Elméleti mechanika

Nagy, Károly

Elméleti mechanika

Nagy, Károly

Publication date 1993
Szerzői jog © 1993 Dr. Nagy Károly, Nemzeti Tankönyvkiadó

Dr. Nagy Károly tanszékvezető egyetemi tanár a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja

Bírálók:

DR. GÁSPÁR REZSŐ - tanszékvezető egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja

FARKAS ISTVÁN - egyetemi docens, a fizikai tudományok kandidátusa

Nemzeti Tankönyvkiadó. A kiadásért felel: dr. Ábrahám István igazgató. Raktári szám: 42282. Felelős szerkesztő: Sersovszky László. Utánnyomásra előkészítette: Palojtay Mária. Műszaki vezető: Héjjas Mária igazgatóhelyettes. Műszaki szerkesztő: Szilágyi Sándor. Grafikai szerkesztő: Démuth Ágnes. Terjedelem: 42,54 (A/5) ív. Negyedik kiadás, 1993. Nyomtatta és kötötte a Dabas-Jegyzet Kft. Felelős vezető: Marosi György ügyvezető igazgató. Munkaszám: 93-0298.

Tartalom

1. AZ ANYAGI PONT MECHANIKÁJA 1
    1. Kinematika 1
        1.1 Az anyagi pont pályája és sebessége 1
        1.2 A gyorsulás 7
        1.3 Alkalmazások 9
    2. Az anyagi pont dinamikájának általános tételei 14
        2.1 Az erő és a tehetetlen tömeg 14
        2.2 A dinamika három axiómája 15
        2.3 A tömegpont mozgásegyenlete 17
        2.4 .A Galilei-féle relativitási elv 19
        2.5 A munka 20
        2.6 Erőtér. Konzervatív és disszipatív erők 23
        2.7 Az impulzus- és erőnyomaték 29
        2.8 Megmaradási tételek 30
    3. Tömegpont mozgása különféle erők hatására 33
        3.1 Mozgás a Föld nehézségi erőterében 33
        3.2 Harmonikus rezgőmozgás 36
        3.3 Csillapított rezgőmozgás 39
        3.4 Kényszerrezgések 44
        3.5 Anharmonikus rezgések 46
        3.6 Anharmonikus kényszerrezgések 50
    4. Centrális mozgások 52
        4.1 A bolygók mozgásának dinamikai leírása 54
        4.2 Taszító centrális erő hatására mozgó tömegpont 60
    5. A mozgásegyenletek gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben 63
        5.1 Tömegpont mozgása a Földdel együttforgó vonatkoztatási rendszerben 69
    6. Kényszermozgások 74
        6.1 A függőleges síkban lengő inga mozgása 77
2. PONTRENDSZEREK MECHANIKÁJA 83
    Impulzustétel. A tömegközéppont mozgása 84
    A pontrendszer impulzus- és erőnyomatéka, Impulzusnyomaték-tétel 86
    Az energiatétel 90
    Két egymásra ható tömegpont mozgása 95
        A bolygók mozgásának pontosabb leírása 98
        Két tömegpont rugalmas ütközése 100

A rakéta mozgása ... 106
3. A MEREV TEST MECHANIKÁJA ... 110
12. A merev test kinematikája ... 110
13. A merev test általános mozgásegyenletei ... 113
14. A tehetetlenségi nyomaték tenzora ... 117
14.1 A merev test mozgási energiája ... 117
14.2 A tehetetlenségi nyomaték ... 120
14.3 A Steiner-tétel ... 123
14.4 A merev test impulzusnyomatéka ... 124
15. Merev test forgása rögzített tengely körül ... 127
16. Az egy pontjában rögzített merev test mozgása ... 131
16.1 Az erőmentes szimmetrikus pörgettyű ... 134
16.2 A súlyos szimmetrikus pörgettyű mozgása ... 138
17. A merev test forgásának stabilitása ... 146
4. A DEFORMÁLHATÓ TESTEK MECHANIKÁJA ... 149
18. A deformálható testek kinematikája ... 150
18.1 Az elmozdulás vektortere lineáris közelítésben ... 150
18.2 A deformáció tenzora ... 154
18.3 A sebességtér és a sebességtenzor ... 157
18.4 A gyorsulás ... 159
19. A testre ható erők osztályozása. A feszültségtenzor ... 160
20. A deformálható testek mozgásegyenletei ... 164
21. Megmaradási tételek ... 167
21.1 A tömegmegmaradás tétele. A kontinuitási egyenlet ... 167
21.2 Az impulzustétel ... 170
21.3 Az impulzusnyomaték-tétel ... 172
21.4 Az energiatétel ... 174
22. A deformálható testek termodinamikája ... 180
5. A RUGALMAS SZILÁRD TESTEK MECHANIKÁJA ... 183
23. Az anyagi egyenletek szilárd testekre, rugalmas deformációknál, lineáris közelítésben. ... 185
A Hooke-törvény ... 186
24. A kristályok rugalmas tulajdonságai ... 188
25. Az anyagi egyenletek izotrop szilárd testek rugalmas deformációira ... 189
26. A hőmérséklet-változással járó deformációk ... 192
27. A rugalmas szilárd testek mozgásegyenletei ... 194
28. Az egyensúlyi állapot ... 195
28.1 Nyújtás ... 197

28.2 Egyenletes összenyomás ... 199
28.3 Nyírás ... 201
28.4 Csavarás ... 203
28.5 Hajlítás ... 208
29. A rugalmas állandók közötti összefüggések homogén izotrop szilárd testekre ... 220
30. Rugalmas hullámok végtelen kiterjedésű izotrop homogén szilárd testekben ... 221
30.1 Síkhullámok ... 223
30.2 Gömbhullámok ... 229
30.3 Kompressziós és torziós hullámok ... 230
31. Rugalmas hullámok visszaverődése és törése két közeg határán ... 232
32. Felületi rugalmas hullámok ... 241
33. Hullámok szuperpozíciója. Csoportsebesség ... 247
34. Rugalmas hullámok kristályokban ... 251
35. A húr rezgései ... 253
36. A membrán rezgései ... 263
37. Kocka alakú szilárd test sajátrezgései ... 270
6. FOLYADÉKOK ÉS GÁZOK MECHANIKÁJA ... 280
A) Ideális folyadékok és gázok dinamikája ... 283
A mozgásegyenletek ... 283
Megmaradási tételek ... 285
Folyadékok és gázok egyensúlyi állapota. Hidrosztatika ... 292
Az áramlások osztályozása ... 299
A Bernoulli-egyenlet ... 301
Az örvénymentes áramlás általános törvényei ... 309
Az örvényes áramlás tulajdonságai ... 323
Síkbeli örvénymentes áramlás ... 331
Síkbeli áramlás szilárd test körül ... 346
Ideális folyadék áramlása körhenger körül ... 352
Tetszőleges keresztmetszetű henger körüli áramlás ... 360
Ideális folyadék hullámmozgása. Felületi vízhullámok ... 364
Hullámok összenyomható folyadékban. Hanghullámok ... 375
B) A súrlódó folyadékok mechanikája ... 379
A súrlódási tenzor ... 380
A súrlódó folyadékok mozgásegyenletei. A Navier-Stokes-egyenletek ... 381
Az energia disszipációja ... 384
Az áramlások hasonlósági törvénye ... 387
Réteges (lamináris) áramlás kör keresztmetszetű csőben ... 390

Folyadék mozgása egyenletesen forgó hengerek között ... 394
Gömb mozgása súrlódó folyadékban ... 397
A turbulens áramlás ... 404
A Prandtl-féle határréteg-elmélet ... 410
7. A MECHANIKA ELVEI ... 418
61. A virtuális munka elve ... 418
61.1. A kényszerfeltételek osztályozása ... 422
61.2 Néhány példa a virtuális munka elvére ... 423
62. A d'Alembert-elv ... 427
62.1 Az Atwood-féle ejtőgép ... 430
63. A Gauss-féle legkisebb kényszer elve ... 431
64. Az energiatétel kényszermozgások esetén ... 434
65. Általános koordináták. Lagrange-féle másodfajú egyenletek ... 437
66. A fizikai inga ... 446
67. Pontrendszer rezgései az egyensúlyi helyzet ... 450
közelében ... 450
67.1 Normálkoordináták. A rendszer sajátrezgései ... 452
67.2 Kényszerrezgések ... 455
68. A Hamilton-féle variációs elv ... 458
69. A variációszámítás alapfeladata ... 459
69.1 Két példa a variációszámításra ... 463
70. A Hamilton-elv és a Lagrange-féle másodfajú egyenletek ... 467
71. A kanonikus egyenletek ... 472
71.1 Néhány példa a Hamilton-módszer bemutatására ... 477
72. A kanonikus transzformációk ... 484
72.1 Példák a kanonikus transzformációkra ... 489
73. A Hamilton-Jacobi-egyenlet ... 494
73.1 Példák a Hamilton—Jacobi-egyenletre ... 499
74. A Poisson-féle zárójeles kifejezések ... 504
75. A fázistér. Liouville-tétel ... 510
76. A variációszámítás határképlete ... 514
77. Az általános variációs elv. A legkisebb hatás elve ... 518
77.1 A legkisebb hatás elve ... 522
77.2 A klasszikus mechanika és a geometriai optika kapcsolata ... 526
78. A Hamilton-elv folytonos anyageloszlású testek mechanikájában ... 528
78.1 A megfeszített húr mozgásegyenleteinek levezetése a Hamilton-elv alapján ... 535
79. Szimmetriák és megmaradási tételek ... 538

79.1 A koordináta-rendszer eltolása és az impulzus megmaradása 539
79.2 A koordináta-rendszer elforgatása és az impulzusnyomaték megmaradása 540
79.3 Az idő eltolása és az energia megmaradása 541
Befejező megjegyzések 542
8. FÜGGELÉK 546
1. A derékszögű koordináták transzformációja a koordináta-rendszer elforgatásakor 546
2. A skalár és vektor definíciója transzformációs tulajdonságuk alapján 549
3. Vektoralgebra 549
4. Vektoranalízis 550
4.1 Vektor skalár szerinti deriváltja 550
4.2 Skalár gradiense 551
4.3 Vektor divergenciája 553
4.4 Vektor rotációja 556
4.5 Vektoranalitikai integráltételek 559
5. Tenzorok 561
6. Vektortér felbontása rotáció- és divergenciamentes terek összegére 565
7. Differenciáloperátorok kifejezése görbevonalú ortogonális koordinátákban 568
8. A súrlódási tenzor henger- és gömbi polárkoordinátákban 575
9. Gauss-tétel tenzordivergenciára 578
10. A gyakrabban használt vektoralgebrai és vektoranalitikai képletek összefoglalása 579

Az ábrák listája

1. 1
2. 2
3. 3
4. 5
5. 6
6. 7
7. 11
8. 12
9. 19
10. 24
11. 25
12. 26
13. 29
14. 35
15. 56
16. 58
17. 59
18. 60
19. 61
20. 63
21. 64
22. 68
23. 68
24. 70
25. 73
26. 78
27. 85
28. 93
29. 102
30. 105
31. 111
32. 112
33. 116
35. 124
36. 126

37. 137
38. 142
39. 151
40. 155
41. 162
42. 184
43. 185
44. 197
46. 204
47. 206
48. 209
49. 210
50. 215
51. 217
52. 218
53. 234
54. 250
55. 254
56. 261
57. 264
58. 269
59. 270
60. 271
61. 277
62. 299
63. 305
64. 306
65. 313
66. 315
67. 316
68. 319
69. 321
70. 322
71. 324
72. 327
73. 336
74. 337

75. 338
76. 341
77. 342
78. 343
79. 345
80. 346
81. 354
82a. 358
82b. 359
82c. 359
83. 363
84. 372
85. 373
86. 393
87. 402
88. 414
89. 414
90. 415
91. 416
92. 417
93. 423
94. 425
95. 426
96. 431
97. 448
98. 460
99. 465
100. 480
103. 546
104. 555
105. 561
106. 570
107. 573
108. 574

1. fejezet - AZ ANYAGI PONT MECHANIKÁJA

1. Kinematika

A kinematika a testek mozgásának a leírásával foglalkozik. Nem vizsgálja azt, hogy mi hozta létre a test mozgását. A más testekkel vagy a környezettel való kölcsönhatás, továbbá ezeknek a mozgást befolyásoló hatása a dinamika körébe tartozik.

Ebben a fejezetben olyan testek mozgását tanulmányozzuk amelyek egyetlen anyagi ponttal jellemezhetőek. Az anyagi pontnak kiterjedése nincs, de tömege van. Ezért ezt az egyszerű modellt tömegpontnak is szokták nevezni. (A tömeg fogalmának bevezetését lásd a dinamikai részben.) A modell alkalmazhatóságának nem szükséges feltétele, hogy a test mérete kicsi legyen. A modell jó közelítéssel használható olyan speciális mozgásoknál, amikor a test többi pontjától eltekinthetünk. Példaként megemlítjük a bolygók Nap körüli mozgását. Az anyagi pont fogalma rendkívül hasznos azért is. mert sok fizikai mennyiség bevezetését megkönnyíti.

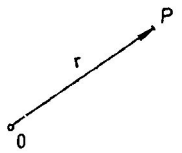
Az anyagi pont mozgásának kinematikai leírása azt jelenti, hogy megadjuk a pont helyét, sebességét és gyorsulását az idő függvényében. Ez matematikailag többféleképpen lehetséges. Az egyik eljárás a koordináta-rendszertől független tárgyalásmódot követi. Ennél a tömegpont helyét, sebességét és gyorsulását a megfelelő vektorral adjuk meg. A másik gyakran használt eljárásnál a probléma természetéhez jól alkalmazkodó koordináta-rendszerben, például derékszögű, gömbi stb. koordináta-rendszerben megadjuk e mennyiségek komponenseit az idő függvényében. Mi a következőkben mindkettőt bemutatjuk, és az alkalmazásoknál a feladat jellegéhez jobban illeszkedőt fogjuk használni.

1.1 Az anyagi pont pályája és sebessége

A vektoriális leírásnál felveszünk a térben egy pontot, az ún. vonatkoztatási pontot, és a vektorokat erre vonatkoztatjuk. Jelöljük ezt *O*-val. A tér valamely *P* pontjában levő tömegpont helyét az *O*-ból a *P*-hez húzott **r** vektorral, az ún. *helyvektorral* adjuk meg. Az anyagi pont a mozgás során folytonosan változtatja a helyét, az **r** vektor tehát folytonos függvénye az időnek. Az időben folytonosan változó

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ (1.1. egyenlet)

1. ábra -



helyvektor a térben egy folytonos görbét, a mozgás pályáját írja le. Az (1.1) tehát a pályát meghatározó egyenlet.

Ha a mozgást valamilyen koordináta-rendszerhez vonatkoztatjuk, akkor az anyagi pont helyét a *P* pont koordinátáival adjuk meg. Pl. derékszögű koordináta-rendszerben *x*(*t*), *y*(*t*), *z*(*t*) jellemzi a pont helyét. A pályát ekkor az

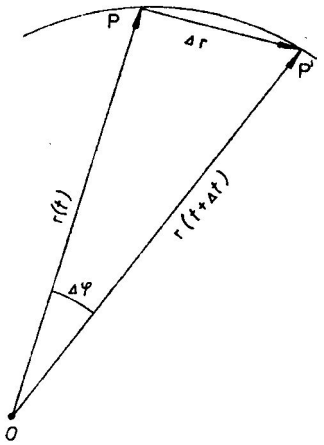
$$x = x(t),$$
$$y = y(t),$$
$$z = z(t) \quad \text{(1.2. egyenlet)}$$

egyenletrendszer írja le.

A koordináta-rendszer tengelyei irányába mutató egységvektorokat $\mathbf{e}_x$-, $\mathbf{e}_y$-, $\mathbf{e}_z$-vel jelölve,

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z. \quad \text{(1.3. egyenlet)}$$

2. ábra -



A *t* időpontban **r**(*t*) helyen levő tömegpont infinitezimálisan kicsi *Δt* idő múlva a mozgás következtében az **r**(*t*+*Δt*) helyen lesz. A két helyvektor

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \quad \text{(1.4. egyenlet)}$$

különbségét *elmozdulásvektornak* nevezzük. A pálya *P* és *P'* pontok közötti szakasza a *Δs* ívhossz. Ha a *Δt* időtartam nagyon kicsi, akkor az elmozdulás az ívhosszal helyettesíthető: |*Δ***r**| ~ *Δs*. Elemi elmozdulások esetén *Δ***r** helyett a *d***r, Δs** helyett pedig a *ds* elemi ívhosszat fogjuk használni.

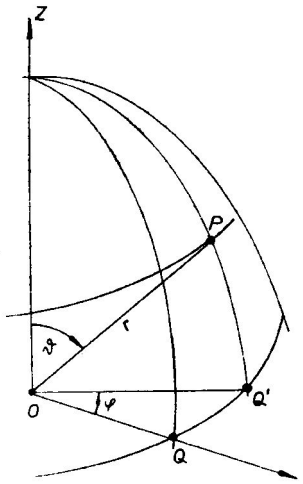
Ha a mozgás síkmozgás, akkor síkbeli polár-koordinátákkal (*r, φ*)

$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$ (1.5. egyenlet)

Térbeli polárkoordinátákat használva,

$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2.$ (1.6. egyenlet)

3. ábra -



Itt *r* a *P* pontnak az *O* ponttól mért távolsága (az ún. rádiuszvektor), *ϑ* az *OP* szakasznak a *z* tengellyel bezárt szöge, *φ* a kezdő délkörtől számított szélesség. Utóbbinak pontos értelmezése a következő. A kezdő délkör és az egyenlítő síkjának *Q* metszéspontját, valamint a *P* ponton átmenő délkör és az egyenlítő síkjának *Q′* metszéspontját összekötjük az *O* kezdőponttal. Az *OQ′* és az *OQ* egyenesek által bezárt szög a *φ* (azimut).

A sebesség fogalmát legkönnyebben az egyenesvonalú egyenletes mozgás vizsgálatából határozhatjuk meg.

Az autópálya egyenes szakaszán a két sávban egyenletesen haladó autók közül azt mondjuk sebesebbnek, amelyik megelőzi a másikat. Másként kifejezve, amelyik ugyanannyi idő alatt nagyobb utat fut be. Az egyenletes mozgás jellemzésére használhatjuk tehát az időegység alatt megtett utat. Ezt nevezzük sebességnek. Ha az autó *t* idő alatt *s* utat fut be, akkor a sebessége,

$v = \frac{s}{t}.$ (1.7. egyenlet)

A nem egyenletes mozgásoknál az (1.7) alapján értelmezett sebesség az idővel változik. Ha egy bizonyos utat elosztanánk a megtételéhez szükséges idővel, akkor az út nagysága szerint változó értékeket kapnánk. Nagyon kézenfekvő meggondolás alapján egy használható definícióhoz jutunk. Nevezetesen a sebesség annál kevésbé változik, minél kisebb időtartamok alatt megtett utat veszünk alapul. Ezért a sebességet a következőképpen definiáljuk. A tömegpont helyvektora a t időpontban legyen $\mathbf{r}(t)$, Δt idővel később $\mathbf{r}(t+\Delta t)$. Osszuk el a $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$ elmozdulásvektort a Δt időtartammal, és vegyük a $\Delta\mathbf{r}/\Delta\mathbf{t}$ hányados határértékét, midőn Δt tart zérushoz. Ezt a határértéket nevezzük az anyagi pont sebességének a t időpontban:

$$\mathbf{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \quad \text{(1.8. egyenlet)}$$

A sebesség tehát az **r** helyvektornak az idő szerinti differenciálhányadosa:

$$\mathbf{v}(t)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad \text{(1.8'. egyenlet)}$$

A mechanikában az idő szerint vett differenciálhányadost a megfelelő mennyiség jele fölé tett ponttal szoktuk jelölni. Tehát

$$v(t)=\dot{\mathbf{r}}. \quad \text{(1.8". egyenlet)}$$

Mivel az elmozdulás vektor, a sebesség is.

Az (1.8) definícióból következik, hogy

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=\dot{s}\mathbf{e}_\tau, \quad \text{(1.9. egyenlet)}$$

ahol $\mathbf{e}_\tau=\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ a pálya érintője irányába mutató egységvektor, $\dot{s}=|\mathbf{v}|=v$.

Határozzuk meg most a sebességvektor komponenseit a leggyakrabban használt koordináta-rendszerekben.

Derékszögű koordináta-rendszerben:

$$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=\dot{\mathbf{e}}_x\dot{x}+\mathbf{e}_y\dot{y}+\mathbf{e}_z\dot{z}. \quad \text{(1.10. egyenlet)}$$

A komponensek tehát

$v_x = \dot{x}, \qquad v_y = \dot{y}, \qquad v_z = \dot{z}.$

Síkmozgás esetén síkbeli polárkoordinátákat használhatunk:

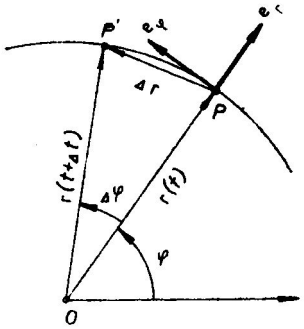
$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r,$ (1.11. egyenlet)

ahol $\mathbf{e}_r$ az origóból sugárirányban kifelé mutató egységvektor. Az erre merőleges, a ϕ növekedésének irányába mutató egységvektor legyen $\mathbf{e}_\phi$ (4. ábra).

A sebességvektor:

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r.$ (1.12. egyenlet)

4. ábra -



Számítsuk ki az $\dot{\mathbf{e}}_r$-ot. Az egységvektor értelmezéséből következik, hogy

$\mathbf{e}_r^2 = 1.$

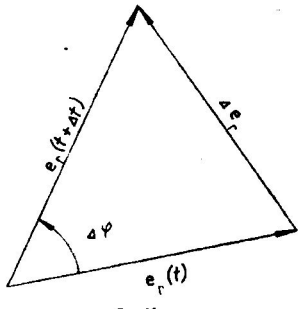
Differenciáljuk ezt az egyenlőséget az idő szerint:

$\mathbf{e}_r\dot{\mathbf{e}}_r = 0.$ (1.13. egyenlet)

Az $\mathbf{e}_r$ egységvektor idő szerinti differenciálhányadosa tehát merőleges $\mathbf{e}_r$-re, vagyis $\mathbf{e}_\phi$ irányú. Határozzuk meg $\dot{\mathbf{e}}_r$ nagyságát:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \mathbf{e}_r|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\dot{\varphi}$$ (1.14. egyenlet)

5. ábra -



Tehát

$$\dot{\mathbf{e}}_r=\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi.$$ (1.15. egyenlet)

Ezt (1.12)-be behelyettesítve,

$$\mathbf{v}=\dot{r}\mathbf{e}_r+\mathbf{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi.$$ (1.16. egyenlet)

A sebességvektor síkbeli polárkomponensei tehát

$$v_r=\dot{\mathbf{r}},\qquad v_\varphi=r\dot{\varphi}$$ (1.17. egyenlet)

Hasonló gondolatmenettel adódnak (1.11)-ből a térbeli polárkomponensek:

$$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=\dot{r}\mathbf{e}_r+r\dot{\mathbf{e}}_r=\dot{r}e+r(\dot{\vartheta}e+\sin\vartheta\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi)=\mathbf{e}_r\dot{r}+\mathbf{e}_\vartheta r\dot{\vartheta}+\mathbf{e}_\varphi r\sin\vartheta\dot{\varphi},$$ (1.18. egyenlet)

tehát

$$v_r=\dot{\mathbf{r}},\qquad v_\vartheta=r\dot{\vartheta},\qquad v_\varphi=r\sin\vartheta\dot{\varphi}.$$ (1.19. egyenlet)

1.2 A gyorsulás

A sebesség változásának a jellemzésére használjuk a gyorsulás fogalmát. Az anyagi pont gyorsulása a sebesség idő szerinti differenciálhányadosa:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}.$$ (1.20. egyenlet)

A gyorsulás − a sebesség definícióját figyelembe véve − megegyezik a helyvektor idő szerinti második deriváltjával:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}.$$ (1.21. egyenlet)

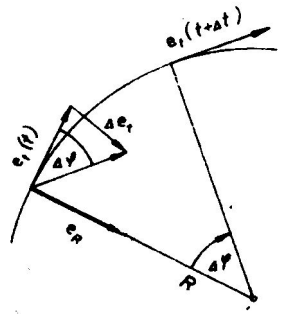
A gyorsulás is vektor. Iránya nem esik egybe a pálya érintőjének irányával. Felbontható két komponensre, amelyek közül az egyik az érintő irányába mutat, a másik erre merőleges. Határozzuk meg ezt a két összetevőt:

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\mathbf{e}_\tau) = \ddot{s}\mathbf{e}_\tau + \dot{s}\dot{\mathbf{e}}_\tau.$$ (1.22. egyenlet)

Számítsuk ki $\dot{\mathbf{e}}_\tau$-ot:

$$\dot{\mathbf{e}}_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{e}_\tau}{\Delta t}.$$ (1.23. egyenlet)

6. ábra -



$\dot{\mathbf{e}}_\tau$ iránya merőleges $\mathbf{e}_t$-re, és mint a *6. ábrából* látható, a pálya homorú oldala felé mutat. A pálya *P* pontjához simuló kör görbületi sugarát jelöljük *R*-rel, a kör középpontja felé mutató egységvektort pedig $\mathbf{e}_n$-rel. Az $\dot{\mathbf{e}}_\tau$ vektor nagysága ϕ, amely a görbületi sugárral és a $v = \dot{s}$ sebességgel a következőképpen fejezhető ki:

$$|\dot{\mathbf{e}}_\tau| = \varphi = \frac{v}{R}. \quad \text{(1.24. egyenlet)}$$

Ezt (I.21)-be helyettesítve,

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{R}\mathbf{e}_n. \quad \text{(1.25. egyenlet)}$$

Ez éppen a keresett két összetevőre való felbontás: $\ddot{s}$ az érintő irányú, v^2/R pedig az ún. normális irányú komponens.

Ha a mozgás egyenesvonalú, akkor $R = \infty$, és ezért csak az érintő irányú összetevő marad meg:

$$\mathbf{a}_{R=\infty} = \ddot{s}\mathbf{e}_t. \quad \text{(1.26. egyenlet)}$$

A másik speciális eset az egyenletes körmozgás. Ekkor $s = vt$, ezért $\ddot{s} = 0$. Most tehát a gyorsulás érintő irányú komponense zérus. Az egyenletes körmozgást végző tömegpont gyorsulása a sugár irányában a kör középpontja felé mutat.

E két speciális esettől eltekintve, a gyorsulásnak van érintő és normális irányú összetevője. Az (1.25) felbontásból látszik, hogy **a** mindig a pálya homorú oldala felé mutat.

A sebességvektorhoz hasonlóan most meghatározzuk a gyorsulás komponenseit derékszögű és polárkoordinátákban.

A derékszögű koordináta-rendszerben

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z. \quad \text{(1.27. egyenlet)}$$

Ennélfogva

$$a_x = \ddot{x}, \qquad a_y = \ddot{y}, \qquad a_z = \ddot{z}. \quad \text{(1.28. egyenlet)}$$

Síkmozgás esetén (1.19) és (1.16) alapján síkbeli polárkoordinátákban

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\mathbf{e}}_\varphi. \quad \text{(1.29. egyenlet)}$$

Mivel $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$ és $\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\mathbf{e}_r$,

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi.$$ (1.30. egyenlet)

A gyorsulás síkbeli polárkomponensei tehát:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \qquad a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}.$$ (1.31. egyenlet)

Könnyű belátni, hogy a_ϕ a következőképpen is írható:

$$a_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}).$$ (1.32. egyenlet)

A gyorsulás térbeli polárkomponenseit (1.18)-ból az idő szerinti differenciálással kapjuk. A számítás során előfordulnak az $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\phi$ egységvektorok időderiváltjai. Ezeket ki kell fejezni az egységvektorokkal. Az itt nem részletezett számolás eredménye:

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \mathbf{e}_\vartheta\dot{\vartheta} + \mathbf{e}_\varphi\dot{\varphi}\sin\vartheta,$$
$$\dot{\mathbf{e}}_\vartheta = -\mathbf{e}_r\dot{\vartheta} + \mathbf{e}_\varphi\dot{\varphi}\cos\vartheta,$$
$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\mathbf{e}_r\dot{\varphi}\sin\vartheta - \mathbf{e}_\vartheta\dot{\varphi}\cos\vartheta.$$ (1.33. egyenlet)

Ezek figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_r(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta) + \mathbf{e}_\vartheta(r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - r\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta) + \mathbf{e}_\varphi(r\ddot{\varphi}\sin\vartheta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\vartheta + 2r\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\vartheta).$$ (1.34. egyenlet)

A gyorsulás térbeli polárkomponensei tehát:

$$\mathbf{a}_r = \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta,$$
$$\mathbf{a}_\vartheta = r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - r\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta,$$
$$\mathbf{a}_\varphi = r\ddot{\varphi}\sin\vartheta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\vartheta + 2r\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\vartheta.$$ (1.35. egyenlet)

1.3 Alkalmazások

A tömegpont **v** sebessége az **r**(t) helyvektor idő szerinti differenciálhányadosa. Ha ismerjük a sebesség időfüggését és a tömegpont helyét valamilyen t_0 kezdeti időpontban, akkor a sebességfüggvény idő szerinti integráljával bármely későbbi t időpontban megadhatjuk az anyagi pont helyét:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t')dt'.$$ (1.36. egyenlet)

A későbbiekben látni fogjuk, hogy a mechanika mozgástörvénye nem közvetlenül a sebességet, hanem a gyorsulást határozza meg. A gyorsulásból viszont a sebesség integrálással kiszámítható:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(t')dt'.$$ (1.37. egyenlet)

Ezt (1.36)-ba helyettesítve, a tömegpont helyére bármely *t* időpontban a következőt kapjuk:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(t'')dt''dt'.$$ (1.38. egyenlet)

Eszerint tehát, ha a tömegpont helyét és sebességét valamely kezdeti t_0 időpontban megadjuk, és ismerjük a gyorsulást az idő függvényében, akkor (1.38) egyértelműen meghatározza a mozgás pályáját, vagyis a teljes kinematikai leírást adja. Ennek bemutatására nézzünk néhány egyszerű példát.

1.3.1 Egyenesvonalú egyenletes mozgás

Legegyszerűbb példaként tekintsük a gyorsulás nélküli mozgást:

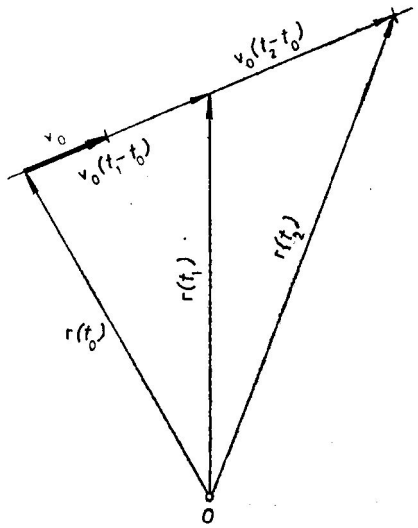
$$\mathbf{a}(t) = 0, \quad \mathbf{v} = (t) = \text{áll.} = \mathbf{v}_0.$$ (1.39. egyenlet)

Az (l.38)-ból kapjuk, hogy

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}(t_0)(t - t_0).$$ (1.40. egyenlet)

A tömegpont az $\mathbf{r}(t_0)$ ponton átmenő $\mathbf{v}_0$ irányú egyenesen mozog állandó sebességgel, vagyis egyenlő időközönként egyenlő utakat tesz meg.

7. ábra -



1.3.2 Egyenletesen gyorsuló mozgás

Vizsgáljunk olyan mozgást, amelynél a tömegpont gyorsulása állandó:

$\mathbf{a}(t) = \text{áll.} = \mathbf{a}_0$ (1.41. egyenlet)

Az (1.38)-ba behelyettesítve,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}(t_0)(t - t_0) + \mathbf{a}_0 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} dt''dt'$$ (1.42. egyenlet)

A kettős integrál egyszerűen kiszámítható és eredményül adódik, hogy

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}_0(t - t_0)^2.$$ (1.43. egyenlet)

Ez írja le az egyenletesen gyorsuló tömegpont mozgásának pályáját. Ha az $\mathbf{a}_0$ helyére a Föld vonzásából eredő **g** nehézségi gyorsulást helyettesítjük, akkor (1.43) a hajítás és a szabadesés pályáját leíró egyenletté válik. Utóbbinál a $\mathbf{v}(t_0)$ kezdősebesség zérus, ezért szabadesésnél a második tag hiányzik.

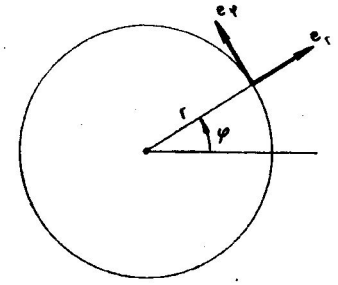
1.3.3 Egyenletes körmozgás

A tömegpont *R* sugarú körpályán mozog egyenletesen. A sebesség nagysága állandó, de iránya folytonosan változik. Most a mozgás pályája ismert, a sebességet és a gyorsulást kell meghatároznunk. A feladathoz a síkbeli polárkoordináta-rendszer használata mutatkozik célszerűnek.

Vonatkoztatási pontnak a kör középpontját választjuk. A pálya paraméteres egyenletrendszere:

$r = R = \text{áll.},$ (1.44. egyenlet)

8. ábra -



A tömegpont sebessége:

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = R\dot{\varphi}\mathbf{e}_{\varphi}.$ (1.45. egyenlet)

A sebesség nagysága $R\dot{\varphi}$, iránya merőleges a sugárra. A $\dot{\varphi}$ a szögsebesség, amely egyenletes mozgás esetén állandó. A szokásos jelöléssel,

$\dot{\varphi} = \omega = \text{áll.}$ (1.46. egyenlet)

Ebből

$\varphi = \omega t + \omega_0.$ (1.47. egyenlet)

A gyorsulás

$$\mathbf{a} = R\omega\dot{\mathbf{e}}_{\varphi}.$$

Mivel

$$\dot{\mathbf{e}}_{\varphi} = -\dot{\varphi}\mathbf{e}_{r},$$

ezért

$$\mathbf{a} = -R\,\omega^{2}\mathbf{e}_{r}.$$ (1.48. egyenlet)

A gyorsulás nagysága $R\omega^2$, iránya a sugár mentén a kör középpontja felé mutat. A sebesség nagyságával kifejezve,

$$a = \frac{v^2}{R}.$$ (1.49. egyenlet)

Az egyenletes körmozgásnál az ω szögsebesség a T keringési idővel az

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$ (1.50. egyenlet)

kapcsolatban van. A

$$\nu = \frac{1}{T}$$ (1.51. egyenlet)

az időegység alatti körülfutások száma, az ún. fordulatszám, amelyet *frekvenciának* is szoktak nevezni. (1.50) és (1.51) egybevetéséből adódik, hogy

$$\omega = 2\pi\nu.$$ (1.52. egyenlet)

Az ω szögsebesség a ν frekvencia 2π-szerese, ezért körfrekvenciának is hívják. A nem egyenletes körmozgásnál a $\dot{\varphi}$ szögsebesség nem állandó, $\varphi = \varphi(t)$ az időnek tetszőleges függvénye.

2. Az anyagi pont dinamikájának általános tételei

2.1 Az erő és a tehetetlen tömeg

A mozgások kinematikai leírásánál nem vizsgáltuk azt az okot, amely a mozgást létrehozza, vagy a test mozgásállapotát megváltoztatja. A testek mozgásának dinamikai elméletétől azt várjuk, hogy az állapotváltozás pontos törvényét, az ún. mozgástörvényt megadja, és ennek alapján a mozgás teljes dinamikai leírását is. Ehhez mindenekelőtt a mozgásállapot fogalmát kell definiálnunk. Az anyagi pont mozgás-állapotát a helyének és sebességének a megadásával jellemezzük.

A mozgásállapot megváltoztatását más testeknek vagy a környezetnek a hatása okozza. Ezt a hatást az erő fogalmával vesszük figyelembe. Röviden azt mondjuk, hogy azért változik meg a test mozgásállapota, mert erő hat rá. Az erő fogalma nem tisztán mechanikai, hanem általános fizikai fogalom. Két test gravitációs erőt fejt ki egymásra. Az elektromos tér erővel hat a töltött testekre. Ha egy testet deformálni akarunk, erőt kell kifejtenünk. A felsorolást folytathatnánk a fizika különböző fejezeteiből vett példákkal. Az erő fogalma végigvonul az egész fizikán. Sőt a minden-napi életben is igen széles körben használjuk. Az emberben az erő fogalma az izom-erőn keresztül alakult ki. Pl. ha terhet emelünk, vagy az autót megtoljuk, izmaink erőltetését érezzük.

A sok különféle eredetű erőre pontos fogalmi definíciót megadni igen nehéz fel-adat lenne, ezért helyette a mérési eljárást adjuk meg. A fizikában egyébként is olyan fogalmakat és mennyiségeket használunk, amelyek mérhetőek. A mérési eljárás megadása pótolja a pontos fogalmi definíciót.

A mechanikában az erő mérésére felhasználhatjuk azt a tulajdonságát, hogy megváltoztatja a testek mozgásállapotát, vagyis gyorsulást eredményez. Az erő mérését tehát a gyorsulás mérésére vezethetjük vissza. Mi ehelyett a mindennapi életben is jobban elterjedt eljárást választunk. Nevezetesen azt, amely a mérendő erőnek más erővel való összehasonlításán alapszik. A rugalmas testek (pl. rugók) megnyúlása − egy bizonyos határon belül − a tapasztalat szerint arányos a húzóerővel. Ilyenkor a testben a nyújtás hatására ún. rugalmas erő keletkezik, amely a megnyúlással arányos és ellentétes irányú. Ez a rugalmas erő tart egyensúlyt a mérendő húzóerővel. A rugalmas erőnek a rugó kitérésével való arányosságát használjuk fel az erő mérésére. Ezek az eszközök a dinamométerek vagy rugós erőmérők. A rugó mellé erősített beosztáson a kitérítéssel arányos erő olvasható le. Az erő mértékegysége az SI-rendszerben a newton (jele: N).

Az erő hatását meghatározott irányban fejti ki, ezért a nagyságán kívül iránya is van. Az erő tehát vektor. Jelölésére az **F** betűt használjuk. Több erő eredő hatása a vektorok összeadási szabálya szerint jön létre.

Ha valamely testre erő hat, megváltozik annak a mozgásállapota. Az anyagi pont esetében ez azt jelenti, hogy megváltozik a helye és a sebessége; tehát gyorsulással mozog. Természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy adott erőhatás milyen gyorsulást eredményez? A tapasztalat szerint a gyorsulás a ható erővel egy irányú és arányos vele:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m}\mathbf{F},$$ (1.53. egyenlet)

ahol *m* a testre jellemző fizikai mennyiség. Azt a tapasztalati tényt fejezi ki, hogy adott **F** erő a különböző testeket más és más értékre gyorsítja. Az ugyanazon anyagból levő testek közül a nagyobbak vagy nehezebbek gyorsulása kisebb, mint a könnyebbeké. Az *m* tehát a testeknek gyorsítással szembeni ellenállását vagy szakkifejezéssel élve, a tehetetlenségét jellemzi. Ezért *m*-et a test *tehetetlen tömeg*ének nevezzük. A tehetetlen tömeg a később pontosan megfogalmazott tehetetlenségnek a mértéke. A relativitáselmélet óta tudjuk, hogy a tömeg a testben tárolt energiával arányos.

Az (1.53) összefüggés közelítő jellegű, csak olyan mozgásokra érvényes, amelyeknek a sebessége kicsi a fény vákuumbeli sebességéhez képest. A pontosabb vizsgálatokból ugyanis kiderült, hogy a tehetetlen tömeg nem állandó, hanem függ a test sebességétől. Ezért a tömeg meghatározására az (1.53)-tól független eljárást választunk.

Gondoljunk el két testet, amelyek ütköznek egymással. Az ütközés előtti sebességük legyen $\mathbf{v}_1$ illetve $\mathbf{v}_2$. Az ütközés során megváltozik a sebességük $\mathbf{v}_1'$-, illetve $\mathbf{v}_2'$-re. A tapasztalat szerint mindig érvényes a következő egyenlőség:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2', \quad \text{(1.54. egyenlet)}$$

ahol m_1 az első, m_2 a második testre jellemző mennyiség, az első, illetve a második test tehetetlen tömege. Ha az ütközés egy egyenes mentén történik, akkor a sebességvektorok helyett a nagyságuk vehető:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'. \quad \text{(1.54'. egyenlet)}$$

Legyen az első test az ütközés előtt nyugalomban, $v_1 = 0$, és tömegét válasszuk egységnyinek, $m_1 = 1$ (kg). Az (1.54')-ből az m_2 tömeg egyszerűen kifejezhető a sebességekkel:

$$m_2 = \frac{v_1'}{v_2 - v_2'}\,(\mathrm{kg}). \quad \text{(1.55. egyenlet)}$$

A sebességek megmérésével m_2 az (1.55)-ből kiszámítható. A későbbiekből kiderül, hogy az így értelmezett tehetetlen tömeg az (1.53) képlet érvényességi határán belül megegyezik az ottani *m*-mel. A tömeg egysége az SI-mértékrendszerben a kilogramm (kg).

2.2 A dinamika három axiómája

A mechanika három alaptételét Newton fogalmazta meg, de az elsőt, az ún. tehetetlenség elvét Galilei ismerte fel elsőként.

2.2.1 Első axióma: A tehetetlenség elve

Az eredeti megfogalmazás szerint: minden test megmarad nyugalmi helyzetében vagy egyenesvonalú egyenletes mozgásában, amíg külső erő nem hat rá. A testeknek azt a tulajdonságát, hogy külső hatás nélkül megtartják nyugalmi, vagy egyenesvonalú egyenletes mozgási állapotukat, *tehetetlenségnek,* az első axiómát pedig ezért a tehetetlenség elvének nevezzük.

Ez a felismerés a több mint kétezer évig uralkodó arisztotelészi természetfilozófiával szemben igen nagy jelentőségű volt, mert az előbbi a testek természetes állapotának a nyugalmat tekintette, a tehetetlenség elve szerint viszont az egyenesvonalú egyenletes mozgás a természetes állapot, és külső hatás a mozgásállapot megváltoztatásához kell, nem pedig annak fenntartásához. Galileinek ez a nagyszerű felismerése szabadította meg a természetkutatást a skolasztika béklyóitól és tette lehetővé a tudományos megismerés új utakon való megindulását, amely a tizenhetedik századtól napjainkig bámulatos eredményekkel gazdagította az emberiséget.

A tehetetlenség elvének fenti megfogalmazása általánosságban nem igaz. Például a gyorsuló vasúti kocsiban a padlóra helyezett golyó elmozdul a mozgásiránnyal szemben. Vagy az éles kanyarban száguldó gépkocsiban az utasok a pálya külső oldala felé dőlnek. Itt tehát nem érvényesül a tehetetlenség elve.

A pontos megfogalmazáshoz meg kell adnunk azokat a vonatkoztatási rendszereket, amelyekben az elv igaz. A tapasztalat szerint vannak ilyen rendszerek. Például az állócsillagok helyéhez rögzített rendszer ilyennek tekinthető. Éppen ezért a tehetetlenség elvét úgy fogalmazzuk meg, hogy azzal kijelöljük ezeket a speciális vonatkoztatási rendszereket. Az első axiómának ez a pontos megfogalmazása így hangzik: vannak olyan vonatkoztatási rendszerek, amelyekben a testek mindaddig megtartják nyugalmi vagy egyenesvonalú egyenletes mozgási állapotukat, amíg külső erő nem hat rájuk. Ezeket a vonatkoztatási rendszereket *inerciarendszereknek* nevezzük. Az inerciarendszereknek a fizikában azért van kitüntetett szerepük, mert az alaptörvények a megszokott formában ezekben a vonatkoztatási rendszerekben érvényesek, így a mechanika három axiómája is.

2.2.2 Második axióma: A mozgástörvény

A mechanika alapfeladata annak megállapítása, hogyan változik meg a testek mozgásállapota külső erő hatására. Ezt az ún. mozgástörvény szabályozza, amelyet Newton második axiómája fogalmaz meg. Ehhez Newton nyomán definiálunk egy új fizikai mennyiséget, a tömegpont *impulzusát.* Az *m* tömegű anyagi pont impulzusán a tehetetlen tömegnek és a sebességének a szorzatát értjük, és **p**-vel jelöljük:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$ (1.56. egyenlet)

A definícióból következik, hogy az impulzus is vektor. Ezek után megfogalmazzuk a második axiómát: az *m* tömegű anyagi pont az erő hatására úgy mozog, hogy az impulzus idő szerinti differenciálhányadosa egyenlő a ható erővel. Képletben:

$$\frac{d}{dt}mv = \mathbf{F}.$$ (1.57. egyenlet)

Másként írva:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}.$$ (1.57'. egyenlet)

Eszerint az erő hatása az impulzus megváltoztatásában nyilvánul meg. A vizsgálataink körébe tartozó mozgásoknál az *m* tehetetlen tömeg általában állandó, ezért az impulzus idő szerinti deriváltja,

$\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a}.$ (1.58. egyenlet)

Ebben az esetben (1.57) a következőképpen is írható:

$m\mathbf{a} = \mathbf{F}.$ (1.59. egyenlet)

A relativitáselméletből tudjuk, hogy a tehetetlen tömeg függ a sebességtől, és ez a függés a vákuumbeli fénysebességet megközelítő mozgásoknál már érezhetővé válik. Ezért az (1.59) képlet csak olyan mozgásokra használható, amelyek sebessége kicsi a fény vákuumbeli sebességéhez képest. A mechanika körébe tartozó mozgások általában ilyenek, ezért (1.57) helyett nyugodtan használhatjuk az (1.59) ún. nemrelativisztikus mozgásegyenletet. A mechanika relativisztikus általánosításával Elektrodinamika című könyvünk utolsó fejezetében foglalkozunk.

2.2.3 Harmadik axióma: A kölcsönhatás törvénye

Az erő fogalmának a bevezetésénél abból a megfigyelésből indultunk ki, hogy a test mozgásállapota azért változik meg, mert egy másik test vagy a környezet hatással van a vizsgált testre és arra erőt fejt ki. A tapasztalat szerint ez a hatás kölcsönös, vagyis a kiszemelt test is hat a környezetében levő testekre. A harmadik axióma ennek a kölcsönhatásnak a törvényét fogalmazza meg. Eszerint: ha valamely *A* test erőt fejt ki a *B* testre, akkor a *B* ugyanolyan nagyságú, de ellentétes irányú erővel hat az *A*-ra.

Jelöljük az előbbi erőt $\mathbf{F}_{BA}$-val, utóbbit $\mathbf{F}_{AB}$-vel. A kölcsönhatás törvénye képlettel kifejezve így hangzik:

$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}, \qquad \text{vagy} \qquad \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA} = 0.$ (1.60. egyenlet)

A harmadik axiómának a pontrendszereknél van jelentősége. Ugyanis a rendszer egye^ pontjai között ható ún. belső erők eredője (1.60) alapján zérus:

$$\sum_{i} \sum_{\substack{k \\ i \neq k}} \mathbf{F}_{ik} = 0.$$

2.3 A tömegpont mozgásegyenlete

Az anyagi pont dinamikájának az alapfeladata a következőképpen fogalmazható meg. Adva van egy *m* tömegű anyagi pont, amelyre ismert **F** erő hat. Az a kérdés, hogyan mozog a tömegpont az erő hatására. Erre a kérdésre a második axiómában megfogalmazott

$\frac{d}{dt} mv = \mathbf{F}.$ (1.61. egyenlet)

mozgásegyenlet megoldásával adhatjuk meg a választ. A tulajdonképpeni feladat tehát az (1.61) differenciálegyenlet megoldása. Keressük azt az **r** = **r**(*t*) folytonos és differenciálható függvényt, amely az (1.61) mozgásegyenletet kielégíti. A mechanikában előforduló erők általában az időnek, a helynek és a tömegpont sebességének a függvényei:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t,\ \mathbf{r},\ \dot{\mathbf{r}}).$$ (1.62. egyenlet)

Ha olyan mozgásokkal van dolgunk, amelyeknél a tehetetlen tömeg állandó, akkor a megoldandó mozgásegyenlet:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t,\ \mathbf{r},\ \dot{\mathbf{r}}).$$ (1.63. egyenlet)

Olyan mozgásokat, ahol a tömeg függ az időtől, csak a relativisztikus dinamikában vizsgálunk, ezért az ún. klasszikus mechanikában végig az (1.63) mozgásegyenletet használjuk.

Konkrét feladatok megoldásánál az (1.63) vektoregyenletet célszerű a problémához jól illeszkedő koordináta-rendszerben felírni. Például a derékszögű koordinátákban a megoldandó egyenletek az (1.63) komponensei:

$$m\ddot{x} = F_x(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$
$$m\ddot{y} = F_y(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$
$$m\ddot{z} = F_z(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$ (1.64. egyenlet)

Az. (1.64) mozgásegyenletek másodrendű, közönséges differenciálegyenletek. Mi ezeknek az. ún. általános megoldásait keressük. Utóbbiak hat tetszőleges integrálási állandót tartalmaznak. így az adott **F**(*t*, **r**, $\dot{\mathbf{r}}$) erőnek megfelelő megoldások hat paraméteres seregét kapjuk. A konkrét fizikai feladatnak ezek közül csak egy a megoldása, éspedig az, amelyik a tömegpont kezdeti állapotából indul ki. A mechanikai feladat egyértelmű megoldásához tehát meg kell adnunk a tömegpont kezdeti állapotát, *t* = 0időpontbeli helyét és a sebességét: $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$; $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$. Komponensekben:

$$x_0 = x(0), y_0 = y(0), z_0 = z(0);$$
$$v_{0x} = \dot{x}(0), v_{0y} = \dot{y}(0), v_{0z} = \dot{z}(0).$$ (1.65. egyenlet)

Ez a hat kezdeti feltétel egyértelműen rögzíti a hat integrálási állandó értékét. A kezdeti feltételek és az erő megadásával az (1.69), illetve az (1.64) mozgásegyenletekből egyértelműen kiszámítható a tömegpont mozgásállapota, tehát a helye és a sebessége bármely későbbi időpontban.

A konkrét mozgásokra (pl. a bolygók mozgására) való alkalmazás a tapasztalattal megerősítette az elmélet következtetéseit. Ez olyan nagyszerű tudományos teljesítmény volt, amilyenre példát ezt megelőzően nem találunk a tudománytörténetben. Emiatt volt igen nagy hatása a természetkutatásra még a fizikán kívüli területeken is. Nem véletlen, hogy a mechanika elméleti módszereit a tudományok igen széles körében próbálták alkalmazni. Világképformáló szerepe is óriási volt. Ismeretes, hogy a mechanisztikus materialista filozófiának az elméleti mechanika volt a természettudományi háttere. A matematikai módszerek fizikai alkalmazása az elméleti mechanikában valósult meg először, és gyümölcsözően hatott vissza a matematika fejlődésére is. A kor legnagyobb matematikusai foglalkoztak az elmélet továbbfejlesztésével, így születtek a mechanika elvei,

amelyek a Newton-féle tárgyalással egyenértékű, de matematikai szempontból elegánsabb megfogalmazásait adják az alaptörvényeknek. Ezeket a VII. fejezetben ismertetjük.

2.4 .A Galilei-féle relativitási elv

Az első axióma fenti megfogalmazása az inerciarendszerek létezését posztulálja, amikor arra a kijelentésre helyezi a hangsúlyt, hogy *vannak* olyan vonatkoztatási rendszerek, amelyekben igaz a tehetetlenség elve. A második axiómában megfogalmazott mozgástörvény és a mechanika minden alapegyenlete inerciarendszerben érvényes. Könnyű belátni, hogyha van egy inerciarendszer, akkor a hozzá képest egyenes-vonalú egyenletesen mozgó vonatkoztatási rendszerek is azok.

