \geq \text{med}(\xi)) = \frac{1}{2}$;

c) $\int_{-\infty}^{\text{med}(\xi)} f(x) dx = \int_{\text{med}(\xi)}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}$

Folytonos egyenletes eloszlás:
Ha egy valószínűségi változó az [a,b] intervallum valamennyi értékét azonos valószínűséggel veszi fel, akkor egyenletes eloszlású. Ez egyben azt is jelenti, hogy sűrűségfüggvénye az [a, b] intervallumon konstans, azon kívül nulla.

Sűrűségfüggvénye: $$f(x)=\begin{cases}0 & \text{ha} \quad x \le a\\ \dfrac{1}{b-a} & \text{ha} \quad a < x \le b\\ 0 & \text{ha} \quad x > b\end{cases}$$

Eloszlásfüggvénye: $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha} \quad x \le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{ha} \quad a < x \le b\\ 1 & \text{ha} \quad x > b\end{cases}$$

Az egyenletes eloszlás jellemzői:

a) Várható érték: $M(\xi) = \dfrac{a+b}{2}$ b) Szórás: $D(\xi) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

<u>Exponenciális eloszlás</u>:

A ξ folytonos eloszlású valószínűségi változót λ-paraméterű ($\lambda > 0$) exponenciális eloszlásúnak nevezzük, ha

Sűrűségfüggvénye: $$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad x \le 0\\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & \text{ha} \quad 0 < x\end{cases}$$

Eloszlásfüggvénye: $$F(x)=\begin{cases}0; & \text{ha} \quad x \le 0\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{ha} \quad 0 < x\end{cases}$$

Az exponenciális eloszlás jellemzői:

a) Várható érték: $M(\xi) = \dfrac{1}{\lambda}$ b) Szórás: $D(\xi) = \dfrac{1}{\lambda}$

Az exponenciális eloszlás rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal. Ez azt jelenti, hogy ha ξ egy bizonyos A esemény bekövetkezéséig eltelt időtartamot jelöli, akkor annak valószínűsége, hogy az esemény egy bizonyos x hosszúságú intervallumon túl következik be független az intervallum kezdőpontjától. Formulákkal:

$$P(\xi \ge x) = P(\xi \ge x + y \mid \xi \ge y)$$

Annak valószínűsége, hogy egy berendezés legalább x ideig működik (ez a $P(\xi \ge x)$ valószínűség) egyenlő a $P(\xi \ge x + y \mid \xi \ge y)$ feltételes valószínűséggel, ami azt adja meg, hogy milyen valószínűséggel működik a berendezés „még” x ideig feltéve, hogy y ideig már működött.

<u>Normális eloszlás</u>:

Legyen adott az $m \in \mathbf{R}$ valós szám és a $\sigma \in \mathbf{R}^+$ (szigma) pozitív valós szám. A ξ folytonos eloszlású valószínűségi változót (m, σ) paraméterekkel adott normális eloszlásúnak nevezzük (jele N(m, σ)), ha

Sűrűségfüggvénye: $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad ; \quad x \in \mathbf{R}$$

Eloszlásfüggvénye: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt ; \quad x \in \mathbf{R}.$

A normális eloszlás jellemzői:
a) Várható érték: $M(\xi) = m$ b) Szórás: $D(\xi) = \sigma$

Standard normális eloszlás:
A ξ normális eloszlású valószínűségi változót standard normális eloszlásúnak nevezzük, ha $m = 0$ és $\sigma = 1$ (jele N(0, 1)):

Sűrűségfüggvénye: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} ; \quad x \in \mathbf{R}$

Eloszlásfüggvénye: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt ; \quad x \in \mathbf{R}.$

Transzformációs formulák:

a) $F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ b) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

(Csebisev-egyenlőtlenség)

Tegyük fel, hogy a ξ valószínűségi változónak létezik várható értéke [$M(\xi)$] és szórása [$D(\xi)$]. Ekkor :

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq t \cdot D(\xi)) \leq \frac{1}{t^2} ;$$ illetve a komplementer becslése: $$P(|\xi - M(\xi)| < t \cdot D(\xi)) > 1 - \frac{1}{t^2}$$

Nagy számok törvénye

Tegyük fel, hogy egy A esemény megfigyelésére n db független kísérletet végzünk, és e megfigyelések során az A esemény k alkalommal következik be. Ekkor az A esemény $\frac{k}{n}$ relatív gyakorisága az A esemény $P(A) = p$ valószínűségét 1-hez tetszőlegesen közeli valószínűséggel, tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon > 0$-nál kisebb hibával megközelíti, ha n elég nagy.

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p\cdot(1-p)}{\varepsilon^2 \cdot n} ;$$ illetve a komplementer becslése: $$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{p\cdot(1-p)}{\varepsilon^2 \cdot n}$$

Ha a p valószínűség nem ismert, akkor a fenti egyenlőtlenség gyengébb alakja:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4\cdot\varepsilon^2 \cdot n} ; \qquad \text{illetve:} \qquad P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{1}{4\cdot\varepsilon^2 \cdot n} .$$