Gondoljunk el egy inerciarendszert, amelyet *K*-val jelölünk, és egy ehhez képest állandó **V** sebességgel mozgó másik, *K′* rendszert. Tegyük fel, hogy a *t* = 0 időpontban a két rendszer egybeesett; az *O,* illetve *O′* vonatkoztatási pontok *t* = 0-kor fedik egymást, *t* idő alatt az *O′* elmozdult *O*-hoz képest **Vt** vektorral. Valamely *P* pontnak a helyét mindkét rendszerben megadhatjuk az **r**, illetve az **r'** helyvektorokkal. A *K* és *K′* rendszerben mért **r**, illetve **r'** helyvektorok egymással az

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t \quad \text{(1.66. egyenlet)}$$

kapcsolatban állnak (9. ábra). Az idő mindkét rendszerben ugyanaz:

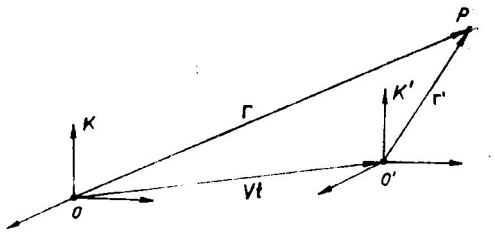
$$t = t'. \quad \text{(1.66'. egyenlet)}$$

Ebből az idő szerinti első és második differenciálással megkapjuk a két rendszerben mért sebességek és gyorsulások közötti kapcsolatot:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}, \quad \text{(1.67. egyenlet)}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}' \rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}'. \quad \text{(1.68. egyenlet)}$$

9. ábra -



A tömegpont gyorsulása a két rendszerben tehát ugyanaz. Az erő − mint korábban mondottuk − általában az időnek, a helynek és a sebességnek a függvénye. Ha az (1.66), (1.66') és (1.67) transzformációk az erőt változatlanul hagyják, vagyis

$\mathbf{F}' = \mathbf{F},$ (1.69. egyenlet)

akkor a mechanika

$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ (1.70. egyenlet)

mozgásegyenlete változatlanul érvényes a K' rendszerben is:

$m'\mathbf{a}' = \mathbf{F}'.$ (1.71. egyenlet)

Ugyanis a tömeg is invariáns a fenti transzformációval szemben. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy a tehetetlenség elve a *K'*-ben is teljesül, tehát az is inerciarendszer, mert ha erőhatás nincs (**F'**=0), akkor **a'** = 0, a tömegpont vagy nyugalomban van, vagy egyenesvonalú egyenletes mozgást végez. Mivel a mozgástörvény mindkét vonatkoztatási rendszerben ugyanolyan alakú, ebből az következik, hogy a két rendszer teljesen egyenértékű a mechanika szempontjából. Egyik sincs kitüntetve a másikhoz képest. Ez a felismerés, hogy az egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végző rendszerekben a mechanikai jelenségek ugyanúgy mennek végbe, Galilei nevéhez fűződik. Ezért az inerciarendszereknek a mechanika szempontjából való egyenértékűségét *Galilei-féle relativitási elvnek,* az (1.66), (1.66') transzformációt pedig *Galilei-transzformációnak* nevezzük. Ez a transzformáció teremt kapcsolatot egy pontszerű esemény két inerciarendszerbeli helye és időpontja között. Az inerciarendszerek egyenértékűségét másképpen úgy fejezhetjük ki, hogy a mechanika mozgásegyenlete invariáns a Galilei-transzformációval szemben.

A pontosabb megértés érdekében visszatérünk az erők invariáns voltát kifejező (1.69) egyenlethez. Ha a vizsgált tömegpontra ható erő az ugyancsak tömegpontoknak tekintett más testektől származik, akkor ez az erő általában a pontok egymáshoz viszonyított, ún. relatív távolságaitól függ. Utóbbiak viszont nem változnak meg, ha egyik inerciarendszerről egy másikra térünk át. Következésképpen az erők is invariánsak maradnak.

Az inerciarendszerek egyenértékűsége általánosabb annál, amit a Galilei-féle relativitási elv kifejez. A relativitás elmélete szerint a fizika törvényei minden inerciarend-szerben ugyanolyan alakúak. Ugyancsak a relativitáselméletből tudjuk, hogy az idő − a Galilei-transzformációval ellentétben − a különféle inerciarendszerekben nem azonos, tehát az is transzformálódik, ha egyikről egy másikra áttérünk. Ezért a Galilei-transzformáció nem a teljesen pontos kapcsolatot adja meg egy pontszerű esemény két inerciarendszerbeli helye és időpontja között. Viszont jó közelítés abban az esetben, ha a mozgások sebessége kicsi a vákuumbeli fénysebességhez képest.

A nagy sebességgel történő mozgások dinamikáját a Newton-féle mozgásegyenlet általánosításával adódó ún. relativisztikus dinamika mozgástörvénye írja le.

2.5 A munka

Ha *m* tömegű anyagi pontra állandó **F** erő hat és azt elmozdítja egy egyenes mentén **s** szakasszal, akkor az erő

$A = \mathbf{F}\,\mathbf{s}$ (1.72. egyenlet)

munkát végez. A munka az erőnek és az elmozdulásnak a skaláris szorzata. Ha az erő helytől függő, vagy a mozgás pályája nem egyenes, akkor (1.72) alapján az elemi munkát tudjuk definiálni az erőnek és a *d***r** elmozdulásnak a skaláris szorzataként:

$\delta A = \mathbf{F}\,d\mathbf{r}.$ (1.73. egyenlet)

A *d***r** olyan elemi elmozdulást jelent, amely alatt az erő állandónak tekinthető. A pálya két pontja *(A és B)* közötti véges szakaszon végzett munkát úgy számítjuk ki, hogy a pályát elemi $d\mathbf{r}_i$ elmozdulásokra bontjuk és az ezeken végzett munkákat összegezzük:

$$\sum_i \delta A_i = \sum_i \mathbf{F}_i\,d\mathbf{r}_i.$$ (1.74. egyenlet)

A felosztást minden határon túl finomítva, az (1.74) összeg egy véges értékhez tart, nevezetesen az $A = \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F}\,d\mathbf{r}$ (1.75. egyenlet)

integrálhoz. Ez a pálya *AB* szakaszán végzett munka definíciója. A fenti integrálnak csak akkor van értelme, ha megadjuk a pálya egyenletét, amelyen a tömegpont eljut az *A*-ból a *B*-be.

Az egyik lehetséges eljárás az, hogy az **r** helyvektort az *s* ívhossz függvényeként adjuk meg:

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$

így az (1.75) integrál már kiszámítható:

$$A = \int_{s_A}^{s_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}(s))\frac{d\mathbf{r}}{ds}ds.$$ (1.76. egyenlet)

Mivel $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ a pálya érintője irányába mutató $\mathbf{e}_t$ egységvektor, az (1.76) így is írható:

$$A = \int_{s_A}^{s_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}(s))\mathbf{e}_t ds = \int_{s_A}^{s_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}(s))ds,$$

ahol F_t az erőnek a pálya érintője irányába eső összetevője.

Ha a pálya egyenletét derékszögű koordinátákban adjuk meg az ívhossz függvényeként:

$$x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s),$$ (1.77. egyenlet)

akkor a munka (1.76) kifejezése a következőképpen írható:

$$A = \int_{s_A}^{s_B} \mathbf{F}_x\left[x(s), y(s)z(s)\right]\frac{dx}{ds}ds + \int_{s_A}^{s_B} \mathbf{F}_y\left[x(s), y(s)z(s)\right]\frac{dy}{ds}ds + \int_{s_A}^{s_B} \mathbf{F}_z\left[x(s), y(s)z(s)\right]\frac{dz}{ds}ds.$$ (1.78. egyenlet)

A másik gyakran használt eljárásnál a pálya egyenletét olyan alakban írjuk fel, amelyben két koordináta (pl. az *y* és a *z)* a harmadiknak (az x-nek) a függvénye. Kiindulunk a munka (1.75) definíciójából, és az integrál mögötti skaláris szorzatot a vektorkomponensek szorzatösszegeként írjuk:

$$A = \int_{x_A}^{x_B} \mathbf{F}_x\left[x, y(x), z(x)\right]dx + \int_{y_A}^{y_B} \mathbf{F}_y\left[x(y), y, z(y)\right]dy + \int_{z_A}^{z_B} \mathbf{F}_z\left[x(z), y(z)z\right]dz.$$ (1.79. egyenlet)

Az első integrálban az *x*, a másodikban az *y*, a harmadikban a *z* független változó, és a másik kettő ezek függvénye.

Az (1.75) definícióból következik, hogy a munkavégzés a pályaszakasz kezdő- és végpontján kívül általában függ attól a pályától is, amelyen a tömegpont *A*-ból a *B*-be jut.

A munka (1.75) kifejezése az (1.63) mozgásegyenlet felhasználásával nagyon nevezetes alakba írható:

$$A = \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \int_{r_A}^{r_B} m\ddot{\mathbf{r}}\,d\mathbf{r} = \int_{t_A}^{t_B} m\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}\,dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right)dt = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2.$$ (1.80. egyenlet)

Az $\frac{1}{2}mv^2$ kifejezést az *m* tömegű anyagi pont *mozgási (kinetikus) energiájának* nevezzük, és E_k-val jelöljük:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$ (1.81. egyenlet)

Az erő által végzett munka (1.80) szerint a tömegpont mozgási energiájának a növekedésével egyenlő. Ezt az összefüggést hívjuk *munkatételnek.*

Az erő hatása megnyilvánul egyrészt abban, hogy gyorsulással mozgatja a tömeg-pontot, megváltoztatva ezáltal annak sebességét és (1.81) alapján a mozgási energiáját; más szempontból vizsgálva a jelenséget, az erő munkát végez és ezzel fedezi a mozgási energia növekedését.

A munka mértékegysége az erő és a hosszúság mértékegységének a szorzata:

$1\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}=1\,\mathrm{joule}.$

Másrészt, 1 joule= 1 wattszekundum.

Az időegység alatt végzett munka a teljesítmény, amelynek egysége a watt.

Az (1.80) munkatételből következik, hogy az energia mértékegysége a munkáéval azonos, tehát ez is joule.

2.6 Erőtér. Konzervatív és disszipatív erők

Eddig a tömegpontra ható erőről csak azt mondottuk, hogy az függhet az időtől, a tömegpont helyétől és sebességétől. Ha az erőre konkrét feltevéseket teszünk, akkor újabb fogalmakhoz és hasznos felismerésekhez juthatunk. Először tegyük fel, hogy az anyagi pontra ható erő csak az időnek és a helynek a függvénye, **F**=**F**(*t*, **r**) = **F**(*t*; *x, y, z).* Ez azt jelenti, hogy a tér minden pontjához egy bizonyos időpontban meghatározott erő tartozik. Ezt a fizikai tulajdonsággal rendelkező teret *erőtérnek* nevezzük. Sztatikusnak hívjuk az olyan erőtereket, amelyek időben állandóak, tehát az erő csak a helytől függ: **F** = **F**(**r**) = **F**(x, *y, z).*

A fizikában nagyon fontos szerepük van az olyan sztatikus erőtereknek, amelyek egy *V*(**r**)=*V(x, y, z)* skalárfüggvény negatív gradienseként állíthatók elő:

$\mathbf{F}=-\operatorname{grad} V(\mathbf{r}).$ (1.82. egyenlet)

Az ilyen erőket konzervatív erőknek, az erőteret *konzervatív erőtérnek* hívjuk. A *V*(**r**) skalárfüggvény az erőtér *potenciálja.* Mivel a grad *V* rotációja azonosan zérus, (1.82)-ből következik, hogy

$\operatorname{rot}\mathbf{F}=0.$ (1.82'. egyenlet)

A konzervatív erőtér tehát rotációmentes.

Az erő és a potenciál közötti (1.82) összefüggés a *V*(**r**) potenciált csak egy additív állandó erejéig határozza meg. Ugyanis a *V*(**r**)-hez egy V_0 állandó hozzáadható anélkül, hogy az erő megváltoznék, mert az állandó gradiense zérus. Ezt a körülményt felhasználjuk arra, hogy a potenciál értékét egy tetszőleges pontban előírjuk, pl. a végtelen távoli pontban zérusnak vesszük. Ezáltal V_0 állandó értéke már meghatározott lesz, és így a *V*(**r**) potenciál egyértékű függvénye a helynek.

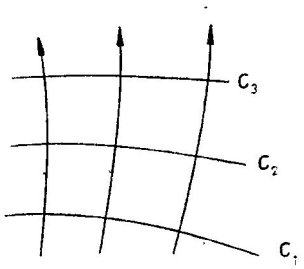
Az azonos potenciálú helyek a térben egy felületen helyezkednek el. Ennek az ún. ekvipotenciális felületnek az egyenletét a

$V(\mathbf{r})=C$ (1.83. egyenlet)

összefüggés adja meg. A *C* helyére különböző állandó értékeket helyettesítve, az ekvipotenciális felületek seregét kapjuk. Mivel a grad *V* vektor az (1.83) felületre merőleges, az erő a felület minden pontjában merőleges az ekvipotenciális felületre. Ha a különböző ekvipotenciális felületek

ortogonális trajektóriáit berajzoljuk, akkor ezeknek a vonalaknak a csökkenő potenciál felé mutató érintői adják a tér megfelelő pontjaiban az erő irányát. Ha megállapodunk abban, hogy az ortogonális trajektóriákat olyan sűrűn rajzoljuk, hogy az ekvipotenciális felület egységnyi darabján éppen annyi vonal menjen át, mint ott az erő nagysága, akkor ezekkel a vonalakkal az erőteret irány és nagyság szerint szemléltethetjük. Az így megszerkesztett ortogonális trajektóriák az *erővonalak.*

10. ábra -



A következőkben bemutatunk néhány példát a konzervatív erőtérre.

2.6.1 A Föld nehézségi erőtere

Mindennapi tapasztalat, hogy a Föld közelében elejtett testek szabadon esnek a Föld felé, állandó gyorsulással. Ez annak a következménye, hogy a Föld állandó erővel vonzza a felszíne közelében levő testeket. Ezt az erőt nehézségi erőnek nevezzük. A tapasztalat szerint a nehézségi erő arányos a **g** nehézségi gyorsulással. A testre jellemző, tömeg dimenziójú arányossági tényező a test súlyos tömege:

$\mathbf{F}_g = m_s \mathbf{g}$ (1.84. egyenlet)

A gyakorlati életben, amikor a testek tömegét mérleggel mérjük, akkor mindig a Földnek a testre kifejtett vonzóerejét mérjük, és ebből (1.84) alapján a súlyos tömeget kapjuk meg.

Semmi okunk sincs feltételezni, hogy a korábban bevezetett tehetetlen tömeg és a most értelmezett súlyos tömeg egyenlő egymással. Előbbi a gyorsítással szembeni ellenállás, a tehetetlenség mértéke, utóbbi pedig a Földnek a testre kifejtett nehézségi erejét határozza meg (1.84) szerint. Eötvös Loránd híres torziós ingás kísérlete mutatta ki, hogy a két tömeg 10^{-8} pontosságig megegyezik egymással. Renner János − Eötvös tanítványa − a pontosságot egy nagyságrenddel növelte. Ezt az amerikai Dicke 1961-ben 10^{-11}-re, az orosz Braginszkij 1971-ben 10^{-12}-re javította. Nyugodtan mondhatjuk tehát, hogy a testek kétféle tömege azonos.

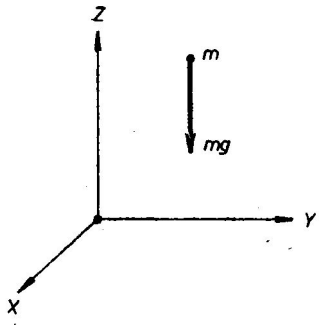
A *g* nehézségi gyorsulás − amely ugyan változik az Egyenlítőtől a sarkok felé haladva − a vizsgált mozgások szempontjából gyakorlatilag állandónak vehető.

A nehézségi erőtér tehát homogénnak tekinthető a mindennapi életben előforduló mozgásoknál.

A vonatkoztatási rendszerünk legyen derékszögű koordináta-rendszer, amelynek *z* tengelye az erővel ellentétes irányú:

$F_x = 0, F_y = 0, F_z = -mg.$ (1.85. egyenlet)

11. ábra -



Vajon létezik-e olyan *V (x, y, z)* skalárfüggvény, amelynek negatív gradiense az (1.85) erővel egyenlő? A válasz igen, ugyanis könnyű belátni, hogy a

$V(x, y, z) = mgz$ (1.86. egyenlet)

függvény teljesíti ezt a követelményt:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = mg.$$ (1.87. egyenlet)

A nehézségi erőtér tehát konzervatív, van potenciálja. Az ekvipotenciális felületek a *z* = áll. vízszintes síkok, az erővonalak ezekre merőleges, egyenlő sűrűn húzott egyenesek.

2.6.2 A gravitációs erőtér

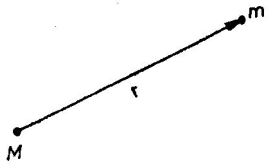
Newton nagy érdeme az a felismerés, hogy a földi nehézségi erő egy általánosabb erőtörvénynek a speciális megnyilvánulása. Nevezetesen bármilyen két tömeg olyan erővel vonzza egymást, amely arányos a két tömeg szorzatával és fordítva arányos a tömegpontok közötti távolság négyzetével. Eszerint az *M* tömegű anyagi pont a tőle *r* távolságra levő *m* tömegű pontra

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$ (1.88. egyenlet)

erőt fejt ki. A γ gravitációs állandó értéke: $(6{,}6720 \pm 0{,}004) \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-1}$

Az y egységvektor M-től az *m* felé mutat.

12. ábra -



A gravitációs erőtér is konzervatív. Az (1.88) erő potenciálja:

$$V = -\gamma \frac{Mm}{r}.$$ (1.89. egyenlet)

Képezzük ennek gradiensét az *m* tömegű pont koordinátái szerint:

$$\operatorname{grad} V = \gamma \frac{Mm}{r^2} \operatorname{grad} r = \gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$ (1.90. egyenlet)

Ezt (1.88)-cal összevetve, látható, hogy

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V.$$ (1.91. egyenlet)

Ezzel igazoltuk, hogy a gravitációs erőtér valóban konzervatív, és potenciálja az (1.89)-ben adott.

Az ekvipotenciális felületek az M középpontú, *r* = áll. egyenletű koncentrikus gömbök. Az erővonalak a középpont felé mutató, sugárirányú egyenesek.

2.6.3 Munka konzervatív erőtérben

Gondoljuk el, hogy konzervatív erő hatására mozog az *m* tömegű anyagi pont. Amíg a pálya *A* pontjából *B*-be jut, az erő

$$A=\int_{A}^{B}\mathbf{F}d\mathbf{r}$$

munkát végez. Mivel az erő konzervatív,

F= − grad *V*

$$A=\int_{r_A}^{r_B}\operatorname{grad}V d\mathbf{r}=-\int_{r_A}^{r_B}dV=V(\mathbf{r}_A)-V(\mathbf{r}_B)=V(A)-V(B).$$ (1.92. egyenlet)

Ez azt jelenti, hogy a munkát a potenciálnak a kezdő- és végpontban felvett értéke egyértelműen meghatározza, tehát nem függ a pályától, amelyen a tömegpont *A*-ból a *B*-be jutott. Az erő által végzett munkának a pályától való függetlensége a konzervatív erőterek jellegzetes sajátossága.

A *V*(**r**) potenciálnak az (1.92) alapján konkrét fizikai jelentés tulajdonítható. A tér két pontja közötti potenciálkülönbség egyenlő azzal a munkával, amelyet az erő végez, midőn a tömegpontot *A*-ból a *B*-be mozgatja. Ha a *B* pont a végtelenben van, ahol a potenciál értéke zérus (*V*(∞)=0), akkor *V(A)* az (1.92) szerint azt a munkát jelenti, amelyet a tér akkor végezne, ha a tömegpontot *A*-ból a végtelenbe mozgatná. Ilyen értelemben nemcsak a potenciálkülönbségnek, hanem magának a *V*(**r**)potenciálnak is fizikai jelentése van.

2.6.4 A mechanikai energia megmaradása

Az (1.80) munkatétel szerint az erő által végzett munka a tömegpont mozgási energiájának a növekedésével egyenlő:

$$A=E_k(B)-E_k(A).$$ (1.93. egyenlet)

Ha az erőtér konzervatív, akkor a munkára az (1.92) kifejezés is érvényes. A kettő egyenlővé tételéből adódik, hogy

$E_k(B)-E_k(A)=V(A)-V(B)$.

Vagy átrendezve,

$$E_k(A)+V(A)=E_k(B)+V(B).$$ (1.94. egyenlet)

Ez azt jelenti, hogy konzervatív erőtér esetén az $E_k + V$ mennyiség a mozgás folyamán állandó marad. A tömegpont mozgási energiájának és az erőtér potenciáljának az összege tehát mozgásállandó.

A tételnek szemléletes értelmet adhatunk azáltal, hogy a *V*(**r**) potenciált a tömeg-pont potenciális (vagy helyzeti) energiájának tekintjük: $E_p = V(\mathbf{r})$. Így az (1.94) megmaradási tétel jelentése a következő: konzervatív erők esetén a tömegpont mozgási és potenciális energiájának az összege, az ún. mechanikai energia állandó. Ez a *mechanika energiatétele.*

A potenciális energiának a fogalma az egész fizikán végigvonul, és mint látni fogjuk, igen hasznos, mert anélkül, hogy ismernénk az erő forrásainak a dinamikáját, olyan megmaradási tételnek a megfogalmazását teszi lehetővé, amely széles körű alkalmazások alapját képezi.

Érdemes megjegyezni, hogy az energiatételhez a mozgásegyenletek felhasználásával jutottunk, ezért az a dinamika mozgástörvényének a következménye. Éppen emiatt kaphatunk ebből a matematikailag könnyebben kezelhető egyenletből értékes felvilágosítást a mozgásról anélkül, hogy a mozgásegyenleteket megoldanánk. Különösen a középfokú oktatásban van ennek nagy szerepe, mert a szükséges matematikai ismeretek hiányában a mozgásegyenletek megoldása úgy sem lehetséges.

2.6.5 Disszipatív erők

A konzervatív erőknek különleges szerepük van a fizikában, mert csak ilyen erők által végzett munka független az úttól, továbbá a mechanikai energia is csak konzervatív erők esetén állandó.. A természetben azonban találkozunk olyan erőkkel is, amelyek nem konzervatívak. Pl. a súrlódási erő, az időtől vagy a tömegpont sebességétől függő erő. A nem konzervatív erőket disszipatív erőknek nevezzük. Az ilyen erők esetén már nem állandó a mechanikai energia, mert a disszipatív erőkkel kapcsolatos folyamatokban más energiafajták (pl. hő) is szerepelnek.

Vegyük azt az esetet, amikor a tömegpontra az **F** konzervatív erőn kívül pl. súrlódási erő is hat. Utóbbit jelöljük $\mathbf{F}_d$-vel. A mozgásegyenlet:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_d. \quad \text{(1.95. egyenlet)}$$

Szorozzuk meg az egyenletet $\dot{\mathbf{r}}$-tal, és integráljuk mindkét oldalt az idő szerint a t_1 és t_2 időpontok között:

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_d\dot{\mathbf{r}}\,dt. \quad \text{(1.96. egyenlet)}$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$m\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2\right),$$

$$\mathbf{F}\dot{\mathbf{r}} = -\operatorname{grad} V\,\dot{\mathbf{r}} = -\frac{dV}{dt}$$

Ezeket (1.96)-ba helyettesítve,

$$E_k(t_2) + E_p(t_2) = E_k(t_1) + E_p(t_1) + \int_{1}^{2} \mathbf{F}_d d\mathbf{r}. \quad \text{(1.97. egyenlet)}$$

A mechanikai energia tehát nem állandó, annak változása a disszipatív erő munkájával egyenlő'. Súrlódási erő esetén $\mathbf{F}_d$ a mozgásiránnyal ellentétes, ezért az $\mathbf{F}_d$ $d\mathbf{r}$ skaláris szorzat negatív. Az erő munkája hővé alakul, és a keletkezett hőt fedezi a mechanikai energia csökkenése. Az (1.97) tehát a disszipatív erő munkájával kiegészített általános energiatételt fejezi ki.

A tapasztalat igen széles körben igazolja az energia megmaradásának általános tételét, amely a folyamatokban fellépő valamennyi energiafajta figyelembevételével érvényes. A mechanikai energia megmaradása ennek speciális esete, amely csak konzervatív erőterekben igaz.

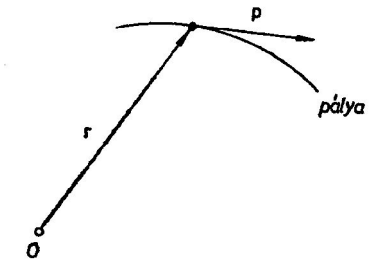
2.7 Az impulzus- és erőnyomaték

Bevezetünk két új fogalmat, amelyek nemcsak a mechanikában, hanem a fizika minden területén fontos szerepet játszanak.

Jelöljük *O*-val a tér azon pontját, amelyre a tömegpont helyét vonatkoztatjuk. Ha valamilyen koordináta-rendszert használunk, akkor általában a középpontot választjuk ennek. A tömegpont **r** helyvektorának és **p** impulzusának az

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$ (1.98. egyenlet)

13. ábra -



vektoriális szorzatát az anyagi pont *O*-ra vonatkoztatott *impulzusnyomatékának* nevezzük.

A helyvektornak és az **F** erőnek az

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$ (1.99. egyenlet)

vektoriális szorzatát pedig a *O*-ra vonatkoztatott *erőnyomatéknak* hívjuk.

A mozgásegyenlet felhasználásával igazolható, hogy az impulzusnyomaték idő szerinti differenciálhányadosa az erőnyomatékkal egyenlő:

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}.$$

Mivel $\dot{\mathbf{r}} \parallel \mathbf{p}$, az első tag eltűnik, a második tagban $\dot{\mathbf{p}}$ helyére a mozgásegyenlet alapján **F** írható. Ezért

$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}.$ (1.100. egyenlet)

Ez az egyenlet az impulzusnyomaték-tételt fejezi ki. Jelentése az, hogy az impulzus-nyomaték az erőnyomaték hatására változik meg az (1.100) törvény szerint.

Ha a tömegpontra ható erő **M** nyomatéka zérus, akkor az impulzusnyomaték állandó. Ez az impulzusnyomaték megmaradásának tétele.

Az erőnyomaték az **F** = 0 triviális esettől eltekintve zérus lesz akkor, ha $\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$, vagyis az erő az *O* pontba, vagy attól kifelé sugárirányba mutat. Az ilyen erőket centrális erőknek hívjuk. Az impulzusnyomaték tehát centrális erőtérben állandó. **L** az (1.98) definíció szerint a helyvektorra és az impulzusra merőleges vektor, ezért állandóságából az következik, hogy az **r** és a **p** a mozgás folyamán egy síkban marad. Mivel a tömegpont pályáját az **r** és az $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p} / m$ meghatározza, a fentiekből adódik, hogy a centrális erőtérben mozgó tömegpont pályája síkban van. A sík normálisa **L** irányú.

2.8 Megmaradási tételek

A megmaradási tételek olyan fizikai mennyiségekre vonatkoznak, amelyek meghatározott feltételek mellett időben állandóak. Ezeknek a tételeknek az alkalmazások szempontjából van különös jelentőségük, mert a mozgásegyenletek megoldása nélkül értékes információkat adnak a mozgó test fizikai állapotáról.

A következőkben összefoglaljuk a tömegpont dinamikájában megismert megmaradási tételeket. Mindegyik a mozgásegyenletek felhasználásával adódik, tehát a mozgástörvény következményei.

2.8.1 Az impulzus megmaradásának tétele

A tömegpont $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ mozgásegyenletéből következik, hogy ha a pontra ható erők **F** eredője zérus, akkor

$\dot{\mathbf{p}} = 0$ vagyis $\mathrm{p} = \text{áll.}$ (1.101. egyenlet)

Az állandó értékét a kezdeti feltételek határozzák meg. Ha kezdetben a tömegpont nyugalomban volt, akkor továbbra is abban marad; ha viszont kezdősebessége $v(0)=v_0$ akkor ezzel a kezdősebességgel egyenesvonalú egyenletes mozgást végez.

2.8.2 Az impulzusnyomaték megmaradása

A tömegpont $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ képlettel definiált impulzusnyomatékának idő szerint vett differenciálhányadosa a mozgásegyenlet következményeként a pontra ható erők **F** eredőjének **M** nyomatékával egyenlő:

$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$ (1.102. egyenlet)

Ha az erőnyomaték zérus (pl. centrális erők esetén), akkor a tömegpont impulzus-nyomatéka állandó:

$\dot{\mathbf{L}} = 0$ vagy $\mathbf{L} = \text{áll.}$ (1.103. egyenlet)

Példaként megemlítjük a két tömegpont között ható

$\mathbf{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$ (1.104. egyenlet)

gravitációs erőt. Az m_1 tömegpontnak az m_2-re vagy m_2-nek az m_1-re vonatkoztatott impulzusnyomatéka állandó. A korábban mondottak értelmében a gravitációs erő hatására létrejövő mozgás síkmozgás, azaz a tömegpont pályája síkgörbe.

2.8.3 A mechanikai energia megmaradása

Ha a tömegpontra ható erő konzervatív, tehát

$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V(\mathbf{r}),$ (1.105. egyenlet)

akkor az

$E = E_k + E_p$ (1.106. egyenlet)

mechanikai energia a mozgásegyenletek következtében időben állandó. Itt

$E_k = \frac{1}{2} m v^2$ (1.107. egyenlet)

a tömegpont mozgási energiája, az *Ep* potenciális energia pedig az erőtér *V* potenciáljával egyenlő. A tétel bizonyítása a következő. Az

$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$

mozgásegyenletet megszorozzuk az r sebességgel skalárisan, és figyelembe vesszük az (1.105) összefüggést:

$m\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}} = -(\operatorname{grad} V)\dot{\mathbf{r}}.$ (. egyenlet)

Vegyük tekintetbe a következő átalakításokat:

$$m\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2\right).$$ (1.109. egyenlet)

$$-\operatorname{grad} V\dot{\mathbf{r}} = -\frac{dV}{dt}.$$ (1.110. egyenlet)

Így (1.108)-ból kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + V\right) = 0.$$ (1.111. egyenlet)

Tehát

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V = \text{áll.},$$ (1.112. egyenlet)

ami a szokásos jelöléssel,

$$E_k + E_p = \text{áll.}$$ (1.113. egyenlet)

A mechanikai energia megmaradásának a levezetésénél a mozgásegyenleteken kívül figyelembe vettük az erő konzervatív voltát kifejező (1.105) összefüggést is, ezért a tétel csak konzervatív erőtérben érvényes.

Nézzünk erre is egy példát. Tekintsük a földi nehézségi erőtérben szabadon eső *m* tömegű anyagi pontot. Vonatkoztatási rendszerünk legyen derékszögű koordináta-rendszer, függőlegesen felfelé mutató *z* tengellyel. A tömegpontra ható nehézségi erő:

$$F_x = 0, \qquad F_y = 0, \qquad F_z = -mg.$$ (1.114. egyenlet)

Ennek potenciálja

$$V = mgz.$$ (1.115. egyenlet)

A nehézségi erőtér konzervatív, ezért (1.112) alapján

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{áll.}$$ (1.116. egyenlet)

Az állandó értékét a kezdeti feltétel határozza meg. Legyen a tömegpont t=0-kor a $z = h$ magasságban nyugalomban: $v(0) = 0$. Ezért (1.116)-ból a $t = 0$ időpontra adódik, hogy

$$mgh = \text{áll.}$$ (1.117. egyenlet)

Ezt (1.116)-ba helyettesítve,

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(z-h) = 0.$$ (1.118. egyenlet)

A kezdeti *mgh* potenciális energia a mozgás során folytonosan átalakul mozgási energiává. A Föld felszínén a tömegpont helyzeti energiája zérussá válik, a mozgási energia pedig maximális értékét veszi fel:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh.$$ (1.119. egyenlet)

Ebből a Földre érés sebessége egyszerűen kiszámítható:

$$v = \sqrt{2gh}.$$ (1.120. egyenlet)

3. Tömegpont mozgása különféle erők hatására

A következőkben néhány speciális mozgás tanulmányozásán bemutatjuk, hogy az elméleti mechanika hogyan valósítja meg a kitűzött főfeladatát. Nevezetesen az erő ismeretében a mozgásegyenletek megoldásával meghatározzuk a tömegpont mozgás-állapotát bármely időpontra.

3.1 Mozgás a Föld nehézségi erőterében

Tekintsünk egy *m* tömegű anyagi pontot, amelyre a Föld *m***g** nehézségi ereje hat. Hogyan mozog a tömegpont ennek hatására?

Célszerű derékszögű koordináta-rendszert használnunk, amelynek *z* tengelyét az erővel párhuzamosnak, de ellentétes irányúnak választjuk:

$$F_x = 0, \qquad F_y = 0, \qquad F_z = -mg.$$ (1.121. egyenlet)

A megoldandó mozgásegyenletek:

$$m\ddot{x} = 0,$$
$$m\ddot{y} = 0,$$
$$m\ddot{z} = -mg.$$ (1.122. egyenlet)

Az idő szerint lépésenként integrálva adódik,

$$\dot{x} = a_1, \qquad \dot{y} = a_1, \qquad \dot{z} = -gt + a_3;$$ (1.123. egyenlet)

$$x = a_1 t + b_1, \qquad y = a_2 t + b_2, \qquad z = -g\frac{t^2}{2} + a_3 t + b_3.$$ (1.124. egyenlet)

E megoldásból azonnal leolvasható, hogy a nehézségi erő hatására a mozgás mindig a függőleges (*z*-vel párhuzamos) síkban megy végbe. Az ilyen sík egyenlete

$$Ax + By + C = 0.$$ (1.125. egyenlet)

Szorozzuk meg (1.124) első egyenletét a_2 -vel, a másodikat $-a_1$-gyel, majd adjuk őket össze:

$$a_2 x - a_1 y + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$ (1.126. egyenlet)

Ez ugyanolyan alakú, mint (1.125); a mozgás valóban a függőleges síkban történik.

Az a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 integrálási állandókat a tömegpont kezdeti állapotának a megadásával, az ún. kezdeti feltételekkel határozzuk meg. Legyen a tömegpont t = 0-kor a koordináta-rendszer kezdőpontjában

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0.$$ (1.127. egyenlet)

Ebből következik, hogy az (1.124) megoldásban mind a három *b* állandó zérus: *b1=b2=b3*=0. A. $v(0) = v_0$ kezdősebességről pedig feltesszük, hogy az *xz* síkban van, és az *x* tengellyel α szöget zár be:

$$v_{0,x} = v_0 \cos\alpha,$$
$$v_{0,y} = 0,$$
$$v_{0,z} = v_0 \sin\alpha$$ (1.128. egyenlet)

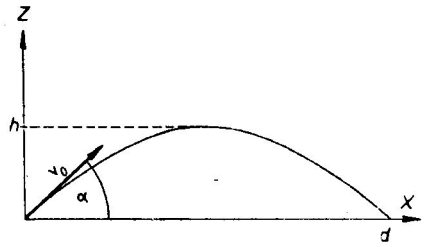
Ezeket (1.123)-ba helyettesítve, a másik három integrálási állandó értékeire adódik:

$$a_1 = v_0 \cos\alpha, \qquad a_2 = 0 \qquad \text{és} \qquad a_3 = v_0 \sin\alpha.$$ (1.129. egyenlet)

Az (1.122) mozgásegyenletek (1.127), (1.128) kezdeti feltételeknek megfelelő egy-értelmű megoldása

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t,$$
$$y = 0,$$
$$z = -g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot t.$$ (1.130. egyenlet)

14. ábra -



Ez a tömegpont pályájának paraméteres egyenletrendszere. A mozgás a kezdeti sebességnek megfelelően az *xz* síkban történik. A *t* paramétert kiküszöbölve, a pálya

$$z = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + x\,\mathrm{tg}\,\alpha$$ (1.131. egyenlet)

egyenletét kapjuk. Mivel *z* másodfokú függvénye az *x*-nek, ez egy parabola egyenlete, amelynek tengelye párhuzamos a *z*-vel. A tömegpont tehát egy ideig emelkedik, majd a pálya másik szakaszán lefelé esik. Az emelkedés t_e idejét abból a feltételből számíthatjuk ki, hogy ebben az időpontban a sebesség párhuzamos az *x* tengellyel, tehát a *z*-komponense zérus:

$$-gt_e + v_0 \sin\alpha = 0,$$ (1.132. egyenlet)

amiből $t_e = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$

A mozgás teljes ideje ennek kétszerese:

$$t_m = 2t_e \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$ (1.133. egyenlet)

Az emelkedés *h* magassága (1.130) harmadik egyenletéből a t_e behelyettesítésével adódik:

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$ (1.134. egyenlet)

A hajítás *d* távolsága (1.130) első egyenletéből,

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$ (1.135. egyenlet)

Ebből látszik, hogy adott v_0 esetén *d* az *α*=45°-nál lesz maximális, *α*-hoz és $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$-hoz ugyanaz a hajítási távolság tartozik, mert sin 2*α* = sin (*π*-2*α*).

Ha a v_0 kezdeti sebesség zérus, akkor a tömegpont szabadon esik:

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{g}{2} t^2.$$ (1.136. egyenlet)

3.2 Harmonikus rezgőmozgás

A tömegpontra ható erő legyen a rugalmas erő, amely a rugalmasság határán belül arányos a kitéréssel és azzal ellentétes irányú. A kitérést számítsuk a koordináta-rendszer kezdőpontjától:

$$\mathbf{F} = -D\mathbf{r},$$ (1.137. egyenlet)

ahol *D* a rugalmas erő együtthatója.

A mozgásegyenlet:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -D\mathbf{r}.$$ (1.138. egyenlet)

Vezessük be az

$$\omega^2 = \frac{D}{m}$$ (1.139. egyenlet)

jelölést. Az (1.138) egyenlet ekkor ilyen alakba írható:

$\ddot{\mathbf{r}} = \omega^2 \mathbf{r} = 0.$ (1.140. egyenlet)

Ennek a másodrendű, állandó együtthatós homogén közönséges differenciálegyenletnek két partikuláris megoldása van

$\mathbf{r}_1 = \mathbf{A}\cos\omega t,$
$\mathbf{r}_2 = \mathbf{B}\sin\omega t,$ (1.141. egyenlet)

ahol **A** és **B** egyelőre tetszőleges állandó vektorok. Az (1.140) differenciálegyenlet általános megoldása:

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{A}\cos\omega t + \mathbf{B}\sin\omega t.$ (1.142. egyenlet)

Az **A** és **B** együtthatóvektorokat a kezdeti feltételekből határozzuk meg.

Legyen *t* = 0 - kor

$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \qquad \mathbf{v}(0) = \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0.$ (1.143. egyenlet)

Ezeket (1.142)-be helyettesítve, és *t* = 0 időpontot véve, adódik, hogy

$\mathbf{A} = \mathbf{r}_0.$ (1.144. egyenlet)

Képezzük most (1.142) idő szerinti differenciálhányadosát:

$\dot{\mathbf{r}} = -\omega\mathbf{A}\sin\omega t + \omega\mathbf{B}\cos\omega t.$

Ebbe *t* = 0-t helyettesítve, vegyük figyelembe a sebességre vonatkozó (1.143) kezdeti feltételt:

$\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0 = \omega\mathbf{B}, \qquad \text{amiből} \qquad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}.$ (1.145. egyenlet)

Az (1.143) kezdeti feltételnek megfelelő általános megoldás:

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0\cos\omega t + \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}\sin\omega t.$ (1.146. egyenlet)

Ez írja le a tömegpont helyét az idő függvényében.

Tegyük fel, hogy a $\mathbf{v}_0$ kezdeti sebesség $\mathbf{r}_0$-val párhuzamos. Az (1.146)-ból látszik, hogy ebben az esetben a tömegpont az $\mathbf{r}_0$ vektor irányába mutató egyenes mentén mozog. Az egyszerűség kedvéért válasszuk ezt az irányt a koordináta-rendszerünk *x* tengelyének.

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$ (1.147. egyenlet)

Ha a két együtthatót

$$x_0 = a \cos \alpha \qquad \text{és} \qquad \frac{v_0}{\omega} = a \sin \alpha$$ (1.148. egyenlet)

alakban vesszük fel, akkor az (1.147) megoldás egyszerű koszinuszfüggvény lesz:

$$x = a \cos(\omega t - \alpha).$$ (1.149. egyenlet)

A tömegpont helye az *x* tengely mentén periodikusan változik az időben − *a* és + *a* határok között. Az ilyen mozgást nevezzük harmonikus rezgőmozgásnak. A maximális kitérés a rezgés *a* amplitúdója, amely (1.148)-ból kifejezhető a kezdeti hellyel és kezdeti sebességgel:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$ (1.150. egyenlet)

Ugyancsak (1.148)-ból kapjuk meg az a fázisszöget is:

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{v_0}{x_0 \omega}.$$ (1.151. egyenlet)

A rezgésidő az az időtartam, amely alatt az *ωt* − *α* fázis 2*π*-vel változik meg. Tehát *ω* (*t*+*T*) − α = *ωt*− α +2*π,* amiből

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$ (1.152. egyenlet)

Az időegységre eső rezgések száma:

$$\nu = \frac{1}{T},$$ (1.153. egyenlet)

amelyet frekvenciának is szoktak nevezni. Az utóbbi két összefüggés egybevetéséből látszik, hogy

$\omega = 2\pi\nu,$ (1.154. egyenlet)

ezért a rugalmas erő *D* együtthatójával és a tömegpont *m* tömegével (1.139) szerint kifejezett *ω*-t a rezgés *körfrekvenciájának* hívjuk.

Tekintsük most azt az esetet, amikor a $\mathbf{v}_0$ kezdeti sebesség nem párhuzamos $\mathbf{r}_0$-val. Legyen $\mathbf{r}_0$ *x* irányú, mint az előbb, de $\mathbf{v}_0$-nak legyen *y* irányú összetevője is:

$\mathbf{r}_0 = (x_0, 0, 0), \qquad \mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, 0)$ (1.155. egyenlet)

Ekkor az (1.146) általános megoldásnak is két komponense lesz:

$$x = x_0 \cos\omega t + \frac{v_{0x}}{\omega}\sin\omega t = a\cos(\omega t - \alpha),$$
$$y = \frac{v_{0y}}{\omega}\sin\omega t,$$
$$z = 0. \qquad \text{(1.156. egyenlet)}$$

Ez ellipszisnek a paraméteres egyenlete. A tömegpont ilyen kezdeti feltételek mellett tehát ellipszisen mozog.

Számítsuk ki a harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont energiáját. Az erő konzervatív, potenciálja $\frac{1}{2}Dx^2$ ezért

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Dx^2.$$

Az (1.149) megoldást alapul véve,

$$E = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\omega t - \alpha) + \frac{1}{2}m\omega^2a^2\cos^2(\omega t - \alpha) = \frac{1}{2}ma^2\omega^2.$$

A harmonikus rezgés mechanikai energiája tehát arányos az amplitúdó és a körfrekvencia négyzetével, valamint a pont tömegével.

3.3 Csillapított rezgőmozgás

Ha a tömegpont valamilyen közegben mozog (pl. levegőben), akkor az (1.137) rugalmas erőn kívül a sebességgel ellentétes irányú súrlódási erő is hat rá, amely jelentősen befolyásolja a mozgását. A súrlódási erő nagysága a tapasztalat szerint kis sebességek esetén a sebességgel, nagyobbaknál a sebesség négyzetével arányos. Mi most az előbbi esetet tanulmányozzuk. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy mind a rugalmas erő, mind

a súrlódási erő az *x* tengely mentén hat, továbbá a kezdeti feltételek is olyanok, hogy a mozgás egyenesvonalú marad. A súrlódási erőt a mondottak értelmében az $\dot{x}$-tal arányosnak és ellentétes irányúnak tekintjük:

$$F_{sx} = -k\dot{x}.$$ (1.157. egyenlet)

A tömegpont mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}.$$ (1.158. egyenlet)

Az egyenletet *m*-mel elosztva, és az

$$\omega^2 = \frac{D}{m}, \qquad 2\alpha = \frac{k}{m}$$ (1.159. egyenlet)

jelöléseket bevezetve, a megoldandó egyenlet a következő:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$ (1.160. egyenlet)

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldását a matematikából ismert eljárást követve, $e^{\lambda t}$ alakban kereshetjük. Feltesszük tehát, hogy a megoldás $x = e^{\lambda t}$, és meghatározzuk azokat a λ értékeket, amelyekkel ez kielégíti az (1.160) egyenletet. Ennek megfelelően $x = e^{\lambda t}$ -t (1.160)-ba helyettesítjük, és megköveteljük, hogy az így adódó egyenlet teljesüljön:

$$\left(\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega^2\right)e^{\lambda t} = 0.$$ (1.161. egyenlet)

Mivel $e^{\lambda t}$ nem zérus, a zárójelben álló kifejezésnek el kell tűnnie:

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega^2 = 0.$$ (1.162. egyenlet)

Ez az algebrai egyenlet határozza meg azokat a λ értékeket, amelyekkel $x = e^{\lambda t}$ megoldása az (1.160) mozgásegyenletnek. Az (1.162)-nek két gyöke van,

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} \qquad \text{és} \qquad \lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}.$$ (1.163. egyenlet)

A mozgásegyenletnek tehát két partikuláris megoldása van,

$$x_1 = e^{\lambda_1 t},$$ (1.164. egyenlet)

$x_2 = e^{\lambda_2 t}$. (1.165. egyenlet)

Az általános megoldás ezeknek egy-egy állandó együtthatóval szorzott szuperpozíciója :

$x = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$. (1.166. egyenlet)

Attól függően, hogy az α súrlódási együttható hogyan viszonyul az *ω* körfrekvenciához, az (1.166) megoldás más és más jellegű lesz. Nézzük ezt most részletesen.

1. Legyen *α* > *ω*. Ebben az esetben a λ_1 és λ_2 negatív valós számok, ezért mind a két partikuláris megoldás időben exponenciálisan csökken. A mozgás tehát nem periodikus.

Ahhoz, hogy a jelenséget időben végigkövethessük, válasszuk kezdeti feltételnek a következőt. Legyen *t* = 0-kor

$\dot{x}(0) = 0 \qquad és \qquad \dot{x}(0) = v_0$. (1.167. egyenlet)

Ezeket az (1.166) megoldásba, illetve annak idő szerinti deriváltjába helyettesítve, az a^1 és a^2 integrálási állandókra kapjuk, hogy

$a_1 + a_2 = 0,$

$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = v_0.$

Ezekből

$a_1 = -a_2 = \frac{v_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{v_0}{2\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$. (1.168. egyenlet)

A kezdeti feltételeknek megfelelő megoldás:

$x = \frac{v_0 e^{-\alpha t}}{2\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}\left[e^{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}t} - e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}t}\right] = \frac{v_0 e^{-\alpha t}}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \operatorname{sh}\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}t.$ (1.169. egyenlet)

A tömegpont kitérése sohasem lesz negatív. A kezdeti *x* = 0-ról indulva kezdetben növekszik, majd egy maximum elérése után zérushoz tart. Elméletileg a határ-esetben exponenciálisan tart zérushoz. A maximális kitérés abból a tényből számítható ki, hogy ebben a pontban az $\dot{x}$ sebesség zérus. A zérushoz tartás mértékét az α súrlódási együttható jelentősen befolyásolja, mert pl. nagy α esetén az exponenciális tényező hamarabb meghatározóvá válik.

2. Feltesszük, hogy $\alpha < \omega$. Ekkor λ_1 és λ_2 komplex számok:

$$\lambda_1 = -\alpha + i\sqrt{\omega^2 - \alpha^2},$$ (1.170. egyenlet)

$$\lambda_2 = -\alpha - i\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}.$$ (1.171. egyenlet)

Az általános megoldás (1.166) alapján:

$$x = e^{-\alpha t}\left(a_1 e^{i\sqrt{\omega^2-\alpha^2}t} + a_2 e^{-i\sqrt{\omega^2-\alpha^2}t}\right).$$ (1.172. egyenlet)

Mivel *x* a tömegpont helyének a koordinátája, ezért ennek valósnak kell lennie. (1.172) csak akkor lesz valós, ha az a^1, a^2 állandó együtthatók is komplexek. írjuk ezeket a következő alakba:

$$a_1 = \frac{a}{2}e^{i\delta} \qquad \text{és} \qquad a_2 = \frac{a}{2}e^{-i\delta},$$ (1.173. egyenlet)

ahol *a* és *δ* valósak.

Ezeket (1.172)-be helyettesítve, és figyelembe véve a komplex számok $e^{i\delta} = \cos\delta + i \sin\delta$ alakját, a mozgásegyenlet általános megoldására azt kapjuk, hogy

$$x = ae^{-\alpha t}\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}t + \delta\right).$$ (1.174. egyenlet)

Az előző pontban tárgyalt mozgás (1.149) megoldásával összehasonlítva látható, hogy ez olyan harmonikus rezgést ír le, amelynek amplitúdója exponenciálisan csökken az idővel. Az ilyen mozgást csillapított rezgőmozgásnak nevezzük. A rezgésidő a harmonikus rezgéshez hasonlóan állapítható meg: az a *T* időtartam, amely alatt a $\left(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}t + \delta\right)$ fázis 2π-vel változik meg:

$$\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}\left(t + T\right) + \delta = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}t + \delta + 2\pi.$$

Ebből

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}.$$ (1.175. egyenlet)

A rezgés körfrekvenciája,

$\Omega = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$. (1.176. egyenlet)

A rezgésidő a csillapítatlan α=0 harmonikus rezgés idejénél nagyobb, a körfrekvencia pedig kisebb.

A t időpontbeli és a rezgésidővel későbbi kitéréseknek a hányadosa

$$\frac{x(t)}{x(t+T)} = e^{\alpha T}.$$ (1.177. egyenlet)

Ezt a csillapodás mértékének lehet tekinteni, ezért *csillapodási hányadosnak* nevezzük. Gyakran ennek a logaritmusát szokták használni a csillapodás jellemzésére:

$$\ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \alpha T.$$ (1.178. egyenlet)

Az $x(t)$ és $x(t+T)$ kitérések, valamint a T rezgésidő megmérésével az α súrlódási együttható meghatározható.

3. Végül tekintsük azt az esetet, amikor $\alpha = \omega$. Ekkor az (1.163) szerint

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$. (1.179. egyenlet)

Az α tehát kétszeres gyök. Úgy tűnik, hogy csak egy partikuláris megoldása van az (1.160) egyenletnek: $x = e^{-\alpha t}$. De a differenciálegyenletek elméletéből ismeretes, hogy kétszeres gyök esetén a $te^{-\alpha t}$ is partikuláris megoldás. (Erről a differenciálegyenletbe történő behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk.) Ezért az általános megoldás:

$x = e^{-\alpha t}(a_1 + a_2 t)$. (1.180. egyenlet)

Az (1.167) kezdeti feltételekkel az a_1 re és a_2 -re adódik

$a_1 = 0$ és $a_2 = v_0$

Tehát

$x = v_0 t e^{-\alpha t}$. (1.181. egyenlet)

Ez sem periodikus mozgás. Jellegében hasonlít az (1.169)-hez, és $t \to \infty$ határesetben ez is exponenciálisan tart zérushoz.

3.4 Kényszerrezgések

Most a tömegpont olyan mozgását vizsgáljuk, amely akkor jön létre, ha a rugalmas és a súrlódási erőn kívül egy időben periodikusan változó erő is hat:

$$F_t = F_0 \cos \Omega t.$$ (1.182. egyenlet)

Ekkor a tömegpont mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F_0 \cos \Omega t.$$ (1.183. egyenlet)

Osszuk el az egyenletet *m*-mel, majd vegyük figyelembe az (1.159)-ben bevezetett és az

$$\frac{F_0}{m} = f$$ (1.184. egyenlet)

jelölést. Így az

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = f \cos \Omega t$$ (1.185. egyenlet)

egyenletet kapjuk. Ez másodrendű, lineáris inhomogén differenciálegyenlet. Az általános megoldást úgy kapjuk meg, hogy az inhomogén egyenlet egy partikuláris meg-oldásához hozzáadjuk a megfelelő homogén egyenlet általános megoldását.

Az (1.185) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása előállítható cos *Ω* és sin *Ωt* lineárkombinációjával:

$$x_p = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t.$$ (1.186. egyenlet)

Az *A* és *B* együtthatókat úgy kell meghatározni, hogy ez kielégítse az inhomogén egyenletet. Feltesszük, hogy (1.186) megoldása (1.185)-nek, és akkor az *A* és *B* együtthatókra algebrai egyenletrendszert kapunk, amelyből azok kiszámíthatók. Képezzük az x_p idő szerinti első és második deriváltját:

$$\dot{x}_p = -A\Omega \sin \Omega t + B\Omega \cos \Omega t,$$
$$\ddot{x}_p = -\Omega^2 \left(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t \right).$$

Ezeket (1.185)-be helyettesítve,

$$\left[\left(\omega^2 - \Omega^2 \right) A + 2\alpha\Omega B \right] \cos \Omega t + \left[-2\alpha\Omega A + \left(\omega^2 - \Omega^2 \right) B \right] \sin \Omega t = f \cos \Omega t.$$ (1.187. egyenlet)

Ez az egyenlet akkor teljesül *t* minden értékére, ha a cos *Ωt,* illetve a sin *Ωt* együtthatói a két oldalon megegyeznek:

$$\left(\omega^2-\Omega^2\right)A+2\alpha\Omega B=f,$$
$$-2\alpha\Omega A+\left(\omega^2-\Omega^2\right)B=0. \quad \text{(1.188. egyenlet)}$$

Oldjuk meg ezt az algebrai egyenletrendszert *A*-ra és *B*-re a Cramer-szabállyal:

$$A=\frac{D_A}{D} \qquad \text{és} \qquad B=\frac{D_B}{D},$$

ahol *D* az egyenletrendszer együtthatóinak determinánsa:

$$D=\begin{vmatrix}\omega^2-\Omega & 2\alpha\Omega \\ -2\alpha\Omega & \omega^2-\Omega^2\end{vmatrix}=\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+4\alpha^2\Omega^2; \quad \text{(1.189. egyenlet)}$$

a D_A, illetve a D_B determinánsok pedig a következők:

$$D_A=\begin{vmatrix}f & 2\alpha\Omega \\ 0 & \omega^2-\Omega^2\end{vmatrix}=f\left(\omega^2-\Omega^2\right) \qquad \text{és} \qquad D_B=\begin{vmatrix}\omega^2-\Omega^2 & f \\ -2\alpha\Omega & 0\end{vmatrix}=2\alpha\Omega f. \quad \text{(1.190. egyenlet)}$$

Az így adódott *A* és *B* állandókat (1.186)-ba helyettesítve, az (1.185) inhomogén egyenlet partikuláris megoldására kapjuk:

$$x_p=\frac{f}{\sqrt{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+4\alpha^2\Omega^2}}\left[\frac{\omega^2-\Omega^2}{\sqrt{D}}\cos\Omega t+\frac{2\alpha\Omega}{\sqrt{D}}\sin\Omega t\right]. \quad \text{(1.191. egyenlet)}$$

A szögletes zárójelben levő cos *Ωt* és sin *Ωt* együtthatóinak négyzetösszege 1, ezért ezek egy szög koszinuszának, illetve szinuszának tekinthetők. Legyen tehát

$$\cos\delta=\frac{\omega^2-\Omega^2}{\sqrt{D}}, \qquad \text{ill.} \qquad \sin\delta=\frac{2\alpha\Omega}{\sqrt{D}}, \quad \text{(1.192. egyenlet)}$$

amiből

$$\delta=\operatorname{arc\,tg}\frac{2\alpha\Omega}{\omega^2-\Omega^2}. \quad \text{(1.193. egyenlet)}$$

Az (1.191) partikuláris megoldás így a következő alakot veszi fel:

$$x_p = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\alpha^2\Omega^2}} \cos\left(\Omega t - \delta\right).$$ (1.194. egyenlet)

Az inhomogén mozgásegyenlet általános megoldása a mondottak értelmében az x_p partikuláris megoldásnak és a homogén egyenlet valamelyik (az előző pontban tárgyalt) általános megoldásának összege. Mivel utóbbiak mindegyike tartalmazza az $e^{-\alpha t}$ tényezőt, ezért ez a csillapított mozgás idővel elhal, és csak az (1.194) partikuláris megoldás marad meg. Ez olyan harmonikus rezgőmozgást ír le, amelynek frekvenciája megegyezik a gerjesztő erő frekvenciájával; tehát az erő rákényszeríti periodikus változását a mozgó tömegpontra. Ezért ezt a rezgőmozgást *kényszerrezgésnek* nevezzük.

A kényszerrezgés amplitúdója (1.194) szerint függ az erő amplitúdójától és frekvenciájától, az ω sajátfrekvenciától és az α súrlódási együtthatótól.

A gerjesztő erő és a harmonikus rezgés között fáziskülönbség van, amely (1.193) szerint függ a gerjesztés frekvenciájától, a sajátfrekvenciától és a súrlódási együtthatótól. Ha az *Ω-t* 0-tól *ω*-ig, majd innen ∞-ig növeljük, a δ fáziskülönbség *π*/2-*ig,* majd *π*-ig nő. A kényszerrezgés fázisa tehát mindig késik a gerjesztő erőhöz képest.

A amplitúdó az *Ω*-val *ω*-hoz közeledve nő, és *ω* közelében maximális lesz. Az amplitúdónak ezt a viselkedését *rezonanciának* nevezzük. A rezonancia annál élesebb, minél kisebb az α súrlódási együttható. Ha α zérus lenne, akkor az amplitúdó az *Ω* = *ω* helyen végtelen nagy lenne. Ezt hívják *rezonanciakatasztrófának.* A rezonanciahelynek megfelelő Ω_r rezonanciafrekvenciát egyszerű szélsőérték-feladattal lehet kiszámítani. Az amplitúdó ott lesz maximális, ahol az Ω^2 szerinti differenciálhányadosa eltűnik. Így az Ω_r frekvenciára az

$$\Omega_r = \sqrt{\omega^2 - 2\alpha^2}$$ (1.195. egyenlet)

értéket kapjuk. Ebből is látszik, hogy α = 0 esetén az *ω* sajátfrekvenciánál van a maximum, amely végtelennek adódik.

3.5 Anharmonikus rezgések

A 3.2 pontban tárgyalt harmonikus rezgőmozgás a kitéréssel arányos, ellentétes irányú rugalmas erő hatására jön létre. Bizonyos határon túl az erő már nem lineáris függvénye a kitérésnek, hanem magasabb hatványait is tartalmazza. Az V. fejezetben látni fogjuk, hogy az erő általában a megnyúlás szerinti hatványsor alakjában írható fel, és csak egészen kis kitérések esetén szorítkozhatunk a lineáris tagra.

Feltesszük, hogy az erő az *x* tengely mentén hat és csak *x*-nek a függvénye, amelyet sorba fejtünk az *x*=0 egyensúlyi helyzet környezetében:

$$F(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots$$ (1.196. egyenlet)

Mivel rugalmas testekben a visszahúzó erő a megnyúlás hatására keletkezik, a nyugalmi állapotot erőmentesnek tekinthetjük. Ezért az f_0 állandót zérusnak vesszük. Az f_1, f_2,… együtthatók a rugalmas testre jellemző állandók.

Most megvizsgáljuk, hogy milyen mozgást végez az *m* tömegű anyagi pont, ha az (1.196) erő hat rá. A hatványsornak a másodfokú tagját még figyelembe vesszük, de a magasabb fokú tagoktól már eltekintünk. A lineáris tag f_1 együtthatója a tapasztalat szerint negatív. Ezt (1.137)-ben úgy vettük figyelembe, hogy f_1 helyett $-D$-t írtunk. Ekkor a mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} = -Dx + f_2x^2. \quad \text{(1.197. egyenlet)}$$

Ezt *m*-mel végigosztva és az

$$\omega^2 = \frac{D}{m}, \qquad \text{ill.} \qquad \varepsilon = \frac{f_2}{m} \quad \text{(1.198. egyenlet)}$$

jelöléseket bevezetve, az

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \varepsilon x^2 = 0 \quad \text{(1.199. egyenlet)}$$

másodfokú nemlineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlethez jutunk, amelynek megoldása analitikusan nem adható meg.

Most olyan közelítő eljárást mutatunk be, amely igen sok fizikai problémánál használható, és a mozgás fizikai tulajdonságait is híven tükrözi. Az (1.199) egyenlet helyett tekintsük az

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \lambda\varepsilon x^2 = 0 \quad \text{(1.200. egyenlet)}$$

egyenletet, amely a $\lambda = 1$ esetben átmegy a megoldandó (1.199) egyenletbe. A λ-ról feltesszük, hogy a [0,1] intervallumban folytonosan változó paraméter. Az *x* kitérést a λ hatványai szerint haladó sor alakjában vesszük fel:

$$x = x^{(0)} + \lambda x^{(1)} + \lambda^2 x^{(2)} + \dots . \quad \text{(1.201. egyenlet)}$$

Ezt (1.200)-ba helyettesítve,

$$\left(\ddot{x}^{(0)} + \lambda\ddot{x}^{(1)} + \lambda^2\ddot{x}^2 + \dots\right) + \omega^2\left(x^{(0)} + \lambda x^{(1)} + \lambda^2 x^2 + \dots\right) -$$
$$-\lambda\varepsilon\left(x^{(0)} + \lambda x^{(1)} + \lambda^2 x^{(2)} + \dots\right)^2 = 0. \qquad \text{(1.201. egyenlet)}$$

A bal oldalt λ hatványai szerint rendezve,

$$\ddot{x}^{(0)} + \omega^2 x^{(0)} + \lambda\left(\ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} - \varepsilon x^{(0)2}\right) + \lambda^2\left(\ddot{x}^{(2)} + \omega^2 x^{(2)} - 2\varepsilon x^{(0)}x^{(1)}\right) + \lambda^3(\dots) + \dots = 0. \quad \text{(1.202. egyenlet)}$$

Mivel a λ paraméter a [0,1] intervallumban tetszőleges, az egyenlet csak akkor teljesül, ha λ hatványainak együtthatói eltűnnek:

$$\ddot{x}^{(0)} + \omega^2 x^{(0)} = 0,$$
$$\ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} - \varepsilon x^{(0)2} = 0,$$
$$\ddot{x}^{(2)} + \omega^2 x^{(2)} - 2\varepsilon x^{(0)} x^{(1)} = 0,$$
$$\vdots \qquad \text{(1.203. egyenlet)}$$

Így végtelen sok egyenletből álló egyenletrendszert kaptunk, amely szukcesszív approximációval megoldható. Először megoldjuk az első egyenletet; a megoldást a másodikba helyettesítve, megoldjuk a másodikat; ezt a harmadikba írva, megoldjuk a harmadikat s í. t.

Az (1.203) első egyenlete a harmonikus rezgőmozgást írja le, ennek $x^{(0)}$ megoldása ismert:

$$x^{(0)} = a\cos(\omega t - \delta). \quad \text{(1.204. egyenlet)}$$

Az *a* amplitúdó és a δ fázisszög a kezdeti feltételből meghatározható. Legyen *t* = 0-kor

$$x(0) = x_0 \qquad \text{és} \qquad \dot{x}(0) = 0. \quad \text{(1.205. egyenlet)}$$

Ebből adódik $x_0 = a$ és δ =0.

Tehát

$$x(0) = x_0 \cos\omega t. \quad \text{(1.206. egyenlet)}$$

Az (1.203) második egyenletébe az (1.203) első egyenletének (1.204) megoldását beírva, $x^{(1)}$-re a következő inhomogén másodrendű differenciálegyenletet kapjuk:

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} - \varepsilon x_0^2 \cos^2 \omega t = 0. \quad \text{(1.207. egyenlet)}$$

Vegyük figyelembe a $\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$ trigonometriai összefüggést, es vezessük be a

$$\xi = x^{(1)} - \frac{\varepsilon x_0^2}{2\omega^2} \quad \text{(1.208. egyenlet)}$$

jelölést. Mivel az $\frac{\varepsilon x_0^2}{2\omega^2}$ állandó, nyugodtan beírható a differenciálás jele mögé. így (1.207) a következő, könnyen kezelhető egyenletbe megy át:

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi - \frac{\varepsilon x_0^2}{2} \cos 2\omega t = 0.$$ (1.209. egyenlet)

Ez a kényszerrezgés differenciálegyenlete azzal a különbséggel, hogy az α súrlódási együttható most zérus, valamint Ω helyett 2ω és *f* helyén $\varepsilon x_0^2/2$ áll. így a megoldás (1.194) alapján:

$$\xi = \frac{\varepsilon x_0^2}{6\omega} \cos 2\omega t + \xi_h,$$ (1.210. egyenlet)

ahol ξ_h az (1.209)-nek megfelelő homogén egyenlet általános megoldása:

$$\xi_h = C \cos(\omega t - \delta).$$ (1.211. egyenlet)

Az (1.208) összefüggés alapján

$$x^{(1)} = \xi + \frac{\varepsilon x_0^2}{2\omega^2} = \frac{\varepsilon x_0^2}{2\omega^2} + \frac{\varepsilon x_0^2}{6\omega^2} \cos 2\omega t + C \cos(\omega t - \delta).$$ (1.212. egyenlet)

Az (1.205) kezdeti feltételek, valamint (1.206) figyelembevételével a *C* és δ integrálási állandók értékére kapjuk, hogy

$$C = -\frac{2\varepsilon x_0^2}{3\omega^2} \quad \text{és} \quad \delta = 0.$$ (1.213. egyenlet)

Ezeket (1.212)-be beírva,

$$x^{(1)} = \frac{\varepsilon x_0^2}{2\omega^2} + \frac{\varepsilon x_0^2}{6\omega^2} (\cos 2\omega t - 4 \cos \omega t).$$ (1.214. egyenlet)

Ezzel megkaptuk az (1.203) második egyenletének a megoldását. Az eljárást tovább folytatva, lépésről lépésre megkaphatjuk az $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, ... függvényeket. Mi most megelégszünk az ún. első közelítéssel, ezért (1.201)-ben csak az első két tagot tartjuk meg, a többitől eltekintünk. Az (1.199) mozgásegyenlet megoldása ebben a közelítésben úgy adódik, hogy (1.201)-ben λ-t 1-nek vesszük, mert (1.200) akkor megy át (1.199)-be. Tehát

$$x = x^{(0)} + x^{(1)} = x_0 \left(1 - \frac{2\varepsilon x_0}{3\omega^2}\right) \cos \omega t + \frac{\varepsilon x_0^2}{6\omega^2} \cos 2\omega t + \frac{\varepsilon x_0^2}{2\omega^2}.$$ (1.215. egyenlet)

A tömegpont az

$F = -Dx+f_2 x^2$

erő hatására első közelítésben az (1.215) mozgást végzi. Ez *ω* és *2ω* körfrekvenciájú harmonikus rezgések szuperpozíciója. Ha a magasabb közelítéseket is figyelembe vettük volna, akkor megjelennének a 3*ω*, 4*ω* s í. t., magasabb frekvenciájú rezgések is. A pontos megoldás végtelen sor alakjában adódik:

$$x(t) = C_0 + C_1 \cos\omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \ldots.$$ (1.216. egyenlet)

Az ilyen rezgéseket, amelyek nem írhatók le egyszerű koszinusz- vagy szinusz-függvénnyel, *anharmonikus rezgéseknek* nevezzük.

Az (1.216) végtelen sor csak akkor adja meg a mozgásegyenlet megoldását, ha az konvergens. Az alkalmazásoknál általában néhány tagig szoktak elmenni, mert a magasabb frekvenciájú rezgések járuléka elhanyagolhatóan kicsi szokott lenni. A számítógépek elterjedésével az ilyen típusú egyenletek ma viszonylag könnyen megoldhatók. Az itt alkalmazott közelítő eljárás viszont szépen megmutatja az anharmonikus rezgések fizikai sajátságát; nevezetesen azt, hogy az alaprezgés *ω* frekvenciáján kívül megjelennek ennek egész számú többszörösei, az ún. felharmonikus rezgések is.

3.6 Anharmonikus kényszerrezgések

A kényszerrezgéseknél érdekes fizikai jelenségek lépnek fel, ha a súrlódási erő és a periodikus gerjesztő erő mellett a rugalmas erő nem lineáris tagjait is figyelembe vesszük. Az egyszerűség kedvéért korlátozódjunk most is a négyzetes tagra. A gerjesztő erőt is általánosabban vesszük fel, mint a 3.4 pontban tettük. Feltesszük, hogy ez két különböző frekvenciájú koszinuszfüggvény összege.

A mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} = -Dx + f_2 x^2 - k\dot{x} + F_{01}\cos\omega_1 t + F_{02}\cos\omega_2 t.$$ (1.217. egyenlet)

m-mel végigosztva, és a korábbi, valamint az

$$\bar{f}_1 = \frac{F_{01}}{m}, \qquad \bar{f}_2 = \frac{F_{02}}{m}$$

jelöléseket használva,

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x - \varepsilon x^2 = \bar{f}_1\cos\omega_1 t + \bar{f}_2\cos\omega_2 t.$$ (1.218. egyenlet)

Az előző pontban követett eljárással az $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$,... függvényekre a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\ddot{x}^{(0)} + 2\alpha\dot{x}^{(0)} + \omega^2 x^{(0)} = \overline{f}_1 \cos\omega_1 t + \overline{f}_2 \cos\omega_2 t,$$
$$\ddot{x}^{(1)} + 2\alpha\dot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} - \varepsilon x^{(0)2} = 0,$$
$$\ddot{x}^{(2)} + 2\alpha\dot{x}^{(2)} + \omega^2 x^{(2)} - 2\varepsilon x^{(0)} x^{(1)} = 0,$$
$$\vdots \qquad \text{(1.219. egyenlet)}$$

Az egyenletrendszer első egyenletének egy partikuláris megoldása (1.194) alapján

$$x^{(0)} = a_1 \cos\omega_1 t + a_2 \cos\omega_2 t, \quad \text{(1.220. egyenlet)}$$

ahol

$$a_i = \frac{\overline{f}_i}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_i^2\right)^2 + 4\alpha^2\omega_i^2}} \qquad (i = 1,\ 2). \qquad \text{(1.221. egyenlet)}$$

Ahhoz, hogy az általános megoldást megkapjuk, ehhez hozzá kell még adnunk a megfelelő homogén egyenlet általános megoldását, amely az $e^{-\alpha t}$ tényező miatt egy idő múlva elhal. Ha a stacionárius megoldásra vagyunk kíváncsiak, akkor ettől eltekinthetünk. Ezért az (1.219) második egyenletébe $x^{(0)}$ helyére most az (1.220) megoldást írjuk. Az $x^{(1)}$ -et meghatározó egyenlet tehát

$$\ddot{x}^{(1)} + 2\alpha\dot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} - \varepsilon\left(a_1^2 \cos^2\omega_1 t + a_2^2 \cos^2\omega_2 t + 2a_1 a_2 \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t\right) = 0. \quad \text{(1.222. egyenlet)}$$

A zárójeles kifejezés átalakításakor vegyük figyelembe a

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \ \text{ és } \ 2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

trigonometriai összefüggéseket. Az (1.222) egyenlet így a következő alakba írható:

$$\ddot{x}^{(1)} + 2\alpha\dot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} = \frac{\varepsilon}{2}\left(a_1^2 + a_2^2\right) + \frac{\varepsilon}{2}a_1^2 \cos 2\omega_1 t + \frac{\varepsilon}{2}a_2^2 \cos 2\omega_2 t +$$
$$+ \varepsilon a_1 a_2 \left[\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t\right]. \qquad \text{(1.223. egyenlet)}$$

Ez a kényszerrezgés differenciálegyenlete, amely az (1.185)-től abban különbözik, hogy a jobb oldalon az egyetlen cos *Ωt* függvény helyett különböző frekvenciájú koszinuszfüggvények szuperpozíciója áll. A 3.4 pontban követett eljárással meghatározható az egyenlet megoldása, amelyre a következőt kapjuk:

$$x^{(1)} = A + A_1(\omega,\ \omega_1)\cos 2\omega_1 t + A_2(\omega,\ \omega_2)\cos 2\omega_2 t + A_3(\omega,\ \omega_1,\ \omega_2)\cos(\omega_1 + \omega_2)t + A_4(\omega,\ \omega_1,\ \omega_2)\cos(\omega_1 - \omega_2)t, \quad \text{(1.224. egyenlet)}$$

ahol az A_i, amplitúdók:

$$A_1 = \frac{\varepsilon\alpha_1^2}{2\sqrt{\left(\omega^2 - 4\omega_1^2\right)^2 + 16\alpha^2\omega_1^2}},$$ (1.225. egyenlet)

$$A_2 = \frac{\varepsilon\alpha_2^2}{2\sqrt{\left(\omega^2 - 4\omega_2^2\right)^2 + 16\alpha^2\omega_2^2}},$$ (1.226. egyenlet)

$$A_3 = \frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{2\sqrt{\left[\omega^2 - \left(\omega_1 + \omega_2\right)^2\right]^2 + 4\alpha^2\left(\omega_1 + \omega\right)^2}},$$ (1.227. egyenlet)

$$A_4 = \frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{\sqrt{\left[\omega^2 - \left(\omega_1 - \omega_2\right)^2\right]^2 + 4\alpha^2\left(\omega_1 - \omega\right)^2}}$$ (1.228. egyenlet)

A kényszerrezgés nemlineáris (1.218) mozgásegyenletének a megoldása első közelítésben tehát

$$x = x^{(0)} + x^{(1)} = a_1\cos\omega_1 t + a_2\cos\omega_2 t + A_1\cos 2\omega_1 t + A_2\cos 2\omega_2 t + A_3\cos\left(\omega_1 + \omega_2\right)t + A_4\cos\left(\omega_1 - \omega_2\right)t + A.$$ (1.229. egyenlet)

Ez olyan anharmonikus rezgést ír le, amelyben a gerjesztő erő ω_1 és ω_2 körfrekvenciájával történő rezgéseken kívül a $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1+\omega_2$ és $\omega_1 - \omega_2$ frekvenciájú rezgések is megjelennek. Ha figyelembe vennénk magasabb közelítéseket, akkor az ω_1 és ω_2 mellett fellépnének $n_1\omega_1 \pm n_2\omega_2$ frekvenciájú rezgések is (n_1, *és* n_2 egész számok). Ezeket *kombinációs frekvenciáknak,* illetve *kombinációs rezgéseknek* hívjuk. A kombinációs rezgések tehát akkor keletkeznek, ha a tömegpont két különböző frekvenciájú periodikus gerjesztőerő hatására olyan nagy kitéréssel rezeg, hogy a rugalmas erő lineáris törvénye már nem érvényes. Az ilyen rezgéseknek a híradástechnikai hangátvitelnél van nagy jelentőségük, különösen a torzításmentes zenei adásokban.

A magasabb közelítések kiszámításától eltekintünk, mert ott a jelenség fizikai jellege már az első közelítésből is látható, és a magasabb közelítések csupán az eredmény pontosságát növelik.

4. Centrális mozgások

A természetben gyakran találkozunk olyan erőkkel, amelyek egy pont felé irányulnak. Ha ezt a pontot, az ún. erőcentrumot választjuk az *O* vonatkoztatási pontnak vagy a koordinátarendszerünk kezdőpontjának, akkor a centrális erők párhuzamosak a tömegpont helyvektorával: **F**||**r**. Az ilyen erők hatására létrejövő mozgásokat nevezzük *centrális mozgásoknak.* Ezeknél a mozgásoknál az impulzusnyomaték a 2.7 pont szerint állandó.

Ebből következik, hogy a mozgás pályája egy síkban van. Másrészt minden centrális mozgásra igaz, hogy az ún. területi sebesség állandó. Nézzük meg ezt részletesebben.

A centrális mozgások elméleti leírásához célszerű síkbeli polárkoordinátákat használni. Az impulzusnyomaték állandó vektorára merőleges síkban az erő centrumát tekintjük *O* vonatkoztatási pontnak, és választunk egy irányt, amelytől számítjuk a *φ* szöget. A tömegpont helyét az *r* rádiuszvektorral és a *φ* szöggel adjuk meg. Az erőnek ebben a koordináta-rendszerben csak *r* irányú összetevője van:

$$F_r = F, \qquad F_\varphi = 0.$$ (1.230. egyenlet)

A tömegpont mozgásegyenletei:

$$ma_r = F \qquad ma_\varphi = 0.$$ (1.231. egyenlet)

Az első egyenlet csak akkor oldható meg, ha ismerjük az erőt. A második viszont minden centrális mozgásra igaz, az erő konkrét alakjától függetlenül. Ezért belőle a centrális mozgásokra általában érvényes tétel adódik. A gyorsulás a_φ komponensének (1.32) kifejezését figyelembe véve, az (1.231) második egyenletéből kapjuk, hogy

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0.$$

Ebből

$$r^2\dot{\varphi} = \text{áll.}$$ (1.232. egyenlet)

Könnyen belátható, hogy a baloldal a rádiuszvektor által a mozgás során időegység alatt súrolt terület, az ún. területi sebesség kétszeresével egyenlő. Ehhez gondoljuk el, hogy a tömegpont *t* időpontban az *r, φ* koordinátájú pontban volt, és *Δt* idő múlva az *r+Δr, φ+Δφ* koordinátájú pontba jutott. A két rádiuszvektor és a *Δr* elmozdulás által határolt terület nagysága

$$\Delta f = \frac{1}{2}(r + \Delta r) r \sin\Delta\varphi \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi.$$

Képezzük a *Δf/ Δt* határértékét, amidőn *Δt* →0:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}.$$ (1.233. egyenlet)

A bal oldali határértéket *területi sebességnek* nevezzük. Az (1.232)-vel összevetve látszik, hogy a területi sebesség valóban az erő konkrét alakjától függetlenül minden centrális mozgásnál állandó.

Kepler a bolygók mozgására vonatkozóan ezt a tételt tapasztalati úton már Newton előtt felismerte. Ez a róla elnevezett második tétel. A mechanika Newton-féle mozgás-törvényeinek a hatásos voltát már ez is szembetűnően mutatja, mert mint látjuk, a második mozgásegyenletből ez a tétel minden centrális mozgásra érvényes jelleggel milyen egyszerűen adódik. Még ennél is hatásosabb a bolygók mozgásának teljes dinamikai leírása a gravitációs erőtörvény és a mozgásegyenlet alapján.

4.1 A bolygók mozgásának dinamikai leírása

A bolygóknak a Nap hatására történő mozgását fogjuk tanulmányozni a mozgásegyenletek megoldásával. A bolygó tömegét *m*-mel, a Napét *M*-mel jelöljük, és mindkettőt pontszerűnek tekintjük. Mivel a Nap *M* tömege sokkal nagyobb a bolygó *m* tömegénél, azt a közelítő feltevést tesszük, hogy a Napot nyugvónak tételezzük fel, és a koordináta-rendszerünk origójába képzeljük. Megjegyezzük, hogy ez csak közelítés, mert valójában a Nap is mozog az inerciarendszerben. A pontos számítást a 10.1 pontban végezzük el.

A Nap a bolygóra az általános tömegvonzás törvénye szerint az (1.104) gravitációs erőt fejti ki:

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$ (1.234. egyenlet)

Ez az erő centrális, ezért a bolygó pályája síkban van, és érvényes az (1.232) össze-függés, vagyis a területi sebesség állandó. Az állandó értéket λ-val jelölve,

$$r^2\dot{\varphi} = \lambda.$$ (1.235. egyenlet)

A bolygó mozgásának leírásához célszerű síkbeli polárkoordinátákat használni. A megoldandó mozgásegyenletek:

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = -\gamma\frac{mM}{r^2},$$ (1.236. egyenlet)

$$m\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0.$$ (1.237. egyenlet)

Az utóbbit már megoldottuk az előző pontban, és az (1.235) eredményt kaptuk. Feladatunk tehát az (1.236) differenciálegyenlet megoldásával a pálya *r=r(φ)* egyenletét meghatározni. Ezért az idő szerinti differenciálhányadosokat kifejezzük *φ* szerint vett deriváltakkal:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$$ (1.238. egyenlet)

Az (1.235) felhasználásával,

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{\lambda}{r^2}.$$ (1.239. egyenlet)

Az *r* helyett áttérünk a reciprokára, mert így az (1.236) egyszerűbb alakot vesz fel:

$$u = \frac{1}{r}.$$ (1.240. egyenlet)

Ekkor

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}\lambda u^2 = -\lambda\frac{du}{d\varphi},$$

$$\ddot{r} = -\lambda^2 u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}.$$

Ezeket az (1.236) egyenletbe helyettesítve, a következőt kapjuk:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\gamma M}{\lambda^2}.$$ (241. egyenlet)

Mivel a $\frac{\gamma M}{\lambda^2}$ állandó, annak *φ* szerinti differenciálhányadosa zérus, és így (1.241) a következőképpen írható:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(u - \frac{\gamma M}{\lambda^2}\right) + u - \frac{\gamma M}{\lambda^2} = 0.$$ (1.242. egyenlet)

Ugyanilyen alakú egyenlettel már találkoztunk a harmonikus rezgőmozgásnál, ezért a megoldás egyszerűen felírható:

$$u - \frac{\gamma M}{\lambda^2} = A\cos(\varphi + \alpha)$$

Ebből az *r* kifejezhető a *φ*-vel:

$$r = \frac{\lambda^2}{\gamma M}\frac{1}{1 + \frac{A\lambda^2}{\gamma M}\cos(\varphi + \alpha)}.$$ (1.243. egyenlet)

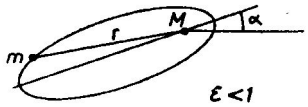
Bevezetve a

$$p = \frac{\lambda^2}{\gamma M}, \qquad \varepsilon = \frac{A\lambda^2}{\gamma M}$$ (1.244. egyenlet)

jelöléseket,

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi + \alpha)}.$$ (1.245. egyenlet)

15. ábra -



Ez kúpszelet egyenlete síkbeli polárkoordinátákban. A matematikából ismert, hogy az ε numerikus excentricitástól függően a kúpszelet lehet ellipszis, hiperbola vagy parabola. Nevezetesen, ha

$\varepsilon < 1$ akkor ellipszis,
$\varepsilon = 1$ esetén parabola, és
$\varepsilon > 1$ esetben hiperbola. (1.246. egyenlet)

Az ε = 0-nál r = áll., tehát a pálya kör.

Ezek a feltételek kifejezhetők a tömegpont energiájával is. A számolás egyszerűsítése céljából vegyük α-t zérusnak, vagyis a polártengely iránya egyezzék meg a nagytengely irányával.

A gravitációs erő konzervatív, a mozgási és potenciális energia összege állandó, ezért az a pálya bármely pontjában ugyanaz. Számítsuk ki az energiát a pálya olyan pontjában, ahol a képletek egyszerűek. Ilyen a Naphoz legközelebbi pont, mert itt φ = 0, és így

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon}, \qquad v_0^2 = r_0^2 \dot{\varphi}_0^2 = r_0^2 \frac{\lambda^2}{r_0^4} = \frac{\lambda^2 (1 + \varepsilon)^2}{p^2}.$$ (1.247. egyenlet)

A bolygó mechanikai energiája ebben a pontban

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{mM}{r} = \frac{1}{2}m\lambda^2\frac{(1+\varepsilon)^2}{p^2} - \gamma mM\frac{1+\varepsilon}{p} = \frac{m\lambda^2}{2p^2}\left(\varepsilon^2 - 1\right).$$ (1.248. egyenlet)

Ebből látszik, hogy a pálya alakját a tömegpont energiája szabja meg. Eszerint és

ellipszis a pálya, ha $E < 0$,
parabola, ha $E = 0$ és
hiperbola, ha $E > 0$. (1.249. egyenlet)

A körpálya az ellipszisnek speciális esete, ekkor $E = \frac{1}{2}E_p' < 0$.

A bolygók esetében az $E < 0$ valósul meg, azok tehát ellipszispályán mozognak. Az ellipszis egyik gyújtópontjában van a Nap. Ez Kepler első törvénye. A mechanika mozgásegyenletei tehát igazolják Kepler tapasztalati úton szerzett felismeréseit, de tovább is mennek rajtuk, mert − mint látjuk − a gravitációs erő hatására mozgó tömegpont pályája csak negatív energia esetében lesz ellipszis. Ha az energia zérus vagy pozitív, akkor a pálya parabola, illetve hiperbola lesz. A mesterséges égitesteknél a kezdősebesség megválasztásával elérhető, hogy a mozgási energia egyenlő vagy nagyobb legyen a potenciális energiánál. Ekkor a test parabola- vagy hiperbola-pályán mozogva eltávolodik az erőcentrumtól (pl. mesterséges égitestek esetén a Földtől).

Ellipszispálya esetén könnyen kiszámítható a bolygó T keringési ideje. A területi sebesség (1.232) és (1.235) szerint a λ állandó fele:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\lambda}{2}.$$

Egy teljes keringés időtartamára integrálva,

$$f_T = \frac{\lambda}{2}T$$ (1.250. egyenlet)

adódik. Az ellipszis f_T területe $f_T = ab\pi$, ha a-, b-vel jelöljük a nagy-, illetve kistengely felét. Ebből

$$T = \frac{2\pi ab}{\lambda}.$$ (1.251. egyenlet)

Az a és b féltengelyek az ε numerikus excentricitással és a p paraméterrel a geometriából ismert módon fejezhetők ki:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \qquad p = \frac{b^2}{a}.$$ (1.252. egyenlet)

Az (1.251) egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve, (1.252) és (1.244) figyelembevételével adódik, hogy

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}.$$ (1.253. egyenlet)

A jobb oldalon az univerzális állandókon kívül csak a Nap tömege szerepel, ezért a T^2/a^3 mennyiség a Nap minden bolygójára ugyanaz az érték. Ez Kepler harmadik törvénye, amely két bolygóra vonatkoztatva így írható:

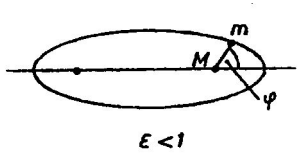
$$T_1^2 : T_2^2 = a_1^2 : a_2^3.$$ (1.254. egyenlet)

Szavakkal kifejezve: a bolygók keringési időinek négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint a félnagytengelyek köbei.

Megjegyezzük, hogy a bolygók mozgásának pontosabb tárgyalása, amely figyelembe veszi a Nap mozgását is, az (1.253) egyenlet helyett olyan összefüggésre vezet, amelyben a jobb oldalon a bolygó tömege is megjelenik, és így a T^2/a^3 már nem ugyanaz az érték minden bolygóra, hanem bolygónként más. Kepler harmadik törvénye tehát csak az itt használt közelítésben igaz.

A bolygók mozgásának dinamikai leírásánál az (1.236) mozgásegyenletben csak a Nap vonzóerejét vettük tekintetbe. A valóságban a többi bolygó is hat a vizsgált bolygóra az (1.234) alakú gravitációs erővel (M helyett most a másik bolygó tömege veendő). Ezeknek az erőhatásoknak az az eredménye, hogy a bolygó ellipszispályája lassan elfordul, a pálya (1.245) egyenletében szereplő a fázisszög tehát függ az időtől. Éppen ez a jelenség vezetett újabb bolygók felfedezéséhez. A tapasztalat szerint a Naphoz legközelebbi bolygónak, a Merkúrnak a pályája 100 év alatt kb. 574 ívmásodperccel fordul el. Ebből 531-et a többi bolygó hatásával értelmezni lehetett. A hiányzó 43-at a klasszikus mechanika alapján nem sikerült megmagyarázni. Itt csupán megemlítjük, hogy az általános relativitáselmélet a tapasztalattal egybehangzóan ad magyarázatot erre a kérdésre. A gravitáció e modern elméletének éppen ez volt az egyik alapvető kísérleti bizonyítéka.

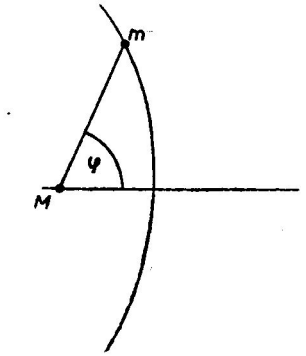
16. ábra -



Térjünk vissza a pálya (1.245) egyenletéhez, és válasszuk a polártengelyt a nagytengely irányában, tehát legyen $\alpha = 0$. Ekkor

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}.$$ (1.255. egyenlet)

17. ábra -



Az $\varepsilon < 1$ esetben, vagyis amikor $E_k < |E_p|$, a fentiek szerint ez olyan ellipszispályát ír le, amelynek a 16. ábra szerinti jobb oldali gyújtópontjában van a Nap. A $\varphi = 0$ a Naphoz legközelebbi, a $\varphi = \pi$ pedig a legtávolabbi pontot határozza meg:

$$r_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon} = a(1-\varepsilon),$$
$$r_{max} = \frac{p}{1-\varepsilon} = a(1+\varepsilon),$$ (1.256. egyenlet)

ahol a az ellipszis nagytengelyének a fele.

Ha $\varepsilon > 1$, vagyis $E_k > |E_p|$, a pálya hiperbola, amely az erő centrumát a 17. ábrának megfelelően veszi körül. Az erőcentrumhoz legközelebbi pont távolsága a $\varphi = 0$-nak felel meg:

$$r_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon} = a(\varepsilon-1),$$ (1.257. egyenlet)

ahol

$$a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}$$ (1.258. egyenlet)

a hiperbola féltengelye.

Az $\varepsilon = 1$, azaz $E_k = |E_p|$ esetén a pálya parabola. Ekkor a pályának az erő centrumától számított legrövidebb távolsága ($\varphi = 0$):

$$r_{\min} = \frac{p}{2}.$$ (1.259. egyenlet)

4.2 Taszító centrális erő hatására mozgó tömegpont

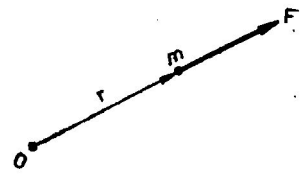
Gondoljunk egy olyan centrális erőtérre, amelyben a tömegpontra ható erő a centrumtól számított r távolság négyzetével fordítva arányos és taszító:

$$F = \frac{\varkappa}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r},$$ (1.260. egyenlet)

ahol $\varkappa > 0$ állandó. Az erőtér potenciálja:

$$V = \frac{\varkappa}{r}.$$ (1.261. egyenlet)

18. ábra -



Ilyen erő hat két pontszerű azonos nemű töltés (pl. atommag és alfa rész) között. Ekkor $\varkappa = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0}$, ahol Q_1, Q_2 a két töltés, ε_0 a vákuum dielektromos együtthatója. Vizsgáljuk meg, milyen pályán mozog a tömegpont az (1.260) erő hatására.

A mozgásegyenletek:

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = \frac{\varkappa}{r^2}.$$
$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0.$$ (1.262. egyenlet)

A második egyenlet − mint már láttuk − minden centrális mozgásra ugyanaz, és belőle a területi sebesség állandósága következik:

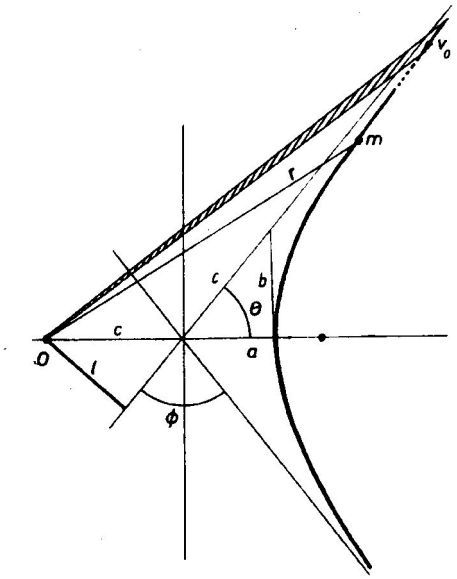
$r^2\dot{\varphi} = \lambda.$ (1.263. egyenlet)

Az első egyenlet ugyanúgy oldható meg, mint az előző pontban az (1.236). Ezért csak a végeredményt közöljük. Az (1.260) erő hatására mozgó tömegpont pályája

$$r = \frac{p}{-1+\varepsilon\cos(\varphi+\alpha)},$$ (1.264. egyenlet)

$$p = \frac{m\lambda^2}{\varkappa}, \qquad \varepsilon = Ap.$$ (1.265. egyenlet)

19. ábra -



Ez olyan hiperbolaágnak az egyenlete, amelynek külső gyújtópontja az erőcentrum. A polártengely alkalmas megválasztásával a zérussá tehető. Ekkor

$$r = \frac{p}{-1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$ (1.266. egyenlet)

Az erőcentrumhoz legközelebbi pont a φ = 0-nál van:

$$r_{\min} = \frac{p}{\varepsilon - 1} = a\left(\varepsilon + 1\right),$$ (1.267. egyenlet)

ahol

$$a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}$$ (1.268. egyenlet)

a hiperbola féltengelye. A végtelenből v_0 kezdősebességgel jövő tömegpont az (1.260) taszítóerő hatására hiperbolán mozogva eltérül az erőcentrum közelében. Ha nem hatna a taszítóerő, akkor a tömegpont irányváltoztatás nélkül *l* távolságra közelítené meg az *O* centrumot. Az eltérítés mértékét az aszimptoták közötti Φ szöggel jellemezhetjük. Mivel a 19. ábra szerint $\Phi + 2\Theta = \pi$, továbbá

$$\cos \Theta = \frac{1}{\varepsilon},$$ (1.269. egyenlet)

ezért

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}.$$ (1.270. egyenlet)

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy az eltérítés szöge hogyan függ a taszítóerő erősségétől és a kezdeti sebességtől. Ezért a jobb oldalt átalakítjuk a geometriából ismert összefüggések felhasználásával. Ehhez felidézzük a hiperbolára vonatkozó fontosabb egyenlőségeket:

$$a^2 + b^2 = c^2, \qquad \varepsilon = \frac{c}{a}, \qquad p = \frac{b^2}{a}.$$ (1.271. egyenlet)

A betűk jelentése a 19. ábráról leolvasható. Ezek alapján adódik, hogy

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{p^2}{b^2}.$$ (1.272. egyenlet)

Az ábrán látható két derékszögű háromszög egybevágó, ezért *b=l.* Másrészt a területi sebesség értelmezéséből következik, hogy

$\lambda = v_0 l.$ (1.273. egyenlet)

Ezeket az (1.270)-be behelyettesítve, az eltérítés szögére kapjuk, hogy

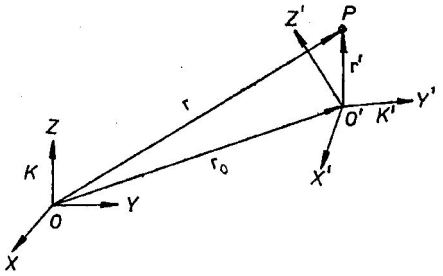
$$\Phi = 2\text{arc tg}\frac{\varkappa}{mv_0^2 l}.$$ (1.274. egyenlet)

A nevezőben szereplő mv^2 tömegpont kezdeti mozgási energiájának kétszerese. Az(1.274)-ből látszik, hogy a taszítóerő annál nagyobb szögben téríti el a tömegpontot, minél nagyobb a $\varkappa$, vagyis az erő erőssége, és minél kisebb a tömegpont kezdeti sebessége vagy mozgási energiája.

5. A mozgásegyenletek gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben

A mechanika mozgásegyenletei a megismert alakjukban csak inerciarendszerekben igazak. A mindennapi életben azonban legtöbbször olyan mozgásokkal találkozunk, amelyek leírására célszerűbbnek mutatkoznék egy nem-inerciarendszer. Gondoljuk csak meg, hogy mi a forgó Földön élünk, és minden mozgást, amit megfigyelünk, ebből a forgó vonatkoztatási rendszerből szemlélünk. Szükségszerűen vetődik tehát fel a kérdés, hogy milyen törvény szerint mennek végbe a mozgások nem-inerciarendszerekben. Most erre a kérdésre keressük a választ.

20. ábra -



Gondoljunk el egy inerciarendszert, amelyet *K*-val jelölünk, és egy másik vonatkoztatási rendszert, amely az inerciarendszerhez képest forog. Utóbbit *K′*-vel jelöljük. Mindegyikben felveszünk egy-egy derékszögű koordináta-rendszert, amelyek tengelyei *x, y, z,* illetve *x′, y′, z′.* A *K′* rendszer *O′* középpontjának helyét a *K*-ban az $\mathbf{r}_0$ vektorral adjuk meg. Egyelőre feltesszük, hogy *K′* transzlációs mozgást nem végez, hanem csak forog az *O′*-n átmenő valamilyen tengely körül. Tekintsünk egy *P* pontot, amely *K′*-vel együtt forog és ennek következtében *Δt* idő alatt elfordul *Δφ* szöggel. Ha *Δt* kicsi, akkor a *Δ***r** elmozdulás nagysága a megfelelő *Δs* körívvel helyettesíthető. Ezért

$$|\Delta\mathbf{r}| \sim \Delta s = r' \Delta\varphi \sin\vartheta.$$ (1.275. egyenlet)

Ha a *Δφ*-t forgástengely irányú és *Δφ* nagyságú vektornak fogjuk fel,* akkor a ***Δr=Δφ*×r'.** A forgásból származó *Δ***r** elmozdulásnak ez a kifejezése *Δ***r**-nek mind a nagyságát, mind az irányát helyesen adja meg. A forgási sebesség nagysága:

$$v_f = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = r' \sin \vartheta \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}.$$

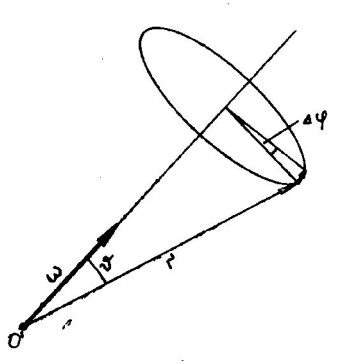
A $\dot{\varphi}$ szögsebességet *ω*-val jelölve,

$v_f = r' \omega \sin \vartheta$ (1.276. egyenlet)

Ha a szögsebességet forgástengely irányú vektornak fogjuk fel, akkor az (1.276) jobb oldala az **ω**×**r'** vektori szorzat nagyságával egyezik meg. A 21. ábráról látszik, hogy a vektori szorzat tényezőinek ilyen sorrendjét véve a $\mathbf{v}_f$ sebességvektor irányát is helyesen kapjuk. A forgásból származó sebesség tehát

$\mathbf{v}_f = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$. (1.277. egyenlet)

21. ábra -



Ha a *P* pont a *K'* rendszerrel együtt még transzlációs mozgást is végez $\mathbf{v}_0$ sebességgel, akkor a *K*-ra vonatkoztatott sebessége $\mathbf{v}_0+\mathbf{v}_f$. Tegyük fel, hogy a *P*-beli tömegpont a *K'*-höz képest is mozog **v'** sebességgel. Ebben az esetben a *K* inerciarendszerbeli **v** sebessége e három sebesség összege lesz:

$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_f$. (1.278. egyenlet)

A sebességvektorok definícióját figyelembe véve, ez az összefüggés a következőképpen írható:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$ (1.279. egyenlet)

A jobb oldal első tagjában a *d'*-vel azt hoztuk kifejezésre, hogy ez a sebesség a tömegpontnak a *K'* rendszerre vonatkoztatott sebessége. A 20. ábráról leolvasható

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0$$ (1.280. egyenlet)

összeget az idő szerint differenciálva, a következő egyenlőségre jutunk:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}.$$ (1.281. egyenlet)

Ezt (1.279)-cel összevetve, a

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$ (1.282. egyenlet)

fontos összefüggést kapjuk. A bal oldalon az **r'** vektornak a *K* rendszerben mért időegységre eső megváltozása van, a jobb oldali első tag pedig ugyanennek a vektornak a *K'*-beli időegységre vett megváltozását jelenti. E kettő nem egyezik meg egymással, mert az **r'** vektor a *K*-ban forog is, a *K'*-ben viszont nem. Az (1.282) összefüggés nemcsak az **r'** helyvektorra igaz, hanem bármely a *K'*-ben vett **V'** vektorra:

$$\frac{d\mathbf{V}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{V}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}'.$$ (1.283. egyenlet)

Érdemes megjegyezni, hogy a forgástengely irányú vektorokra a vektoriális szorzat zérus, mert párhuzamos vektorokról van szó, és ezért az ilyen vektoroknak a *K,* illetve a *K'* vonatkoztatási rendszerben mért időegységre eső megváltozása megegyezik. Az **ω** szögsebességvektor ilyen tulajdonságú:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}'}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{\omega}'}{dt}.$$

Az (1.278) idő szerinti differenciálásával a két rendszerben mért gyorsulások közötti kapcsolatot kapjuk meg:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_f}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt}.$$ (1.284. egyenlet)

A jobb oldal első és utolsó tagjában a *K'*-ben vett vektorok idő szerinti differenciál-hányadosai vannak, ezekre az (1.283) tételt alkalmazva,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' + \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'\right).$$

A bal oldal a tömegpont gyorsulása a *K* rendszerben. A jobb oldal első tagja pedig a *K'*-ben mért gyorsulás. Előbbit **a**-val, utóbbit **a'**-vel jelölve,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0 + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'\right) + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}'.$$ (1.284. egyenlet)

$\mathbf{a}_0$ a *K'* rendszernek a *K*-ra vonatkoztatott transzlációs gyorsulása.

A tömeggel megszorozva és átrendezve, adódik :

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - m\mathbf{a}_0 - 2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'\right) - m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}'.$$ (1.285. egyenlet)

A *K* rendszer feltevésünk szerint inerciarendszer, ezért $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$. Ezt figyelembe véve,

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 - 2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'\right) - m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}'.$$ (1.286. egyenlet)

Ebből az egyenletből egyrészt következik, hogy a *K'* rendszer nem inerciarendszer, mert **F** = 0 esetén a tömegpont **a'** gyorsulása nem zérus, tehát nem érvényes benne a tehetetlenség elve; másrészt a mozgásegyenletek alakja is más, mint az inerciarendszerekben. A tömegpont **a'** gyorsulása nemcsak a ható **F** erőtől származik, hanem a vonatkoztatási rendszer mozgásállapotától is függ. Az (1.286) egyenlet írja le a tömegpont dinamikáját a *K'* gyorsuló vonatkoztatási rendszerben. Az **F** erő melletti négy tagnak a hatása olyan, mintha további erők lépnének fel, hiszen megváltoztatják a tömegpont sebességét. Ha ezeket is erőknek tekintjük és $\mathbf{F}_t$-vel jelöljük, akkor az (1.286) mozgásegyenlet a gyorsuló rendszerekben is szokásos alakú lesz, csak az egyenlet jobb oldalán az $\mathbf{F}+\mathbf{F}_t$ eredő erő szerepel. $\mathbf{F}_t$-t *tehetetlenségi erőnek* nevezzük. Az elnevezés abból ered, hogy az inerciarendszerben tehetetlenségi (erőmentes) mozgást végző tömegpontra a *K'* rendszerben az $\mathbf{F}_t$ erő hat, és ez okozza annak **a'** gyorsulását. Tehát

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_t,$$ (1.287. egyenlet)

ahol

$$\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_0 - 2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'\right) - m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}'.$$ (1.288. egyenlet)

Az első tag a vonatkoztatási rendszer transzlációs gyorsulásából származik, ezért ezt transzlációs tehetetlenségi erőnek hívjuk. A második tag az ún. *Coriolis-erő,* amely akkor lép fel, ha a *K'* rendszer forog (ω) és benne a tömegpont mozog (v') A harmadik tag az ún. *centrifugális erő.* Ez a

vonatkoztatási rendszer forgásából származik és – ellentétben a Coriolis-erővel – akkor is fellép, ha a tömegpont nem mozog a forgó rendszerben. Az utolsó tag csak akkor fordul elő, ha a vonatkoztatási rendszer nem egyenletesen (tehát gyorsulással, $\dot{\omega} \neq 0$) forog.

Nézzük a tehetetlenségi erőket és azok hatását külön-külön. A $-m\mathbf{a}_0$ transzlációs erő mindennapi tapasztalatunkból ismert, mert ezt érezzük hirtelen induló vagy fékező járművön.

A forgó Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben mind a Coriolis-erő, mind a centrifugális erő fellép. Az

$$\mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$ (1.289. egyenlet)

Coriolis-erő merőleges az **ω** szögsebességvektorra és a **v'** sebességre, ezért ez a tömegpontot a **v'** haladási iránytól igyekszik eltéríteni. Például ebből származik a lövedékeknek a kilövés irányától való oldalirányú (nem függőleges) eltérése. Ugyancsak emiatt mossák a folyók a meder egyik oldalát jobban, mint a másikat. Ezekre a következő pontban részletesen visszatérünk. A Coriolis-erő nagysága:

$$\mathbf{F}_c = 2m\omega v' \sin \vartheta,$$ (1.290. egyenlet)

ahol ϑ a sebességnek a forgástengellyel bezárt szöge.

A centrifugális erő a vektoriális szorzat értelméből következően a forgástengelyre merőleges, sugárirányban kifelé mutató erő:

$$\mathbf{F}_{cf} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = m\omega^2 \mathbf{s}.$$ (1.291. egyenlet)

Itt **s** a forgástengelytől a tömegponthoz mutató vektor, amelynek nagysága a pontnak a tengelytől mért távolsága. A Föld forgása következtében fellépő centrifugális erő okozza a Föld alakjának a gömbtől való eltérését, valamint a nehézségi gyorsulásnak a földrajzi szélességgel való változását, ugyanis az $m\mathbf{g}$ földi nehézségi erő a Földtől származó gravitációs erőnek és a centrifugális erőnek az eredője:

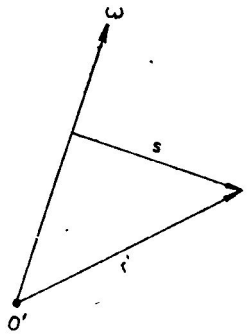
$$m\mathbf{g} = \mathbf{F}_{gr} + m\omega^2 \mathbf{s}.$$ (1.292. egyenlet)

Ha a Föld tömegét *M*-mel, sugarát *R*-rel jelöljük, akkor a Föld felszínén levő *m* tömegpontra ható, középpont felé mutató gravitációs erő

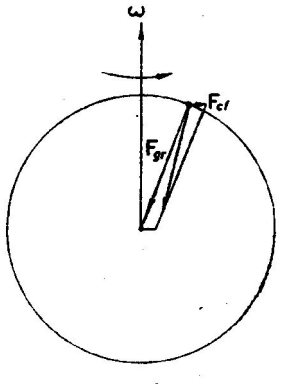
$$\mathbf{F}_{gr} = -\gamma \frac{Mm}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R},$$ (1.293. egyenlet)

ahol **R**/**R** a sugárirányú egységvektor.

22. ábra -



23. ábra -



Mivel (1.292) szerint ehhez hozzáadódik a forgástengelyre merőleges, kifelé mutató $m\omega^2\mathbf{s}$ centrifugális erő, e két erővektor eredője − és így a **g** nehézségi gyorsulás is − nem teljesen a középpont felé irányul. A Föld felületi pontjainak érintősíkja merőleges az eredő erőre, és emiatt a felület nem gömb, hanem ún. *geoid.*

5.1 Tömegpont mozgása a Földdel együttforgó vonatkoztatási rendszerben

Az előző pontban megismert (1.286) mozgásegyenlet alkalmazásaként most a szabadesést tanulmányozzuk a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben. A kísérleti ellenőrzés eleve ebben a rendszerben történik, mert a mérőeszközök a földi laboratóriumhoz vannak kötve. A mozgásegyenletek megoldása a szabadesés pontos leírását adja, és látni fogjuk, hogy ez eltér a 3.1 pontban kapott eredménytől, amely inerciarendszerben igaz.

A megoldandó mozgásegyenlet:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + 2m\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega} \quad \text{(1.294. egyenlet)}$$

Mivel végig a *K′* rendszerben számolunk, a mennyiségek mellől a ' jelet elhagytuk. Az m**g** nehézségi erőn most az (1.292) eredő erőt értjük, **ω** pedig a Föld forgásának szögsebessége. Iránya a Föld forgástengelye, nagysága:

$$\omega = \frac{2\pi}{86164}\,s^{-1} = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\,s^{-1}. \quad \text{(1.295. egyenlet)}$$

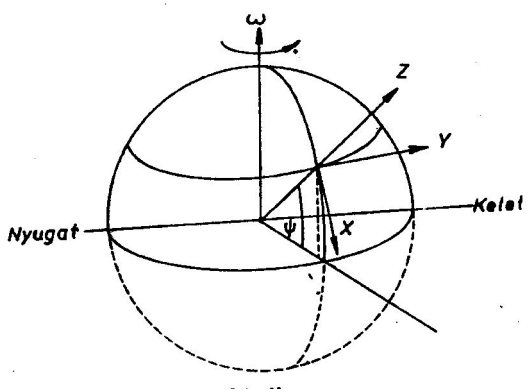
Derékszögű koordináta-rendszert használunk, amelynek *z* tengelye függőlegesen felfelé mutat. Az *x* tengely a *ψ* földrajzi szélességű ponton átmenő délkör északról dél felé mutató érintője; az *y* tengely a szélességi kör érintője nyugatról kelet felé irányítva.

A mozgásegyenletben szereplő vektorok összetevői ebben a koordináta-rendszerben a következők:

	x	y	z
$\mathbf{g}$	0	0	$-g$
$\mathbf{r}$	x	y	z
$\boldsymbol{\omega}$	$-\omega\cos\psi$	0	$-\omega\sin\psi$

(1.296. egyenlet)

24. ábra -



A tömeggel elosztott (1.294) differenciálegyenlet komponensekben felírva,

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y}\sin\psi, \quad \text{(1.297a. egyenlet)}$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\psi - 2\omega\dot{z}\cos\psi, \quad \text{(1.297b. egyenlet)}$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega\dot{y}\cos\psi. \quad \text{(1.297c. egyenlet)}$$

A szabadesést tárgyaljuk, ezért a kezdeti feltételek t = 0-kor

$$x(0) = y(0) = 0, \qquad z(0) = h;$$
$$\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0. \quad \text{(1.298. egyenlet)}$$

Az (1.297a) és (1.297c) egyenletek egyszeri integrálásával adódik:

$$\dot{x} = 2\omega y\sin\psi + a_1,$$
$$\dot{z} = -gt + 2\omega y\cos\psi + a_3. \quad \text{(1.299. egyenlet)}$$

A kezdeti feltételek figyelembevételével az integrálási állandók zérusnak adódnak: $a_1 = a_3 = 0$.

Az $\dot{x}$ és $\dot{z}$ (1.299) kifejezését (1.297b)-be helyettesítve, az y koordináta időfüggését meghatározó egyenletet kapjuk:

$$\ddot{y} = -4\omega^2 y + 2\omega \cos\psi g t.$$ (1.300. egyenlet)

Ez inhomogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet, amelynek általános megoldása a megfelelő homogén egyenlet

$$y_h = A\sin 2\omega t + B\cos 2\omega t$$ (1.301. egyenlet)

általános megoldásának és az (1.300) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának az összege.

Az inhomogenitást okozó tag az időnek lineáris függvénye, ezért a megoldást is lineáris függvény alakjában keressük. Legyen ennek megfelelően

$$y_{inh} = Ct.$$ (1.302. egyenlet)

A *C* állandót úgy kell megválasztani, hogy az (1.300) egyenlet teljesüljön. Az (1.302)-t (1.300)-ba helyettesítve, *C*-re egyszerű algebrai egyenletet kapunk:

$$0 = -4\omega^2 Ct + 2\omega g t \cos\psi,$$

amiből

$$C = \frac{g\cos\psi}{2\omega}.$$ (1.303. egyenlet)

Az (1.300) egyenlet általános megoldása:

$$y = A\sin 2\omega t + B\cos 2\omega t + \frac{g\cos\psi}{2\omega} t.$$

Az *A* és *B* állandókat az (1.298) kezdeti feltételekből határozzuk meg. Így adódik

$$A = -\frac{g\cos\psi}{4\omega^2} \quad \text{és} \quad B = 0.$$ (1.304. egyenlet)

Tehát

$$y(t) = \frac{g\cos\psi}{2\omega}\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right).$$ (1.305. egyenlet)

Ez a függvény adja meg a szabadon eső tömegpont *y* koordinátájának időfüggését. Ezt az (1.299) egyenletekbe helyettesítve, egyszerű integrálással adódik az *x*(*t*) és *z*(*t*). Ugyanis

$$\dot{x} = g \sin\psi \cos\psi \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right),$$

amiből

$$x = g \sin\psi \cos\psi \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\cos 2\omega t}{4\omega^2} \right) + b_1.$$

A kezdeti feltétel miatt

$$b_1 = -\frac{g \sin\psi \cos\psi}{4\omega^2}.$$

Így

$$x(t) = g \sin\psi \cos\psi \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\cos 2\omega t - 1}{4\omega^2} \right).$$ (1.306. egyenlet)

Hasonlóképpen kapjuk a kezdeti feltételt is kielégítő *z* koordinátát:

$$z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 + g \cos^2\psi \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\cos 2\omega t - 1}{4\omega^2} \right).$$ (1.307. egyenlet)

Az (1.305)−(1.307) egyenletek a szabadon eső tömegpont pályáját írják le a Föld-del együttforgó derékszögű koordináta-rendszerben. Azért, hogy az inerciarendszerbeli (1.136) megoldásokkal való összehasonlítás szembetűnőbb legyen, a most kapott *x*(*t*), *y*(*t*), *z*(*t*) függvényeket az *ωt* hatványai szerint haladó sor alakjába írjuk. Ehhez felhasználjuk a cos α és a sin α hatványsorát:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^2}{4!} + \ldots,$$

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots .$$

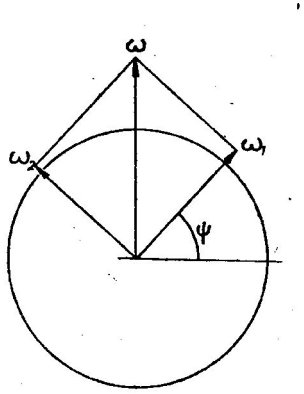
Ezek alapján

$$x(t)=\frac{1}{6}g\sin\psi\cos\psi\cdot\omega^2t^4+\ldots,$$
$$y(t)=\frac{1}{3}g\cos\psi\cdot\omega t^3+\ldots,$$
$$z(t)=h-\frac{1}{2}gt^2+\frac{1}{6}g\cos^2\psi\cdot\omega^2t^4+\ldots. \quad \text{(1.308. egyenlet)}$$

Ezekből a megoldásokból látszik, hogy a *h* magasságból elejtett test a Föld forgása következtében nem teljesen a függőleges egyenes (vagyis a *z* tengely) mentén esik le, hanem a pálya egy kicsit eltér az északi féltekén kelet−déli irányba. Mivel az *ω* szögsebesség elég kicsi, ezért a keleti irányba való eltérés nagyobb, mint a déli. Másrészt a függőleges irányú *z* koordináta időfüggése is kicsit változik az inerciarendszerbeli négyzetes függéshez képest. A számadatok behelyettesítése útján meggyőződhetünk róla, hogy a mi szélességi körünkön ($\psi \approx 45°$) 100 méteres magasságból történő szabadesésnél a keleti irányba való eltérés ≈ 1,5 cm.

Mivel a centrifugális erő hatását az *m***g**-ben már figyelembe vettük, ezért a Föld forgásából származó (1.308)-ban megmutatkozó korrekciók a Coriolis-erő következményei.

25. ábra -



A következőkben megvizsgáljuk, hogy a Coriolis-erőnek milyen hatása van a Föld felszínén a vízszintes mozgásokra. Az **ω** szögsebességvektort felbontjuk két összetevőre, amelyek közül $\boldsymbol{\omega}_1$ a *ψ* földrajzi szélességű helyen függőleges irányú, az $\boldsymbol{\omega}_2$ összetevő pedig a vízszintes érintősíkban van:

$$\omega_1=\omega\sin\psi, \qquad \omega_2=\omega\cos\psi. \quad \text{(1.309. egyenlet)}$$

A Coriolis-erő ennek megfelelően két tag összege lesz:

$$\mathbf{F}_C = 2m\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}_1 + 2m\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{F}_{C_1} + \mathbf{F}_{C_2}.$$ (1.310. egyenlet)

Az $\mathbf{F}_{C_1}$ erő a vízszintes síkban mozgó testeknél az érintősíkban van, és az északi féltekén a sebességre merőlegesen jobbra, a déli féltekén balra irányul. A vízszintesen mozgó testek pályája ennek következtében az északi féltekén jobbra, a délin balra tér el a pillanatnyi sebesség irányához képest. Az oldalirányú gyorsulás nagysága:

$$a_{C_1} = \frac{F_{C_1}}{m} = 2v\omega\sin\psi.$$

Az eltérítés nagysága ennek alapján kiszámítható.

A Coriolis-erő $\mathbf{F}_{C_2}$ összetevője a vízszintes mozgásoknál függőlegesen felfelé vagy lefelé mutat. A keleti irányba mozgó testre ez felfelé irányuló erőt jelent, és ezért csökkenti a test *m***g** súlyát. A nyugatra mozgó testnél $\mathbf{F}_{C_2}$, egy irányú az *m***g**-vel, és így súlynövekedést eredményez. Ezt a jelenséget Eötvös Loránd mutatta ki először, ezért az irodalom *Eötvös-hatásnak* nevezi.

6. Kényszermozgások

Eddig olyan mozgásokat tanulmányoztunk, amelyeknél a ható erő egyedül meghatározta a tömegpont mozgását. A mindennapi életben azonban a legtöbb esetben ezen kívül más külső körülmények is hatással vannak a testek mozgására. Például a testnek a mozgás folyamán egy meghatározott felületen vagy görbén kell maradnia. Az ilyen mozgásokat kényszermozgásoknak nevezzük.

A dinamika alaptörvényeinek a megfogalmazásánál azt a szemléletet követtük, hogy a mozgásállapot megváltozását, vagyis a test gyorsulását erőhatásnak tulajdonítottuk. Ennek szellemében a kényszereket is erővel vesszük figyelembe. A test (vagy a használt modellben az anyagi pont) azért marad a mozgás folyamán egy adott felületen vagy görbén, mert az eddigi erőkön kívül más, ún. kényszererők is hatnak, és az eredő erő olyan mozgásállapot-változást eredményez, hogy a test mozgása az előírt kényszereknek megfelelően megy végbe.

Ha a kényszererőt **F′**-vel jelöljük, akkor az *m* tömegű anyagi pont mozgásegyenlete a mondottak értelmében

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}'.$$ (1.311. egyenlet)

A kényszerektől független **F** erőket a megkülönböztetés miatt *szabad erőknek* hívjuk.

Az **F′** kényszererőről a tapasztalat alapján feltételezzük, hogy adott felületen vagy görbén történő mozgás esetén merőleges a felületre vagy a görbére. Ezt a feltevést arra alapozzuk, hogy nincs semmi tapasztalat, amely azt mutatná, hogy befolyásolja a felület menti mozgást. Szerepe abban van, hogy megakadályozza a tömegpontnak a felületen való áthaladását. Ha a felület egyenletét

$\varphi(x, y, z) = 0$ (1.312. egyenlet)

alakban adjuk meg, akkor **F'** arányos a grad *φ*-vel, mert utóbbi a felületre merőleges vektor. Tehát

$\mathbf{F}' = \lambda \operatorname{grad} \varphi.$ (1.313. egyenlet)

Ezt (1.31l)-be helyettesítve, a kényszermozgást leíró

$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \lambda \operatorname{grad} \varphi$ (1.314. egyenlet)

mozgásegyenletet kapjuk. Ebben az egyenletben négy ismeretlen van: az *x*(*t*), *y*(*t*), *z*(*t*) három helykoordináta és a λ. A felület (1.312) egyenletével együtt az egyenletek száma is négy, ezért ezek egyértelműen meghatározzák a kényszererőt és a mozgás pályáját. A kényszermozgások (1.314) differenciálegyenletét Lagrange-féle elsőfajú egyenletnek hívjuk.

A feladat megoldásának menete a következő. Először képezzük az (1.312) egyenlet idő szerinti második deriváltját. Ehhez egyelőre feltételezzük, hogy a felület nem mozog, vagyis az egyenlet az időt explicite nem tartalmazza:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\dot{z} = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\ddot{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\ddot{y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\ddot{z} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\dot{x}^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\dot{y}^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\dot{z}^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\dot{x}\dot{y} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\dot{x}\dot{z} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}\dot{y}\dot{z} = 0.$$ (1.315. egyenlet)

Az $\ddot{x}$-, $\ddot{y}$-, $\ddot{z}$-ot kifejezzük az (1.314) mozgásegyenletekből és behelyettesítjük az (1.315)-be. Az így adódó egyenletből λ meghatározható az *x, y, z* koordináták és az $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ sebességkomponensek függvényeként: *λ* = *λ* (*x*, *y*, *z*; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$). Ezt a λ függvényt visszaírjuk az (1.314) mozgásegyenletekbe, amelyek ezután a koordinátákat és azok idő szerint vett első és második deriváltjait tartalmazzák. Végül ezeket a differenciálegyenleteket megoldjuk.

Ha a kényszer olyan, hogy a mozgás egy térgörbén történik, akkor a térgörbét két felület metszésvonalának képzeljük el, és a felületek

$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0$ (1.316. egyenlet)

egyenleteit adjuk meg kényszerfeltételként. Az **F′** kényszererő a felületekre merőleges λ_1 grad *φ* és λ_2 grad *ψ* vektorok eredője lesz:

$\mathbf{F}' = \lambda_1 \operatorname{grad} \varphi + \lambda_2 \operatorname{grad} \psi.$ (1.317. egyenlet)

A mozgásegyenlet ebben az esetben:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \lambda_1 \operatorname{grad}\varphi + \lambda_2 \operatorname{grad}\psi.$$ (1.318. egyenlet)

A megoldás menete ugyanaz, mint előbb. Az (1.318) és (1.316) öt egyenlet most is egyértelműen meghatározza a kényszererőt és a tömegpont pályáját.

Ennél egyszerűbb az eljárás akkor, ha a gyorsulást sikerül felírnunk a felülethez vagy a görbére illeszkedő koordinátákban, mert ebben az esetben a kényszererő nem lép fel a mozgásegyenletben, ugyanis annak érintőleges komponense zérus. A mozgásegyenlet ekkor a következő:

$$ma_t = F_t,$$ (1.319. egyenlet)

ahol a_t a gyorsulás, F_t a szabad erő tangenciális komponense.

Vannak olyan kényszermozgások, amelyeknél a kényszerfeltételek az időtől is függnek. Ilyen például az, amikor a felület is mozog. Ebben az esetben a felület egyenlete

$$\varphi(x, y, z; t) = 0.$$ (1.320. egyenlet)

Az egyenletek megoldása elvileg ugyanúgy történik, mint előbb, csak most az egyenletekben időtől függő további tagok is megjelennek.

Eddig olyan kényszermozgásokkal foglalkoztunk, amikor a tömegpont egy adott felületen vagy görbén kénytelen maradni. Mint láttuk, a kényszert ezekben az esetekben a kényszererővel egyszerűen figyelembe vehetjük. A valóságban azonban ennél bonyolultabb kényszermozgásokkal is találkozunk. Például, amikor a vizsgált tömegpont egy összetett fizikai rendszer része, és a kényszer abban nyilvánul meg, hogy a tömegpontnak a helye a többi részhez viszonyítva korlátozott. Ilyenkor a kényszert matematikai alakban felírt mellékfeltételekkel vesszük tekintetbe. A probléma általánosabb tárgyalásával a mechanika elveivel foglalkozó fejezetben találkozunk. Ott látni fogjuk, hogy annak keretében a kényszererőről nem kell feltételezni, hogy speciálisan a felületeken történő mozgásoknál az merőleges a felületre. Ez az általános tárgyalásmódban magától kiadódik.

Visszatérve a kényszermozgás (1.311) egyenletéhez, emlékeztetünk arra, hogy az **F′** kényszererőt a felület vagy a mozgást korlátozó környezet fejti ki a tömegpontra. A kölcsönhatás törvénye szerint a tömegpont is hat a felületre, illetve a kényszert előidéző környezetre **−F′** erővel. A felületen történő mozgásoknál a tömegpont **−F′** erővel nyomja a felületet. A nyomóerő tehát a kényszererő reakcióereje:

$$\mathbf{F}_{\text{ny}} = -\mathbf{F}'.$$ (1.321. egyenlet)

Az (1.311) mozgásegyenlet alapján belátható, hogy a nyomóerő általában függ a tömegpont mozgásállapotától. Írjuk fel ehhez az (1.311) egyenlet felületre merőleges komponensét:

$$ma_n = F_n + F'_n.$$

Ebből

$F_{ny} = F_n - ma_n$.

Mivel

$a_n = \frac{v^2}{P}$,

ahol v a tömegpont sebessége és R a felület görbületi sugara, ezért

$$F_{ny} = F_n - \frac{mv^2}{R}. \quad \text{(1.322. egyenlet)}$$

A nyomóerő tehát csak síkmozgásnál független a mozgásállapottól, általában az (1.322) szerint függ a tömegpont sebességétől is.

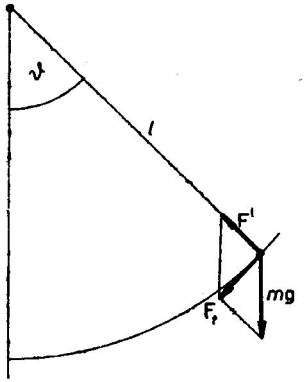
6.1 A függőleges síkban lengő inga mozgása

Gondoljunk el egy l hosszúságú fonálra felfüggesztett m tömegű anyagi pontot, amelyre a függőlegesen lefelé irányuló $m\mathbf{g}$ földi nehézségi erő hat. A fonál súlyától eltekintünk, tehát úgy vesszük, mintha zérus lenne. A kezdeti állapot legyen az, amikor a fonál ϑ_0 szöget zár be a függőleges iránnyal és ebből kezdősebesség nélkül elengedjük. A felfüggesztés miatt a tömegpont nem mozoghat úgy, ahogy az $m\mathbf{g}$ szabad erő hatására mozogna, ugyanis az r rádiuszvektor l-nél nagyobb értékeket nem vehet fel: $r \leq l$. A tömegpont tehát kényszermozgást végez. Az mg nehézségi erőn kívül a tömegpontra a megfeszített fonál mentén a felfüggesztési pont felé irányuló kényszererő is hat. A megadott kezdeti feltételek mellett a mozgás síkban történik, az l sugarú körív mentén. Az ilyen mozgást nevezzük síkbeli ingamozgásnak. Síkbeli polárkoordinátákat használva, az r állandó, a ϑ változik időben. A mozgásegyenletek az (1.311) vektoregyenlet polárkomponensei:

$$ma_r = F_r + F'_r, \quad \text{(1.323. egyenlet)}$$

$$ma_\vartheta = F_\vartheta. \quad \text{(1.324. egyenlet)}$$

26. ábra -



Mivel *r=l,*

$a_r = -l\dot{\vartheta}^2$, (1.325. egyenlet)

$a_\vartheta = l\ddot{\vartheta}$, (1.326. egyenlet)

továbbá

$F_r = mg\cos\vartheta$, (1.327. egyenlet)

$F_\vartheta = -mg\sin\vartheta$, (1.328. egyenlet)

$F'_r = F'$. (1.329. egyenlet)

Az (1.328) jobb oldalán a negatív előjel azért lép fel, mert F_ϑ a ϑ szög növekedési irányával ellentétes.

Ezeket (1.323)-ba és (1.324)-be beírva,

$-ml\dot{\vartheta}^2 = mg\cos\vartheta + F'$, (1.330. egyenlet)

$ml\ddot{\vartheta} = -mg\sin\vartheta$. (1.331. egyenlet)

Az inga ϑ kitérési szögének időfüggését az (1.331) egyenlet teljesen meghatározza, az (1.330) egyenlet pedig a kényszererő kiszámítását teszi lehetővé.

Először a második egyenletet oldjuk meg. A tömeggel és az *l* fonálhosszal elosztva,

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l}\sin\vartheta.$$ (1.332. egyenlet)

Ha az inga kilengése olyan kicsi, hogy a sin ϑ a szöggel helyettesíthető, sin $\vartheta \sim \vartheta$, akkor

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l}\vartheta.$$ (1.333. egyenlet)

Ez a harmonikus rezgőmozgásnál megismert egyenlet, ezért megoldása azonnal felírható:

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \delta\right).$$

A δ fázisszög az adott kezdeti feltételek miatt zérus, δ = 0. Így

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t.$$ (1.334. egyenlet)

A teljes lengésidő (amely alatt a fázis 2π-vel változik meg)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$ (1.335. egyenlet)

Látható, hogy *T* független a test tömegétől és a kezdeti kitéréstől; a nehézségi gyorsuláson kívül csak az inga hosszától függ. Ezt a törvényszerűséget Galilei ismerte fel.

A tetszőleges kilengések időfüggését az eredeti (1.332) differenciálegyenlet írja le. Most ezt oldjuk meg. Az egyenletet $2\dot{\vartheta}$-tal megszorozva,

$$2\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} = \frac{-2g}{l}\sin\vartheta\dot{\vartheta}.$$ (1.336. egyenlet)

Ennek mindkét oldala idő szerinti differenciálhányados alakjába írható:

$$\frac{d}{dt}\dot{\vartheta}^2 = 2\frac{g}{l}\frac{d}{dt}\cos\vartheta.$$

Integrálva,

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\vartheta + C).$$ (1.337. egyenlet)

Ha a *C* integrálási állandó abszolút értéke nagyobb lenne 1-nél, |*C*| > 1, akkor ϑ sohasem lenne zérus, vagyis a tömegpont körbe menne az *l* sugarú körpályán. Ez a megoldás nem felelne meg a kezdeti feltételeknek, mert – mint mondottuk – *t* = 0-kor a $\dot{\vartheta}(0) = 0$, $\vartheta(0) = \vartheta_0$.

A kezdeti feltételeket is kielégítő megoldást akkor kapjuk, ha

$C = -\cos\vartheta_0$.

A szögsebesség négyzete tehát

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0).$$ (1.338. egyenlet)

Már ebből a kifejezésből is látszik, hogy a tömegpont a kezdeti ϑ_0 kitérésből zérus kezdősebességgel indulva, a körív mentén időben változó szögsebességgel mozog, amíg újra el nem éri a kezdeti kitérést, ahol sebessége zérussá válik, és visszafordulva ezt a mozgást ismétli a maximális ϑ_0 kitérési szög között. A tömegpont tehát egy síkban lengő inga mozgását végzi.

A ϑ kitérés időfüggésének meghatározása helyett a lengésidőt számítjuk ki (1.338)-ból. Ehhez felhasználjuk a

$$\cos\vartheta = 1 - 2\sin^2\frac{\vartheta}{2} \qquad \text{és} \qquad \cos\vartheta_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}$$

trigonometriai összefüggéseket. Így adódik a

$$\dot{\vartheta} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}}.$$

Ezt az egyenletet a változók szétválasztásának módszerével oldjuk meg:

$$dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}}}.$$ (1.339. egyenlet)

A jobb oldalt ϑ szerint integrálva 0-tól ϑ_0-*ig,* a teljes lengésidő negyedrészét kapjuk:

$$\frac{T}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\vartheta_0}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}-\sin^2\frac{\vartheta}{2}}}.$$ (1.340. egyenlet)

Az integrál kiszámításához a $\sin\frac{\vartheta_0}{2}$ állandót *k*-val jelöljük, és egy új változót vezetünk be az alábbi helyettesítéssel:

$$k=\sin\frac{\vartheta_0}{2},\qquad \sin\frac{\vartheta}{2}=k\sin\psi.$$ (1.341. egyenlet)

Így adódik a

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}.$$ (1.342. egyenlet)

Ez az integrál a matematikából elliptikus integrál néven ismeretes; pontosabban: az elsőfajú elliptikus integrál Legendre-féle normálalakja. Az ilyen integrálok elemi függvényekkel zárt alakban nem fejezhetők ki. Kiszámításukhoz az integrandusz hatványsorba fejtett alakját használjuk fel.

Felidézzük az $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ hatványsorát:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\dots.$$ (1.343. egyenlet)

Ennek alapján az integrandusz

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\psi+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^4\sin^4\psi+\dots.$$ (1.344. egyenlet)

Mivel a $k^2\sin^2\psi<1$ a $(0,\pi/2)$ intervallumban, ezért az (1.344) sor abszolút konvergens. Ebből viszont következik, hogy tagonként integrálható, és az így adódó sor összege megegyezik az (1.342) integrállal. A kiszámítandó integrálok a szinuszfüggvény páros hatványait tartalmazzák. Ezekre vonatkozóan a matematikából ismerjük a Wallis-képletet:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\psi\,d\psi=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\frac{\pi}{2}.$$ (1.345. egyenlet)

Ennek felhasználásával a teljes lengésidőre adódik a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\vartheta_0}{2}+\ldots\right].$$ (1.346. egyenlet)

Ez a képlet a lengésidő pontos kifejezését adja meg tetszőleges kitérésekre. Ha a maximális kitérés olyan kicsi, hogy a $\sin\frac{\vartheta_0}{2}$ hatványai az 1 mellett elhanyagolhatóak, akkor a korábban kapott (1.335) kifejezés használható. Ebből tehát az is megállapítható, hogy mikor alkalmazhatjuk a közelítő képleteket, és mekkora hibát követünk el. Például ϑ_0 =5°-nál 0,05%, 22°-nál 1% és 90°-nál 18% a relatív eltérés. Most visszatérünk az (1.330) mozgásegyenlethez, és kiszámítjuk a kényszererőt:

$$F' = -mg\cos\vartheta - ml\dot{\vartheta}^2.$$

A szögsebesség négyzetét (1.338)-ból behelyettesítve,

$$F' = mg\left(2\cos\vartheta_0 - 3\cos\vartheta\right).$$ (1.347. egyenlet)

A zárójeles kifejezés a $\vartheta_0 < 90°$ maximális kitérések esetén mindig negatív, ezért ebben a szögtartományban a kényszererő a felfüggesztési pont felé irányul. Ennek reakcióerejével húzza a tömegpont a fonalat.

2. fejezet - PONTRENDSZEREK MECHANIKÁJA

Ebben a fejezetben a testeket anyagi pontok rendszerének tekintjük. Ez a modell már közelebb áll a valósághoz, mert a testek belső mozgását is tekintetbe veszi. Másrészt az egyes tömegpontok mozgásegyenleteinek következményeként az egész rendszerre is ad olyan általános törvényeket, amelyek széles körben alkalmazhatóak az alkotórészek közötti kölcsönhatások konkrét alakjától függetlenül.

Feltételezzük, hogy a vizsgált fizikai rendszer *N* darab anyagi pontból áll. Az egyes pontok tömegei legyenek rendre m_1, m_2, m_3, ..., m_N. Ezeket röviden m_i-vel, a helyvektorokat pedig $\mathbf{r}_i$-vel jelöljük. A tömegpontok mozgását a Newton-féle mozgásegyenletek írják le:

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i \qquad (i = 1, 2, 3..., N). \quad \text{(2.1. egyenlet)}$$

$\mathbf{F}_i$ az *i*-edik tömegpontra ható erők eredője. Az erők két osztályba sorolhatók. Egy részük külső eredetű, mások pedig a rendszer részeitől származnak. Előbbieket külső erőknek, utóbbiakat belső erőknek hívjuk. Jelölésükre az $\mathbf{F}_i^{\mathrm{k}}$, illetve az $\mathbf{F}_i^{\mathrm{b}}$ szimbólumokat használjuk. Az $\mathbf{F}_i$ eredő erő ezek összege:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} + \mathbf{F}_i^{\mathrm{b}}. \quad \text{(2.2. egyenlet)}$$

A mozgásegyenletek ennek megfelelően:

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} + \mathbf{F}_i^{\mathrm{b}} \qquad (i = 1, 2, 3..., N). \quad \text{(2.3. egyenlet)}$$

A fizikában leginkább olyan belső erők fordulnak elő, amelyek két tömegpont között hatnak és nem függnek a többi mozgásállapotától. Ezek az ún. kéttest-erők. Az *i*-edik tömegpontra a *j*-edik által kifejtett belső erőt $\mathbf{F}_{ij}$-vel jelölve,

$$\mathbf{F}_i^{\mathrm{b}} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij}. \quad \text{(2.4. egyenlet)}$$

Ebben az összegben a *j*=*i*-nek megfelelő tag zérus, mert ez az *i*-edik tömegpontra önmaga által kifejtett $\mathbf{F}_{ii}$ erőt jelenti, amely értelménél fogva zérus. így az *i*-edik tömegpont mozgását leíró egyenlet

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij}, \quad \text{(2.5. egyenlet)}$$

vagy

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^k + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij}.$$ (2.5'. egyenlet)

Impulzustétel. A tömegközéppont mozgása

A pontrendszer **P** impulzusán az egyes tömegpontok $\mathbf{p}_i$ impulzusainak összegét értjük:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i.$$ (2.6. egyenlet)

Az impulzus idő szerint vett differenciálhányadosa a (2.5) mozgásegyenlet alapján,

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^k + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij}.$$ (2.7. egyenlet)

Mivel a kölcsönhatás törvénye miatt $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, ezért a belső erők kétszeres összege azonosan zérus. Így

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^k.$$ (2.8. egyenlet)

A belső erők tehát nem változtatják meg a rendszer **P** impulzusát. Annak megváltozása csak a külső erők hatására jön létre. Ha a rendszerre külső erők nem hatnak, vagyis a rendszer zárt, akkor annak impulzusa állandó:

$$\dot{\mathbf{P}} = 0, \qquad \mathbf{P} = \text{áll.}$$ (2.9. egyenlet)

Ez az *impulzusmegmaradás tétele*.

Bevezetjük a rendszer tömegközéppontjának a fogalmát. A tömegközéppont $\mathbf{r}_0$ helyvektorát az

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1} m_i}$$ (2.10. egyenlet)

képlettel definiáljuk. Ez a tömegpontok helyvektorainak a tömegekkel súlyozott középértéke. A nevezőben a pontrendszer teljes tömege szerepel. Ezt az index nélküli *m*-mel jelölve,

$$m\mathbf{r}_0 = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i .$$ (2.11. egyenlet)

Az idő szerinti második differenciálhányadost képezve, a (2.8) alapján adódik, hogy

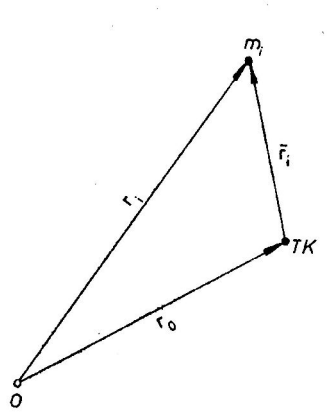
$$m\ddot{\mathbf{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^k .$$ (2.12. egyenlet)

Ez az egyenlet a tömegközéppont mozgását írja le. Eszerint a pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha abban a teljes tömeg volna egyesítve és rá csak a külső erők eredője hatna. A belső erők Newton harmadik axiómája miatt kiejtik egymást, és ezért a tömegközéppont mozgására nincsenek hatással. A tömegközéppont (2.12) mozgásegyenlete teszi lehetővé, hogy egy testnek mint a pontrendszer egészének a mozgását a tömegközéppont mozgásával írjuk le. A tömegközéppont fogalmának az alkalmazása az égi mechanikában igen hasznos, mert a csillagok mozgása a tömegközéppontjuk mozgásával helyettesíthető, annak ellenére, hogy alkotórészeik a belső erők hatására igen élénk mozgásban vannak.

Ha a rendszerre külső erők nem hatnak, vagy azok eredője zérus, akkor a tömegközéppont egyenes vonalban egyenletesen mozog.

A tömegközéppont különleges tulajdonsága miatt gyakran célszerű olyan koordináta-rendszert használni, amelyben a rendszer pontjainak helyét a tömegközépponthoz viszonyítva adjuk meg. Ezt a koordináta rendszert tömegközépponti (TK-) rendszernek nevezzük.

27. ábra -



A tömegpontok inerciarendszerbeli $\mathbf{r_i}$ és a TK-rendszerhez viszonyított $\tilde{\mathbf{r}}_i$ helyvektorai között az

$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \bar{\mathbf{r}}_i$ (2.13. egyenlet)

összefüggés áll fenn. Az *i*-edik tömegpont impulzusa a TK-rendszerben

$\bar{\mathbf{p}}_i = m_i \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i$ (2.14. egyenlet)

amely (2.13), (2.10) és (2.6) alapján így is írható:

$$\bar{\mathbf{p}}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i - m_i \dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{p}_i - \frac{m_i}{m}\mathbf{P}.$$ (2.15. egyenlet)

A pontrendszer teljes impulzusa a TK-rendszerben zérus. Ugyanis (2.15)-ből egyszerűen adódik, hogy

$$\bar{\mathbf{P}} = \sum_{i=1} \bar{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1} \mathbf{p}_i - \mathbf{P}\frac{\sum_i m_i}{m} = 0$$ (2.16. egyenlet)

A tömegközépponti rendszernek ez a tulajdonsága különösen az ütközések elméleti leírásánál mutatkozik nagyon hasznosnak, mert a számításokat jelentősen egyszerűsíti.

A pontrendszer impulzus- és erőnyomatéka, Impulzusnyomaték-tétel

A pontrendszer valamely *O* pontra vonatkoztatott **L** impulzusnyomatékát az egyes tömegpontok **Li = $\mathbf{r}_i\mathbf{p}_i$** impulzusnyomatékainak összegeként értelmezzük:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$ (2.17. egyenlet)

Képezzük ennek idő szerinti differenciálhányadosát, és vegyük figyelembe az *i*-edik tömegpont (2.5) mozgásegyenletét:

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{N} \left[\dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i\right] = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^k + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}.$$ (2.18. egyenlet)

Itt tekintetbe vettük, hogy $\dot{\mathbf{r}}_i \| \mathbf{p}_i$, ezért a vektoriális szorzatuk zérus. A jobb oldal

első tagja a külső erők nyomatékainak eredője, a második pedig a belső erőktől származó erőnyomaték:

$$\mathbf{M}^{\mathrm{k}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}},$$ (2.19. egyenlet)

$$\mathbf{M}^{\mathrm{b}} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}.$$ (2.20. egyenlet)

Tehát

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}^{\mathrm{k}} + \mathbf{M}^{\mathrm{b}}.$$ (2.21. egyenlet)

A belső erők $\mathbf{M}^{\mathrm{b}}$ nyomatéka a kölcsönhatás törvényét kifejező $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ egyenlőség tekintetbevételével a következő alakba írható:

$$\mathbf{M}^{\mathrm{b}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \right) \times \mathbf{F}_{ij}.$$ (2.22. egyenlet)

Ha a tömegpontok között ható belső erők az őket összekötő egyenes mentén hatnak, vagyis $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \| \mathbf{F}_{ij}$, akkor ezek eredő nyomatéka zérus: $\mathbf{M}^{\mathrm{b}} = 0$. Ebben az esetben az impulzusnyomaték időbeli változása egyedül a külső erők eredő nyomatékától származik:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}^{\mathrm{k}}.$$ (2.23. egyenlet)

A (2.21), illetve a (2.23) képletek az impulzusnyomaték-tételt fejezik ki pontrendszerekre.

Ha a belső erők centrálisak (vagyis $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \| \mathbf{F}_{ij}$), és külső erők nem hatnak (tehát zárt rendszerről van szó), vagy a külső erők nyomatékának az eredője zérus, akkor a pontrendszer **L** impulzusnyomatéka állandó. Ebben az esetben érvényes az *impulzusnyomaték megmaradásának* a tétele.

Megjegyezzük, hogy a természetben előfordulnak olyan belső erők, amelyek nem centrálisak. Például két egymáshoz képest mozgó, elektromosan töltött részecske egymásra nem centrális erőt fejt ki. Ilyenkor a (2.21) általános tétel érvényes, amelyben a belső erők nyomatéka is szerepel.

A pontrendszer (2.17) impulzusnyomatéka a (2.13)—(2.16) képletek felhasználásával a következő alakba írható:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{P} + \sum_{i=1}^{N} \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{p}}_i$$ (2.24. egyenlet)

Ennek a felbontásnak szemléletes jelentése van. Az első tag a **P** impulzusú tömegközéppont *O* pontra vonatkoztatott

$$\mathbf{L}_{\mathrm{TK}} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{P}$$ (2.25. egyenlet)

impulzusnyomatéka. Az

$$\bar{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{N} \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{p}}_i \quad \text{(2.26. egyenlet)}$$

pedig az egyes tömegpontok tömegközéppontra vonatkozó impulzusnyomatékainak az összege, vagyis a pontrendszer tömegközéppontra vonatkozó teljes impulzusnyomatéka.

Tehát

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{TK} + \bar{\mathbf{L}}. \quad \text{(2.27. egyenlet)}$$

Az impulzusnyomaték változását leíró egyenletet keressük ebben a felbontásban. Ezért külön kiszámítjuk az $\mathbf{L}_{TK}$, illetve $\bar{\mathbf{L}}$ idő szerinti differenciálhányadosát a megfelelő mozgásegyenletek alapján:

$$\dot{\mathbf{L}}_{TK} = \dot{\mathbf{r}}_0 \times \mathbf{P} + \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{P}}. \quad \text{(2.28. egyenlet)}$$

Mivel $\mathbf{P} = m\dot{\mathbf{r}}_0$, ezért az első tag zérus. Másrészt a (2.8) szerint

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^k = \mathbf{F}^k, \quad \text{(2.29. egyenlet)}$$

ahol $\mathbf{F}^k$ a külső erők eredője. Így adódik, hogy

$$\dot{\mathbf{L}}_{TK} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}^k. \quad \text{(2.30. egyenlet)}$$

A jobb oldal olyan, mintha a külső erők eredője a tömegközéppontra hatna és ennek vennénk az *O*-ra vonatkoztatott $\mathbf{M}_{TK}$ nyomatékát. Ezért

$$\dot{\mathbf{L}}_{TK} = \mathbf{M}_{TK}^k. \quad \text{(2.31. egyenlet)}$$

A tömegközéppontra vonatkoztatott $\bar{\mathbf{L}}$ impulzusnyomaték idő szerinti deriváltja,

$$\dot{\bar{\mathbf{L}}} = \sum_{i=1}^{N} \left[\dot{\bar{\mathbf{r}}} \times \bar{\mathbf{p}}_i + \bar{\mathbf{r}}_i \times \dot{\bar{\mathbf{p}}}_i \right],$$

Az első tag a tényezők párhuzamos volta miatt zérus, a második pedig a (2.15) és (2.5) alapján a következő alakba írható:

$$\dot{\bar{\mathbf{L}}} = \sum_{i=1}^{N} \bar{\mathbf{r}}_i \times \left(\mathbf{F}_i^k + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij} \right). \quad \text{(2.32. egyenlet)}$$

Ha a belső erők centrálisak, vagyis $(\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j) \| \mathbf{F}_{ij}$, akkor azok nyomatéka zérus, ezért (2.32) jobb oldala ebben az esetben a külső erőknek a tömegközéppontra vonatkoztatott

$$\bar{\mathbf{M}}^k = \sum_{i=1}^{N} \bar{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{F}_i^k \quad \text{(2.33. egyenlet)}$$

eredő nyomatékával egyenlő. Tehát

$$\dot{\bar{\mathbf{L}}} = \bar{\mathbf{M}}^k. \quad \text{(2.34. egyenlet)}$$

Az impulzusnyomaték-tétel centrális belső erőkre vonatkozó (2.23) alakja ezek szerint a következőképpen is írható:

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{L}}_{TK} + \dot{\bar{\mathbf{L}}} = \bar{\mathbf{M}}_{TK}^k + \bar{\mathbf{M}}^k. \quad \text{(2.35. egyenlet)}$$

A (2.23)-mal összevetve, látható, hogy a külső erők tetszőleges *O* pontra vonatkoztatott nyomatéka két nyomaték összegére bontható: az egyik a külső erők tömegközéppontban vett eredőjének az *O* pontra vonatkozó nyomatéka, a másik a külső erők tömegközéppontra vonatkoztatott nyomatékainak az eredője. Ez a felbontás a gyakorlati alkalmazások szempontjából jelentős, mert az $\bar{\mathbf{M}}^k$ és $\mathbf{M}_{TK}^k$ nyomatékok sok esetben egyszerűbben számíthatók ki, mint az $\mathbf{M}^k$. Példaként tekintsük azt a speciális esetet, mikor a külső erők eredője zérus:

$$\mathbf{F}^k = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^k = 0. \quad \text{(2.36. egyenlet)}$$

Ekkor (2.31) szerint

$$\dot{\mathbf{L}}_{TK} = \mathbf{M}_{TK}^k = 0, \quad \text{(2.37. egyenlet)}$$

vagyis a tömegközéppont impulzusnyomatéka állandó. A tömegközéppontra vonatkoztatott $\bar{\mathbf{L}}$ impulzusnyomaték viszont változhat az időben, mert a külső erők összegének eltűnéséből általában nem következik, hogy az

$$\bar{\mathbf{M}}^{\mathrm{k}} = \sum_{i=1}^{N} \bar{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}}$$

nyomaték is zérus. Például az erőpárnál az eredő erő zérus, de az erőpár nyomatéka a TK-rendszerben zérustól különbözik.

Az energiatétel

A pontrendszer *i*-edik tömegpontjának (2.1) mozgásegyenletét szorozzuk meg skalárisan az $\dot{\mathbf{r}}_i$ sebességvektorral, és az így adódó egyenlet mindkét oldalát összegezzük az *N* tömegpontra:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \dot{\mathbf{r}}_i. \quad \text{(2.38. egyenlet)}$$

A bal oldal a pontrendszer

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \quad \text{(2.39. egyenlet)}$$

mozgási energiájának az idő szerint vett differenciálhányadosa:

$$\frac{dE_{\mathrm{k}}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \dot{\mathbf{r}}_i. \quad \text{(2.40. egyenlet)}$$

Integráljuk az egyenlet mindkét oldalát a t_1 időponttól a t_2 időpontig:

$$E_{\mathrm{k}}(t_2) - E_{\mathrm{k}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \dot{\mathbf{r}}_i dt. \quad \text{(2.41. egyenlet)}$$

A bal oldalon a pontrendszer mozgási energiájának a $t_2 - t_1$ időtartam alatti megváltozása áll. A jobb oldali idő szerinti integrált az $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$ helyettesítéssel $\mathbf{r}_i$ szerinti integrállá alakítva,

$$E_k(t_2) - E_k(t_1) = \int_{r_1}^{r_2} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i.$$

Az integrál r_1 és $r_2$határai a rendszer helyét jelölik a t_l, illetve a t_2 időpontban. A jobb oldal az (1.75) definíció szerint azt a munkát jelenti, amelyet a ható erők végeznek, midőn a pontrendszert az r_1 helyről az r_2-re mozgatják. Ennélfogva

$$E_k(t_2) - E_k(t_1) = A \quad \text{(2.42. egyenlet)}$$

Ez a korábban megismert munkatétel pontrendszerekre vonatkoztatva.

Megjegyezzük, hogy a munkavégzésben mind a külső, mind a belső erők részt vesznek, ugyanis $\mathbf{F}_i$ ezek összege.

Ha a pontrendszerre ható erőtér konzervatív, vagyis az $\mathbf{F}_i$ erő egy *3N* változós skalárfüggvény negatív gradienseként állítható elő,

$$\mathbf{F}_i = -\mathrm{grad}_i V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N). \quad \text{(2.43. egyenlet)}$$

akkor a (2.40) egyenlet jobb oldala is idő szerinti differenciálhányados. A gradiens jele melletti *i* index azt jelenti, hogy az *i*-edik tömegpont koordinátái szerint kell a gradienst képezni:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \dot{\mathbf{r}}_i = -\sum_{i=1}^{N} (\mathrm{grad}_i V) \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = -\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{dt} \right) =$$

$$= -\frac{d}{dt} V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N). \quad \text{(2.44. egyenlet)}$$

Ezt a kifejezést (2.40)-be helyettesítve, a

$$\frac{d}{dt}(E_k + V) = 0 \quad \text{(2.45. egyenlet)}$$

egyenletet kapjuk. Ebből következik, hogy a pontrendszer E_k mozgási energiájának és az erőtér *V* potenciáljának az összege állandó:

$$E_k + V = \text{áll.} \quad \text{(2.46. egyenlet)}$$

Ennek a megmaradási tételt kifejező egyenletnek szemléletes jelentést adhatunk azáltal, hogy az erőtér *V* potenciálját a pontrendszer E_p potenciális energiájának tekintjük: $V=E_p$. A (2.46) így azt fejezi ki, hogy a rendszer $E= E_k + E_p$ teljes mechanikai energiája a mozgásegyenletek következményeként a mozgás folyamán állandó marad:

$$E = E_k + E_p = \text{áll.}$$

Ez az *energia megmaradásának a tétele* konzervatív erőtér hatásának kitett pontrendszerekre.

A konzervatív erők által végzett munka az egyetlen tömegpont esetéhez hasonlóan most is független az úttól:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i = -\int_{r_1}^{r_2} \sum_{i=1}^{N} (\mathrm{grad}_i V)\, d\mathbf{r}_i = -\int_{r_1}^{r_2} dV = V(r_1) - V(r_2). \quad \text{(2.47. egyenlet)}$$

Az *i*-edik tömegpontra ható $\mathbf{F}_i$ erőt a szokásos módon külső és belső erők összegére bontva,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} + \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{N} \mathbf{F}_{ij}. \quad \text{(2.48. egyenlet)}$$

Az $\mathbf{F}_i^{\mathrm{k}}$ külső erő általában az *i*-edik tömegpont $\mathbf{r}_i$ helyvektorától függ, az $\mathbf{F}_{ij}$ belső erőről pedig feltételezzük, hogy a két pont helyvektorait az $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ különbség alakjában tartalmazza. A mechanikában előforduló erők legtöbbjére ezek a feltevések érvényesek.

Ha az erők konzervatívak, és egy-, illetve kétrészecske-potenciálok negatív gradienseként állíthatók elő, tehát

$$\mathbf{F}_i^{\mathrm{k}}(\mathbf{r}_i) = -\mathrm{grad}_i V_i^{(\mathrm{k})}(\mathbf{r}_i), \quad \text{(2.49. egyenlet)}$$

$$\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = -\mathrm{grad}_i V_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad \text{(2.50. egyenlet)}$$

akkor az erőtér *V* potenciálja ezek összege lesz a következőképpen:

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N) = \sum_{i=1}^{N} V_i^{(\mathrm{k})}(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ (j \neq i)}}^{N} \sum_{j=1}^{N} V_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad \text{(2.51. egyenlet)}$$

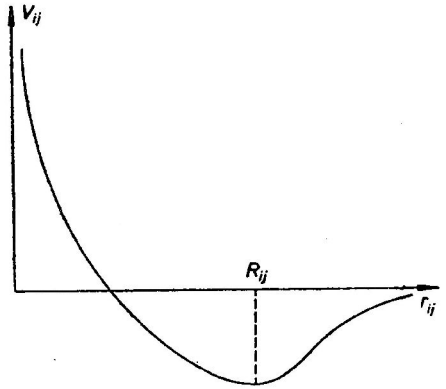
Egyszerűen meggyőződhetünk róla, hogy ennek az *i*-edik pont koordinátái szerint képezett negatív gradiense valóban a (2.48) erőt adja a (2.49), (2.50) összefüggések figyelembevételével. A tömegpontok kölcsönhatásából származó második tagot a rendszer *kölcsönhatási energiájának* nevezzük.

A centrális belső erők V_{ij} kétrészécske-potenciálja csak a két tömegpont közötti $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ távolságtól függ: $V_{ij} = V_{ij}(r_{ij})$. Ennek az *i*-edik pont koordinátái szerint vett negatív gradiense az *i*-edik tömegpontra a *j*-edik által kifejtett

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathrm{grad}_i V_{ij}(r_{ij}) = -\frac{\partial V}{\partial r_{ij}}\mathrm{grad}_i r_{ij} = -\frac{\partial V}{\partial r_{ij}}\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}} = \frac{\partial V}{\partial r_{ij}}\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}} \quad \text{(2.52. egyenlet)}$$

erőt adja. Az $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ vektor iránya az *i*-edik ponttól a *j*-edik felé mutat. Az $\mathbf{F}_{ij}$ erő tehát mindaddig vonzó, amíg a $\frac{\partial V}{\partial r_{ij}}$ differenciálhányados pozitív. Ha utóbbi negatívvá válik valamely tartományban, akkor azon belül az erő taszító lesz. Ennek szemléltetésére tekintsük a *28. ábrán* felrajzolt $V_{ij}(\mathbf{r}_{ij})$ potenciált. Amíg a két tömegpont közötti r_{ij} távolság az R_{ij}*-nél* kisebb $(r_{ij} < R_{ij})$, addig $\frac{\partial V}{\partial r_{ij}}$ <0, a (2.52) erő tehát taszító, az R_{ij}-nél nagyobb r_{ij}-kre pedig $\frac{\partial V}{\partial r_{ij}}$ >0, és emiatt az erő vonzó;

28. ábra -



és R_{ij}-nél az erő zérussá válik. A két tömegpont a vonzóerő hatására addig közeledik egymáshoz, amíg távolságuk el nem éri az R_{ij} egyensúlyi helyzetet. Ennél közelebb már nem kerülhetnek, mert a közöttük ható erő taszítása ezt megakadályozza. Az ábráról az is leolvasható, hogy a vonzó

tartományban a távolság növekedésével az erő nagysága csökken, mert a görbe iránytangense $\left(\frac{\partial V}{\partial r_{ij}}\right)$ kisebb lesz, ha az r_{ij} nő. Másrészt a taszító tartományban a taszítás egyre erősebb, minél kisebb a tömegpontok közötti távolság. Ez ugyancsak a görbe iránytangensének r_{ij} szerinti változásából látható. Az egyensúlyi helyzetben a V_{ij} potenciális energia a minimumát éri el.

A V_{ij} potenciál az egyensúlyi helyzet közvetlen közelében jól közelíthető az $\frac{1}{2}Dx^2$ parabolával, amelynek negatív gradienseként a $-Dx$ rugalmas erő adódik *(x* az egyensúlyi helyzettől számított távolságot jelenti). A tömegpont ennek megfelelően az egyensúlyi helyzet közelében tehát harmonikus rezgőmozgást végez, ha abból kimozdítjuk.

Itt csupán megemlítjük, hogy a 28. ábrán felrajzolthoz hasonló potenciál írja le a kétatomos molekulák atommagjai közötti kölcsönhatást. Mivel az atomok a hőmozgás miatt nincsenek nyugalomban még az egyensúlyi állapotban sem, ezért a mondottak értelmében az egyensúlyi hely körül harmonikus rezgőmozgást végeznek. Ettől a mozgástól származik az általuk kibocsátott sugárzás ún. rezgési színképe.

Visszatérve a pontrendszer mozgási energiájához, megmutatjuk, hogy az két szemléletes jelentésű részre bontható. Az *i*-edik tömegpont $\mathbf{r}_i$ helyvektora a (2.13) összefüggés szerint a tömegközéppont $\mathbf{r}_0$ és az erre vonatkoztatott $\bar{\mathbf{r}}_i$ helyvektorok összegeként írható:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \bar{\mathbf{r}}_i.$$

Ezt a (2.39)-be helyettesítve,

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\mathbf{r}}_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\bar{\mathbf{r}}}_i^2 + \dot{\mathbf{r}}_0\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\bar{\mathbf{r}}}_i. \quad \text{(2.53. egyenlet)}$$

Mivel a tömegközéppont definíciója miatt

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\bar{\mathbf{r}}_i = 0,$$

a (2.53) jobb oldalán álló utolsó tag zérus. Marad tehát

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\bar{\mathbf{r}}}_i^2. \quad \text{(2.54. egyenlet)}$$

Az első tag a tömegközéppontba egyesítve gondolt rendszer haladó mozgásának, a második pedig a tömegközépponthoz viszonyított (forgó) mozgásnak a mozgási energiája.

A pontrendszer teljes mechanikai energiája a (2.51) és (2.54) alapján végül a következő alakba írható:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \sum_{i=1}^{N} V_i^{(k)}(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} V_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).$$ (2.55. egyenlet)

Két egymásra ható tömegpont mozgása

Gondoljunk el két tömegpontot, amelyek $\mathbf{F_{12}}$, illetve $\mathbf{F_{21}}$ erővel hatnak egymásra.

Külső erőt nem tételezünk fel, ezért a rendszer zárt. A tömegeket m_1-, m_2-vel, a helyvektorokat $\mathbf{r}_1$-, $\mathbf{r}_2$-vel jelölve, a mozgásegyenletek

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F_{12}},$$ (2.56. egyenlet)

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F_{21}}.$$ (2.57. egyenlet)

Newton harmadik axiómája szerint

$$\mathbf{F_{12}} = -\mathbf{F_{21}}.$$ (2.58. egyenlet)

Az erők a

$$V = V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$ (2.59. egyenlet)

potenciálból az

$$\mathbf{F_{12}} = -\mathrm{grad}_1 V, \qquad \mathbf{F_{21}} = -\mathrm{grad}_2 V$$ (2.60. egyenlet)

szabály szerint számíthatók ki.

A két mozgásegyenletet összeadva, az

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0$$ (2.61. egyenlet)

egyenletet kapjuk. Vezessük be a tömegközéppont

$$\mathbf{r}_0 = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$ (2.62. egyenlet)

helyvektorát és az

$$m = m_1 + m_2$$ (2.63. egyenlet)

jelölést. így a (2.6l)-ből a tömegközéppont

$$m\ddot{\mathbf{r}}_0 = 0$$ (2.64. egyenlet)

mozgásegyenletét kapjuk. Ez azt jelenti, hogy a tömegközéppont gyorsulása zérus, az tehát egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A tömegközéppont (2.12) mozgástétele szerint annak gyorsulását egyedül a külső erők okozzák, azok pedig most nincsenek, ezért eredményünk az említett általános tétellel összhangban van.

A (2.61) egyenletből az is következik, hogy a rendszer

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2$$ (2.65. egyenlet)

eredő impulzusa állandó. A teljes impulzust (2.8) szerint a külső erők változtatják meg. Most viszont csak belső erők hatnak, ezért a rendszer **P** impulzusa állandó marad.

Ezek után megvizsgáljuk a rendszer belső mozgását. Egyszerűbben jutunk célhoz, ha bevezetjük a két tömegpont relatív helyvektorát az

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$ (2.66. egyenlet)

definíció alapján. Látni fogjuk, így a (2.56)-, (2.57)-ből a relatív helyvektorra egyetlen mozgásegyenletet kapunk, amely ugyanolyan alakú, mint az egy tömegpont mozgásegyenlete. Szorozzuk meg e célból a (2.56)-ot m_2-vel, a (2.57)-et m_1-gyel, és vegyük az így kapott egyenletek különbségét:

$$m_1m_2\left(\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1\right) = m_1\mathbf{F}_{21} - m_2\mathbf{F}_{12}.$$

A (2.58) és (2.66) alapján ez a következőképpen írható:

$$m_1m_2\ddot{\mathbf{r}} = \left(m_1 + m_2\right)\mathbf{F}_{21}.$$ (2.67. egyenlet)

Bevezetve a

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$ (2.68. egyenlet)

$$\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$ (2.69. egyenlet)

jelöléseket, a (2.67) egyenlet a μ tömegű anyagi pont

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$ (2.70. egyenlet)

egyenletébe megy át. A (2.68) képlettel definiált, tömeg dimenziójú mennyiséget a két tömegpontból álló rendszer *redukált tömegének* nevezzük. A (2.70) mozgásegyenlet az egyik tömegpontnak a másikhoz viszonyított ún. relatív mozgását írja le.

A tömegközéppont és a relatív koordináták bevezetésének az az előnye, hogy a (2.56), (2.57) csatolt egyenletrendszer így két egymástól független mozgásegyenletre vezethető vissza. Egyik a tömegközéppont (2.64), a másik a relatív helyvektor (2.70) mozgásegyenlete. Ezek külön-külön megoldhatók, és a megoldásokból az

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - \frac{m_2}{m}\mathbf{r},$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_0 + \frac{m_1}{m}\mathbf{r}$$

transzformációs képletekkel a két tömegpont helyvektorai kiszámíthatók. így a két tömegpontból álló rendszer teljes dinamikai leírása analitikus módszerekkel megadható. A kettőnél több tömegpontból álló rendszernél az itt követett felbontás nem vezet egzaktul megoldható differenciálegyenletekhez. Már a háromtest-probléma is csak közelítő eljárással tárgyalható. Sőt, ha külső erők is hatnak, akkor már a két tömegpont mozgásegyenlet-rendszere sem bontható két független egyenletre.

Ha a két tömegpont között ható erő centrális, akkor a (2.59) potenciál csak a közöttük levő *r* távolságtól függ:

$$V = V(r).$$ (2.71. egyenlet)

Ezért

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = -\mathrm{grad}_2 V(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{grad}_2 r = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$ (2.72. egyenlet)

Ebben az esetben az erők eredő nyomatéka zérus, és így a teljes impulzusnyomaték állandó.

A bolygók mozgásának pontosabb leírása

A 4.1 pontban tanulmányoztuk a bolygók mozgását abban a közelítésben, amelyben a Napot nyugvónak tekintettük. Már akkor megjegyeztük, hogy a valóságban a Nap is mozog, ezért a bolygók mozgását mint két tömegpontból álló rendszert kell vizsgálnunk. A kéttest-probléma elméletének alkalmazásaként most a bolygómozgás pontos leírását adjuk, és a korábban kapott eredményekkel történő összehasonlítással megmutatjuk, hogy a Kepler-törvények milyen mértékben igazak. Látni fogjuk, hogy a harmadik törvény módosul az eredeti megfogalmazáshoz képest. A Nap tömegét jelöljük *M*-mel, a bolygóét *m*-mel. A Nap helyvektora az inerciarendszerben legyen $\mathbf{r}_1$, a bolygóé $\mathbf{r}_2$. A közöttük ható gravitációs erő,

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{r} \quad \text{(2.73. egyenlet)}$$

A (2.56). (2.57) mozgásegyenletek:

$$M\ddot{\mathbf{r}}_1 = \gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \text{(2.74. egyenlet)}$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad \text{(2.75. egyenlet)}$$

A rendszer

$$\mathbf{r}_0 = \frac{M\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2}{M+m} \quad \text{(2.76. egyenlet)}$$

tömegközéppontja a (2.64) egyenlet szerint egyenesvonalú, egyenletes mozgást végez. Ezért a TK-rendszer a Galilei-féle relativitási elv szerint szintén inerciarendszer. A mozgást ebben a rendszerben tárgyaljuk. Ennek megfelelően a vonatkoztatási rendszerünk kezdőpontját a tömegközéppontba helyezzük. Így $\mathbf{r}_0$=0, amely (2.76) szerint azt jelenti, hogy

$$M\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2 = 0. \quad \text{(2.77. egyenlet)}$$

A (2.73) erő centrális, ezért a rendszer

$$\mathbf{L} = M(\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) + m(\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2) \quad \text{(2.78. egyenlet)}$$

impulzusnyomatéka állandó. Az $\mathbf{r_1}$ és $\mathbf{r_2}$ helyvektorok a mondottak értelmében a tömegközéppontra vonatkoztatott helyvektorok. Szorozzuk meg **L**-et $\mathbf{r_1}$gyel, majd $\mathbf{r_2}$-vel skalárisan. Adódik

$$\mathbf{L}\mathbf{r}_1 = 0, \qquad \mathbf{L}\mathbf{r}_2 = 0.$$ (2.79. egyenlet)

Ebből következik, hogy mind az $\mathbf{r}_1$, mind az $\mathbf{r}_2$ merőleges az állandó **L** vektorra. A Nap és a bolygó tehát a tömegközépponton átmenő, az állandó **L** normálisú síkban mozog.

Vizsgáljuk meg a bolygónak a Naphoz viszonyított, ún. relatív mozgását. Ezt a (2.70)-ből adódó

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\gamma\frac{mM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$ (2.80. egyenlet)

mozgásegyenlet írja le. A

$$\mu = \frac{mM}{m+M}$$ (2.81. egyenlet)

a Nap és bolygó rendszerének redukált tömege. A (2.80) egyenlet ugyanolyan alakú, mint az (1.236), (1.237) egyenletek vektori alakja, azzal a különbséggel, hogy a bal oldalon az *m* tömeg helyett most a μ redukált tömeg szerepel. Ebből a relatív mozgás gyorsulására az

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\gamma\frac{m+M}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$ (2.82. egyenlet)

egyenletet kapjuk. Síkbeli polárkoordinátákat használva,

$$a_r = -\gamma\frac{mM}{r^2},$$ (2.83. egyenlet)

$$a_\varphi = 0.$$ (2.84. egyenlet)

Ezek az egyenletek a 4.1 pontban követett eljárással egyszerűen megoldhatók. Eredményül a bolygó Naphoz viszonyított ún. relatív mozgásának a pályáját kapjuk. Mivel (2.83) és (2.84) az ottani egyenletektől csupán abban különböznek, hogy *M* helyett *M*+*m* van a jobb oldalon, a megoldás is rendelkezésünkre áll, ha az $M \to M+m$ helyettesítést elvégezzük. Így adódik

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi+\alpha)},$$ (2.85. egyenlet)

ahol

$$p = \frac{\lambda^2}{\gamma(M+m)}, \qquad \varepsilon = \frac{A\lambda^2}{\gamma(M+m)}.$$ (2.86. egyenlet)

A bolygó pályája tehát e pontos számítás szerint is ellipszis, amelynek egyik gyújtópontjában van a Nap. Az ellipszis alakját meghatározó paraméterekben most a Nap tömegén kívül a bolygó tömege is szerepel. Látjuk, hogy Kepler első és második törvénye változatlanul érvényes, a harmadik törvény azonban módosul, mert a T^2/a^3 arányra most a

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma(M+m)} = \frac{4\pi^2}{\gamma M\left(1+\frac{m}{M}\right)}$$ (2.87. egyenlet)

adódik. Mivel a jobb oldalon a Nap tömege mellett a bolygó tömege is szerepel, ezért a T^2/a^3 hányados bolygónként más és más. Kepler harmadik törvénye tehát nem igaz, csupán abban a közelítésben, ha *m*-et a Nap *M* tömege mellett elhanyagoljuk. A *m/M* korrekció a legnagyobb tömegű bolygónál, a Jupiternél ~ 1 ezrelék.

A (2.71) transzformációs képletek felhasználásával a relatív mozgásból meghatározhatjuk mindkét tömegpontnak — tehát a Napnak és a bolygónak — a tömegközépponthoz viszonyított mozgását is. Ugyanis

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m}{M+m}\mathbf{r},$$ (2.88. egyenlet)

$$\mathbf{r}_2 = \frac{M}{M+m}\mathbf{r}.$$ (2.89. egyenlet)

Ebből látszik, hogy mind a Nap, mind a bolygó a tömegközépponthoz viszonyítva ellipszispályán mozog. Mivel a $\frac{M}{M+m}$ tényező közelítőleg 1-gyel egyenlő, ezért a bolygó pályája csak kicsit tér el a relatív mozgás pályájától, a Nap ellipszise viszont $\frac{m}{M+m}$ arányban kisebb.

Két tömegpont rugalmas ütközése

A mai fizika egyik legintenzívebben művelt kutatási iránya az anyag elemi alkotórészei közötti kölcsönhatások tanulmányozása. Az ilyen kutatásokban általában nagy energiájú ún. elemi részeket (pl. elektronokat, protonokat stb.) lőnek egymásnak, és vizsgálják a kölcsönhatás következményeit. Ha az

energia nem nagyon nagy, akkor a részecskék rugalmasan „szóródnak" egymáson. Ezen azt érjük, hogy a rendszer mozgási energiája nem változik meg. Nagyobb energiáknál a szóródás általában rugalmatlan, a mozgási energia más energiafajtává alakul. Mivel a szóródás részleteit a részek közötti kölcsönhatás határozza meg, az ilyen vizsgálatok ezekre adnak értékes felvilágosításokat. Az ilyen folyamatoknak azonban vannak olyan általános törvényszerűségei, amelyek függetlenek a részecskék közötti kölcsönhatás konkrét alakjától. Például a rendszer tömegközéppontjának mozgását a kölcsönhatás nem befolyásolja, mert a belső erők arra nincsenek hatással. Másrészt a rendszer eredő impulzusa állandó marad, mert ezt is csak a külső erők változtatják meg. Éppen emiatt teszik lehetővé ezek az általánosan érvényes törvények, hogy itt a mechanika keretein belül foglalkozzunk a testek ütközésének fizikájával.

A testek ütközésénél a közöttük ható kölcsönhatás az érintkezéskor nyilvánul meg, és általában nagyon rövid ideig tart. A folyamat részleteinek végigkövetése igen bonyolult feladat. Az ütközéskor a test alakja megváltozik, emiatt benne belső erők (feszültségek) keletkeznek, amelyek vissza akarják állítani az eredeti állapotot. Ez történik a tökéletesen rugalmas ütközésnél, és a testek az érintkezés után eredeti alakjukban mozognak tovább megváltozott irányban. A mondottak értelmében a test tömegpontmodellje csak az ütközés előtti és utáni állapotban alkalmazható, a kölcsönhatás ideje alatt nem. Ezért csak olyan kérdéseket vizsgálunk, amelyek a tömegpont fogalmával való leírást megengedik.

Gondoljunk két, m_1 és m_2 tömegű anyagi pontra, amelyek rugalmasan ütköznek egymással, és vizsgáljuk, hogy az ütközés után milyen lesz a mozgásállapotuk. Az ütközés elméleti leírására nagyon célszerűnek mutatkozik a tömegközépponti rendszer, ezért először ebben vizsgáljuk a folyamatot. (A TK-rendszerbeli fizikai mennyiségeket a más vonatkoztatási rendszertől való megkülönböztetés miatt felülhúzással jelöljük.) Legyen a két tömegpont impulzusa az ütközés előtt $\bar{\mathbf{p}}_1$, illetve $\bar{\mathbf{p}}_2$, az ütközés után $\bar{\mathbf{p}}_1'$, $\bar{\mathbf{p}}_2'$.

A TK-rendszerben a pontrendszer eredő impulzusa zérus, és mivel külső erők nem hatnak, érvényes az impulzus megmaradásának a tétele. Tehát

$$\bar{\mathbf{p}}_1+\bar{\mathbf{p}}_2=\bar{\mathbf{p}}_1'+\bar{\mathbf{p}}_2'=0. \quad \text{(2.90. egyenlet)}$$

Az ütközés feltevésünk szerint rugalmas, ezért a rendszer mozgási energiája is állandó:

$$\frac{\bar{p}_1^2}{2m_1}+\frac{\bar{p}_2^2}{2m_2}=\frac{\bar{p}_1'^2}{2m_1}+\frac{\bar{p}_2'^2}{2m_2}. \quad \text{(2.91. egyenlet)}$$

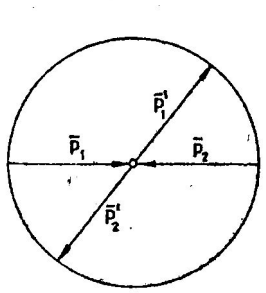
Az impulzusmegmaradást kifejező (2.90) képletből következik, hogy

$$\bar{\mathbf{p}}_1=-\bar{\mathbf{p}}_2, \qquad \bar{\mathbf{p}}_1'=-\bar{\mathbf{p}}_2'. \quad \text{(2.92. egyenlet)}$$

A tömegpontok impulzusa a TK-rendszerben az ütközés előtt és után ellentétes irányú és egyenlő nagyságú:

$$\bar{p}_1=\bar{p}_2=\bar{p},$$
$$\bar{p}_1'=\bar{p}_2'=\bar{p}'. \quad \text{(2.93. egyenlet)}$$

29. ábra -



TK-rendszerben

Ezeket a (2.91)-be helyettesítve, adódik

$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{p}_1' = \bar{p}_2' = \bar{p}.$ (2.94. egyenlet)

Rugalmas ütközéskor tehát a TK-rendszerben a tömegpontok impulzusainak csak az iránya változik meg, a nagyságuk nem. Az impulzusvektorok egy $\bar{p}$ sugarú kör mentén helyezkednek el *(29. ábra)*.

Látjuk, hogy a tömegpontok rugalmas ütközésének a leírása a TK-rendszerben rendkívül egyszerű. Ezért még a kölcsönhatást figyelembe vevő elméleti számításoknál is általában a TK-rendszert szoktuk használni, és a kapott eredményeket egyszerű transzformációval visszük át más vonatkoztatási rendszerekbe.

Az ütközések kísérleti vizsgálata nem a TK-rendszerben történik, mert a berendezések a kísérleti munkahelyhez, a laboratóriumhoz vannak kötve. Az ilyen kísérletekben általában úgy valósítják meg az ütközést, hogy az egyik részecske az ütközés előtt nyugalomban van, és a másik mozog feléje. Ezt a vonatkoztatási rendszert nevezzük laboratóriumi rendszernek (röviden L-rendszernek).

Most megvizsgáljuk, hogyan megy végbe két tömegpont rugalmas ütközése az L-rendszerből szemlélve.

Legyen a tömegpontok impulzusa az ütközés előtt $\mathbf{p}_1$, illetve $\mathbf{p}_2$, az ütközés után $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$. A mondottak szerint az egyik tömegpont az ütközés előtt nyugalomban van, tehát impulzusa zérus. Válasszuk az m_2 tömegűt nyugvónak, így $\mathbf{p}_2 = 0$.

A laboratóriumi rendszerben is az impulzus- és az energiamegmaradás tételei alapján lehet meghatározni az ütközés utáni impulzusokat az ütközés előttiekből:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2',$$ (2.95. egyenlet)

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}.$$ (2.96. egyenlet)

Ezeknek az egyenleteknek a megoldása helyett szemléletes képet kaphatunk az ütközésről az alábbi geometriai megfontolásokkal. Ehhez először megmutatjuk, hogy a $\mathbf{p}_1'$ impulzusvektor végpontja egy kör kerületén mozog.

A $\mathbf{p}_1$ és a TK-rendszerbeli $\bar{\mathbf{p}}_1$ között (2.15) szerint érvényes a

$$\bar{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{p}_1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{p}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{p}_1.$$ (2.97. egyenlet)

összefüggés. Hasonló igaz az ütközés utáni $\bar{\mathbf{p}}_1'$, illetve $\mathbf{p}_1'$ impulzusra:

$$\bar{\mathbf{p}}_1' = \mathbf{p}_1' - \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{p}_1.$$ (2.98. egyenlet)

Mivel a (2.94) szerint $\bar{p}_1^2 = \bar{p}_1'^2$, ezért az L-rendszerbeli $\mathbf{p}_1$ és $\mathbf{p}_1'$ impulzusok között fennáll a következő kapcsolat:

$$\left(\mathbf{p}_1' - \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{p}_1\right)^2 = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 \mathbf{p}_1^2.$$ (2.99. egyenlet)

Ez olyan körnek az egyenlete, amelynek középpontja az

$$\mathbf{u} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{p}_1$$ (2.100. egyenlet)

vektorral megadott pontban van, sugara pedig

$$R = \frac{m_2}{m_1+m_2}p_1.$$ (2.101. egyenlet)

Ebben az egyenletben az m_1, m_2 tömegek és az ütközés előtti $\mathbf{p}_1$ impulzus adottak, a $\mathbf{p}_1'$ a változó. Az m_1 tömegű (ütköző) tömegpont ütközés utáni $\mathbf{p}_1'$ impulzusvektorának végpontja e kör kerületén mozog. Mivel

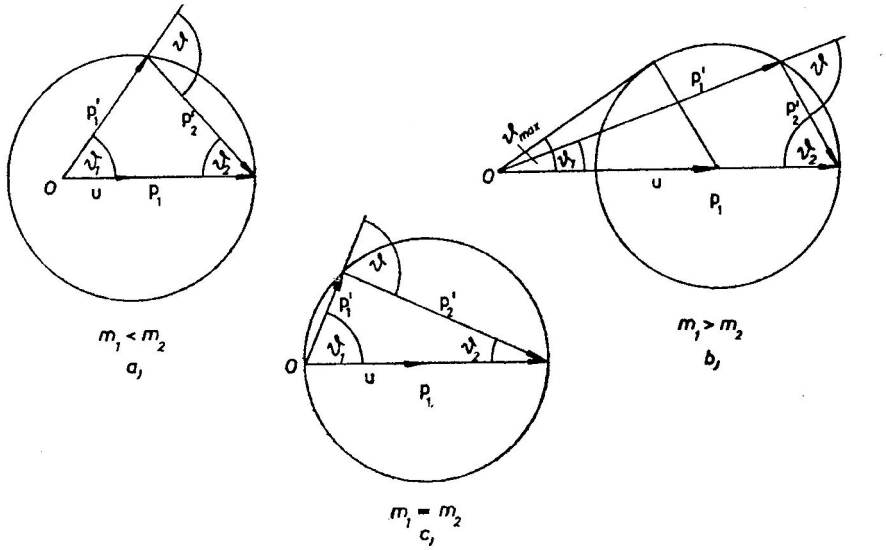
$$|\mathbf{p}_1 - \mathbf{u}| = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1 = R,$$ (2.102. egyenlet)

a $\mathbf{p}_1$ vektor végpontja is rajta van a körön, de ez nem mozog. Ha az $m_1 < m_2$, akkor a $\mathbf{p}_1$ vektor nagysága kisebb, az $m_1 > m_2$ esetben pedig nagyobb, mint a kör átmérője. Ezért a vektorok *O* vonatkoztatási pontja az előbbi esetben a kör belsejében, utóbbiban a körön kívül van. Ha a két tömeg egyenlő, akkor az *O* pont is a kör kerületén van. E három különböző esetet szemlélteti a *30. a), b), c) ábra.* Jelöljük ϑ_1-gyel a $\mathbf{p}_1'$ és $\mathbf{p}_1$, ϑ_2-vel a $\mathbf{p}_2'$ és $\mathbf{p}_1$ vektorok által bezárt szöget. Az ábrából látszik, hogy az ütközés utáni $\mathbf{p}_1'$ és $\mathbf{p}_2'$ impulzusok iránya által bezárt ϑ szög az előbbiek összege: $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$. Geometriai okból nyilvánvaló, hogy $\vartheta > \pi/2$, ha, $m_1 < m_2$ és, $\vartheta < \pi/2$, ha, $m_1 > m_2$ és egyenlő tömegű pontok ütközésénél $\vartheta = \pi/2$. Az azonos tömegű részecskék a centrális ütközéstől eltekintve az ütközés után egymásra merőlegesen mozognak.

Ha az $m_1 < m_2$, az ütköző tömegpont ütközés utáni $\mathbf{p}_1'$ impulzusának iránya a $\mathbf{p}_1$-hez képest tetszőleges lehet; a ϑ_1 szög minden értéket felvehet a [0, π] intervallumban. Lehet tehát $\pi/2$ -nél nagyobb, vagyis az ütközés után visszafelé is mozoghat. Ezzel ellentétben, az $m_1 > m_2$ esetben a ϑ_1 egy maximális szögnél nagyobb nem lehet. Erre a maximális ϑ_{max} szögre az jellemző, hogy ennél a $\mathbf{p}_1'$ érinti a kört, tehát

$$\sin \vartheta_{max} = \frac{R}{u} = \frac{m_2}{m_1}.$$ (2.103. egyenlet)

30. ábra -



Mivel, $m_1 > m_2$, $\vartheta_{max} < \pi/2$, az ütköző tömegpont az ütközés során előreszóródik; nem mozoghat visszafelé.

Egyenlő tömegű anyagi pontok rugalmas ütközésekor ϑ_1 a [0, π/2]intervallumban változhat, tehát visszafelé most sem szóródhat az ütköző tömegpont.

Az eddigi megállapításaink azokra az esetekre vonatkoztak, amikor a két tömegpont ütközés utáni $\mathbf{p}_1'$, illetve $\mathbf{p}_2'$ impulzusa nem egy egyenes mentén van. A két test ütközésének speciális esete az ún. *centrális ütközés,* amelynél a $\mathbf{p}_1'$ és $\mathbf{p}_2'$ a fenti kör $\mathbf{p}_1$ irányú átmérője mentén helyezkedik el.

Azonos tömegű testek centrális rugalmas ütközésekor

$\mathbf{p}_1' = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_1.$ (2.104. egyenlet)

Az ütköző test az ütközéskor megáll, impulzusát átadja a korábban nyugalomban levőnek, és az mozog tovább ugyanakkora sebességgel, mint amellyel az ütköző mozgott az ütközés előtt. A két test az ütközéskor tehát szerepet cserél.

Különböző tömegű testek centrális rugalmas ütközése utáni impulzusaik a következőképpen fejezhetők ki az ütköző test eredeti $\mathbf{p}_1$ impulzusával:

$$\mathbf{p}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{p}_1,$$ (2.105. egyenlet)

$$\mathbf{p}_2' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{p}_1.$$ (2.106. egyenlet)

Az ütközés előtt nyugalomban levő test a $\mathbf{p}_1$-gyel párhuzamos $\mathbf{p}_2'$ impulzust kap az ütközéskor, és nagysága ugyanakkora lesz, függetlenül attól, hogy m_1 kisebb vagy nagyobb m_2-nél. Az ütköző test ütközés utáni $\mathbf{p}_1'$ impulzusa az $m_1 < m_2$ esetben $\mathbf{p}_1$-gyel ellentétes irányú, míg az $m_1 > m_2$ esetén vele egy irányú lesz. Az előbbi esetben tehát visszafelé, az utóbbiban előre fog mozogni.

A rakéta mozgása

A kísérleti fizikai tanulmányokból ismert, hogy a rakétákat a magukkal vitt üzemanyag elégetésekor nagy sebességgel kiáramló gáz reakcióereje mozgatja. Feladatul tűzzük ki a rakéta mozgását leíró egyenlet meghatározását. Ehhez a rakétát és a gáz alakban kiáramló tömeget pontrendszernek tekintjük. Ha a pontrendszer impulzusát **P**-vel, a ható külső erők eredőjét pedig **F**-fel jelöljük, akkor az impulzustétel szerint

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}.$$ (2.107. egyenlet)

A rakétát az üzemanyaggal együtt a tömegközéppontba egyesített összes tömeggel anyagi pontnak gondoljuk. Legyen ez a tömeg *t* időpillanatban *m(t),* amely az idővel folytonosan csökken. A sebessége ugyanebben az időpontban valamely inerciarendszerben **v(t)**, így a rakéta impulzusa,

$$\mathbf{P}(t) = m(t)\,\mathbf{v}(t).$$ (2.108. egyenlet)

Feltételezzük, hogy időegység alatt μ tömegű gáz áramlik ki a rakétához viszonyított **u** sebességgel. A gáznak az inerciarendszerre vonatkoztatott **v'** sebessége,

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$ (2.109. egyenlet)

Mivel a kiáramló tömeg a rakéta (+ üzemanyag) tömegét csökkenti, $\mu = -\dot{m}$. A Δt időtartam alatt kiáramló gáz tömege $-\dot{m}\Delta t$.

Írjuk fel a rakétából és a kiáramlott gázból álló rendszer impulzusát a $t + \Delta t$ időpontban:

$$\mathbf{P}(t+\Delta t) = (m + \dot{m}\Delta t)\,\mathbf{v}(t+\Delta t) - \dot{m}\Delta t\left(\mathbf{v}(t+\Delta t) + \mathbf{u}\right) = m\mathbf{v}(t+\Delta t) + \dot{m}\mathbf{v}(t+\Delta t)\Delta t - \dot{m}\mathbf{v}(t+\Delta t)\Delta t - \dot{m}\mathbf{u}\Delta t.$$ (2.110. egyenlet)

Képezzük a (2.110) és a (2.108) különbségét, és osszuk el Δt-vel, majd vegyük e különbségi hányados határértékét, amidőn $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{P}(t+\Delta t) - \mathbf{P}(t)}{\Delta t} = m \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} - \dot{m}\mathbf{u}.$$

Ez a differenciálhányados fogalma alapján a következőt jelenti:

$\dot{\mathbf{P}} = m\dot{\mathbf{v}} - \dot{m}\mathbf{u}.$ (2.111. egyenlet)

Az impulzustételt kifejező (2.107) egyenletbe helyettesítve, megkapjuk a rakéta keresett mozgásegyenletét:

$$m\dot{\mathbf{v}} - \dot{m}\mathbf{u} = \mathbf{F}.$$

Az $m\dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) - \dot{m}\mathbf{v}$ átalakítással

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} + \dot{m}(\mathbf{v}+\mathbf{u}).$$ (2.113. egyenlet)

A jobb oldalon álló második tagnak a következő fizikai jelentése van. Az inerciarendszerben $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ sebességgel kiáramló gáz impulzusa időegység alatt $-\dot{m}(\mathbf{v}+\mathbf{u})$-val változik meg, ezért ennek -1-szerese a gáz által a rakétára kifejtett reakcióerő, amelyet tolóerőnek nevezünk. A rakéta impulzusának az idő szerinti megváltozása a (2.113) szerint tehát két okra vezethető vissza: hat rá egy **F** külső erő és a kiáramló gáz tolóereje.

Ha külső erő nem hat, akkor a rakéta egyedül az üzemanyag elégetésekor kiáramló gáz tolóerejétől mozog.

Alkalmazásként tanulmányozzuk olyan rakéta mozgását, amely a homogén nehézségi erőtérben függőlegesen felfelé mozog. A kiáramló gáznak a rakétához viszonyított **u** sebességéről feltesszük, hogy állandó. A koordináta-rendszer *z* tengelyét válasszuk függőlegesen felfelé irányulónak. Tehát **F**=(0, 0, $-mg$), **v**=(0, 0, *v*), **u**= (0, 0, $-u$).

A mozgásegyenlet:

$$\frac{d}{dt}(mv) = -mg + \dot{m}(v-u).$$

A differenciálást elvégezve,

$m\dot{v} = -mg - \dot{m}u,$ (2.115. egyenlet)

majd a tömeggel elosztva,

$$\dot{v} = -g - \frac{\dot{m}}{m}u = -g - u\frac{d}{dt}\ln m.$$ (2.116. egyenlet)

Ebből integrálással kapjuk a rakéta sebességét a *t* időpillanatban:

$$v(t) = v(0) - gt + u\ln\frac{m(0)}{m(t)}.$$ (2.117. egyenlet)

A kezdeti feltételek legyenek a következők:

$$t = 0\text{-kor} \quad z(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad m(0) = m_0.$$ (2.118. egyenlet)

Ennek figyelembevételével adódik

$$v(t) = -gt + u\ln\frac{m_0}{m(t)}.$$ (2.119. egyenlet)

Ebből látszik, hogy a rakéta sebessége tetszőleges értékre nem növelhető. Az elérhető maximális sebességet akkor kapjuk, ha *t* helyére a teljes üzemanyag $t_{é}$ elégési idejét, $m(t)$-re pedig az üzemanyag nélküli m_R rakétatömeget helyettesítjük:

$$v_{max} = -gt_{é} + u\ln\frac{m_0}{m_R}.$$ (2.120. egyenlet)

A v_{max} annál nagyobb, minél kisebb a $t_{é}$ égési idő, minél nagyobb az *u* relatív sebesség és az m_0 / m_R tömegarány. Az üzemanyag tömegét $m_{ü}$-vel jelölve, $m_0 = m_R + m_{ü}$, és így

$$v_{max} = -gt_{é} + u\ln\frac{m_0}{m_0 - m_{ü}}.$$ (2.121. egyenlet)

Ha feltételezzük azt is, hogy időegység alatt ugyanannyi gáz áramlik ki, vagyis az $\dot{m} = -\mu$ állandó, akkor a (2.119)-ből az emelkedési magasság is kiszámítható:

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + ut + \frac{um_0}{\mu}\left(1-\frac{\mu}{m_0}t\right)\ln\left(1-\frac{\mu}{m_0}t\right). \quad \text{(2.122. egyenlet)}$$

Az égési időnek megfelelő *z*(*t*é) magasságtól a rakéta úgy viselkedik, mint a v_{max} kezdősebességgel függőlegesen felfelé hajított test. így könnyen kiszámítható az a maximális magasság, amelyet a rakéta elérhet.

Mivel az **u** relatív sebesség és az m_0 / m_R tömegarány növelése technikai okokból korlátozott, ezért mind a v_{max}, mind az elérhető legnagyobb magasság is csak bizonyos határig növelhető. A nagyobb sebességek és magasságok elérésére több fokozatú rakétákat alkalmaznak. Ezek egymásra épített, csökkenő tömegű rakéták. Először az alsó, legnagyobb rakétát működtetik. Amikor ennek üzemanyaga teljesen elégett, ez leválik, és működésbe lép a második rakéta. Ennek kezdeti sebessége az első fokozatban elért v_{1max} maximális sebesség. Üzemanyagának elégése után ez is leválik, és beindul a harmadik rakéta a v_{2max} kezdeti sebességgel. Az egyes fokozatok bekapcsolásával a maximális sebesség elvileg tetszőlegesen nagyra növelhető. Gyakorlatilag azonban a nagy tömegek miatt csak néhány fokozat valósítható meg. Így sikerült elérni olyan sebességeket, amelyek a mesterséges égitestek felbocsátásához szükségesek. Ha az egyes fokozatok rakétáinak tömegeit az üzemanyaggal együtt m_i-vel, a kiégés utáni tömeget m_{iR}-rel jelöljük, akkor egy háromfokozatú rakétával elérhető maximális sebesség külső erő jelenléte nélkül a következő:

$$v_{3max} = u\ln\left(\frac{m_1+m_2+m_3}{m_{1R}+m_2+m_3}\cdot\frac{m_2+m_3}{m_{2R}+m_3}\cdot\frac{m_3}{m_{3R}}\right). \quad \text{(2.123. egyenlet)}$$

A zárójelben álló mennyiséget a háromfokozatú rakéta effektív tömegarányának nevezzük.

Végül megjegyezzük, hogy a mechanikai energia megmaradásának a tétele most nem érvényes, mert itt az elégetett üzemanyag kémiai energiája alakul át mechanikai energiává.

3. fejezet - A MEREV TEST MECHANIKÁJA

A szilárd halmazállapotú testek – mozgásukat tekintve – sok esetben felfoghatók úgy, hogy a mozgás során a test részei egymáshoz viszonyított távolságukat nem változtatják meg. Röviden azt mondjuk, hogy a szilárd test merev. A valóságban minden test megfelelő erő hatására deformálódik, vagyis alakja és térfogata megváltozik. A merev test tehát egy idealizált modellje a valóságos testeknek. Azonban nagyon sok mozgásnál a deformáció rendkívül kicsi, ezért a tapasztalattal jól egyező közelítést kapunk, ha a szilárd testeket merev testeknek tekintjük. A testet anyagi pontok rendszerének fogjuk fel, és az egyes tömegpontok tömegét m_i,-vel, helyüket az $\mathbf{r}_i$, helyvektorral jellemezzük. A merevség fogalmát az

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \text{áll.} \quad \text{(3.1. egyenlet)}$$

mellékfeltétellel vesszük figyelembe. Ez azt fejezi ki, hogy bármely két tömegpont egymástól számított távolsága állandó.

A pontrendszerek mechanikájának az előző fejezetben tárgyalt általános tételei a (3.1) mellékfeltétellel együtt a merev testekre is alkalmazhatók. Ennek alapján könnyen megfogalmazhatók a merev test mozgásegyenletei, és ezek megoldásával megadható a test mozgásának dinamikai leírása. E fejezetben is a dinamikai szemléletet követjük és a mozgásra helyezzük a hangsúlyt. A műszaki alkalmazásokban fontos szerepet játszó egyensúlyi kérdések vizsgálatától eltekintünk.

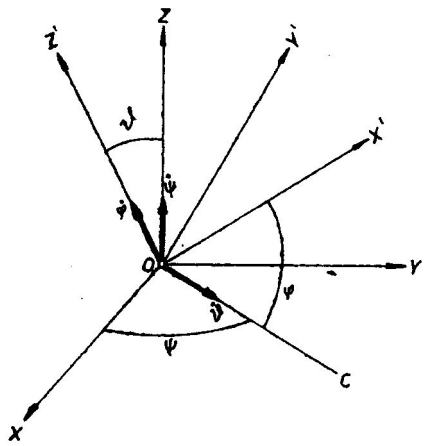
12. A merev test kinematikája

Gondoljunk el egy merev testet, amely *N* darab tömegpontból álló fizikai rendszer a (3.1) mellékfeltétellel. A test mechanikai állapotát valamely időpontban az egyes tömegpontok helye és sebessége jellemzi. Ez a 6*N* mennyiség a (3.1) feltétel miatt nem független egymástól. A merev testnek – mint egésznek – a térbeli helyzetét három nem egy egyenesbe eső pontja már egyértelműen meghatározza. E három pontnak egy derékszögű koordináta-rendszerben kilenc koordinátája van. A merevség miatt ezeknek az egymástól való távolsága állandó. Mivel három pont között három páronkénti távolság van, ezért a (3.1) megszorító feltétel három egyenletet jelent a kilenc koordinátára. így a kilenc mennyiség közül csak hat független egymástól. A merev test helyzetét tehát hat független koordinátával egyértelműen meg lehet határozni.

A mechanikában a rendszer független koordinátáinak a számát *szabadsági foknak* nevezzük. A merev test hat szabadsági fokú fizikai rendszer.

A hat független koordináta kiválasztása a következőképpen történhet. Felveszünk egy *K*-val jelölt inerciarendszert, amelyben a merev test helyzetét jellemezni akarjuk. Egy másik koordináta-rendszert a testhez rögzítünk, ezt *K′*-vel jelöljük. A *K′* tehát a merev testtel együtt mozog. A merev test helyzetének meghatározása így egyenértékű a *K′* rendszernek a *K* inerciarendszerbeli megadásával. A *K′* rendszer pillanatnyi helyzete megadható a középpont $\mathbf{r}_0$ helyvektorával és a tengelyek irányával. Mivel utóbbi három szöggel jellemezhető, ez az $\mathbf{r}_0$ három koordinátájával együtt hat független mennyiséget jelent. A *K′* rendszer középpontjául a merev test bármely pontja választható, de egyszerűsödnek az egyenleteink, ha a testhez rögzített koordináta-rendszer középpontját a merev test tömegközéppontjába helyezzük.

31. ábra -



A *K′* rendszer tengelyeinek irányát az ún. *Euler-szögekkel* adjuk meg. Ezek bevezetésekor feltesszük, hogy a *K* és *K′* két derékszögű koordináta-rendszer középpontja egy pillanatra egybeesik. Az *xy* és *x′y′* síkok egy, az origón átmenő egyenesben, az ún. csomóvonalban metszik egymást. Ez a *zz′* síkra merőleges. A csomóvonalat *C*-vel jelöljük és iránnyal látjuk el. Az $\overrightarrow{OC}$ irányt úgy választjuk, hogy ebbe az irányba nézve, a *z* tengely a *z′*-be az óramutató járásával megegyező, a kisebb *ϑ* szöggel való elforgatással menjen át. *ψ* jelentse azt a szöget, amellyel a *z* tengely körüli pozitív forgatás az *x* tengelyt a csomóvonalba viszi. A harmadik szög legyen az, amellyel az *z′* tengely körül az óramutató járásával megegyező irányba forgatva, *C* átmegy az *x′* tengelybe. E három szöget nevezzük Euler-szögeknek. Ezek megadása egyértelműen meghatározza a testhez rögzített *K′* rendszer tengelyeinek az irányát a *K* inerciarendszerhez képest.

Ezek után megállapíthatjuk, hogy a merev test helyzetét egy inerciarendszerben valamely tetszőlegesen kiválasztott pontjának (pl. a tömegközéppontnak) három koordinátájával és a testhez rögzített koordináta-rendszer tengelyeinek irányát meghatározó három Euler-szöggel adhatjuk meg. A hat szabadsági foknak megfelelően ez a hat független mennyiség meghatározza a merev test helyzetét az inerciarendszerben.

A fizikai rendszer mechanikai állapotát – amint az első fejezetben megbeszéltük – a helye és a sebessége jellemzi. Ezért most a merev test pontjainak a sebességét kell megvizsgálnunk. Gondoljunk az *i*-edik tömegpontra. Ennek sebessége az általános esetben két részből tevődik össze: a testhez rögzített *K′* rendszer középpontjának $\mathbf{v}_0$ transzlációs sebességéből és az *O* ponton átmenő tengely körüli forgásból származó forgási sebességéből. Ha a forgás szögsebességét **ω**-val jelöljük, akkor az (1.277) szerint

$$\mathbf{v}_{i} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{i}'$$ (3.2. egyenlet)

Itt $\mathbf{r}_i'$ az *i*-edik tömegpontnak az *O*-tól számított helyvektora. Tehát

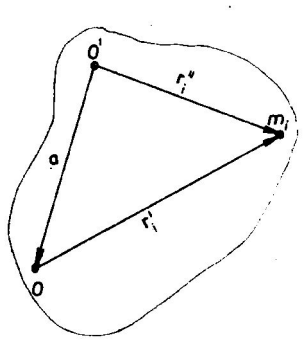
$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i'$ (3.3. egyenlet)

Felmerülhet az a kérdés, hogyan változik meg a tömegpont sebessége, ha a testnek egy másik, *O′* pontját választjuk a *K′* rendszer kezdőpontjának és az ezen átmenő tengelyre vonatkoztatjuk a test forgását. Az $\overrightarrow{O'O}$ vektort **a**-val, az *i*-edik tömegpontnak *O′*-től számított helyét $\mathbf{r}_i''$-vel jelölve,

$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_i''$ (3.4. egyenlet)

$\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}_O - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$ (3.6. egyenlet)

32. ábra -



A (3.4)-gyel egybevetve, látható, hogy a két szögsebességvektor megegyezik:

$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'$ (3.7. egyenlet)

Ez a későbbiek szempontjából fontos összefüggés azt fejezi ki, hogy a szögsebesség nem függ a vonatkoztatási pont választásától. A test bármelyik pontját választjuk vonatkoztatási pontnak, a szögsebességvektorok egy adott időpontban párhuzamosak és egyenlő nagyságúak. Emiatt lehet a merev test forgását egy abszolút jelentéssel rendelkező szögsebességvektorral jellemezni. A (3.5)-ből látszik, hogy a $\mathbf{v}_0$ transzlációs sebesség már függ a pont választásától.

A testhez rögzített *K′* koordináta-rendszer a testtel együtt változtatja a helyzetét az inerciarendszerhez képest. Ezért a *K′* rendszert, amelyre az *x′*, *y′*, *z′* koordinátákat vonatkoztatjuk, pillanatnyi (momentán) vonatkoztatási rendszernek nevezzük. A *K′* rendszer használata azért előnyös, mert a merev test tömegeloszlása csak a vele együtt mozgó rendszerben marad változatlan, az inerciarendszerben nem.

A *K′* rendszer tengelyeinek az iránya a merev test forgása következtében folyton változik, és emiatt az Euler-szögek is változnak az időben. A test forgó mozgásának a kinematikai leírása az Euler-szögek időfüggésének a megadásával történik. Ehhez szükségünk lesz a szögsebesség és az Euler-szögek közötti kapcsolatot kifejező egyenletekre. Ezért most ezeket az egyenleteket határozzuk meg.

Az Euler-szögek definíciója szerint $\dot{\Psi}$ a *z* tengely körüli forgás szögsebességét jelenti. Hasonló a jelentése a $\dot{\Phi}$-, illetve $\dot{\vartheta}$-nak. Előbbi a *z′* tengely körüli, utóbbi pedig a csomóvonal körüli forgás szögsebessége. Ha ezeket is a megfelelő forgástengelyek irányába mutató vektoroknak tekintjük, akkor az **ω** szögsebességvektor e három vektor összegeként állítható elő:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\psi}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \quad \text{(3.8. egyenlet)}$$

Ennek alapján könnyen felírhatok az **ω** vektor komponensei mind a *K′,* mind a *K* rendszerben. Mivel a későbbiek során az előbbiekre lesz szükségünk, ezért most ezt a felbontást határozzuk meg. A *31. ábráról* leolvashatók a $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\vartheta}$ vektorok *K′* három tengelyére való vetületei:

	x′	y′	z′
$\dot{\psi}$	$\dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi$	$\dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi$	$\dot{\psi}\sin\vartheta$
$\dot{\varphi}$	0	0	$\dot{\varphi}$
$\dot{\vartheta}$	$\dot{\vartheta}\cos\varphi$	$-\dot{\vartheta}\sin\varphi$	0

A szakirodalomban szokásos jelölést követve, $\omega_{x'} = p$, $\omega_{y'} = q$, $\omega_{z'} = r$. A táblázatból (3.8) alapján leolvasható, hogy

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi, \\ q &= \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\varphi, \\ r &= \dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad \text{(3.9. egyenlet)}$$

Ezek az egyenletek fejezik ki a keresett összefüggéseket, az **ω** szögsebességvektor *K′* rendszerbeli komponenseit kapcsolatba hozzák az Euler-szögekkel, illetve azok idő szerinti differenciálhányadosaival. Ha a *p, q, r* komponenseket ismerjük, akkor az Euler-szögek időfüggése ezekből kiszámítható. A szögsebességvektor időbeli változását viszont dinamikai törvények, a merev test mozgásegyenletei határozzák meg.

13. A merev test általános mozgásegyenletei

A merev test mozgásának dinamikai leírásánál arra az alapkérdésre keressük a választ, hogyan mozog a test, ha ismert erők hatnak rá. Mivel a merev test 6 szabadsági fokú rendszer, 6 olyan egyenletre van szükségünk, amelyek a test fizikai állapotának a változását meghatározzák. Három egyenlet a transzlációs mozgást, másik három a test forgó mozgását írja le.

A pontrendszerek dinamikájára vonatkozó általános tételek a merev testre is érvényesek, mert ez anyagi pontok rendszereként fogható fel. Ezért az előző fejezetben megismert mozgástörvények a merev testre is alkalmazhatók.

Ezek közül kell kiválasztanunk azt a hat egyenletet, amelyekből a merev test mozgásának dinamikai leírása egyértelműen meghatározható. A tapasztalat szerint az impulzus-tételt és az impulzusnyomaték-tételt kifejező egyenletek ilyenek. Ezért a merev test mozgásegyenleteinek a

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} = \mathbf{F}, \qquad \text{(3.10. egyenlet)}$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} = \mathbf{M} \qquad \text{(3.11. egyenlet)}$$

egyenleteket tekintjük. A (3.10)-ben és (3.11)-ben csak a külső erők szerepelnek, mert a belső erők (3.10)-ből a kölcsönhatás törvénye miatt esnek ki, (3.11)-ből pedig amiatt, mert a merev test pontjai között ható belső erők centrálisak: $(\mathbf{r}_i, -\mathbf{r}_j) \| \mathbf{F}_{ij}$. Ha a test mozgása nem szabad, vagyis kényszereknek van alávetve (pl. csak egy rögzített tengely körül foroghat), akkor az egyenletek jobb oldalán az erőkhöz a kényszererőket is hozzá kell venni. A (3.1l)-ben – ennek megfelelően – a kényszererők nyomatéka is megjelenik.

A (3.10) egyenlet a (2.10) alapján értelmezett tömegközéppont mozgását írja le. Ugyanis

$$\dot{\mathbf{P}} = m\ddot{\mathbf{r}}_0.$$

A (3.10), (3.11) egyenletek az inerciarendszerben érvényesek, de könnyen felírhatók a merev testtel együttmozgó *K′* rendszerben is. Ehhez figyelembe kell vennünk az (1.283) összefüggést, amely szerint bármely vektor idő szerinti differenciálhányadosa a forgó rendszerben a

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{\mathrm{f}} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{\mathrm{in}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \qquad \text{(3.12. egyenlet)}$$

szerint fejezhető ki az inerciarendszerben vett differenciálhányadossal. Az impulzus- és impulzusnyomaték-tételt kifejező (3.10), (3.11) egyenletek ennek megfelelően a testtel együttmozgó *K′* rendszerben a következők lesznek:

$$\left(\frac{d\mathbf{P}}{dt}\right)_{\mathrm{f}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \qquad \text{(3.13. egyenlet)}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\mathrm{f}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}. \qquad \text{(3.14. egyenlet)}$$

Az impulzusnyomaték-tétel (3.11), illetve (3.14) egyenletében fellépő impulzus- és erőnyomatékot az inerciarendszer kezdőpontjára vonatkoztattuk, ezért $\mathbf{r_i}$ az *i*-edik tömegpontnak az inerciarendszerbeli helyvektora. Nincs semmi akadálya annak, hogy az **L** és **M** nyomatékokat a merev test valamely *O* pontjára vonatkoztassuk. Ebben az esetben a testhez rögzített *K'* rendszer kezdőpontját az *O*-ba helyezzük. Az *i*-edik tömegpont *K*-, illetve *K'*-beli helyvektorai között fennáll az

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_i' \quad \text{(3.15. egyenlet)}$$

összefüggés. Ennek megfelelően

$$\dot{\mathbf{r}}_i' = \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_0,$$

vagy a szokásos jelöléssel

$$\dot{\mathbf{r}}_i' = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0. \quad \text{(3.16. egyenlet)}$$

Az impulzusnyomaték-tétel a testtel együttmozgó *O* pontra vonatkoztatott nyomaték esetén

(3.17. egyenlet)

ahol

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \quad \text{(3.18. egyenlet)}$$

a merev test eredő impulzusa,

$$\mathbf{M}' = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i^{\mathrm{k}} \quad \text{(3.19. egyenlet)}$$

pedig a külső erők *O*-ra vonatkoztatott eredő nyomatéka. Ha most áttérünk a *K'* rendszerre a (3.12) összefüggés alapján, akkor az impulzusnyomaték-tétel a

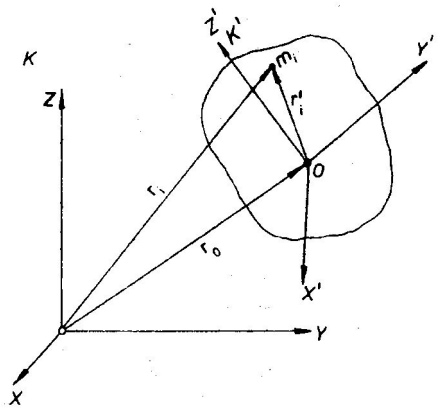
$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_f = -\mathbf{v}_0 \times \mathbf{P} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} + \mathbf{M}' \quad \text{(3.20. egyenlet)}$$

alakot veszi fel. Ez az egyenlet abban az általános esetben érvényes, amikor az *O* vonatkozási pont a merev test egy tetszőleges pontja. Azonban akkor szoktuk a nyomatékokat a test valamelyik pontjára vonatkoztatni, ha annak a pontnak valamilyen értelemben kitüntetett szerepe van a többihez

képest. Ilyen például a merev test tömegközéppontja. Ebben az esetben viszont $\mathbf{v}_0$ párhuzamos a **P**-vel, és így a (3.20) első tagja eltűnik. Az impulzusnyomaték-tétel a tömegközéppontra vonatkoztatott impulzus- és erőnyomatékokkal kifejezve tehát

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_f = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} + \mathbf{M}'. \qquad \text{(3.21. egyenlet)}$$

33. ábra -



A másik speciális eset az, amikor a merev testnek egy pontja rögzítve van az inerciarendszerben. Ha erre a rögzített pontra vonatkoztatjuk a nyomatékokat, akkor pedig a $\mathbf{v}_0 = 0$ miatt tűnik el a (3.20) első tagja, és ezért az impulzusnyomaték-tétel ugyancsak a (3.21) alakban érvényes.

Összefoglalásul megállapíthatjuk, hogy a merev test mozgását az általános esetben – amikor a szabadsági fokok száma 6 – az impulzus- és az impulzusnyomaték-tételt kifejező differenciálegyenletek írják le. Az inerciarendszerben a koordináta-rendszer középpontjára vonatkoztatott nyomatékokkal a (3.10), illetve a (3.11), a testtel együtt mozgó rendszerben pedig a (3.13), illetve a (3.14) egyenletek a merev test mozgásegyenletei.

Ha az impulzus- és erőnyomatékot a test valamely tetszőleges pontjára vonatkoztatjuk, akkor a (3.11) és a (3.14) helyett a (3.17), illetve a (3.20) egyenleteket kell használnunk. Abban a két speciális esetben, amikor a vonatkoztatási pont a test tömegközéppontja vagy a testnek egy az inerciarendszerben nyugalomban levő rögzített pontja, az impulzusnyomaték-tételt a merev testtel együttmozgó *K′* rendszerben a (3.21) egyszerűbb egyenlet fejezi ki.

Ezek a mozgásegyenletek adott erőhatás és ismert kezdeti feltételek mellett egyértelműen leírják a test mozgását. Ha a test kényszereknek van kitéve, a szabadsági fokok száma kisebb hatnál, és így ennek megfelelően kevesebb egyenlet elegendő a mozgás meghatározására. A fennmaradó egyenletek ekkor a kényszererők és azok nyomatékainak kiszámítását teszik lehetővé. A 15. pontban látni fogjuk, hogy a rögzített tengely körüli forgást az egy szabadsági foknak megfelelően egyetlen egyenlet leírja, a másik öt a kényszererőket és nyomatékaikat határozza meg.

14. A tehetetlenségi nyomaték tenzora

14.1 A merev test mozgási energiája

A merev testet a korábban mondottak értelmében *N* anyagi pontból álló pont-rendszernek tekintjük. A mozgási energiát így az egyes tömegpontok mozgási energiáinak összegeként értelmezzük:

$$E_{\text{k}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 .$$ (3.22. egyenlet)

Mivel az *i*-edik tömegpont $\mathbf{v}_i$, sebessége a (3.3) szerint $\mathbf{v}_0$ transzlációs és $\mathbf{v}_{fi} = {}^{\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i'}$ forgási sebesség összege, a merev test mozgási energiája,

$$E_{\text{k}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i'\right)^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_0 \left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i'\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i'\right)^2 .$$ (3.23. egyenlet)

A jobb oldal első tagja a test haladó mozgásából származik, ezért azt transzlációs mozgási energiának nevezzük:

$$E_{\text{tr}} = \frac{1}{2} m v_0^2 .$$ (3.24. egyenlet)

A harmadik tag a forgó mozgásból ered, ez tehát a test forgási energiája:

$$E_{\text{f}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i'\right)^2 .$$ (3.25. egyenlet)

A második tagnak nincs ilyen szemléletes jelentése, mert ez mind a transzlációs, mind a forgási sebességet tartalmazza. Ha az előző pontban említett két speciális esetet vesszük – nevezetesen, ha a testhez rögzített *K′* rendszer kezdőpontját a merev test tömegközéppontjába helyezzük és **ω** az ezen átmenő pillanatnyi forgástengely irányába mutató szögsebességvektor, vagy a testnek egy pontja rögzített (tehát nem mozog az inerciarendszerben) –, akkor ez a tag eltűnik. Utóbbi esetben azért, mert $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, az előbbiben pedig a tömegközéppont definíciója miatt. Ugyanis ez a második tag átalakítható a következőképpen:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_0 \left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i'\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i' \left(\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}\right) = \mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i' .$$

Most $\mathbf{r}_i'$ a tömegközépponttól számított helyvektor, ezért a tömegközéppont

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i'}{m}$$

definíciója miatt a $\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i' = 0$, mert a tömegközéppont a *K′* rendszer origója.

Ha a testnek egy pontja rögzítve van, akkor a $\mathbf{v}_0 = 0$ miatt a transzlációs energia is eltűnik. Ilyenkor a merev test csak forgó mozgást végezhet a rögzített ponton átmenő, de időben változó forgástengely körül. Ekkor

$$E_{\text{k}} = E_{\text{f}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i'\right)^2 . \quad \text{(3.26. egyenlet)}$$

Ha a merev testnek egy pontja sincs rögzítve, és a forgás a tömegközéppont körül történik, akkor mind a transzlációs, mind a forgási energia fellép és a test mozgási energiája a kettő összege:

$$E_{\text{k}} = E_{\text{tr}} + E_{\text{f}} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i'\right)^2 . \quad \text{(3.27. egyenlet)}$$

Az általános esetben a mozgási energia kifejezését a (3.23) adja meg. Ekkor mind a három tag zérustól különbözik.

A következőkben a forgási energiával foglalkozunk részletesebben. Megvizsgáljuk a szögsebességtől való függését. Mivel ebben a kifejezésben az $\mathbf{r}_i'$ magától értetődően a testhez rögzített *K′* rendszer origójától számított helyvektort jelenti, nem történik félreértés, ha az egyszerűség kedvéért a vesszővel való megkülönböztetést elhagyjuk. A vektori szorzat négyzetét a vektoralgebrából ismert

$$\left(\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right)^2 = a^2 b^2 - \left(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\right)^2 \quad \text{(3.28. egyenlet)}$$

összefüggés alapján átalakítjuk:

$$\begin{aligned} E_{\text{f}} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\omega^2 r_i^2 - \left(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i\right)^2\right] = \\ &= \frac{1}{2}\Bigg[\omega_x^2 \sum_{i=1}^{N} m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right) - \omega_x \omega_y \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i - \omega_x \omega_z \sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i - \omega_y \omega_x \sum_{i=1}^{N} m_i y_i x_i + \\ &+ \omega_y^2 \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 + z_i^2\right) - \omega_y \omega_z \sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i - \omega_z \omega_x \sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i - \omega_z \omega_y \sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i + \omega_z^2 \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)\Bigg] . \end{aligned} \quad \text{(3.29. egyenlet)}$$

A merev test forgási energiája tehát homogén kvadratikus kifejezése a szögsebesség-komponenseknek. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\Theta_{xx} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(y_i^2 + z_i^2 \right),$$
$$\Theta_{yy} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 + z_i^2 \right),$$
$$\Theta_{zz} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right);$$ (3.30. egyenlet)

$$\Theta_{xy} = \Theta_{yx} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i,$$
$$\Theta_{xz} = \Theta_{zx} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i,$$
$$\Theta_{yz} = \Theta_{zy} = -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i.$$ (3.31. egyenlet)

A forgási energia ezekkel a mennyiségekkel kifejezve, a következő alakba írható:

$$E_f = \frac{1}{2}\left(\Theta_{xx}\omega_x^2 + \Theta_{yy}\omega_y^2 + \Theta_{zz}\omega_z^2 + 2\Theta_{xy}\omega_x\omega_y + 2\Theta_{xz}\omega_x\omega_z + 2\Theta_{yz}\omega_y\omega_z \right).$$ (3.32. egyenlet)

Az egyszerűbb írásmód kedvéért gyakran használjuk a következő jelölésrendszert. Az *x*, *y*, *z* koordinátákat x_1, x_2, x_3-mal jelöljük, és röviden x_k-t írunk, ahol a *k* index az 1, 2, 3 értékek bármelyikét felveheti. Ennek megfelelően valamely **v** vektor komponenseit v_k-val jelöljük (ahol *k* lehet 1, 2, 3). Konkrétan az **ω** szögsebességvektor komponensei: ω_k (*k* = 1, 2, 3). A (3.30) és (3.31) képletekkel definiált mennyiségek ebben a jelölésrendszerben Θ_{11}, Θ_{12},..., Θ_{33}, lesznek, amelyek a

$$\hat{\Theta} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_{i2}^2 + x_{i3}^2 \right) & -\sum_{i=1}^{n} m_i x_{i1} x_{i2} & -\sum_{i=1}^{n} m_i x_{i1} x_{i3} \\ -\sum_{i=1}^{n} m_i x_{i2} x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_{i1}^2 + x_{i3}^2 \right) & -\sum_{i=1}^{n} m_i x_{i2} x_{i3} \\ -\sum_{i=1}^{n} m_i x_{i3} x_{i1} & -\sum_{i=1}^{n} m_i x_{i3} x_{i2} & \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_{i1}^2 + x_{i2}^2 \right) \end{Bmatrix}$$ (3.33. egyenlet)

alakzatba foglalhatók össze. Könnyű belátni, hogy a Θ_{kl} elemek a koordináta-rendszer elforgatásakor úgy transzformálódnak, mint a megfelelő x_k, x_l koordináták x_k x_l szorzatai. Ezért a fizikában használt tenzorfogalom szerint $\hat{\Theta}$ egy kétindexes tenzor. Mivel

$\Theta_{kl} = \Theta_{lk}$, (3.34. egyenlet)

a $\hat{\Theta}$ tenzor szimmetrikus. A főátlóban álló Θ_{11}, Θ_{22}, Θ_{33} elemeinek közvetlen fizikai jelentésük van. Nézzük meg pl. a Θ_{11} elemet. Az $x_{i2}^2 + x_{i3}^2$ az *i*-edik tömegpont *x* tengelytől mért távolságának a négyzete. Ez szorozva van az *i*-edik tömegpont m_i, tömegével, és az így adódó szorzatot összegezzük az összes tömegpontra. A

$$\Theta_{11} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_{i2}^2 + x_{i3}^2 \right)$$ (3.35. egyenlet)

mennyiséget a merev test x tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékának nevezzük. Hasonlóképpen Θ_{22} az *y* tengelyre, Θ_{33} pedig a *z* tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték. A vegyes indexű elemek az ún. *deviációs nyomatékok.* Az elnevezés onnan ered, hogy ezek a nyomatékok a forgástengelyt el akarják téríteni az eredeti helyzetéből. Ezt a rögzített tengely körül forgó merev test mozgásának vizsgálatakor a 15. pontban majd megmutatjuk.

A (3.33) szimmetrikus tenzort *tehetetlenségi nyomaték tenzornak* nevezzük. A fenti jelölésrendszert használva megállapodunk abban, hogy ha egy kifejezésben a koordináták, vektorok vagy tenzorok indexére összegezés történik 1-től 3-ig, akkor az összeg jelét nem írjuk ki. Pl. az x_r (r= 1, 2, 3) koordinátájú pont origótól mért távolságának négyzetét, $\sum_{r=1}^{3} x_r^2$ -et egyszerűen $x_r x_r$ alakban írjuk fel. Ebből következik, hogyha valamilyen kifejezésben egy index kétszer fordul elő, akkor arra összegezés értendő 1-től 3-ig.

Ezt a jelölésmódot használva, a Θ_{kl} tehetetlenségi nyomaték tenzor a következő zárt alakban írható fel:

$$\Theta_{kl} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_{is} x_{is} \delta_{kl} - x_{ik} x_{il} \right).$$ (3.36. egyenlet)

A forgási energia (3.32) kifejezése ugyanezzel az összegezési szabállyal

$$E_f = \frac{1}{2} \Theta_{rs} \omega_r \omega_s .$$ (3.37. egyenlet)

A tehetetlenségi nyomaték tenzor a merev testek mechanikájában alapvető mennyiségként szerepel, mert mint később látni fogjuk nemcsak a forgási energia, hanem a merev test impulzusnyomatéka és a test tetszőleges forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka Θ_{kl}-lel kifejezhető.

14.2 A tehetetlenségi nyomaték

Gondoljunk el egy tetszőleges forgástengelyt, amelynek irányát az

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$$ (3.38. egyenlet)

egységvektor jellemzi. Határozzuk meg a merev test tehetetlenségi nyomatékát erre a tengelyre vonatkoztatva. Jelöljük l_i-vel az i-edik tömegpontnak a forgástengelytől mért merőleges távolságát. Az **n** irányú forgástengelyre vonatkozó Θ_n tehetetlenségi nyomaték definíció szerint

$$\Theta_n = \sum_{i=1}^{n} m_i l_i^2.$$ (3.39. egyenlet)

Mivel

$$l_i = |\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i|,$$ (3.40. egyenlet)

$$\Theta_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(n \times \mathbf{r}_i\right)^2.$$ (3.41. egyenlet)

A vektori szorzat négyzetét a komponensek négyzetösszegeként írva, egyszerű számítással adódik, hogy

$$\Theta_n = \Theta_{rs} n_r n_s.$$ (3.42. egyenlet)

Ha a tehetetlenségi nyomaték Θ_{kl} tenzorát ismerjük, akkor (3.42) alapján bármely **n** irányba mutató tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték egyszerűen kiszámítható.

A (3.42) kifejezésből egyébként az is látszik, hogy a Θ_{kl} tenzor főátlóban álló elemei a három koordinátatengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékokat adják meg, miként azt az előző pontban már megmutattuk. Ugyanis a koordinátatengelyeket választva forgástengelynek, $\mathbf{n}_x$=(l, 0, 0), $\mathbf{n}_y$=(0, 1, 0), illetve $\mathbf{n}_z$=(0, 0, 1), és ezért (3.42)-ből adódik, hogy

$$\Theta_x = \Theta_{11}, \qquad \Theta_y = \Theta_{22}, \qquad \Theta_z = \Theta_{33}.$$ (3.43. egyenlet)

A (3.42) egyenletnek szemléletes geometriai jelentés adható. Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát Θ_n-nel, és az $\frac{\mathbf{n}}{\sqrt{\Theta_n}}$ vektor végpontjának koordinátáit jelöljük ξ, η, ζ-val (vagy a most használt jelöléssel: ξ_k-val). Így a következő egyenletet kapjuk:

$$1 = \Theta_{rs} \xi_r \xi_s = \Theta_{11}\xi^2 + \Theta_{22}\eta^2 + \Theta_{33}\zeta^2 + 2\Theta_{12}\xi\eta + 2\Theta_{13}\xi\zeta + 2\Theta_{23}\eta\zeta.$$ (3.44. egyenlet)

Ez olyan másodrendű felületnek az egyenlete, amelynek középpontja a koordináta-rendszer kezdőpontjában van. Az $\frac{\mathbf{n}}{\sqrt{\Theta_n}}$ vektor végpontja tehát egy másodrendű felületen helyezkedik el. Mivel az $\frac{\mathbf{n}}{\sqrt{\Theta_n}}$ vektor $\frac{1}{\sqrt{\Theta_n}}$ nagysága a Θ_n definíciójánál fogva véges, a felületnek nincs végtelen távoli pontja. Ezért a (3.44) egy ellipszoidnak az egyenlete. Ezt *tehetetlenségi ellipszoidnak* nevezzük. A merev test minden pontjához rendelhető egy tehetetlenségi ellipszoid. A ponton átmenő különböző irányok a felületet egy olyan pontban metszik, amelynek a középponttól mért távolsága a tekintett irányra – mint forgástengelyre – vonatkozó tehetetlenségi nyomaték négyzetgyökének a reciproka.

Ismeretes, hogy választható olyan koordináta-rendszer, amelynek koordináta-tengelyei az ellipszoid főtengelyeivel egybeesnek. Ebben az ún. főtengelyrendszerben az ellipszoid (3.44) egyenlete egyszerűbb alakot vesz fel. Jelöljük a főtengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékokat *A-, B-,* illetve *C*-vel, a főtengelyrendszerbeli koordinátákat pedig $\bar{\xi}$-, $\bar{\eta}$-, $\bar{\zeta}$ -sal. Az ellipszoid egyenlete ebben a rendszerben

$$A\bar{\xi}^2 + B\bar{\eta}^2 + C\bar{\zeta}^2 = 1. \quad \text{(3.45. egyenlet)}$$

A főtengelyrendszerben a $\hat{\Theta}$ tehetetlenségi nyomaték tenzornak csak a főátlóban álló elemei különböznek zérustól, a deviációs nyomatékok zérusok:

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \quad \text{(3.46. egyenlet)}$$

Ha az eredeti koordináta-rendszer nem ilyen, akkor alkalmas koordinátatranszformációval mindig áttérhetünk a főtengelyrendszerre, amelyben az egyenleteink sokkal egyszerűbb alakot vesznek fel. Ezért nem jelent különösebb korlátozást, ha konkrét alkalmazásoknál a főtengelyrendszert használjuk, mert az itt kapott eredmények egyszerű koordinátatranszformációval bármely koordináta-rendszerre átvihetők.

A szögsebességvektor ω_x, ω_y, ω_z komponenseit főtengely rendszerben általában *p-, q-, r*-rel szokás jelölni. Így a merev test forgási energiája főtengelyrendszerben az

$$E_f = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right) \quad \text{(3.47. egyenlet)}$$

alakba írható.

A tehetetlenségi ellipszoid speciális esetekben lehet forgási ellipszoid, amikor az *A, B, C* főtehetetlenségi nyomatékok közül kettő egyenlő egymással. Ha mind a három főtehetetlenségi nyomaték egyenlő, *A = B = C,* akkor a tehetetlenségi ellipszoid gömbbé fajul. Az utóbbi eset következik be pl.

akkor, ha homogén gömb vagy kocka tömegközéppontján átmenő forgástengelyekre mérjük fel a tehetetlenségi nyomatékok négyzetgyökének a reciprok értékeit. De sok más szabályos testre is igaz, hogy a tömegközépponthoz tehetetlenségi gömb tartozik.

14.3 A Steiner-tétel

A merev test valamely *O* pontján átmenő tetszőleges forgástengelyre vonatkoztatott *Θ* tehetetlenségi nyomaték egyszerűen kifejezhető a tömegközépponton átmenő, az előbbivel párhuzamos tengelyre vonatkozó Θ_{TK} tehetetlenségi nyomatékkal.

A koordináta-rendszer *z* tengelyét válasszuk a forgástengellyel egy irányúnak, és középpontja legyen az *O* pont. Az *O*-n átmenő, *z* tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték a definíció szerint

$$\Theta = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right).$$ (3.48. egyenlet)

A tömegközéppontnak a koordinátái legyenek *a, b, c.* A tömegközéppontba helyezett, az eredeti koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamos TK-rendszer tengelyeit és a rájuk vonatkoztatott koordinátákat jelöljük $\overline{x}, \overline{y}, z$-sal. A tömegközépponton átmenő *z* tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték,

$$\Theta_{TK} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overline{x}_i^2 + \overline{y}_i^2 \right).$$ (3.49. egyenlet)

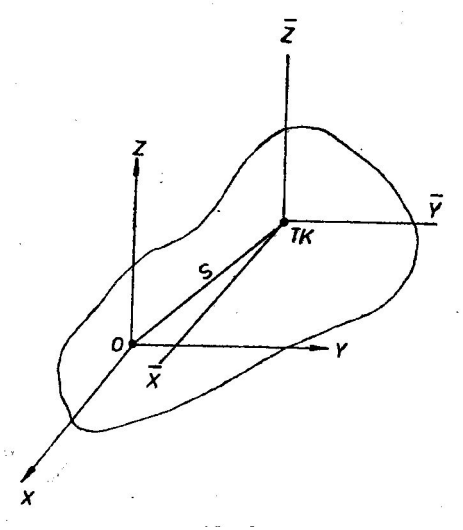
Mivel azonban $x = \overline{x}_i + a$ és $= \overline{y}_i + b$,

$$\Theta = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(\overline{x}_i + a \right)^2 + \left(\overline{y}_i + b \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overline{x}_i^2 + \overline{y}_i^2 \right) + \sum_{i=1}^{n} m_i \left(a^2 + b^2 \right) + 2a \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{x}_i + 2b \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{y}_i.$$

A $\sum_i m_i \overline{x}_i$ és $\sum_i m_i \overline{y}_i$ összegek a tömegközéppont (2.10) definíciója miatt eltűnnek, ezért

$$\Theta = \Theta_{TK} + m \left(a^2 + b^2 \right) = \Theta_{TK} + m s^2.$$ (3.50. egyenlet)

35. ábra -



A $\sqrt{a^2+b^2}=s$ a tömegközéppontnak az *O*-n átmenő forgástengelytől mért merőleges távolsága. Az ms^2 a tömegközéppontba egyesített összes tömegnek az eredeti tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka.

A (3.50) összefüggést nevezzük *Steiner-tételnek.* Eszerint a merev test valamely tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka egyenlő a tömegközépponton átmenő, az előbbivel párhuzamos tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának és a TK-ba egyesített összes tömeg *O*-n átmenő forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékának az összegével.

Az előző pontban mondottak szerint a merev test tömegközéppontjához is hozzárendelhető egy tehetetlenségi ellipszoid, amely a Steiner-tétel alapján a legnagyobb a test többi pontjához tartozó ellipszoidokhoz képest, mert a tömegközépponton átmenő tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok a legkisebbek.

14.4 A merev test impulzusnyomatéka

A merev test impulzusnyomatékát a pontrendszer impulzusnyomatékának

$$\mathbf{L}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i\times m_i\mathbf{v}_i \quad \text{(3.51. egyenlet)}$$

definíciója alapján határozzuk meg. $\mathbf{r}_i$ az *i*-edik tömegpontnak a vonatkoztatási ponttól számított helyvektora. A (3.51) képletből látszik, hogy **L** függ a vonatkoztatási ponttól. Az alkalmazások szempontjából célszerű $\mathbf{r}_i$-t a merev test valamelyik pontjától számítani. Leginkább a tömegközéppont, vagy ha a testnek egy pontja rögzített az inerciarendszerben, akkor ez a rögzített pont szokott a vonatkoztatási pont lenni. A $\mathbf{v}_i$ sebesség (3.3) szerint általában egy transzlációs és egy forgómozgás sebességéből származik:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i.$$ (3.54. egyenlet)

Ezt figyelembe véve, a test valamelyik pontjára vonatkoztatott impulzusnyomaték,

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i).$$ (3.53. egyenlet)

Az első tag a tömegközéppont

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{m}$$ (3.54. egyenlet)

definíciója alapján $m\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0$ alakba írható. Ezért

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i).$$ (3.55. egyenlet)

Az előbb említett két speciális esetben az $m\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0$ zérus. Ugyanis, ha a vonatkoztatási pont a tömegközéppont, akkor $\mathbf{r}_0 = 0$, ha pedig a testnek egy rögzített pontja, akkor $\mathbf{v}_0 = 0$. Ezekben az esetekben a (3.55)-nek csak a második tagja marad meg. A következőkben ezekre az esetekre szorítkozunk, ezért

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i).$$ (3.56. egyenlet)

A matematikából ismert $\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i)$ átalakítással

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i) \right].$$ (3.57. egyenlet)

A forgási energia (3.29) képletével összehasonlítva, látható, hogy a forgási energia és az impulzusnyomaték között érvényes a

$2E_f = \mathbf{L}\boldsymbol{\omega}$ (3.58. egyenlet)

összefüggés. A (3.32) vagy a (3.37) kifejezéseket tekintve, már ebből is láthatjuk, hogy az impulzusnyomaték is kifejezhető a Θ_{kl} tehetetlenségi nyomaték tenzorral.

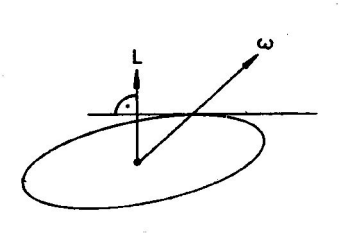
Erről közvetlenül is meggyőződhetünk, ha a (3.57) képlet komponenseit vesszük:

$L_k = \Theta_{kl}\omega_l.$ (3.59. egyenlet)

Az impulzusnyomaték-vektor komponensei lineáris függvényei a szögsebességvektor komponenseinek. Rövidebben fogalmazva: az L impulzusnyomaték lineáris vektor-függvénye az w-nak. A két vektor között a Θ_{kl} tenzor teremt kapcsolatot. Főtengely rendszerben:

$L_x = Ap,\ L_y = Bq,\ L_z = Cr.$ (3.60. egyenlet)

36. ábra -



Az **ω** szögsebesség és az **L** impulzusnyomaték tehát nem párhuzamos vektorok. Irányaikat jól szemléltethetjük a (3.44) tehetetlenségi ellipszoidon. Az ellipszoid középpontjából felrajzoljuk az **ω** vektort, és ahol ez metszi az ellipszoid felületét, ott tekintjük az érintősíkot *(36. ábra).* Ennek normálisa az **L** vektorral egy irányú. Az állításunk bizonyításához azt a differenciál-geometriai tételt kell felhasználnunk, amely szerint

$f(\xi,\ \eta,\ \zeta) = \text{áll.}$

egyenletű felület valamely pontjában vett normális irányú vektor arányos a grad *f*-fel. A tehetetlenségi ellipszoid egyenlete:

$f(\xi,\eta,\zeta) = \Theta_{11}\xi^2 + \Theta_{22}\eta^2 + \Theta_{33}\xi^2 + 2\Theta_{12}\xi\eta + 2\Theta_{13}\xi\zeta + 2\Theta_{23}\eta\zeta = 1.$ (3.61. egyenlet)

Képezzük a grad *f* vektor komponenseit a *ξ*, *η*, *ζ* koordinátájú felületi pontban:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = 2\Theta_{11}\xi + 2\Theta_{12}\eta + 2\Theta_{13}\zeta,$$
$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 2\Theta_{21}\xi + 2\Theta_{22}\eta + 2\Theta_{23}\zeta,$$
$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = 2\Theta_{31} + 2\Theta_{32}\eta + 2\Theta_{33}\zeta. \quad \text{(3.62. egyenlet)}$$

Mivel

$$\xi = \frac{\omega_1}{\omega\sqrt{\Theta_n}}, \qquad \eta = \frac{\omega_2}{\omega\sqrt{\Theta_n}}, \qquad \zeta = \frac{\omega_3}{\omega\sqrt{\Theta_n}}, \quad \text{(3.63. egyenlet)}$$

a (3.59) alapján adódik, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{2}{\omega\sqrt{\Theta_n}} L_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{2}{\omega\sqrt{\Theta_n}} L_2, \qquad \frac{\partial f}{\partial \zeta} = \frac{2}{\omega\sqrt{\Theta_n}} L_3. \quad \text{(3.64. egyenlet)}$$

A $\text{grad}_{(\xi,\,\eta,\,\zeta)}$ *f* vektor tehát arányos az **L** impulzusnyomaték-vektorral. Az említett matematikai tétel szerint ez azt jelenti, hogy az impulzusnyomaték-vektor az ellipszoid *ξ*, *η*, *ζ* koordinátájú pontjához tartozó érintősíkra merőleges. Ezzel az állításunkat bizonyítottuk.

A 36. ábráról világosan látszik, hogy az **ω** szögsebességvektor csak akkor lesz párhuzamos az **L** impulzusnyomatékkal, ha a merev test forgása valamelyik főtehetetlenségi tengely körül történik. Ugyanis a főtengelyek merőlegesen metszik az ellipszoidot.

15. Merev test forgása rögzített tengely körül

A merev test dinamikájának általános tételei után most egy egyszerű mozgást tanulmányozunk. Nevezetesen a merev testnek azt a mozgását vizsgáljuk, amelynél a testnek egy tengelye rögzítve van. A gyakorlati alkalmazások szempontjából ez az egyik legfontosabb mozgás, mert a gépek forgó alkatrészei általában rögzített tengely körül forognak. A tengelyt csapággyal rögzítik. A tengely rögzítettsége miatt a test nem mozoghat szabadon, ezért kényszermozgást végez. Az egyelőre ismeretlen kényszererőket a csapágyak fejtik ki a tengelyre és biztosítják annak rögzítettségét.

Gondoljunk el két csapágyat, amelyek a tengely két különböző helyén helyezkednek el. Az általuk kifejtett kényszererőket jelöljük $\mathbf{F}_1'$-, illetve $\mathbf{F}_2'$-vel. A *K* inerciarendszer és a testtel együttmozgó *K′* rendszer *z*, illetve *z′* tengelyét válasszuk a forgástengely irányában, és az *O* vonatkoztatási pont legyen a tengely egy pontja, pl. az egyik csapágy helye. A testre ható külső ún. szabaderők helyettesíthetők az *O* pontban támadó egyetlen **F** erővel és az *O* -ra vonatkoztatott **M** nyomatékú erőpárral. A test mozgását az inerciarendszerben leíró (3.10), (3.11) mozgásegyenletek most kiegészülnek az **F′** kényszererővel és a kényszererők **M′** eredő nyomatékával:

$m\ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{F} + \mathbf{F}'$, (3.65. egyenlet)

$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} + \mathbf{M}'$. (3.66. egyenlet)

A rögzített tengely körül forgó merev test helyzetét egyetlen adattal, a *φ* forgásszöggel jellemezhetjük, ezért a testnek csak egyetlen szabadsági foka van. A *φ* szöget definiáljuk úgy, hogy a testtel együttforgó *K′* rendszer *x′* tengelye és az inerciarendszer *x* tengelye által bezárt szöget jelentse. Így az *i*-edik tömegpont x_i, y_i, z_i, illetve x_i', y_i', z_i' koordinátái között az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$x_i = x_i' \cos\varphi - y_i' \sin\varphi,$$
$$y_i = x_i' \sin\varphi + y_i' \cos\varphi,$$
$$z_i = z_i'.$$ (3.67. egyenlet)

Mivel a kényszererők **F'** eredője a forgástengelyre hat, és az **M'** nyomaték merőleges a tengelyre, ezért utóbbinak *z* komponense zérus: $M_i' = 0$. Így a (3.65), (3.66) mozgásegyenletek közül a (3.66) *z* komponense nem tartalmazza a kényszererőket. Ez az egyenlet határozza meg az egyetlen független változó időfüggését. A fennmaradó öt egyenlet pedig a kényszererők és azok nyomatékának a kiszámítására szolgál.

A rögzített tengely körül forgó egy szabadsági fokú merev test mozgását tehát az

$\dot{L}_z = M_z$ (3.68. egyenlet)

egyenlet írja le.

Fejezzük ki az ebben előforduló mennyiségeket a *φ* szöggel, illetve annak idő szerinti deriváltjával. Az impulzusnyomaték definíciója szerint

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i\right)_z,$$ (3.69. egyenlet)

ahol $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$,. Mivel a forgástengely *z* irányú, ezért $\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega = \dot{\varphi}$. Ennek alapján adódik, hogy

$$L_z = \dot{\varphi} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) = \dot{\varphi} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2\right).$$ (3.70. egyenlet)

A $\sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2\right)$ mennyiség a (3.39) definíció szerint a merev testnek a *z* tengelyre vonatkozó *Θ* tehetetlenségi nyomatéka. Tehát

$L_z = \dot{\varphi}\Theta_z$ (3.71. egyenlet)

Ezt a (3.68) egyenletbe helyettesítve, megkapjuk a rögzített *z* tengely körül forgó merev test

$\Theta_z\ddot{\varphi} = M_z$ (3.72. egyenlet)

mozgásegyenletét. Eszerint a tehetetlenségi nyomatéknak és a szöggyorsulásnak a szorzata egyenlő a külső erők forgástengelyre vonatkoztatott nyomatékának tengelyirányú összetevőjével. Utóbbit egyszerűen *forgatónyomatéknak* szoktuk nevezni.

A (3.72) másodrendű differenciálegyenlet megoldása adja meg a *φ* forgásszög időfüggését. A megoldásban fellépő két integrálási állandót a kezdeti állapot megadásából lehet kiszámítani. Így a kezdeti feltételeknek megfelelő egyértelmű megoldást kapunk.

Abban a speciális esetben, amikor $M_z = 0$,

$\Theta_z\dot{\varphi} = \Theta_z\omega = \text{áll.}$ (3.73. egyenlet)

Ez a megoldás érvényes a Föld nehézségi erőterében függőleges tengely körül forgó merev testre. Ugyanis ekkor **F** párhuzamos a függőlegesnek választott *z* tengellyel, ezért $M_z = 0$. A (3.73) eredmény igazolható forgózsámolyos kísérlettel. Ha a test tömegeloszlását megváltoztatjuk pl. azáltal, hogy a forgózsámolyon álló személy széttárja a két karját, majd összehúzza, a forgás szögsebessége (3.73)-nak megfelelően változik meg. Ezt a törvényt használja fel a műkorcsolyázó is, amikor széttárt karjainak testéhez való szorításával felgyorsítja forgását.

Miután a (3.72) mozgásegyenletet megoldottuk, a *φ* szög ismert függvénye az időnek, és eszerint az $\omega = \dot{\varphi}$ szögsebesség is meghatározott. Ennek figyelembevételével a (3.65), (3.66) első öt egyenletéből kiszámíthatjuk a kényszererőket és azok nyomatékait:

$$F'_x = m\ddot{x}_0 - F_x,$$
$$F'_y = m\ddot{y}_0 - F_y,$$
$$F'_z = m\ddot{z}_0 - F_z.$$ (3.74. egyenlet)

$$M'_x = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i\right) - M_x,$$
$$M'_y = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(z_i\dot{x}_i - x_i\dot{z}_i\right) - M_y.$$ (3.75. egyenlet)

Az *i*-edik tömegpont koordinátái:

$x_i = l_i\cos\varphi_i, \quad y_i = l_i\sin\varphi_i, \quad z_i = \text{áll.}$ (3.76. egyenlet)

ahol *l*, az *i*-edik tömegpontnak a forgástengelytől mért távolsága, amely a forgás során nem változik. A (3.76)-hoz hasonló kifejezések igazak a tömegközéppont koordinátáira is:

$$x_0 = l_0 \cos\varphi_0, \quad y_0 = l_0 \sin\varphi_0, \quad z_0 = \text{áll.} \qquad \text{(3.77. egyenlet)}$$

A (3.72) mozgásegyenlet figyelembevételével adódik, hogy

$$\ddot{x}_i = -x_i\omega^2 - y_i\ddot{\varphi} = -x_i\omega^2 - y_i\frac{M_z}{\Theta},$$
$$\ddot{y}_i = -y_i\omega^2 + x_i\ddot{\varphi} = -y_i\omega^2 + x_i\frac{M_z}{\Theta},$$
$$\ddot{z} = 0; \qquad \text{(3.78. egyenlet)}$$

$$\ddot{x}_0 = -x_0\omega^2 - y_0\frac{M_z}{\Theta},$$
$$\ddot{y}_0 = -y_0\omega^2 + x_0\frac{M_z}{\Theta},$$
$$z_0 = 0. \qquad \text{(3.79. egyenlet)}$$

Ezeket a kifejezéseket a (3.74)-be, illetve a (3.75)-be behelyettesítve, a kényszererők és nyomatékaik eredőinek komponenseire a következőt kapjuk:

$$F'_x = -m\omega^2 x_0 - my_0\frac{M_z}{\Theta} - F_x,$$
$$F'_y = -m\omega^2 y_0 + mx_0\frac{M_z}{\Theta} - F_y,$$
$$F'_z = -F_z;$$
$$M'_x = \omega^2\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i - \frac{M_z}{\Theta}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i - M_x,$$
$$M'_y = -\omega^2\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i - \frac{M_z}{\Theta}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i - M_y,$$
$$M'_z = 0. \qquad \text{(3.80. egyenlet)}$$

Az eredő kényszererő kifejezésének első tagja a tömegközéppontba gondolt *m* tömegű, *ω* szögsebességgel keringő anyagi pontra ható centripetális erő. Ha külső erők nem hatnának a testre, akkor egyedül ez az erő adná a kényszererők eredőjét. Az általános esetben, amikor külső erők is hatnak (pl. a nehézségi erő terében forgó merev testnél), ezek is hozzájárulnak a kényszererőkhöz a (3.80) első három képletének megfelelően. Az M'_x és M'_y kifejezései a kényszererők eredő nyomatékát adják meg. Ezekben a külső erők M_x, M_y nyomatékán kívül a

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i$$

deviációs nyomatékok fordulnak elő. Ezek a mennyiségek a *K* inerciarendszerben függnek az időtől, mivel x_i és y_i időfüggő. Az alkalmazások szempontjából célszerű ezeket kifejezni a *K′*-re vonatkoztatott időtől független deviációs nyomatékokkal. Ezt a (3.67) transzformációval könnyű elérni. Eredményül kapjuk, hogy

$$M'_x = \omega^2 \left(\cos\varphi \sum_{i=1}^{n} m_i y'_i z'_i + \sin\varphi \sum_{i=1}^{n} m_i x'_i z'_i \right),$$
$$M'_y = \omega^2 \left(\sin\varphi \sum_{i=1}^{n} m_i y'_i z'_i - \cos\varphi \sum_{i=1}^{n} m_i x'_i z'_i \right).$$

Ha a forgástengely nincs rögzítve, akkor az általában nem marad nyugalomban, hanem folyton változtatja az irányát. Ahhoz, hogy nyugalomban maradjon, a csapágyaknak az **F′** kényszererőt és az **M′** nyomatékot kell kifejteniük rá. A kényszererő **−F′** reakcióereje és a **−M′** nyomaték hat a csapágyakra. A rögzítetlen forgástengely akkor marad nyugalomban, ha a helyzetének megtartásához sem kényszererőt, sem nyomatékot nem kell kifejteni, tehát ha mind az **F′**, mind az **M′** eltűnik. A (3.80)-ból következik, hogy az ilyen, ún. *szabad tengelynek* át kell mennie a test tömegközéppontján, a külső erők eredőjének párhuzamosnak kell lennie a forgástengellyel, a deviációs nyomatékoknak el kell tűnniük, továbbá a külső erők eredő nyomatékának zérusnak vagy tengelyirányúnak kell lennie.

Mivel a 14.2 pontban tanultak szerint a deviációs nyomatékok a főtehetetlenségi rendszerben tűnnek el, a merev testnek általános esetben három szabad tengelye van, éspedig a tömegközépponton átmenő három főtehetetlenségi tengely. Ha a tehetetlenségi ellipszoid egyik tengelyre szimmetrikus, vagyis forgási ellipszoid, akkor a két egyenlő főtengely síkjában levő összes tengely, ha a tehetetlenségi ellipszoid gömb, akkor pedig a tömegközépponton átmenő valamennyi tengely szabad tengely.

Ha a merev testre külső erők nem hatnak, akkor a szabad tengelyre az jellemző, hogy átmegy a test tömegközéppontján és a rá vonatkozó deviációs nyomatékok eltűnnek.

A szabad tengelyeknek a gyakorlati alkalmazások szempontjából van nagy jelentősége, mert a forgástengely helyzetének megtartásához sem kényszererőt, sem nyomatékot nem kell kifejteni, és így a csapágyakra ható reakcióerő és -nyomaték is zérus, ezért a kopás lényegében a súrlódástól származik; másrészt a forgó rendszer stabilitása is így biztosítható a legkönnyebben. Egyszerű példa erre a gépkocsi kerekeinek kis póttömegekkel való kiegyensúlyozása. Ezek a kis tömegek a kerék tömegeloszlását úgy változtatják meg, hogy a deviációs nyomatékok eltűnnek, és ezáltal a tengely helyzetét stabillá teszik.

16. Az egy pontjában rögzített merev test mozgása

Gondoljunk el egy olyan merev testet, amelynek egy pontja rögzítve van a *K* inercia-rendszerben. Ezt a rögzített *O* pontot tekintjük a vonatkoztatási rendszer kezdőpontjának. Az ilyen merev testnek három szabadsági foka van. A test az *O* ponton átmenő tengelyek körül végezhet forgó mozgást. A

forgástengely iránya természetesen folyton változhat. Feladatul tűzzük a test mozgásának dinamikai leírását. A három szabadsági foknak megfelelő három mozgásegyenletet az impulzusnyomaték-tételt kifejező (3.11) vektoregyenlet adja meg:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}.$$ (3.81. egyenlet)

M a testre ható külső erők *O*-ra vonatkoztatott nyomatékát jelenti. A kényszererők nyomatéka azért nem fordul elő, mert azok az *O* pontot rögzítik, így benne támadnak, és ezért az *O*-ra vonatkoztatott nyomatékuk zérus. A rögzítésnél fellépő súrlódástól most eltekintünk.

Az impulzusnyomaték és a szögsebességvektor komponensei közötti (3.59) összefüggést figyelembe véve,

$$\frac{d}{dt}\left(\Theta_{kl}\omega_l\right) = M_k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3).$$ (3.82. egyenlet)

Ezekben a *K* inerciarendszerben érvényes mozgásegyenletekben a tehetetlenségi nyomaték tenzor Θ_{kl} elemei függnek az időtől, ezért a differenciálás elvégzése után bonyolult egyenleteket kapnánk a mozgás leírására. Sokkal célszerűbb a testtel együttmozgó *K′* koordináta-rendszert választani, mert ebben a Θ_{kl} időtől független, és csak a szögsebességvektor változik az időben. Az egy pontjában rögzített merev test mozgását ezért a *K′* rendszerben tanulmányozzuk, és a kapott eredményeket az ismert összefüggések alapján könnyű átírni az inerciarendszerbeli koordinátákra. Pontosabban fogalmazva, a *K′* rendszerben érvényes mozgásegyenletek megoldásával meghatározzuk a szögsebességvektor *K′*-beli komponenseit, majd a (3.9) differenciál-egyenletekből kiszámítjuk az Euler-szögek időfüggését. Ismeretes, hogy utóbbiak a testhez rögzített *K′* rendszer helyzetét adják meg az inerciarendszerben. Így az Euler-szögek időfüggése a merev test inerciarendszerbeli mozgásának leírását adja.

Az egy pontjában rögzített merev test mozgásegyenlete a K' rendszerben az impulzusnyomaték-tételt kifejező (3.21) egyenlet:

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_f = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} + \mathbf{M}.$$ (3.83. egyenlet)

Az egyenletek tovább egyszerűsödnek ha a *K′* koordináta-rendszer tengelyeit az *O* középponthoz tartozó tehetetlenségi ellipszoid főtengelyeivel párhuzamosaknak vesszük. E főtengelyrendszerben

$$L_{x'} = \Theta_{11}\omega_{x'}, \qquad L_{y'} = \Theta_{22}\omega_{y'}, \qquad L_{z'} = \Theta_{33}\omega_{z'};$$

vagy a 14.2 pontban bevezetett jelöléssel

$$L_{x'} = Ap, \qquad L_{y'} = Bq, \qquad L_{z'} = Cr.$$ (3.84. egyenlet)

Ezeket a (3.83)-ba helyettesítve, az egy pontjában rögzített merev test mozgásegyenleteit kapjuk a főtengelyrendszerben:

$$A\frac{dp}{dt}=(B-C)qr+M_x,$$
$$B\frac{dq}{dt}=(C-A)pr+M_y,$$
$$C\frac{dr}{dt}=(A-B)pq+M_z.$$ (3.85. egyenlet)

A (3.85) mozgásegyenleteket *Euler-egyenleteknek* nevezzük. Az *A, B, C* főtehetetlenségi nyomatékok időtől független állandók, M_x, M_y, M_z a külső erők *O*-ra vonatkoztatott eredő nyomatékának komponensei a testtel együttforgó koordináta-rendszerben. Ezekből a differenciálegyenletekből lehet a szögsebesség *p, q, r* komponenseit az idő függvényében kiszámítani.

Az egyenletek jobb oldalán álló, erőnyomaték dimenziójú első tagokról könnyű megmutatni, hogy a forgó testre ható centrifugális erő *O* pontra vonatkoztatott nyomatékának a komponensei. A *K′* forgó koordináta-rendszer gyorsulással mozog az inerciarendszerhez képest, ezért tehetetlenségi erők lépnek fel benne. Mivel a test egyes pontjai a *K′*-vel együtt forognak és a merevség miatt a *K′*-beli sebességük zérus, a Coriolis-erő nem lép fel, csupán a centrifugális erő hat rájuk. Az *i*-edik, m_i tömegű anyagi pontra ható centrifugális erő,

$$\mathbf{F}_i^{(c)}=m_i(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i)\times\boldsymbol{\omega}=-m_i\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_i)+m_i\omega^2\mathbf{r}_i.$$ (3.86. egyenlet)

Ennek az *O*-ra vonatkoztatott nyomatéka,

$$\mathbf{M}_i^{(c)}=\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i^{(c)}=-m_i(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_i)(\mathbf{r}_i\times\boldsymbol{\omega}).$$ (3.87. egyenlet)

Az összehasonlítás kedvéért számítsuk ki az $\mathbf{M}_{ix'}^{(c)}$ komponensét:

$$\mathbf{M}_{ix'}^{(c)}=-m_i(y_i'\omega_z-z_i'\omega_y)(\omega_x x_i'+\omega_y y_i'+\omega_z' z_i')=$$
$$=-m_i\left(x_i'y_i'\omega_x\omega_z-x_i'z_i'\omega_x\omega_y+y_i'^2\omega_y\omega_z-y_i'z_i'\omega_y^2+y_i'z_i'\omega_z^2-z_i'^2\omega_y\omega_z\right).$$

Az eredő nyomaték *x′* komponense,

$$\mathbf{M}_x^{(c)}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}_{ix}^{(c)}.$$

A főtengelyrendszerben a deviációs nyomatékok eltűnnek, ezért

$$\mathbf{M}_k^{(c)} = -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i'^2 qr + \sum_{i=1}^{N} m_i z_i'^2 qr = -qr\left[\sum_{i=1}^{N} m_i \left(y_i'^2 + x_i'^2\right) - \sum_{i=1}^{N} m_i \left(z_i'^2 + x_i'^2\right)\right] = (B - C)qr.$$

Hasonlóképpen adódik a másik két komponensre:

$$\mathbf{M}_j^{(c)} = (C - A)pr,$$
$$\mathbf{M}_i^{(c)} = (A - B)pq.$$

A (3.85) Euler-egyenletek jobb oldalán levő első tagok tehát valóban a centrifugális erő eredő nyomatékának komponensei a testtel együttforgó koordináta-rendszerben.

A következőkben az Euler-egyenletek alkalmazásaként két speciális mozgást vizsgálunk. Nevezetesen a szimmetrikus pörgettyű erőmentes és a nehézségi erőtér hatására létrejövő mozgását tanulmányozzuk.

16.1 Az erőmentes szimmetrikus pörgettyű

Az olyan merev testet, amelynek egy pontja rögzítve van a *K* inerciarendszerben, pörgettyűnek nevezzük. A pörgettyű mozgását ennek megfelelően az előző pontban levezetett (3.85) Euler-egyenletek írják le. Ezek az egyenletek jelentősen egyszerűsödnek, ha a pörgettyű szimmetrikus, ami azt jelenti, hogy a főtehetetlenségi nyomatékok közül kettő, pl. az *A* és a *B* megegyeznek egymással:

$A = B.$ (3.88. egyenlet)

Ebben az esetben a *z′* tengely a pörgettyű szimmetriatengelye.

Most olyan szimmetrikus pörgettyű mozgását vizsgáljuk, amelyre külső erő nem hat, és ezért az **M** erőnyomaték zérus. Az ilyen erőmentes szimmetrikus pörgettyű mozgásegyenletei a testtel együttforgó *K′* rendszerben tehát a következők:

$$A\dot{p} = (A - C)qr,$$
$$A\dot{q} = (C - A)pr,$$
$$C\dot{r} = 0.$$ (3.89. egyenlet)

A harmadik egyenletből azonnal következik, hogy

$r = r_0 = \text{áll.}$ (3.90. egyenlet)

A *z′* tengely irányának alkalmas megválasztásával elérhető, hogy r_0 pozitív legyen.

Vezessük be a

$$\frac{C-A}{A} r_0 = \alpha$$ (3.91. egyenlet)

jelölést. Mivel a *K′* rendszerben a főtehetetlenségi nyomatékok függetlenek az időtől, ezért α állandó. A *p* és *q* időfüggését meghatározó első két Euler-egyenlet a

$$\dot{p} = \alpha q = 0,$$
$$\dot{q} - \alpha p = 0$$ (3.92. egyenlet)

egyszerű alakot veszi fel. Az idő szerint differenciálva

$$\ddot{p} + \alpha^2 p = 0, \qquad \ddot{q} + \alpha^2 q = 0.$$ (3.93. egyenlet)

Ezek a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenletei, amelyeknek a (3.92)-t is kielégítő megoldásai

$$p = a\cos(\alpha t + \delta),$$
$$q = a\sin(\alpha t + \delta).$$ (3.94. egyenlet)

Az α és δ integrálási állandók a kezdeti feltételekből határozhatók meg.

A (3.90) és (3.94) megoldásokból következik, hogy az **ω** szögsebességvektornak a *z′* szimmetriatengelyre való vetülete, továbbá *ω* nagysága állandó. Ugyanis

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = a^2 + r_0^2 = \text{áll.}$$ (3.95. egyenlet)

Az **ω** vektor végpontjának az *x′y′* síkra való vetülete *a* sugarú kört ír le. Az állandó nagyságú szögsebességvektor tehát a *z′* szimmetriatengely körül kúpfelületen forog.

Ahhoz, hogy az erőmentes szimmetrikus pörgettyűnek a *K* inerciarendszerbeli mozgását megismerjük, meg kell határoznunk az Euler-szögek időfüggését. Erre szolgálnak a (3.9) differenciálegyenletek. írjuk be az egyenletek bal oldalára a (3.90) és (3.94) megoldásokat:

$$a\cos(\alpha t + \delta) = \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi,$$
$$a\cos(\alpha t + \delta) = \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi - \dot{\vartheta}\cos\varphi,$$
$$r_0 = \dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi}$$ (3.96. egyenlet)

Mielőtt ezek megoldásához hozzákezdenénk, célszerű a *K* inerciarendszer derékszögű koordinátatengelyeinek irányát alkalmasan megválasztani. Mivel erő nem hat, ezért az M erőnyomaték zérus, és emiatt az impulzusnyomaték állandó az inerciarendszerben :

$\mathbf{L} = \text{áll.}$ (3.97. egyenlet)

Válasszuk a *K* rendszer z tengelyét **L**-lel egy irányúnak: $L_x = 0$, $L_y = 0$, $L_z = L$. Az impulzusnyomaték komponenseit a testtel együttforgó *K'* rendszerben az

$$L_{x'} = L \sin\vartheta \sin\varphi,$$
$$L_{y'} = L \sin\vartheta \cos\varphi,$$
$$L_{z'} = L \cos\vartheta \qquad \text{(3.98. egyenlet)}$$

transzformációs képletek adják meg. Mivel *K'-t* főtengelyrendszernek választottuk,

$$L_{x'} = Ap, \qquad L_{y'} = Aq, \qquad L_{z'} = Cr. \qquad \text{(3.99. egyenlet)}$$

Ezeket (3.98)-ba beírva, (3.9) figyelembevételével kapjuk, hogy

$$A\left(\dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi\right) = L\sin\vartheta\sin\varphi,$$
$$A\left(\dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\varphi\right) = L\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$Cr_0 = L\cos\vartheta \qquad \text{(3.100. egyenlet)}$$

Az A és *C* főtehetetlenségi nyomatékok, valamint az *L* impulzusnyomaték időtől függetlenek, ezért a (3.100)-nak megoldása a

$$\dot{\vartheta} = 0, \qquad \dot{\psi} = \text{áll},$$

amiből az következik, hogy a *z* és *z'* tengelyek egymással állandó ϑ_0 szöget zárnak be.

Ezt figyelembe véve, oldjuk meg a (3.96) differenciálegyenlet-rendszert. Egyszerű számítással adódik, hogy

$$\psi = \frac{a}{\sin\vartheta_0}t + \psi_0,$$
$$\varphi = -at + \varphi_0,$$
$$\vartheta = \vartheta_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{aA}{r_0 C}. \qquad \text{(3.101. egyenlet)}$$

Ezekből a megoldásokból leolvasható az erőmentes szimmetrikus pörgettyű mozgása. Az első és a harmadik azt jelenti, hogy a pörgettyű szimmetriatengelye az inerciarendszerben állandó impulzusnyomaték körül ϑ_0 félnyílásszögű kúp mentén egyenletesen forog $a / \sin \vartheta_0$ állandó szögsebességgel. A φ szög időfüggése a testnek a szimmetriatengely körüli forgását adja meg. A (3.101) második egyenlete szerint ez a forgás egyenletes: $-\alpha$ szögsebességű. A (3.91) alapján α függ a C és A főtehetetlenségi nyomatékok különbségétől. Ennek megfelelően az $A > C$ esetben $-\alpha > 0$, és így a szimmetriatengely körüli forgás az óramutató járásával megegyező irányú, az $A < C$ esetben pedig fordított.

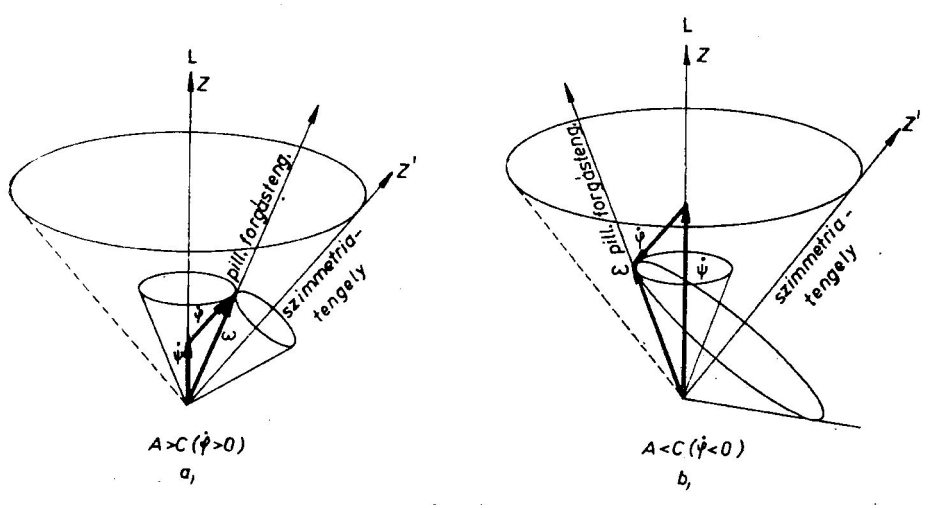
A pillanatnyi forgástengely irányát meghatározó $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor a $\dot{\Psi}$ és a $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ vektorok összege:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\Psi} + \dot{\boldsymbol{\varphi}}$$

ezért $\boldsymbol{\omega}$ mindig a zz' síkban van és a z' tengellyel együttforog a z tengely (az impulzusnyomaték iránya) körül. A pillanatnyi forgástengely iránya tehát folyton változik.

Az erőmentes szimmetrikus pörgettyű mozgását, valamint a szimmetriatengelynek, illetve a pillanatnyi forgástengelynek a forgását szemlélteti a *37. ábra.*

37. ábra -



Az erőmentes szimmetrikus pörgettyű mozgásának teljes dinamikai leírását ezzel megadtuk. A (3.101) megoldásban fellépő ψ_0, φ_0, a és r_0 állandókat a kezdeti feltételekből lehet meghatározni.

Könnyű belátni, hogy ugyanígy mozog a szimmetrikus pörgettyű a földi nehézségi erőtérben is, ha a rögzített pont megegyezik a test tömegközéppontjával. Ugyanis ebben az esetben a nehézségi erő eredő nyomatéka zérus:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{g} = 0.$$

(A vektoriális szorzat azért tűnik el, mert az első tényező zérus, ha a tömegközép-pont a vonatkoztatási pont.)

16.2 A súlyos szimmetrikus pörgettyű mozgása

A szimmetrikus pörgettyűnek olyan mozgását tanulmányozzuk, amely a nehézségi erő hatására jön létre, ha a rögzített (vagy alátámasztott) pont nem esik egybe a tömegközépponttal. Most a nehézségi erő eredő nyomatéka nem lesz zérus. Az ilyen, egy pontjában rögzített merev testet nevezzük súlyos pörgettyűnek.

Az előző ponthoz hasonlóan feltesszük, hogy a *z′* tengely a szimmetriatengely, vagyis $A = B \neq C$. A tömegközéppont a test forgásszimmetriája miatt rajta van a szimmetriatengelyen, az *O* vonatkoztatási (rögzített) ponttól *l* távolságra. a nehézségi erő legyen $-z$ irányú.

A pörgettyű mozgását a (3.85) Euler-egyenletek írják le, amelyekben most fellépnek a nehézségi erő nyomatékának komponensei. Az Euler-szögek és a szögsebesség-vektor *p, q, r* komponensei közötti (3.9) összefüggéseket behelyettesítve, az Euler-szögek időfüggését meghatározó csatolt differenciálegyenlet-rendszert kapunk. Ezek megoldása nem könnyű feladat, ezért az energia- és az impulzusnyomaték-tételt használjuk helyettük. így olyan egyenletekhez jutunk, amelyekből az Euler-szögek időfüggése könnyebben meghatározható.

A nehézségi erő *O*-ra vonatkoztatott eredő nyomatéka

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{g} = m \mathbf{r}_0 \times \mathbf{g},$$ (3.102. egyenlet)

ahol $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ a test tömege, $\mathbf{r}_0$ pedig a tömegközéppont helyvektora. Ebből a kifejezésből látszik, hogy **M** merőleges a *zz′* síkra, ezért mind a *z,* mind a *z′* irányú összetevője zérus:

$$M_z = 0, \qquad M_{z'} = 0.$$ (3.103. egyenlet)

Az $M_{z'} = 0$ miatt a harmadik Euler-egyenlet most is a

$$C\dot{r} = 0$$ (3.104. egyenlet)

alakot veszi fel, mint az erőmentes pörgettyűnél. Ennek megoldása:

$r = r_0 = \text{áll.}$ (3.105. egyenlet)

Ez az egyik egyenlet a három Euler-szög meghatározására. A másik egyenlet az impulzusnyomaték-tételt inerciarendszerben kifejező

$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$

vektoregyenlet *z* komponense lesz. Mivel $M_z = 0$, L_z = áll. Utóbbit *k*-val jelölve:

$L_z = k.$ (3.106. egyenlet)

A *K* és a *K′* rendszer közötti transzformációs képleteket figyelembe véve, L_z kifejezhető az impulzusnyomaték *K′*-beli összetevőivel:

$L_z = L_{x'} \sin\vartheta \sin\varphi + L_{y'} \sin\vartheta \cos\varphi + L_{z'} \cos\vartheta.$ (3.107. egyenlet)

Ezt (3.106)-ba helyettesítve,

$L_{x'} \sin\vartheta \sin\varphi + L_{y'} \sin\vartheta \cos\varphi + L_{z'} \cos\vartheta = k.$ (3.108. egyenlet)

Mivel a *K′* koordináta-rendszer főtengelyrendszer,

$L_{x'} = Ap, \qquad L_{y'} = Aq, \qquad L_{z'} = Cr.$ (3.109. egyenlet)

Tehát

$A\left(p \sin\vartheta \sin\varphi + q \sin\vartheta \cos\varphi\right) + Cr \cos\vartheta = k.$ (3.110. egyenlet)

A harmadik egyenletet az energiatétel szolgáltatja. A nehézségi erő konzervatív, ezért létezik potenciál, amely

$V = \sum_{i=1}^{n} m_i g z_i = m g z_0 = m g l \cos\vartheta,$ (3.111. egyenlet)

ha a *z* tengelyt a **g**-vel ellentétes irányúnak választjuk. A mozgási energia:

$E_k = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Aq^2 + Cr^2\right).$ (3.112. egyenlet)

Az $E = E_k + V$ mechanikai energia állandóságát kifejező harmadik egyenlet tehát

$$\frac{1}{2}A\left(p^2+q^2\right)+\frac{1}{2}Cr^2+mgl\cos\vartheta=E\,(=\text{áll.}). \quad \text{(3.113. egyenlet)}$$

Most a szögsebességvektor *p, q, r* komponenseit kifejezzük az Euler-szögekkel és azok deriváltjaival a (3.9) összefüggések felhasználásával. Így a (3.105), (3.110). (3.113) egyenletek a következők lesznek:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\vartheta&=r_0,\\ A\dot{\psi}\sin^2\vartheta+Cr_0\cos\vartheta&=k,\\ A\left(\dot{\vartheta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\vartheta\right)+Cr_0^2+2mgl\cos\vartheta&=2E.\end{aligned} \quad \text{(3.114. egyenlet)}$$

Ebből a három elsőrendű differenciálegyenletből lehet az Euler-szögeket az idő-függvényeként kiszámítani.

A $\dot{\psi}$ és a $\dot{\varphi}$ a (3.114) első két egyenletéből kifejezhető a ϑ szöggel:

$$\dot{\psi}=\frac{k-Cr_0\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta}, \quad \text{(3.115. egyenlet)}$$

$$\dot{\varphi}=r_0-\frac{k-Cr_0\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta}\cos\vartheta. \quad \text{(3.116. egyenlet)}$$

A $\dot{\psi}$ (3.115) kifejezését a (3.114) harmadik egyenletébe helyettesítve, $\dot{\vartheta}^2$-re a következőt kapjuk:

$$\dot{\vartheta}^2=\frac{2}{A}\left[E'-mgl\cos\vartheta-\frac{\left(k-Cr_0\cos\vartheta\right)^2}{2A\sin^2\vartheta}\right]\equiv f(\vartheta), \quad \text{(3.117. egyenlet)}$$

ahol

$$E'=E-\frac{Cr_0^2}{2}. \quad \text{(3.118. egyenlet)}$$

A (3.117) differenciálegyenletnek a megoldása:

$$t=\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\frac{d\vartheta'}{\sqrt{f(\vartheta')}}, \quad \text{(3.119. egyenlet)}$$

amely az $u=\cos\vartheta$ helyettesítéssel a következő alakba írható:

$$t=-A\int_{u_0}^{u}\frac{du'}{\sqrt{2A\left(1-u'^2\right)\left(E'-mglu'\right)-\left(k-Cr_0u'\right)^2}}.$$ (3.120. egyenlet)

Az ilyen típusú integrálokat elliptikus integráloknak nevezzük. Kiszámításuk numerikus vagy gépi eljárással történik. Vannak olyan esetek is, amikor az integrandusz előállítható konvergens sorral. Ilyenkor a megoldást végtelen sor alakjában adhatjuk meg. A részletek iránt érdeklődő hallgatóságnak a matematikai analízissel foglalkozó szakkönyvek megfelelő fejezeteit ajánljuk. Itt most meg kell elégednünk azzal, hogy a (3.119) megoldás elvileg megadja a ϑ szöget az idő függvényeként. A $\vartheta(t)$ ismeretében a (3.115)-ből és (3.116)-ból a $\psi(t)$, illetve a $\varphi(t)$ függvények is kiszámíthatók. A megoldásban fellépő hat integrálási állandó: E, r_0, k, ϑ_0, ψ_0, φ_0 a kezdeti feltételekből határozható meg. A szimmetrikus súlyos pörgettyű mozgásfeladatát ezzel elvileg megoldottuk.

A mozgás fontosabb tulajdonságai az elliptikus integrálok kiszámítása nélkül is megállapíthatóak. A (3.120) integrálban a négyzetgyök alatti

$$P(u)\equiv 2A\left(1-u^2\right)\left(E'-mglu\right)-\left(k-Cr_0u\right)^2$$ (3.121. egyenlet)

harmadfokú polinom az $u=-1\left(\vartheta=\pi\right)$ és az $u=+1\left(\vartheta=0\right)$ helyeken negatív. E két hely között azonban pozitív értékeket is felvesz, mert $\dot{\vartheta}$ -nak valahol valósnak kell lennie. *P(u)*-nak az *u*= − 1 és *u*= + 1 között tehát két zérushelye van. A megfelelő ϑ szögeket ϑ_1-gyel, illetve ϑ_2-vel jelölve, a $\dot{\vartheta}$ ezeken a helyeken zérus lesz. Mivel *P*(*u*) az *u*=∞-nél végtelen nagy pozitív értékűvé válik, a harmadik gyök nagyobb 1-nél, a hozzá tartozó ϑ_3 szög nem valós és emiatt érdektelen. A pörgettyű szimmetria-tengelyének hajlásszöge a ϑ_1 és ϑ_2 szögek között ingadozik, a szimmetriatengely tehát e két szög között mozog föl és le. Ezt a mozgást nevezzük *nutációnak.*

Ha $k=Cr_0$, akkor az $u=1$ $\left(\vartheta_1=0\right)$gyöke a *P*(*u*) polinomnak, és ebben az esetben a szimmetriatengely egészen a függőleges irányig mozog.

A szimmetriatengelynek az inerciarendszer *z* tengelye körüli forgását, a *precessziót* a *ψ* szög időfüggése írja le. Ennek idő szerinti deriváltja a precesszió szögsebessége, amely a (3.115) képlet szerint a

$$\dot{\psi}_1=\frac{k-Cr_0\cos\vartheta_1}{A\sin^2\vartheta_1}\qquad\text{és}\qquad\dot{\psi}_2=\frac{k-Cr_0\cos\vartheta_2}{A\sin^2\vartheta_2}$$ (3.122. egyenlet)

értékek között ingadozik. Ha ϑ_1 jelenti a ϑ_1 és ϑ_2 közül a kisebbik szöget, akkor három esetet különböztethetünk meg, aszerint, hogy

$$k\gtreqless Cr_0\cos\vartheta_1.$$ (3.123. egyenlet)

Az első esetben a $\dot{\psi} > 0$, és így a precesszió az óramutató járásának megfelelő forgással történik periodikusan csökkenő és növekvő sebességgel. A második esetben a precesszió azokban a pillanatokban leáll, amikor a szimmetriatengely a legmeredekebb helyzetbe kerül. Ekkor ugyanis $\dot{\psi}$ zérussá válik. A harmadik esetben további lehetőségek vannak annak megfelelően, hogy

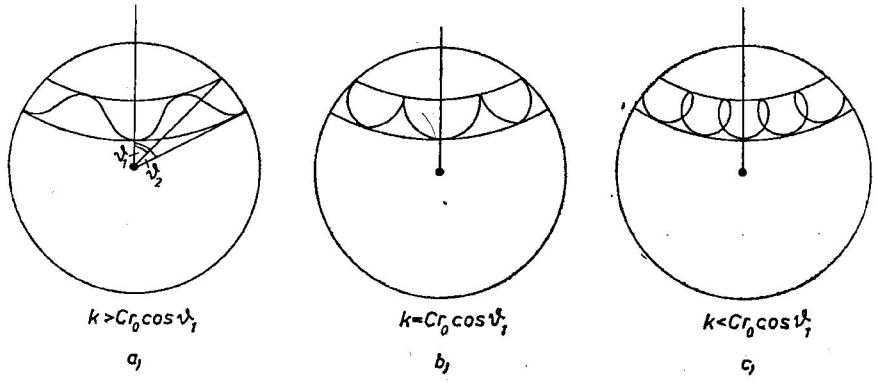
$$k \lessgtr Cr_0 \cos\vartheta_2.$$

Ha $Cr_0 \cos\vartheta_2 < k < Cr_0 \cos\vartheta_1$, akkor a $k = Cr_0 \cos\vartheta^*$ egyenlőséget kielégítő ϑ^* szögnél a $\dot{\psi}$ előjelet vált. A szimmetriatengely legmeredekebb helyzetéből indulva, $\dot{\psi} < 0$ egészen ϑ^*-ig, itt zérussá válik, és innen pozitív, amíg ϑ_2-nél megfordulva újra el nem éri a ϑ^*-ot. A precesszió iránya tehát periodikusan ismétlődve megfordul. Ha $k < Cr_0 \cos\vartheta_2$ akkor a $\dot{\psi}$ mindig negatív lesz, és ezért a precesszió az első esettel ellentétes irányban megy végbe. A $k = Cr_0 \cos\vartheta_2$ esetben a precesszió a legnagyobb kitérési szögnél áll le egy pillanatra (itt ugyanis $\dot{\psi}$=0 lesz), és az óramutató járásával ellentétes irányú.

A szimmetriatengely valamely pontja mindegyik esetben gömbfelületen mozog a ϑ_1 és ϑ_2 szögeknek megfelelő határkörök között. Az előbb tárgyalt eseteket a *38. ábra* szemlélteti. Az első esetben a pont pályája hullámszerű görbe, a másodikban ciklois, a harmadikban pedig epiciklois.

Előfordulhat az a speciális eset, amikor a $P(u)$ polinomnak kettős gyöke van. Ekkor a $\vartheta_1 = \vartheta_2$, a szimmetriatengely állandó ϑ szöget zár be az inerciarendszer z tengelyével, vagyis nem lép fel nutáció. Ebben a szinguláris esetben mind a $\dot{\psi}$ mind a $\dot{\varphi}$ állandó. A szimmetriatengelynek ezt a mozgását *reguláris precessziónak* nevezzük. Ez olyan, amilyent az erőmentes szimmetrikus pörgettyű végez.

38. ábra -



A pörgettyűnek a szimmetriatengely körüli forgását a φ szög időfüggése írja le. Ennek szögsebességét a (3.116) képlet adja meg. Ez is periodikusan ingadozik a

$$\dot{\varphi}_1 = r_0 - \frac{k - Cr_0\cos\vartheta_1}{A\sin^2\vartheta_1}\cos\vartheta_1 \qquad \text{és a} \qquad \dot{\varphi}_2 = r_0 - \frac{k - Cr_0\cos\vartheta_2}{A\sin^2\vartheta_2}\cos\vartheta_2$$

értékek között.

A pörgettyűmozgás fontosabb tulajdonságainak megismerése után most egy speciális esetre megoldjuk az alapegyenleteket, és meghatározzuk az Euler-szögek időfüggését.

A szimmetriatengelye körül nagy szögsebességgel forgó pörgettyűt a $\vartheta_0, \psi_0, \varphi_0$ szögekkel megadott helyzetbe hozzuk, és ezt tekintjük kezdeti állapotnak. Azt vizsgáljuk, hogyan mozog ezután a nehézségi erő hatása alatt. Látni fogjuk, hogy az igen nagy kezdeti szögsebesség olyan közelítést enged meg, amellyel a (3.114) alapegyenletek könnyen megoldhatók.

A kezdeti feltételek tehát a következők:

t = 0-kor

$$\dot{\vartheta} = 0, \qquad \dot{\psi} = 0, \qquad \dot{\varphi} = r_0,$$
$$\vartheta = \vartheta_0, \qquad \psi = \psi_0, \qquad \varphi = \varphi_0. \quad \text{(3.124. egyenlet)}$$

Az r_0-ra vonatkozó feltevésünket úgy pontosítjuk, hogy legyen

$$r_0^2 \gg \frac{2mglA}{C^2}. \quad \text{(3.125. egyenlet)}$$

A (3.114)-ben szereplő k és E állandókra (3.124) felhasználásával adódik, hogy

$$k = Cr_0\cos\vartheta_0,$$
$$E = \frac{1}{2}Cr_0^2 + mgl\cos\vartheta_0. \quad \text{(3.126. egyenlet)}$$

Helyettesítsük be ezeket az értékeket (3.117)-be:

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{2mgl}{A}\left(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta\right)\left[1 - \frac{C^2r_0^2}{2Amgl}\frac{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\right]. \quad \text{(3.127. egyenlet)}$$

Az *E* állandó (3.126) értékét a (3.114) harmadik egyenletébe beírva, látszik, hogy a $\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta$ nem lehet negatív. Mivel a $\dot{\vartheta}^2 \geq 0$, (3.127) jobb oldalán álló szögletes zárójeles kifejezés sem lehet negatív. A (3.125) feltevés miatt ez csak úgy lehetséges, hogy a $\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta$ különbség nagyon kicsi. A ϑ szög tehát nagyon közel van a ϑ_0-hoz, azaz

[MA $\vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon$, #-#3.128]

ahol *ε* igen kicsi pozitív mennyiség. Ennek megfelelően

$$\cos\vartheta = \cos(\vartheta_0 + \varepsilon) = \cos\vartheta_0 \cos\varepsilon - \sin\vartheta_0 \sin\varepsilon.$$

A cos *ε*-t és sin *ε*-t fejtsük hatványsorba, és az *ε* kicsi volta miatt csak a második hatványt vegyük figyelembe:

$$\cos\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots,$$
$$\sin\varepsilon = \varepsilon + \ldots .$$

Így adódik, hogy

$$\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta = \varepsilon \sin\vartheta_0 + \frac{\varepsilon^2}{2}\cos\vartheta_0,$$
$$(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)^2 = \sin^2\vartheta_0 \varepsilon^2.$$

Ezeket a közelítő jellegű kifejezéseket (3.127)-be behelyettesítve,

$$\dot{\varepsilon}^2 = \frac{2mgl}{A}\sin\vartheta_0 \cdot \varepsilon - \left(\frac{C^2 r_0^2}{A^2} - \frac{mgl\cos\vartheta_0}{A}\right)\varepsilon^2.$$ (3.129. egyenlet)

Alkalmazva az

$$\alpha = \frac{2mgl}{A}\sin\vartheta_0 \quad \text{és a} \quad \beta = \frac{C^2 r_0^2}{A^2} - \frac{mgl\cos\vartheta_0}{A}$$ (3.130. egyenlet)

jelöléseket,

$$\dot{\varepsilon}^2 = \alpha\varepsilon - \beta\varepsilon^2.$$ (1.131. egyenlet)

Ez a differenciálegyenlet a változók szétválasztásának módszerével könnyen megoldható. A kezdeti feltételekből adódó *ε*(0) = 0 figyelembevételével

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{2\beta}\left(1-\cos\sqrt{\beta}t\right).$$ (3.132. egyenlet)

Az e (3.128) jelentése alapján

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{\alpha}{2\beta}\left(1-\cos\sqrt{\beta}t\right).$$ (3.133. egyenlet)

A (3.114) második egyenletéből a *k* állandó (3.126) értékével *ε*-ban első rendig kapjuk, hogy

$$\dot{\psi} = \frac{Cr_0}{A\sin\vartheta_0}\varepsilon = \frac{Cr_0}{A\sin\vartheta_0}\cdot\frac{\alpha}{2\beta}\left(1-\cos\sqrt{\beta}t\right).$$ (3.134. egyenlet)

Ennek a kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$\psi = \psi_0 + \frac{Cr_0}{A\sin\vartheta_0}\frac{\alpha}{2\beta}\left(t-\frac{\sin\sqrt{\beta}t}{\sqrt{\beta}t}\right).$$ (3.135. egyenlet)

Hasonlóképpen adódik a (3.114) első egyenletéből

$$\varphi = \varphi_0 + r_0 t - \frac{\alpha Cr_0\cos\vartheta_0}{2\beta A\sin\vartheta_0}\left(t-\frac{\sin\sqrt{\beta}t}{\sqrt{\beta}t}\right).$$ (3.136. egyenlet)

Az α és β helyére a (3.130) kifejezéseket kell beírni. Itt figyelembe vesszük, hogy a szimmetriatengely körüli forgás r_0 szögsebessége nagy, és emiatt β-ban a második tag az első mellett elhagyható. így végül az Euler-szögek időfüggésére a következőt kapjuk:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{Amgl\sin\vartheta_0}{C^2 r_0^2}\left(1-\cos\frac{Cr_0}{A}t\right),$$
$$\psi = \psi_0 + \frac{mgl}{Cr_0}\left(t-\frac{A}{Cr_0}\sin\frac{Cr_0}{A}t\right),$$
$$\varphi = \varphi_0 + r_0 t - \frac{mgl\cos\vartheta_0}{Cr_0}\left(t-\frac{A}{Cr_0}\sin\frac{Cr_0}{A}t\right).$$ (3.137. egyenlet)

Ezzel a szimmetriatengely körül nagy szögsebességgel forgó súlyos szimmetrikus pörgettyű mozgásfeladatát megoldottuk. A (3.137) megoldások fizikai jelentése a következő.

A szimmetriatengelynek az inerciarendszer *z* tengelyével (a függőleges iránnyal) bezárt ϑ szöge periodikusan ingadozik a kezdeti ϑ_0 és az ettől kicsit eltérő $\vartheta_0 + \frac{2Amgl\sin\vartheta_0}{C^2 r_0^2}$ maximális hajlásszög között. Ennek a nutációnak az amplitúdója,

$$a_{nut} = \frac{Amgl\sin\vartheta_0}{C^2 r_0^2}, \quad \text{(3.138. egyenlet)}$$

és a frekvenciája,

$$\nu_{nut} = \frac{1}{2\pi}\frac{Cr_0}{A}. \quad \text{(3.139. egyenlet)}$$

Ezekből látszik, hogy a szimmetriatengely ingadozása annál kisebb – és a frekvenciája annál nagyobb –, minél nagyobb az r_0 kezdeti szögsebesség.

A tengely precesszióját a $\psi(t)$ írja le. Mivel ez monoton függvény, a szimmetriatengely forgása mindig egy irányú, periodikusan változó $\dot{\psi}$ szögsebességgel. A precesszió forgásirányát az r_0 kezdeti szögsebesség előjele, vagyis a tengely körüli forgás iránya szabja meg. A (3.133) és (3.134) szerint $\dot{\psi}$ a ϑ_0 szögnél, vagyis a tengely legmeredekebb állásánál zérussá válik egy pillanatra. A szimmetriatengely pontjai tehát cikloisgörbét írnak le, a precesszió pszeudoreguláris.

17. A merev test forgásának stabilitása

Gondoljunk el egy merev testet, amely valamelyik főtengely körül erőmentes forgást végez. Megvizsgáljuk, hogy ez a mozgás stabil-e. Stabilitáson itt azt értjük, hogy ha kis perturbációt alkalmazunk a rendszerre, akkor az vagy visszatér eredeti mozgásállapotába, vagy kis rezgést végez ekörül.

Először azt az általános esetet tekintjük, amikor mind a három főtehetetlenségi nyomaték különbözik egymástól, és feltesszük, hogy $A < B < C$. A testhez rögzített főtengelyrendszerben a test mozgását a (3.85) Euler-egyenletek írják le. Mivel erőmentes mozgást vizsgálunk, a külső erő nyomatéka most zérus. A kezdeti állapotban a test forogjon *p* szögsebességgel az *x′* tengely körül, és *t* = 0-kor a forgástengelyt kicsit kimozdítjuk eredeti helyzetéből. E kis perturbáció hatására az *ω* szögsebesség-vektornak lesz *y′* és *z′* irányú komponense is. A *q* és *r* szögsebesség-komponensekről feltesszük, hogy elsőrendű kicsi mennyiségek, ezért szorzataikat elhanyagolhatjuk. A *p, q, r* szögsebesség-komponensek időfüggését meghatározó Euler-egyenletek

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= (B-C)qr, \\ B\dot{q} &= (C-A)pr, \\ C\dot{r} &= (A-B)pq. \end{aligned} \quad \text{(3.140. egyenlet)}$$

Mivel a feltevésünk szerint $qr \sim 0$, ezért $p = 0$, tehát p= áll. A másik két egyenletből adódik

$$\ddot{q} = \frac{(C-A)(A-B)}{BC} p^2 q, \quad \text{(3.141. egyenlet)}$$

$$\ddot{r} = \frac{(C-A)(A-B)}{BC} p^2 r. \quad \text{(3.142. egyenlet)}$$

A két egyenlet teljesen azonos, ezért elég csak az egyiknek a megoldásával foglalkoznunk. A (3.141) általános megoldása

$$q(t) = ae^{i\Omega_{xq}t} + be^{-i\Omega_{xq}t}, \quad \text{(3.143. egyenlet)}$$

ahol

$$\Omega_{xq} = p\sqrt{\frac{(A-C)(A-B)}{BC}}. \quad \text{(3.144. egyenlet)}$$

Az x és q indexekkel azt hozzuk kifejezésre, hogy az eredeti forgás az x' tengely körül történik és a q-komponensre vonatkozó megoldásról van szó.

Mivel a feltevésünk szerint $A < C$ és $A < B$, továbbá az Ω_{xq} valós, ezért a (3.143) megoldás harmonikus rezgést jelent Ω_{xq} körfrekvenciával. Ugyanezt kapjuk az r időfüggésére is. A (3.141) és (3.142) egyenletek azonosságából következik, hogy az Ω_{xr} körfrekvencia megegyezik Ω_{xq}-val:

$$\Omega_{xr} = \Omega_{xq} \equiv \Omega_x. \quad \text{(3.145. egyenlet)}$$

Az **ω** szögsebességvektor y' és z' komponenseiben megnyilvánuló kis perturbáció nem erősödik fel az idővel, hanem a q=0 és r=0 egyensúlyi értékek körül oszcillál. Ezért az x' tengely körüli forgás stabil.

Ha a merev test eredetileg az y' illetve a z' tengely körül forog, akkor a megfelelő másik két szögsebesség-komponensre hasonló megfontolással a (3.143) alakú megoldásokat kapjuk az

$$\Omega_x = p\sqrt{\frac{(A-C)(A-B)}{BC}}, \quad \text{(3.146a. egyenlet)}$$

$$\Omega_y = q\sqrt{\frac{(B-A)(B-C)}{AC}}, \quad \text{(3.146b. egyenlet)}$$

$$\Omega_z = r\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}$$ (3.146c. egyenlet)

paraméterekkel. Mivel $A < B < C$, ezért az Ω_x és Ω_z valós, az Ω_y pedig képzetes. Ennek megfelelően az *x′* vagy a *z′* tengely körüli forgás esetén a perturbáció a szögsebesség másik két komponensében csak kis rezgéseket kelt, és ezért, a két tengely körüli forgás stabil. Ezzel szemben az *y′* tengely körüli forgás esetén az Ω_y képzetes volta miatt a perturbáció az idővel korlátlanul felnő, és ezért az ilyen mozgás nem stabil.

Eredményeink összefoglalásaként megállapíthatjuk, hogy a legnagyobb és a legkisebb főtehetetlenségi nyomatékú tengely körüli forgások stabilak, míg a középső tengely körüli forgás instabil.

Ha a merev test szimmetrikus, mondjuk a *z′* tengely körül, akkor $A = B$, és emiatt a (3.140) harmadik egyenletének jobb oldala zérus, amiből következik, hogy $\dot{r} = 0$ tehát r = áll. Ismét az *x′* tengely körüli forgást tekintve, a kis perturbáció a *q* szögsebesség-komponensben felnövekszik az idővel lineárisan. Ugyanis a (3.140) második egyenletének megoldása

$$q(t) = \alpha + \beta t$$ (3.147. egyenlet)

alakú. Az x' tengely körüli forgás tehát ebben az esetben nem stabil. Hasonló eredmény adódik az *y′* tengely körüli forgásra. Egyedül a *z′* szimmetriatengely körüli forgás lesz stabil, függetlenül attól, hogy a *C* főtehetetlenségi nyomaték kisebb vagy nagyobb, mint az $A = B$.

4. fejezet - A DEFORMÁLHATÓ TESTEK MECHANIKÁJA

(Általános tételek)

Az előző fejezetben tanulmányozott merev testeknél az volt az alapfeltevés, hogy a test egyes pontjai közötti távolságok állandóak. Ennek következtében a merev testnek sem az alakja, sem a térfogata nem változik a kölcsönhatások következtében. Az ún. szilárd testek sok esetben leírhatók ezzel a modellel, mert az alak- és térfogatváltozásuk elhanyagolhatóan kicsi. Éppen ez teszi lehetővé a kapott elméleti eredmények széles körű alkalmazását.

A valóságban azonban megfelelő külső hatásra megváltozik a testek alakja és általában a térfogatuk is. A test pontjai egymáshoz képest elmozdulnak. Azt mondjuk, hogy a test deformálódik. A következőkben az ilyen valódi, ún. deformálható testek mozgását vizsgáljuk.

A test jellemzésére két modell használata terjedt el az irodalomban. Az egyik a testet anyagi pontok összességének tekinti, és a pontrendszereknél megismert törvényeket alkalmazza a rendszer mozgásának leírására. Ebben az esetben a különféle halmazállapotú testek szerkezetére vonatkozó ismeretek vagy feltevések szükségesek. Például feltesszük, hogy a szilárd anyag atomjai szabályos rácsszerkezetet alkotnak, és az egyes atomok között ún. rugalmas erők határozzák meg az egyensúlyi helyzeteket. Vagy például a gáz atomjait kis golyóknak képzeljük el, amelyek a hőmozgás következtében rendezetlen mozgást végeznek, és ideális gázt feltételezve, az ütközés során lép fel közöttük kölcsönhatás. Az ilyen ún. mikroszkopikus elméleteknek az a végső céljuk, hogy a test alkotórészeinek (atomoknak, molekuláknak) a mozgástörvényeiből az egész testnek mint makroszkopikus rendszernek a fizikai sajátságait megmagyarázzák. Ezt a gondolatmenetet követi a kinetikus gázelmélet vagy általánosabban az ún. statisztikus mechanika.

A másik eljárás az ún. fenomenológiai tárgyalásmód, amelynél a test szerkezetére semmilyen feltevést nem teszünk, hanem annak sajátságait a tapasztalatból megismert, ún. anyagi állandókkal vesszük figyelembe. Úgy képzeljük el, hogy a test tömege folytonosan tölti ki a test térfogatát, és a testre jellemző fizikai mennyiségek folytonos függvényekkel adhatók meg. A test fizikai állapotát is ilyen függvényekkel jellemezzük, és az állapot változását meghatározó mozgástörvényt differenciálegyenletek alakjában írjuk fel. Ennek a tárgyalásmódnak az az előnye, hogy a szükséges matematikai eljárások a matematikai analízisből jól ismertek és általában könnyen alkalmazhatók. Másrészt a test deformációval kapcsolatos állapotváltozásának a leírásához nincs is szükségünk az azt alkotó atomok vagy molekulák mozgásállapotának az ismeretére. Gondoljuk csak meg, ha egy vasrudat meghajlítunk valamilyen ismert erővel, a létrejövő alakváltozás kiszámításához nem kell ismernünk az egyes atomok egymáshoz képest bekövetkező elmozdulását. Sőt az alkalmazásoknál legtöbbször nem is vagyunk arra kíváncsiak, hogy a test belső szerkezetében mi történik. A fenomenológiai elméletek akkor alakultak ki, amikor az anyag szerkezetét még nem ismerték, és éppen az bennük a nagyszerű és a mai ismereteink szintjén is bámulatos, hogy néhány tapasztalati állandó felhasználásával milyen széles körben alkalmazható törvényeket állapítottak meg. A tudományos megismerésnek természetes követelménye azonban, hogy a fizika nem állhat meg a fenomenológiai törvényeknél, hanem egyre mélyebbre kell hatolnia, és kutatnia kell azt is, hogy milyen az anyag szerkezete és miért olyan pl. a vasrúd, amilyen. Mi történik a test belsejében az atomokkal, amikor valamilyen deformációt hozunk létre? Az atomok és molekulák kölcsönhatásai hogyan határozzák meg a testek makroszkopikus viselkedését? S í. t. A deformálható testek mechanikája körében azonban olyan kérdések merülnek fel, amelyekre ezek ismerete nélkül is kielégítő válasz adható. Éppen emiatt választjuk mi is a fenomenológiai tárgyalást, és a testeket folytonos tömegeloszlásúnak tekintjük. Jellemzésükre a

kísérleti úton meghatározható anyagi állandókat használjuk. Ezekkel különböztetjük meg egymástól pl. az izotrop és kristályos rugalmas szilárd testeket vagy a folyadékokat és gázokat.

A test térfogatát feltevésünk szerint folytonosan kitöltő anyag tömegeloszlásának jellemzésére bevezetjük a *tömegsűrűség* fogalmát, amelyet a következőképpen definiálunk. Legyen a ΔV térfogatelem tömege a t időpontban Δm, és húzzuk össze gondolatban a ΔV térfogatot a $P(x, y, z)$ pontra, vagyis képezzük a $\Delta V \to 0$ határátmenetet. A $\Delta m/\Delta V$ határértékét tekintjük a P pontban a t időpillanatban értelmezett ϱ tömegsűrűségnek:

$$\varrho(x,y,z;t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad \text{(4.1. egyenlet)}$$

A $\varrho(x,y,z;t)$ folytonosan változik a hellyel és általában az idővel. Ezért ez négyváltozós folytonos függvény. A véges V térfogatban levő m tömeget a $\varrho(x,y,z;t)$ $\varrho(x,y,z;t)$ sűrűség térfogati integrálja adja meg:

$$m = \int_V \varrho dV = \iiint \varrho(x,y,z;t)\, dx\, dy\, dz. \quad \text{(4.2. egyenlet)}$$

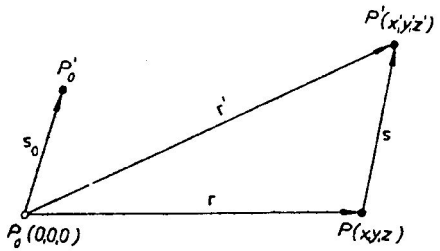
Ebben a fejezetben a valamennyi deformálható testre (szilárd testekre, folyadékokra és gázokra) egyaránt érvényes általános törvényeket ismertetjük, és a következő fejezetekben foglalkozunk a különféle halmazállapotú testek speciális tulajdonságaival és mechanikájával.

18. A deformálható testek kinematikája

18.1 Az elmozdulás vektortere lineáris közelítésben

Gondoljuk el egy test valamely P_0 pontjának igen kis környezetét, és tekintsünk ebben egy P pontot. Egyszerűség kedvéért válasszuk P_0-t a koordináta-rendszer kezdőpontjának, a P koordinátái pedig legyenek x, y, z. Ha a test pontjai mozognak, akkor egy későbbi időpontban a P_0 valamilyen P'_0 helyre, a P pedig *P'-be* kerül. A P_0 elmozdulását jelöljük $\mathbf{s}_0$-val, a P-ét **s**-sel *(39. ábra)*. A P_0 kis környezetének

39. ábra -



egyes pontjai különbözőképpen mozdulnak el, ezért nyilvánvaló, hogy az **s** elmozdulásvektor függ a helytől, **s** = **s**(x, *y, z*). Fejtsük Taylor-sorba az **s** komponenseit a P_0 (0, 0, 0) pont környezetében:

$$s_x(x,y,z) = s_{0x} + \left(\frac{\partial s_x}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial s_x}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial s_x}{\partial z}\right)_0 z + \ldots$$

$$s_y(x,y,z) = s_{0y} + \left(\frac{\partial s_y}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial s_y}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial s_y}{\partial z}\right)_0 z + \ldots$$

$$s_z(x,y,z) = s_{0z} + \left(\frac{\partial s_z}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial s_z}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial s_z}{\partial z}\right)_0 z + \ldots \quad \text{(4.3. egyenlet)}$$

A $\left(\frac{\partial s_x}{\partial x}\right)_0$, ... együtthatók a megfelelő deriváltaknak a P_0 pontban vett értékeit jelölik, ezért ezek számok. A sorfejtésben ki nem írt tagok az *x, y, z* koordináták magasabb hatványait és az s_i komponensek magasabb rendű deriváltjainak a P_0 helyen vett értékeit tartalmazzák. Ha a P_0 pontnak csak nagyon kis környezetére korlátozódunk, akkor az *x, y, z* magasabb hatványai elhanyagolhatóan kicsi járulékot adnak, ezért ezektől eltekintünk. Mivel ebben a közelítésben az elmozdulásvektor komponensei lineáris függvényei a koordinátáknak, az ilyen elmozdulást lineárisnak nevezzük. Ezen belül még egy másik feltevéssel is élünk, nevezetesen feltesszük, hogy **s** nagyon lassan változik a hellyel. Éspedig olyan lassan, hogy a $\left(\frac{\partial s_i}{\partial x}\right)_0$ deriváltak szorzatai vagy a magasabb rendű deriváltak P_0-ban vett értékei az elsőrendűekhez képest elhanyagolhatóan kicsik. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az elmozdulás *infinitezimális.* A (4.3)-ban kiírt lineáris tagok tehát infinitezimális lineáris elmozdulást írnak le.

Az $\mathbf{s}-\mathbf{s_0}$ vektor komponensei ebben a lineáris közelítésben lineáris függvényei az *x, y, z* koordinátáknak. Vagy másképpen kifejezve, az $\mathbf{s}-\mathbf{s_0}$ vektor lineáris vektorfüggvénye az **r** helyvektornak. A matematikában tanultak szerint a $\left(\frac{\partial s_x}{\partial x}\right)_0$, ... mennyiségek egy kétindexes tenzornak az elemei. A

korábban már használt jelöléssel élve, x_i jelentse az x, *y, z* koordinátákat az *i* = I, 2, 3 értékekkel. Hasonlóképpen s_i az **s** elmozdulásvektor három komponense az *i*=1, 2, 3-nak megfelelően. A $\left(\frac{\partial s_x}{\partial x}\right)_0$, ... deriváltak ezzel a jelöléssel $\left(\frac{\partial s_x}{\partial x}\right)_0$ alakba írhatók. A $\left(\frac{\partial s_x}{\partial x}\right)_0$ mennyiségekből felépült

$$s_{ik} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2}\right)_0 & \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_3}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial s_2}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial s_2}{\partial x_2}\right)_0 & \left(\frac{\partial s_2}{\partial x_3}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial s_3}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial s_3}{\partial x_2}\right)_0 & \left(\frac{\partial s_3}{\partial x_3}\right)_0 \end{pmatrix}$$ (4.4. egyenlet)

tenzort elmozdulástenzornak nevezzük. A (4.3) lineáris elmozdulás ennek segítségével a következőképpen írható:

$$s_i = s_{0i} + s_{ir} x_r.$$ (4.5. egyenlet)

A kétszer előforduló *r* indexre a korábbi megállapodás szerint összegezés értendő 1-től 3-ig, vagyis $s_{ir} x_r = \sum_{r=1}^{3} s_{ir} x_r$.

Az s_{ik} elmozdulástenzor nem szimmetrikus, de felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus tag összegére, amint az a következő azonos átalakításból nyilvánvaló:

$$s_{ik} = \frac{s_{ik} + s_{ki}}{2} + \frac{s_{ik} - s_{ki}}{2} = \varepsilon_{ik} + a_{ik}$$ (4.6. egyenlet)

ahol[1]

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_k} + \frac{\partial s_k}{\partial x_i}\right),$$ (4.7. egyenlet)

$$a_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_k} - \frac{\partial s_k}{\partial x_i}\right).$$ (4.8. egyenlet)

[1] Ezentúl a 0 indexet a deriváltak mellől az egyszerűség kedvéért elhagyjuk.

A (4.6) felbontást (4.5)-be beírva, látható, hogy az **s** elmozdulásvektor három részből áll:

$$s_i = s_{0i} + \varepsilon_{ir} x_r + a_{ir} x_r \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$ (4.9. egyenlet)

Az egyes tagok fizikai jelentése a következő. Az $\mathbf{s}_0$ nem függ a helykoordinátáktól, ezért minden *P* pontra nézve ugyanaz. Ez tehát a térfogatelem transzlációs elmozdulását írja le.

Az antiszimmetrikus a_{ik} tenzort tartalmazó tag jelentésének a kiderítéséhez bevezetjük az e_{ijk} teljesen antiszimmetrikus egységtenzort, amelynek a definíciója a következő:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad i = j, \text{ vagy } j = k, \text{ vagy } k = i, \\ 1, & \text{ha} \quad i, j, k \text{ páros permutációja az 1, 2, 3-nak} \\ -1, & \text{ha} \quad i, j, k \text{ páratlan permutációja az 1, 2, 3-nak.} \end{cases}$$ (4.10. egyenlet)

A δ_{ik} Weierstrass-szimbólum vagy másképpen Kronecker-delta

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad i = k \\ 0, & \text{ha} \quad i \neq k \end{cases}$$ (4.11. egyenlet)

jelentésének alapján belátható hogy

$$e_{ijk} e_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}.$$ (4.12. egyenlet)

Az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ vektoriális szorzat komponensei az e_{ijk}-val a következőképpen fejezhetők ki:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = e_{ijk} a_j b_k.$$ (4.13. egyenlet)

Vezessük be a rot **s** vektort, és írjuk fel ennek *i*-edik komponensét a (4.13) alapján:

(rot **s**)$_i$=$\mathbf{e_{ijk}.a_{kj}}$.

Képezzük ezután az $\frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{s}) \times \mathbf{r}$ vektoriális szorzatot:

$$\left(\frac{1}{2}(\mathrm{rot}\ \mathbf{s})\times\mathbf{r}\right)_i=\frac{1}{2}e_{ijk}e_{jlm}a_{ml}x_k=-\frac{1}{2}e_{jik}e_{jlm}a_{ml}x_k=-\frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{kl})a_{ml}x_k=-\frac{1}{2}a_{ki}x_k+\frac{1}{2}a_{ik}x_k=a_{ik}x_k.$$

Látható, hogy ez éppen a (4.9) harmadik tagja. Az **s** elmozdulásvektornak ez a része tehát az $\frac{1}{2}(\mathrm{rot}\ \mathbf{s})\times\mathbf{r}$ vektoriális szorzat alakjában írható fel. Ha az $\frac{1}{2}\mathrm{rot}\ \mathbf{s}$ vektort egy tengely körüli elemi forgás $\Delta\varphi$ szögvektorának tekintjük, akkor ez a kifejezés (1.175') alakú lesz, vagyis forgásból származó elmozdulást ír le. A (4.9) harmadik tagja tehát a térfogatelemek infinitezimális elfordulását jelenti. A forgástengely irányát és az elfordulás szögét a

$\Delta\varphi=\frac{1}{2}\mathrm{rot}\ \mathbf{s}$ (4.14. egyenlet)

vektor határozza meg.

Az alak- és térfogatváltozással kapcsolatos ún. deformációs elmozdulás az ε_{ik} szimmetrikus tenzorral kifejezett második tagban jelentkezik csak, mert az első és harmadik transzlációnak, illetve forgásnak felel meg; és — mint a merev testeknél megismertük — ezek nem járnak együtt alakváltozással, vagyis deformációval. Összefoglalásként megállapíthatjuk, hogy a deformálható test elemi kis tartományának elmozdulása az infinitezimális lineáris közelítésben három egymástól független elmozdulás összegeként írható fel: transzláció, forgás és deformáció. Ez a felismerés Helmholtz nevéhez fűződik.

18.2 A deformáció tenzora

Az elmozdulástenzor (4.7)-ben definiált szimmetrikus részét nyúlási vagy deformációtenzornak nevezzük. A tenzor elemeinek közvetlen fizikai jelentésük van. Nézzük először az ε_{11}, ε_{22}, ε_{33} főátlóban álló elemeket.

Tegyük fel, hogy a *P*(*x, y, z*) pont tiszta deformációval átmegy a *P'*(*x', y', z'*) pontba. Ha a *P* pont helyvektorát **r**-rel, a *P'*-ét **r'**-vel jelöljük akkor

$\mathbf{r}'=\mathbf{r}+\mathbf{s}^{(\mathrm{d})}$, (4.15. egyenlet)

ahol $\mathbf{s}^{(\mathrm{d})}$ a deformációs elmozdulás, amelynek komponensei

$s_i^{(\mathrm{d})}=\varepsilon_{ik}x_k \qquad (i=1,\ 2,\ 3).$ (4.16. egyenlet)

Ezt (4.15)-be beírva,

$$x_i' = x_i + \varepsilon_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, 3).$$ (4.17. egyenlet)

A derékszögű koordináta-rendszer három tengelye irányába mutató egységvektorokat jelöljük rendre $\mathbf{e_1}$-, $\mathbf{e_2}$-, $\mathbf{e_3}$-mal. Tekintsük ezek közül pl. az $\mathbf{e}_1$ (1, 0, 0) egységvektort, amely a deformáció után (4.17) szerint az

$$\mathbf{r}_1' = (1 + \varepsilon_{11})\mathbf{e}_1 + \varepsilon_{21}\mathbf{e}_2 + \varepsilon_{31}\mathbf{e}_3$$ (4.18. egyenlet)

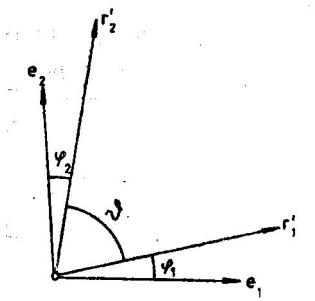
vektorba megy át. Az *x* irányú szakasz relatív hosszúságváltozása,

$$\frac{|\mathbf{r}_1'| - |\mathbf{e}_1|}{|\mathbf{e}_1|} = |\mathbf{r}_1'| - 1 = \sqrt{\mathbf{r}_1'^2} - 1 \approx \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} - 1 \approx \varepsilon_{11}.$$ (4.19. egyenlet)

Itt figyelembe vettük, hogy infinitezimális elmozdulásról van szó, és ezért az ε_{ik} elsőnél magasabb hatványai elhanyagolhatóan kicsik. Hasonló adódik az ε_{22}-re és ε_{33}-ra. Az ε_{ik} deformációtenzor főátlóban álló elemei tehát a koordinátatengelyek irányába eső szakaszok relatív hosszúságváltozását jelentik.

Ahhoz, hogy a vegyes indexű elemek jelentését meghatározzuk, gondoljuk meg, hogy az egymásra merőleges $\mathbf{e_1}$ és $\mathbf{e_2}$ egységvektorok a deformáció után milyen szöget zárnak be egymással. A deformáció az $\mathbf{e_1}$ vektort átviszi a (4.18)-ban felírt $\mathbf{r_1'}$-be, az $\mathbf{e_2}$-t pedig az

40. ábra -



$$\mathbf{r}_2' = \varepsilon_{12}\mathbf{e}_1 + (1 + \varepsilon_{22})\mathbf{e}_2 + \varepsilon_{32}\mathbf{e}_3$$ (4.20. egyenlet)

vektorba. Az $\mathbf{r_1'}$, $\mathbf{r_2'}$ vektorok által bezárt $\vartheta = \pi/2 - \varphi_{12}$ szögre érvényes

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_{12}\right)=\sin\ \varphi_{12}\frac{\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2'}{|\mathbf{r}_1'||\mathbf{r}_2'|}$$ (4.21. egyenlet)

Infinitezimális elmozdulás esetén

$$\sin\varphi_{12}=2\varepsilon_{12}.$$

Mivel a $\varphi_{12}=\varphi_1+\varphi_2$ szög kicsi, sin $\varphi_{12}\approx\varphi_{12}$, és emiatt

$$\varepsilon_{12}\approx\frac{1}{2}\varphi_{12}.$$ (4.22. egyenlet)

Hasonlóképpen adódik a másik két elemre

$$\varepsilon_{13}\approx\frac{1}{2}\varphi_{13},\quad \varepsilon_{23}\approx\frac{1}{2}\varphi_{23}.$$ (4.23. egyenlet)

A deformáció tenzor vegyes indexű elemei tehát azon szögváltozásoknak a felével egyenlőek, amelyek a megfelelő két tengely irányába mutató egyenesek között a deformáció során keletkeznek.

A deformáció következtében a testnek nemcsak az alakja, hanem a térfogata is megváltozik. Számítsuk ki a relatív térfogatváltozást. Tekintsük az $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ egységvektorok által meghatározott kockát. Ennek ΔV térfogata 1-gyel egyenlő: ΔV =1. A deformáció során az $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ vektorok az $\mathbf{r_1'}$-, $\mathbf{r_2'}$-, $\mathbf{r_3'}$-be mennek át, és az eredeti térfogat $\Delta V'=(\mathbf{r_1'}\times\mathbf{r_2'})\mathbf{r_3'}$-re változik. Mivel ez a vegyes szorzat a három vektor komponenseivel képzett determináns alakjába írható,

$$\Delta V'=\begin{vmatrix}1+\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & 1+\varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 1+\varepsilon_{33}\end{vmatrix}.$$ (4.24. egyenlet)

Az infinitezimális közelítésben az ε_{ik} elemek szorzatai elhanyagolhatóan kicsik a lineáris tagok mellett, és így

$$\Delta V'\approx 1+\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}.$$ (4.25. egyenlet)

A relatív térfogatváltozás ennek alapján,

$$\theta = \frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V} \approx \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{\partial s_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \mathbf{s}.$$ (4.26. egyenlet)

Tehát a deformációtenzor főátlójában álló elemek összege adja meg a relatív térfogatváltozást. Az $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii}$ mennyiséget az ε_{ik} tenzor *spurjának* nevezzük. Erről könnyű belátni, hogy a koordináta-rendszer elforgatásakor invariáns skalárként viselkedik. Ha az ε_{ik} deformációtenzor spurja zérus, akkor a deformáció nem okoz térfogatváltozást. Az ilyen térfogatváltozás nélküli deformációt nyírásnak nevezzük. A másik speciális eset az, amikor csak térfogatváltozás van és az alak nem változik meg. Ezek az alakmegőrző deformációk. Ilyenkor a test bármely térfogateleme hasonló alakúra változik. Ez az eset valósul meg az egyenletes összenyomásnál. A deformációtenzor ekkor ε_{ik} =áll. δ_{ik} alakú.

Könnyen belátható, hogy a tetszőleges deformáció mindig előállítható tiszta nyírás és egyenletes összenyomás összegeként. Végezzük el a következő azonos átalakítást:

$$\varepsilon_{ik} = \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{rr}\right) + \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{rr} = \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\Theta\delta_{ik}\right) + \frac{1}{3}\Theta\delta_{ik}.$$ (4.27. egyenlet)

A jobb oldai első tagja nem jár térfogatváltozással, mert ennek spurja zérus. A második tag pedig egyenletes nyomást ír le, a relatív hosszúságváltozás minden irányban ugyanaz, tehát megőrzi a test alakját.

Végül megjegyezzük, hogy mivel az ε_{ik} tenzor szimmetrikus, választható olyan koordináta-rendszer, amelyben a vegyes indexű elemek zérusok, és csak a főátlóban állók különböznek zérustól. Az ilyen koordináta-rendszert főtengelyrendszernek nevezzük. Ebben

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$ (4.28. egyenlet)

Az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ mennyiségek a relatív hosszúságváltozást adják a főtengelyek irányában.

18.3 A sebességtér és a sebességtenzor

A test valamely *P* pontjának elmozdulását a (4.3)-ban felírt **s** elmozdulásvektor adja meg. Mivel ez helyről helyre változik, s a helynek a függvénye. Így olyan vektorteret kapunk, amely a test pontjainak elmozdulását írja le a hely függvényében. Nyilvánvaló, hogy az elmozdulásvektor a helykoordináták mellett az időtől is függ, mert nagyobb időhöz nagyobb elmozdulás tartozik. Az elmozdulás idő szerinti változását a sebességgel jellemezzük, amelyet az **s** vektor idő szerint vett differenciál-hányadosával definiálunk:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt}.$$ (4.29. egyenlet)

A **v** sebesség is a helynek és az időnek a függvénye, tehát **v= v**(*x, y, z; t*). Ez a függvény a tér minden pontjához hozzárendel egy időben változó vektort. Az így adódó vektorteret nevezzük *sebességtérnek.* Ennek fizikai jelentése az, hogy a mozgó anyag egy pontjának sebessége megegyezik a sebességtér azon pontbeli értékével, ahol az éppen tartózkodik az adott pillanatban. Az el mozdulás vektorra alkalmazott gondolatmenettel a (4.5)-höz hasonló összefüggést kapunk a v_i sebességkomponensekre lineáris közelítésben:

$$v_i = v_{0i} + v_{ik} x_k , \quad \text{(4.30. egyenlet)}$$

ahol

$$v_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad \text{(4.31. egyenlet)}$$

az ún. sebességtenzor.

Ez a nem szimmetrikus tenzor is felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus tenzor összegére:

$$v_{ik} = \frac{1}{2}\left(v_{ik} + v_{ki}\right) + \frac{1}{2}\left(v_{ik} - v_{ki}\right) = V_{ik} + W_{ik} , \quad \text{(4.32. egyenlet)}$$

ahol

$$V_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right), \quad \text{(4.33. egyenlet)}$$

$$W_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right). \quad \text{(4.34. egyenlet)}$$

$\mathbf{v}_0$ a tekintett térfogatelem minden pontjára ugyanaz, ezért ez az egész tartománynak a transzlációs sebessége. A (4.30) sebességtérnek a W_{ik} antiszimmetrikus sebességtenzorból származó része a (4.13) után követett gondolatmenettel

$$\mathbf{v}^{(r)} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \text{(4.35. egyenlet)}$$

alakba írható, ahol

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}. \quad \text{(4.36. egyenlet)}$$

A (4.35) sebesség az egész térfogatelem forgásából származik. A (4.36)-tal definiált ω vektor a szögsebesség, amelyet *örvényvektornak* is szoktak nevezni.

A sebességtenzor (4.35) szimmetrikus része a deformáció sebességét adja meg az alábbi képlet szerint:

$v_i^{(d)} = V_{ik} x_k$ (4.37. egyenlet)

A V_{ik} deformációs sebességtenzor elemei az ε_{ik} deformációtenzor megfelelő elemeinek idő szerinti deriváltjai:

$V_{ik} = \dot{\varepsilon}_{ik}$ (4.38. egyenlet)

A V_{ik} főátlóban álló elemei ennek megfelelően a koordinátatengelyek irányában fellépő relatív hosszúságváltozás sebességét, a vegyes indexűek pedig a megfelelő szögváltozások sebességét jelentik.

A relatív térfogatváltozás sebességét, az ún. *dilatációsebességet* a

$\dot{\Theta} = \operatorname{div} \mathbf{v}$ (4.39. egyenlet)

adja meg. A divergencia definíciója alapján ez éppen a V_{ik} deformációs sebességtenzor spurja:

$$\dot{\Theta} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = V_{kk} = \operatorname{Spur} V_{ik}$$ (4.40. egyenlet)

18.4 A gyorsulás

A tömegpont gyorsulását sebességének idő szerinti differenciálhányadosával definiáltuk. Ha most a **v**(**r**, *t*) sebességteret egy adott helyen, tehát rögzített **r** mellett deriváljuk, akkor a $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ differenciálhányados annak a mértékét fejezi ki, hogy az adott helyen hogyan változik a sebesség az időben. Ez azonban nem egyezik meg a mozgó anyag egy pontjának a gyorsulásával az illető helyen, mert a sebesség argumentumában szereplő **r** az anyagi pont mozgásával együtt változik, és emiatt függ az időtől. Ezért a gyorsulást úgy kell számítani, hogy a sebesség idő szerinti differenciálásánál figyelembe kell venni az **r** időfüggését is. A közvetett függvények differenciálási szabályát alkalmazva:

$$a_i = \frac{dv_i(x_k(t), t)}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \dot{x}_k$$ (4.41. egyenlet)

Mivel $\dot{x}_k = v_k$,

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k \qquad (i = 1, 2, 3).$$ (4.42. egyenlet)

A komponensek helyett magára a gyorsulásvektorra áttérve

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \text{ grad})\mathbf{v}.$$ (4.43. egyenlet)

A jobb oldal második tagja úgy értendő, hogy képezzük a **v** vektornak és a grad szimbolikus vektornak (amelynek komponensei $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$) a skaláris szorzatát és ezt alkalmazzuk a **v**-re.

A gyorsulás tehát két tag összegeként adódik. A $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$-t helyi (lokális) gyorsulásnak, a $(\mathbf{v}, \text{ grad})\mathbf{v}$-t pedig konvektív gyorsulásnak nevezzük. Utóbbi annak a következménye, hogy az anyagi pont a *t* időpillanathoz tartozó **r**(*t*) helyről *dt* idő alatt olyan szomszédos pontba kerül, ahol más a sebesség értéke. Azokban az esetekben, amikor az elmozdulások és a sebességnek a hely szerinti változásai kicsik, a konvektív gyorsulás elhanyagolható a helyi gyorsulás mellett. Ilyenkor a gyorsulás a $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ vel helyettesíthető. A rugalmas szilárd testeknél ez a közelítés általában kielégítő, de a folyadékok és gázok áramlásánál már jelentős a konvektív gyorsulás is.

19. A testre ható erők osztályozása. A feszültségtenzor

A testben fellépő deformációk mindig valamilyen erővel vannak kapcsolatban. A deformációkat általában erők hozzák létre, pl. külső erővel megváltoztatjuk a test alakját; de vannak esetek, amikor más ok (pl. melegítés) hatására jön létre a deformáció. Ugyanakkor a deformációk a testben ún. belső erőket ébresztenek a szomszédos anyagrészek közötti kölcsönhatások révén. A testre ható erőket két csoportba lehet sorolni. Vannak olyan erők (mint pl. a nehézségi erő), amelyek a test minden részére hatnak, és így arányosak annak térfogatával vagy tömegével (amennyiben megfelelően kis tartományra szorítkozunk), mások viszont rövid hatótávolságuk miatt csak a tekintett anyagrész felülete mentén hatnak, és ezért a felülettel arányosak. A testre ható erők tehát ún. térfogati, illetve felületi erőkre oszthatók.

A pontosabb vizsgálat céljából gondoljuk el a testnek ΔV térfogatelemét, amelyet olyan kicsinek választunk, hogy a ϱ tömegsűrűség benne állandónak tekinthető. A térfogatelem minden részére ható térfogati erőt $\mathbf{F}_{\Delta V}$-vel jelölve, ez a fentiek szerint ΔV-vel arányos:

$$\mathbf{F}_{\Delta V} = \mathbf{f}\Delta V.$$ (4.44. egyenlet)

Az **f** arányossági tényező a térfogategységre ható erő, amelyet *erősűrűségnek* nevezünk. **f**-et is a hely folytonos függvényének tekintjük.

A valamilyen véges *V* térfogatú testre ható térfogati erőt a test egyes részeire ható (4.44) erők összegezésével kapjuk meg. Ha a ΔV térfogatelemekre való felbontást minden határon túl finomítjuk, akkor ennek az összegnek a határértéke, tehát az **f** erősűrűség térfogati integrálja adja meg az erőt:

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} dV.$$ (4.45. egyenlet)

A ΔV térfogatelem felülete mentén ható erők a szomszédos anyagrészektől származnak. Pontosabban azon molekuláktól, amelyek a ΔV -t határoló felület közvetlen környezetében vannak. Mivel ezek az ún. molekuláris erők nagyon rövid hatótávolságúak, ezért csak a felület közelében érzékelhetők, és emiatt nagyságuk a felülettel arányos. Ha a ΔV -t határoló felület Δf elemének normális irányú kifelé mutató egységvektorát **n**-nel jelöljük, akkor a Δf felületelemre ható erő:

$$\Delta \mathbf{F}_{\Delta f} = \mathbf{P}_{(\mathbf{n})} \Delta f.$$ (4.46. egyenlet)

$\mathbf{P}_{(\mathbf{n})}$-nél az **n** index most nem **n** irányú komponenst jelöl, hanem azt tünteti fel, hogy az **n** normálisú lapra ható erőről van szó. (A félreértés elkerülése végett használtuk a zárójelet.) A $\mathbf{P}_{(\mathbf{n})}$vektor az **n** normálisú egységnyi felületre ható erő, amelyet feszültségvektornak vagy röviden feszültségnek nevezünk. Ez általában nem merőleges a felületre.

Gondoljunk el valamilyen kiterjedt deformálható test belsejében egy felületet, amely két részre osztja a testet. Az egyik oldal felé mutató normális egységvektort $\mathbf{n}_1$-gyel, a másikat $\mathbf{n}_2$-vel jelöljük. A $\mathbf{P}_{(\mathbf{n}_1)} \Delta f$ erő az elválasztó felület mentén a „2” oldalon elhelyezkedő anyagrészektől (molekuláktól) ered, míg a $\mathbf{P}_{(\mathbf{n}_2)} \Delta f$ másik oldal mentén elhelyezkedőktől. A kölcsönhatás törvénye (Newton 3. axiómája) szerint e két erő ellentétes irányú és egyenlő nagyságú, tehát

$$\mathbf{P}_{(\mathbf{n}_1)} = -\mathbf{P}_{(\mathbf{n}_2)}.$$

Mivel $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$,

$$\mathbf{P}_{(\mathbf{n})} = -\mathbf{P}_{(-\mathbf{n})}.$$ (4.47. egyenlet)

Szavakkal kifejezve: a deformálható test belsejében levő felület **n** normálisú lapjára ható feszültség egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú a lap másik oldalára ható feszültséggel.

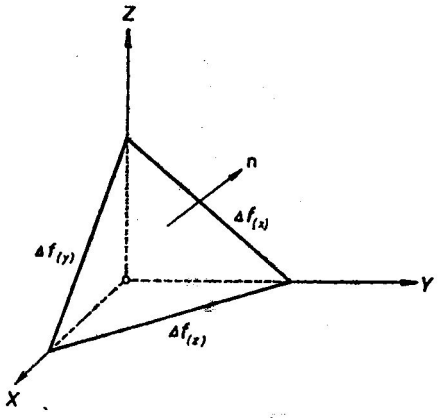
A ΔV térfogatelemet határoló teljes felületre ható erőt a $\mathbf{P}_{(\mathbf{n})}$ feszültség felületi integrálja adja meg:

$$\mathbf{F}_{\text{fel}} = \int_{\text{fel}} \mathbf{P}_{(n)} df. \quad \text{(4.48. egyenlet)}$$

A $\mathbf{P}_{(n)}$ feszültségvektort a helykoordináták véges, differenciálható függvényének tekintjük. Ezenkívül függ még a felület normálisának irányától is. Most vizsgáljuk, hogyan függ $\mathbf{P}_{(n)}$ a test valamelyik pontjába minden lehetséges módon elhelyezhető felületelemek normálisától. Válasszuk a *V* térfogatelemet olyan tetraédernek, amelynek egyik csúcsa a koordináta-rendszerünk kezdőpontja és az ebből kiinduló három él a koordinátatengelyek mentén van. Az origóval szemben levő lap felülete legyen Δf, a kifelé mutató normális egységvektor pedig **n**. A többi három lap normálisai a $-x$, $-y$, $-z$ tengelyek irányába mutatnak. A megfelelő felületelemeket jelöljük $\Delta f_{(x)}$-, $\Delta f_{(y)}$-, $\Delta f_{(z)}$-vel. Feltesszük, hogy a testre térfogati erők nem hatnak, és egyensúlyban van. A felületi erők eredőjének ezért zérusnak kell lennie:

$$\int_{\text{fel}} \mathbf{P}_{(n)} df = \mathbf{0}.$$

41. ábra -



Osszuk el ezt az integrált a ΔV térfogattal, és vegyük a határértékét, amidőn $\Delta V \to 0$:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\text{fel}} \mathbf{P}_{(n)} df = \mathbf{0}. \quad \text{(4.49. egyenlet)}$$

A tetraéder felületére vett integrál a négy lapra vett integrál összegeként írható. A koordinátasíkokban fekvő $\Delta f_{(x)}, \Delta f_{(y)}, \Delta f_{(z)}$ lapok a Δf felület vetületei a megfelelő koordinátasíkokra:

$$\Delta f_{(x)} = \Delta f n_x,$$
$$\Delta f_{(y)} = \Delta f n_y,$$
$$\Delta f_{(z)} = \Delta f n_z. \quad \text{(4.50. egyenlet)}$$

Ezt figyelembe véve,

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta f} \mathbf{P}_{(n)} df = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta V} \left[\mathbf{P}_{(n)} + \mathbf{P}_{(-x)} n_x + \mathbf{P}_{(-y)} n_y + \mathbf{P}_{(-z)} n_z \right] = \mathbf{0}.$$

A $\Delta f / \Delta V$ tényező határértéke végtelen, az egész kifejezés csak úgy lehet zérus, hogy a zárójelben álló összeg zérus:

$$\mathbf{P}_{(n)} + \mathbf{P}_{(-x)} n_x + \mathbf{P}_{(-y)} n_y + \mathbf{P}_{(-z)} n_z = \mathbf{0}. \quad \text{(4.51. egyenlet)}$$

A kölcsönhatás törvényéből következő (4.47) alapján

$$\mathbf{P}_{(-x)} = -\mathbf{P}_{(x)}, \qquad \mathbf{P}_{(-y)} = -\mathbf{P}_{(y)}, \qquad \mathbf{P}_{(-z)} = -\mathbf{P}_{(z)}.$$

Ezt (4.51)-be beírva, adódik, hogy

$$\mathbf{P}_{(n)} = \mathbf{P}_{(x)} n_x + \mathbf{P}_{(y)} n_y + \mathbf{P}_{(z)} n_z = 0. \quad \text{(4.52. egyenlet)}$$

Vegyük ennek komponenseit, amelyek jelölésére az *x*, *y, z* helyett az 1, 2, 3 értékeket használjuk:

$$P_{(n)k} = P_{(i)k} n_i \qquad (i = 1, 2, 3). \quad \text{(4.53. egyenlet)}$$

Alkalmazva a

$$\sigma_{ij} = P_{(i)k}. \quad \text{(4.54. egyenlet)}$$

jelölést,

$P_{(n)i} = \sigma_{ij} n_j \qquad (i = 1, 2, 3).$ (4.55. egyenlet)

A (4.52) összefüggés szerint a $\mathbf{P}_{(n)}$ feszültségvektor az n egységvektornak lineáris vektorfüggvénye, ezért a kilenc mennyiség egy kétindexes tenzort alkot. Ezt a tenzort feszültségtenzornak nevezzük. A feszültségtenzor elemeinek fizikai jelentése (4.54)-ből olvasható ki. Ez tehát az *x* normálisú felületre ható feszültség *x*-komponense. S í. t. A σ_{ij} tenzorelem második indexe tehát azt fejezi ki, hogy melyik koordinátasíkra ható feszültségről van szó, az első pedig e feszültség megfelelő komponensére utal.

Az azonos indexű — tehát a főátlóban álló — elemek a felület normálisa irányába mutató feszültségek, a vegyes indexűek pedig a felület érintője mentén hatnak. Ezért az azonos indexű $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$ elemeket húzó- vagy nyomófeszültségeknek, a $\sigma_{11}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ vegyes indexűeket nyíró- vagy csúsztató feszültségeknek nevezzük.

A (4.52), illetve a (4.55) egyenletek jelentése a következő: ha ismerjük a feszültségtenzort a tér valamely pontjában, akkor ezekből (4.55) alapján a ponton átmenő bármely felületelemre ható $\mathbf{P}_{(n)}$ feszültség kiszámítható. A feszültségtenzornak ezért van fontos szerepe a deformálható testek mechanikájában, mert ennek ismeretében a felületi erők meghatározhatók.

20. A deformálható testek mozgásegyenletei

Az előző fejezetben is hangsúlyoztuk, hogy a mechanika dinamikai szemléleten alapuló tárgyalásában az az alapfeladat, hogy a rendszer mechanikai állapotának időbeli változását meghatározó mozgástörvényt megismerjük. Mind az anyagi pont, mind a pontrendszerek mozgásának tanulmányozásánál láttuk már, hogy ezekből a mozgásegyenletekből a kölcsönhatások és a kezdeti állapot ismeretében a rendszer állapotának időbeli kifejlődése és minden mechanikai tulajdonsága meghatározható. Láttuk továbbá, hogy bizonyos feltételek mellett a megmaradási tételek is a dinamikai alaptörvény következményeiként adódnak. Ezért a deformálható testek mechanikáját is a mozgásegyenletekre alapozzuk. Ezekhez a következő gondolatmenettel jutunk.

Az anyagi ponthoz hasonlóan, itt is a hely és a sebesség jellemzi a rendszer mechanikai állapotát. A test egyes pontjai helyének megadásával egyenértékű az elmozdulás megadása, mert egy későbbi helyzet az előbbiből a pont elmozdulásával adódik. Az általunk követett fenomenológiai leírásban az anyag folytonos modelljét használjuk, és ennek megfelelően mind az elmozdulást, mind a sebességet egy-egy vektortérrel (az elmozdulástérrel, illetve a sebességtérrel) írjuk le. A deformálható test mechanikai állapotát tehát e két vektortér jellemzi. Ez azt jelenti, hogy a test állapotát a *t* időpontban akkor ismerjük, ha tudjuk az elmozdulás és a sebesség értékét a tér minden pontjában a *t* időben. A test állapotának a változása tehát azt jelenti, hogy e két vektortér változik a térben és az időben. A mozgástörvénytől azt várjuk, hogy e vektorterek változásának a dinamikáját írja le. A deformálható testek mechanikája ebben a folytonos modellben tehát térelmélet.

Osszuk fel a test tetszőleges *V* térfogatú részét gondolatban kis ΔV_i térfogatelemekre, amelyeknek a tömege $\Delta m_i = \varrho \, \Delta V_i$. Ennek a gyorsulása $\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$. Newton 2. axiómája szerint a tömeg és a gyorsulás szorzata a ΔV_i*-ben* levő anyagra ható erők eredőjével egyenlő. A deformálható testeknél ez a térfogati és felületi erők összege. Tehát

$$\varrho_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \Delta V_i = \mathbf{f}_i \Delta V_i + \int_{\Delta V_i \text{ rsz}} \mathbf{P}_{(n)} df.$$

Összegezzünk minden ΔV_i térfogatelemre, majd a felosztást minden határon túl finomítsuk. Így az összeg határértékeként a *V* térfogatra vett integrált kapjuk:

$$\int_V \varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_V \mathbf{f} dV + \int_{V_{\text{rsz}}} \mathbf{P}_{(n)} df. \quad \text{(4.56. egyenlet)}$$

A felületi integrál összegezésénél a *V* belsejében vett felületelemek mentén ható feszültségek (4.47) alapján kiejtik egymást, és ezért a *V*-t határoló felületre vett integrál adódik.

A későbbiekhez szükséges átalakítás kedvéért vegyük a (4.56) egyenletnek *i*-edik komponensét:

$$\int_V \varrho \frac{dv_i}{dt} dV = \int_V \mathbf{f}_i dV + \int_{V_{\text{rsz}}} P_{(n)} df. \quad \text{(4.57. egyenlet)}$$

Foglalkozzunk először a felületi integrállal, amely (4.55) alapján a következő alakba írható:

$$\int_{V_{\text{rsz}}} P_{(n)} df = \int_{V_{\text{rsz}}} \sigma_{ij} n_i df. \quad \text{(4.58. egyenlet)}$$

Legyen az *i* egyelőre rögzített, és a σ_{i1}, σ_{i2}, σ_{i3} mennyiségeket tekintsük a $\boldsymbol{\sigma}_i$ segédvektor komponenseinek a $\boldsymbol{\sigma}_i$(σ_{i1}, σ_{i2}, σ_{i3}). Így a (4.58) jobb oldala a $\boldsymbol{\sigma}_i$ vektor normális komponensének felületi integrálja lesz:

$$\int_{V_{\text{rsz}}} P_{(n)} df = \int_{V_{\text{rsz}}} (\boldsymbol{\sigma}_i)_n \, df. \quad \text{(4.59. egyenlet)}$$

Ez a Gauss-tétel szerint a div $\boldsymbol{\sigma}_i$ térfogati integráljával egyenlő:

$$\int_{V_{\text{rsz}}} P_{(n)} df = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_i \, dV. \quad \text{(4.60. egyenlet)}$$

A (4.57)-be behelyettesítve,

$$\int_V \left(\varrho \frac{dv_i}{dt} - f_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) dV = 0.$$ (4.61. egyenlet)

Mivel a *V* térfogat tetszőlegesen választható és az integrálnak mindig el kell tűnnie, ez csak úgy Tehetséges, ha a zárójelben álló mennyiség a tér minden pontjában zérus:

$$\varrho \frac{dv_i}{dt} - f_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

vagy,

$$\varrho \frac{dv_i}{dt} = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}.$$ (4.62. egyenlet)

A levezetés természetesen igaz az *i* index bármely értékére, ezért (4.62) a

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} + \mathrm{Div}\ \hat{\sigma}.$$ (4.63. egyenlet)

vektoregyenlet három komponensét jelenti. Itt a σ_{ik} tenzorra a $\hat{\sigma}$ jelölést használtuk, a Div pedig a tenzor divergenciáját jelenti. A Függelék 5. pontja szerint egy kétindexes tenzor divergenciája vektor, amelynek komponensei a $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ $(i = 1, 2, 3)$ mennyiségek.

A (4.62) differenciálegyenletek a deformálható test mozgásegyenletei. Ezek az egyenletek a bennük szereplő fizikai mennyiségeknek a test egyes pontjaiban felvett értékei között teremtenek kapcsolatot. A (4.62), (4.63) mozgásegyenletekben a felületi erők járuléka formálisan úgy jelenik meg, mintha az is térfogati erő sűrűsége lenne, hiszen a σ_{ik} feszültségtenzor divergenciájának a tér egyes pontjaiban felvett értékei fordulnak elő a jobb oldalon. Ez azonban csak formálisan van így, mert ennek csak azokon a helyeken van zérustól különböző járuléka, ahol a feszültségtenzor változik a hellyel.

Mivel a sebesség az elmozdulás idő szerinti deriváltja, a bal oldalra a $\frac{dv_i}{dt}$ helyére $\frac{d^2 s_i}{dt^2}$ írható:

$$\varrho \frac{d^2 s_i}{dt^2} = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3).$$ (4.64. egyenlet)

Az egyenletek ebben az alakban még túl általánosak ahhoz, hogy belőlük az élmozdulásvektort a térkoordináták és az idő függvényében meghatározzuk. A feszültségek — mint korábban már említettük — általában a deformációk hatására jönnek létre, ezért kapcsolat van a σ_{ik} és az ε_{ik} tenzor között. Ezt a test anyagi minőségétől és a halmazállapotától függő kapcsolatot fejezik ki az ún. anyagi egyenletek. Ezeket a különböző halmazállapotú deformálható testekre vonatkozóan a későbbi fejezetekben konkrétan meghatározzuk. Itt elég arra utalni, hogy σ_{ik} valamilyen függvénye az ε_{ik}-nak, utóbbi pedig (4.7) szerint az elmozdulásvektor komponenseinek a helykoordináták szerinti deriváltjait tartalmazza. Így a mozgásegyenletek jobb oldalán az elmozdulásvektor helykoordináták szerinti parciális deriváltjai is megjelennek. A deformálható testek mozgásegyenletei tehát parciális differenciál-egyenletek. A konkrét fizikai feladatok egyértelmű megoldásához ezeket az egyenle-teket ki kell egészítenünk ún. kezdeti és határfeltételekkel. Kezdeti feltételként megadjuk az elmozdulásvektort és a sebességvektort a $t=t_0$ kezdeti időpontban a test minden pontjában. Így tehát kezdeti feltételként a kezdeti időponthoz tartozó két vektorteret kell megadnunk. Határfeltételként vagy az elmozdulást, vagy a feszültségeket adjuk meg a test felületén t minden értékére. Előfordulhat az is, hogy a felület egy részén a feszültségek, más részén az elmozdulások vannak megadva.

A deformálható testek (4.62), ill. (4.64) mozgásegyenletei tehát az anyagi egyenletekkel, valamint a kezdeti és határfeltételekkel együtt határozzák meg a test mozgását.

21. Megmaradási tételek

A test mechanikai állapotának változásával általában együtt változnak a rendszerre jellemző dinamikai mennyiségek (impulzus, impulzusnyomaték, energia) is.

Az anyagi pontra és pontrendszerre az első, illetve a második fejezetben megmutattuk, hogy e mennyiségek időbeli változását meghatározó törvények a mozgás-egyenletek következményeként adódnak. E törvényekből leolvasható speciális feltételek mellet (pl. zárt rendszer esetén) e mennyiségek állandóak maradnak a mozgás folyamán. Az ilyen mennyiségeket mozgásállandóknak, a megfelelő törvényeket pedig megmaradási tételeknek nevezzük. Ezeknek azért van különösen fontos szerepük a fizikában, mert belőlük a mozgásegyenletek megoldása nélkül is értékes felvilágosítás nyerhető a rendszerről. A következőkben ezeket a tételeket vezetjük le a deformálható testekre vonatkozóan.

21.1 A tömegmegmaradás tétele. A kontinuitási egyenlet

Gondoljuk el a deformálható testnek egy rögzített V térfogatát, és határozzuk meg a benne levő tömeg időegységre vonatkoztatott megváltozását. Utóbbit a (4.2) integrál megfelelő előjellel vett idő szerinti differenciálhányadosa fejezi ki. Ha pl. tömegcsökkenésről van szó, akkor ez a derivált negatív előjellel veendő.

Tehát

$$-\frac{dm}{dt}=\frac{d}{dt}\int_V \varrho dV.$$

Mivel a térfogat feltevésünk szerint rögzített, ezért a jobb oldal az integrandusz idő szerinti parciális deriváltjának az integráljával egyezik meg:

$$-\frac{dm}{dt} = -\int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} dV. \quad \text{(4.65. egyenlet)}$$

Nem ismerünk olyan jelenséget, amely ellentmondana annak a tapasztalatnak, hogy a tömeg megmaradó mennyiség. A *V* térfogatban a tömeg tehát csak azért változhat meg, mert a felületen be-, illetve kiáramlik, vagy a tartomány belsejében a tömeg áramlásának forrásai vagy nyelői vannak. Az utóbbi lehetőségtől egyelőre tekintsünk el.

A *V* térfogatot határoló felület *df* elemén időegység alatt **v** sebességgel kiáramló tömeg egyenlő a *v* élhosszúságú, *df* alapú hasáb $v_n df$ térfogatának és a ϱ tömegsűrűségnek a szorzatával: $v_n df$-fel. Az egész felületen időegység alatt kiáramló tömeg

$$\int_{\text{fel}} \varrho v_n df.$$

A $\varrho \mathbf{v}$ vektor az egységnyi felületen időegység alatt merőlegesen átáramló tömeg amelyet *tömegáram-sűrűségnek* nevezünk.

Ez a felületi integrál a tömegmegmaradás miatt egyenlő az időegységre eső (4.65) csökkenéssel. Tehát

$$-\int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} dV = \int_{\text{fel}} \varrho v_n df.$$

A felületi integrál a Gauss-tétel szerint a div ($\varrho \mathbf{v}$) térfogati integráljával egyenlő. Ennélfogva

$$\int_V \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathbf{v} \right) dV = 0. \quad \text{(4.66. egyenlet)}$$

Ez az egyenlőség a *V* térfogat megválasztásától függetlenül érvényes, ami pedig csak úgy lehet, ha az integrandusz a tartomány minden pontjában zérus:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathbf{v} = 0. \quad \text{(4.67. egyenlet)}$$

Ez az ún. *kontinuitási egyenlet* fejezi ki a tömegmegmaradás törvényét differenciális alakban.

Ha a *V* térfogatban források is vannak, amelyek időegység alatt összesen *Q* tömeget bocsátanak ki, akkor a (4.65) egyenlet jobb oldalából még a *Q* levonódik, mert a bal oldal az időegységre eső tömegcsökkenést jelenti. A források is folytonos eloszlásúnak képzelhetők, és jellemzésükre a *q* forrássűrűség használható. A *q* sűrűség (4.1)-hez hasonló definíciójából következik, hogy

$$Q = \int q \, dV.$$

Ezt (4.65)-be beírva, a források esetére is érvényes

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathbf{v} = q$$ (4.68. egyenlet)

megmaradási tételt kapjuk. A *q* forrássűrűség általában a helynek és az időnek megadott függvénye. A források esetén *q* pozitív, a nyelőknél pedig negatív.

A $\partial \varrho / \partial t$ a parciális derivált definíciójánál fogva a sűrűség időegységre eső megváltozását jelenti a tér egy rögzített helyén. Ha viszont egy mozgó *dV* térfogatú anyagrész sűrűségének az időbeli változására vagyunk kíváncsiak, akkor ezt a ϱ-nak az idő szerinti teljes deriváltja adja meg. Erre a (4.41)-nél követett gondolatmenettel adódik, hogy

$$\frac{d \varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \varrho.$$ (4.69. egyenlet)

Ezt, valamint a

$$\operatorname{div} (\varrho \mathbf{v}) = \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \varrho$$ (4.70. egyenlet)

vektoranalitikai összefüggést figyelembe véve, a (4.67) kontinuitási egyenlet a következő alakba írható:

$$\frac{d \varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$ (4.71. egyenlet)

Ennek az egyenletnek az összenyomhatatlan folyadékok elméletében van jelentősége, ugyanis utóbbit a div **v**=0 feltétellel definiáljuk. A (4.71)-ből következik, hogy ezzel a feltétellel egyenértékű a

$$\frac{d \varrho}{dt} = 0.$$ (4.72. egyenlet)

egyenlet teljesülése. Az összenyomhatatlan áramló folyadékrészek sűrűsége tehát időben állandó, de (4.69) alapján ez azt jelenti, hogy a sűrűség a

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \varrho = 0$$ (4.73. egyenlet)

összefüggés szerint egy rögzített helyen változik az időben, másrészt változik a hellyel is úgy, hogy a (4.73) közben teljesül.

21.2 Az impulzustétel

A v sebességgel mozgó Δm tömeg impulzusa:

$$\Delta \mathbf{p} = \Delta m \cdot \mathbf{v} = \varrho \mathbf{v}\, \Delta V.$$

A test véges *V* térfogatrészének impulzusát ebből a ΔV térfogatelemekre történő összegezéssel kapjuk. Áttérve a folytonos tömegeloszlás határesetére az összeg a térfogatra vett integrálba megy át. A F-ben levő anyag impulzusa tehát

$$\mathbf{p} = \int_V \varrho \mathbf{v}\, \mathrm{d}V. \qquad \text{(4.74. egyenlet)}$$

A folytonos anyageloszlás modelljében ez a képlet is úgy értelmezhető, hogy a *V* térrészben levő anyag impulzusa folytonosan tölti ki a térfogatot $\varrho \mathbf{v}$ impulzussűrűséggel.

A könnyebb megértés kedvéért gondoljunk most **v=v**(**r**, *t)* sebességgel áramló folyadékra, és számítsuk ki a rögzített *V* térfogatrészen átáramló folyadék impulzusának időegységre eső megváltozását:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \varrho v_i\, \mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i)\, \mathrm{d}V \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \qquad \text{(4.75. egyenlet)}$$

Az integranduszt a (4.67) kontinuitási egyenlet és a (4.62) mozgásegyenlet segítségével átalakítjuk:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i) = \frac{\partial \varrho}{\partial t} v_i + \varrho \frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho v_j) + \varrho \frac{dv_i}{dt} - \varrho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho v_i v_j) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i.$$

A (4.75)-be behelyettesítve,

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho v_i v_j - \sigma_{ij}) - f_i \right] dV = 0.$$

Ez az egyenlet a *V* térfogat választásától függetlenül teljesül, ezért az integrandusznak a tér minden pontjában zérusnak kell lennie.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho v_i v_j - \sigma_{ij}) - f_i = 0,$$

vagy

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho v_i v_j - \sigma_{ij}) = f_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

(4.76. egyenlet)

Ez teljesen olyan alakú, mint a kontinuitási egyenlet források esetére általánosított (4.68) alakja. A fizikai jelentése ennek alapján könnyen érthetővé válik. A bal oldal második tagja a

$$p_{ij} = \varrho v_i v_j - \sigma_{ij}$$ (4.77. egyenlet)

tenzor divergenciája. Ha ezt a tenzort $\hat{p}$-vel jelöljük, akkor a (4.76) három egyenlet egy vektoregyenletbe foglalható össze:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho \mathbf{v}) + \operatorname{Div} \hat{p} = \mathbf{f}.$$

(4.78. egyenlet)

A (4.68)-cal történő összehasonlításból nyilvánvaló, hogy ez az egyenlet az impulzustételt fejezi ki differenciális alakban. $\hat{p}$ az impulzusáram sűrűségét jelenti. Az **f** erősűrűség az impulzusáram forrásaként jelenik meg. Az egyenlet fizikai tartalma szembetűnőbbé válik, ha integrális alakba írjuk. Ezért integráljuk mindkét oldalát a rögzített *V* térfogatra:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\varrho \mathbf{v})\, dV = -\int_V \operatorname{Div} \hat{p}\ dV + \int_V \mathbf{f}\ dV.$$

(4.79. egyenlet)

A bal oldal a *V* térfogatban levő anyag impulzusának az időegységre eső növekedése. A $\hat{p}$ tenzor divergenciájának térfogati integrálját Gauss-tétellel felületi integrállá alakítva,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\int_{F_m} \hat{\mathbf{p}}_n\, df + \mathbf{F}.$$

(4.80. egyenlet)

A tenzor divergenciájára vonatkozó Gauss-tételt 1. a Függelék 9. pontjában, ahol a $\hat{\mathbf{p}}_n$ vektor jelentését is megmagyarázzuk. A *V* tartomány impulzusa tehát két okból kifolyólag nő meg. A jobb oldal első tagja szerint impulzus áramlik be a *V-t* határoló felületen, másrészt külső erő hat rá, amely megnöveli annak impulzusát. Ha a *V* határfelületén a $\hat{\mathbf{p}}_n$ eltűnik, vagy ugyanannyi impulzus áramlik be, mint ki — tehát a felületi integrál zérus —, továbbá nem hat erő a testre (**F**=0), akkor a **p** impulzus állandó. Ha a test zárt rendszert alkot, akkor ezek a feltételek teljesülnek, és így annak impulzusa állandó marad.

A p_{ik} tenzor első tagja az ún. konvektív impulzus-áramsűrűség, amely a **v** sebességgel áramló folyadékrészek mozgásából származik; a második pedig az impulzus-áramsűrűségnek azt a részét adja meg, amely a feszültségek miatt lép fel. Itt a feszültségtenzornak egy másik jelentése mutatkozik

meg, annak −1-szerese impulzus-áramsűrűségként jelenik meg. Ennek divergenciája a (4.62) mozgásegyenletben is előfordul, szemben a konvektív résszel, amely abban nem szerepel. Ennek az az oka, hogy a mozgásegyenletben a sebességnek az idő szerinti teljes deriváltja van, amely a mozgó anyagrész gyorsulását jelenti, míg a (4.76)-ban az impulzusváltozást egy rögzített pontban tekintettük.

A szemléltetés végett gondoltunk a fentiekben áramló folyadékra, de a (4.76), (4.78) egyenletek bármely deformálható testre érvényesek a folytonos anyageloszlás modelljében.

21.3 Az impulzusnyomaték-tétel

A $\Delta\mathbf{p}$ impulzusú $\Delta m = \varrho\Delta V$ tömeg origóra vonatkoztatott impulzusnyomatéka,

$$\Delta\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\Delta\mathbf{p} = \mathbf{r}\times\varrho\mathbf{v}\,\Delta V. \quad \text{(4.81. egyenlet)}$$

A deformálható test véges *V* térfogatrészének impulzusnyomatéka,

$$\mathbf{L} = \int_V (\mathbf{r}\times\varrho\mathbf{v})\,\Delta V. \quad \text{(4.82. egyenlet)}$$

A folytonos anyageloszlású modellben a test impulzusnyomatéka is folytonosan oszlik el a *V* tartományra $\mathbf{r}\times\varrho\mathbf{v}$ sűrűséggel.

Határozzuk meg, mennyivel változik meg a térben rögzített *V* térfogatban tárolt impulzusnyomaték az időegység alatt:

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt}\int_V (\mathbf{r}\times\varrho\mathbf{v})\,dV = \int_V\left[\dot{\mathbf{r}}\times\varrho\mathbf{v} + \mathbf{r}\times\frac{\partial(\varrho\mathbf{v})}{\partial t}\right]dV. \quad \text{(4.83. egyenlet)}$$

Az integrandusz első tagja zérus, mert a vektoriális szorzat két tényezője párhuzamos. Tehát

$$\dot{\mathbf{L}} = \int_V \mathbf{r}\times\frac{\partial(\varrho\mathbf{v})}{\partial t}\,dV. \quad \text{(4.84. egyenlet)}$$

Vegyük ennek *i*-edik komponensét és a vektoriális szorzat jelölésére használjuk a (4.13) képletet.

$$\dot{L}_i = \int_V e_{ikl}\,x_k\,\frac{\partial(\varrho v_l)}{\partial t}\,dV \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \quad \text{(4.85. egyenlet)}$$

A jobb oldal integranduszát a (4.67) kontinuitási egyenlet és a (4.62) mozgásegyenlet felhasználásával átalakítjuk:

$$e_{ikl}x_k\frac{\partial(\varrho v_l)}{\partial t}=e_{ikl}x_k\left(\frac{\partial\varrho}{\partial t}v_l+\varrho\frac{\partial v_l}{\partial t}\right)=e_{ikl}x_kf_l-e_{ikl}x_k\frac{\partial}{\partial x_r}(\varrho v_lv_r-\sigma_{lr})=$$

$$=e_{ikl}x_kf_l-\frac{\partial}{\partial x_r}\left[e_{ikl}x_k(\varrho v_lv_r-\sigma_{lr})\right]+e_{ikl}(\varrho v_lv_r-\sigma_{lr})\frac{\partial x_k}{\partial x_r}.$$

Mivel $\frac{\partial x_k}{\partial x_r}=\delta_{kr}$ az utolsó tag

$$e_{ikl}x_k(\varrho v_lv_r-\sigma_{lr})\frac{\partial x_k}{\partial x_r}=e_{ikl}(\varrho v_lv_r-\sigma_{lr})\delta_{kr}=e_{ikl}(\varrho v_lv_k-\sigma_{lk}).$$

A $\varrho e_{ikl}v_lv_k$ kettős összeg azonosan zérus, mert az e_{ikl} antiszimmetrikus, a v_lv_k pedig szimmetrikus. Egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus tenzornak a szorzatösszege pedig azonosan zérus. Ezt (4.85)-be helyettesítve, átrendezés után adódik, hogy

$$\int_V\left\{\frac{\partial}{\partial t}(e_{ikl}x_k\varrho v_l)+\frac{\partial}{\partial x_r}\left[e_{ikl}x_k(\varrho v_lv_r-\sigma_{lr})\right]-e_{ikl}x_kf_l+e_{ikl}\sigma_{lk}\right\}dV=0\qquad(i=1,\ 2,\ 3).$$

(4.86. egyenlet)

Ez az integrál a *V* térfogat megválasztásától függetlenül zérus, ezért az integrandusznak a tér minden pontjában el kell tűnnie:

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_{ikl}x_k\varrho v_l)+\frac{\partial}{\partial x_r}\left[e_{ikl}x_k(\varrho v_lv_r-\sigma_{lr})\right]-e_{ikl}x_kf_l+e_{ikl}\sigma_{lk}=0,$$

vagy

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_{ikl}x_k\varrho v_l)+\frac{\partial}{\partial x_r}\left[e_{ikl}x_k(\varrho v_lv_r-\sigma_{lr})\right]=e_{ikl}x_kf_l+e_{ikl}\sigma_{lk}\qquad(i=1,\ 2,\ 3).$$

(4.87. egyenlet)

Ez az egyenlet ismét (4.68) alakú, és mivel az $e_{ikl}x_k\varrho v_l$ az $\mathbf{r}\times\varrho\mathbf{v}$ impulzusnyomaték-sűrűségnek *i*-edik komponense, a divergencia mögötti szögletes zárójelben álló mennyiség az *i*-edik impulzusnyomaték-összetevő áramsűrűségének *r*-edik komponense. A jobb oldalon az impulzusnyomaték áramának a forrása szerepel. Az első tag az $\mathbf{r}\times\mathbf{f}$ eró'nyomaték-sűrűség.

A (4.87) egyenlet tehát az impulzusnyomaték-tételt fejezi ki differenciális alakban. Ha külső erő nem hat (**f=0**), az impulzusnyomatéknak meg kell maradnia. Ez azon-ban csak akkor teljesül, ha az $e_{ikl}\sigma_{lk}$ azonosan zérus:

$e_{ikl}\sigma_{lk}=0.$ (4.88. egyenlet)

Ez a feltétel a σ_{ik} feszültségtenzorra ró ki megszorítást. A (4.88) csak akkor teljesül, ha σ_{ik} szimmetrikus tenzor, mert e_{ikl} antiszimmetrikus, és mint könnyű belátni, egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus tenzornak a szorzatösszege azonosan zérus. Az impulzusnyomaték megmaradásának a tétele tehát megköveteli a σ_{ik} feszültségtenzor szimmetriáját. Ezért σ_{ik}-t szimmetrikus tenzornak tekintjük.

Ezek után összefoglaljuk a differenciális impulzusnyomaték-tételt vektoriális alakban. Az impulzusnyomaték áramsűrűségének

$$\check{L}_{ik} = e_{ijl} x_j \left(\varrho v_l v_k - \sigma_{lk}\right). \quad \text{(4.89. egyenlet)}$$

tenzorát $\hat{L}$ -lel jelölve, (4.87) a következő vektoregyenletbe írható:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r} \times \varrho \mathbf{v}) + \mathrm{Div}\ \hat{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}. \quad \text{(4.90. egyenlet)}$$

Integrális alakban

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\int_{\mathcal{A}} \hat{\mathbf{L}}_n\, df + \mathbf{M}, \quad \text{(4.91. egyenlet)}$$

ahol

$$\mathbf{M} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f}\, dV \quad \text{(4.92. egyenlet)}$$

a külső erők nyomatéka.

A deformálható test *V* térfogatrészének impulzusnyomatéka is két okból változhat meg: a külső erők nyomatékot fejtenek ki rá, és ennek impulzusnyomatéknövelő hatása van, másrészt a *V-t* határoló felületen impulzusnyomaték áramlik be vagy ki a tartományba.

21.4 Az energiatétel

A **v** sebességgel mozgó $\Delta m = \varrho \Delta V$ tömeg mozgási energiája,

$$\Delta E_k = \int \frac{1}{2} \varrho v^2 \Delta V. \quad \text{(4.93. egyenlet)}$$

A test *V* térfogatrészének mozgási energiáját az egyes térfogatelemekre vett-összeg határértékeként adódó

$$E_k = \int \frac{1}{2} \varrho v^2 dV$$ (4.94. egyenlet)

integrál fejezi ki. Az előzőekhez hasonlóan ez is úgy értendő, hogy a test mozgási energiája folytonosan oszlik el a *V* tartományra. Az eloszlást az

$$u = \frac{1}{2} \varrho v^2$$ (4.95. egyenlet)

energiasűrűség jellemzi.

Számítsuk ki a térben rögzített *V* térfogatrész energiájának időegységre eső növekedését:

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \varrho v^2 dV = \int_V \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varrho v^2 \right) dV.$$ (4.96. egyenlet)

Az integrandusz a (4.62) mozgásegyenlet és a (4.67) kontinuitási egyenlet felhasználásával átalakítható a következőképpen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varrho v^2 \right) = \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{1}{2} v^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\varrho v_j) + \varrho v_i \frac{dv_i}{dt} - \varrho v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \varrho v^2 v_j \right) + v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + v_i f_i =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \varrho v^2 v_j - \sigma_{ij} v_i \right) - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i f_i.$$

Rendezve

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varrho v^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \varrho v^2 v_j - \sigma_{ij} v_i \right) = -\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i f_i.$$ (4.97. egyenlet)

Ez az egyenlet fejezi ki az energiatételt differenciális alakban. Az egyes tagok jelentése a következő. A bal oldal első tagja a mozgási energia sűrűségének az időegységre eső növekedése a tér egy pontjában. A divergencia mögötti zárójel az energiaáram-sűrűség, amely két részből áll. Az $\frac{1}{2} \varrho v^2 v_j = u v_j$ konvektív rész az áramló anyag által szállított mozgási energia sűrűségét tartalmazza, a $-\sigma_{ij} v_i$ pedig a feszültségek következtében fellépő ún. deformációs energia áramsűrűsége. A jobb oldalon az energiaáram forrása szerepel. A $v_i f_i$ a külső erők teljesítménysűrűsége, a $-\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i f_i$ pedig a feszültségekkel szemben végzett deformációs teljesítménysűrűség, amely izotermikus vagy adiabatikus rugalmas alakváltozás esetén a rugalmas potenciális energiasűrűség időegységre eső csökkenése.

Az utóbbi belátásához gondoljuk meg, mi történik a deformálható test egy kis tartományával, amikor azt külső erőhatással deformáljuk. Most célszerű szilárd test rugalmas alakváltozására gondolni. Az erőhatásra a test elemei elmozdulnak, ezek feszültségeket keltenek az anyagban. Az elmozdulás során az erők munkát végeznek, melynek egy része a test részeinek mozgásienergia-növekedését fedezi, másik része pedig a deformációra fordított ún. deformációs munka. Feltételezzük, hogy a test egyes pontjai a deformáció alatt ***d*s(r)** szakasszal elmozdulnak. Kiszámítjuk azt az elemi munkát, amelyet eközben a ható erők végeznek a test *V* térfogatú részén:

$$\delta A = \int_V f_i ds_i dV + \int_{V_{fel}} P_{(n)i} ds_i df = \int_V f_i ds_i dV + \int_{V_{fel}} \sigma_{ij} ds_i n_j df. \quad \text{(4.98. egyenlet)}$$

A felületi integrál Gauss-tétellel térfogati integrállá alakítható:

$$\delta A = \int_V \left[f_i ds_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij} ds_i\right) \right] dV. \quad \text{(4.99. egyenlet)}$$

Az integrandusz a térfogategységen végzett elemi munka, amelyet $\delta\alpha$ -val jelölve,

$$\delta\alpha = f_i ds_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij} ds_i\right). \quad \text{(4.100. egyenlet)}$$

A divergencia műveletét elvégezve,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij} ds_i\right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} ds_i + \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} ds_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} ds_i + \sigma_{ij} d\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} ds_i + \sigma_{ij} ds_{ij}, \quad \text{(4.101. egyenlet)}$$

ahol s_{ij} a (4.4)-ben értelmezett elmozdulástenzor, amely (4.6) szerint az ε_{ik} szimmetrikus deformációtenzornak és az α_{ik} antiszimmetrikus tenzornak az összege. Az α_{ij} antiszimmetrikus részt a szimmetrikus σ_{ij} -vel szorozva, azonosan zérust kapunk, ezért (4.101)-hez csak az ε_{ik} ad járulékot. Tehát

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij} ds_i\right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} ds_i + \sigma_{ij} d\,\varepsilon_{ij}. \quad \text{(4.102. egyenlet)}$$

Ezt a (4.100)-ba behelyettesítve,

$$\delta\alpha = \left(f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) ds_i + \sigma_{ij} d\,\varepsilon_{ij}. \quad \text{(4.103. egyenlet)}$$

A zárójelben álló összeg a (4.62) mozgásegyenlet jobb oldala, ezért helyére a $\varrho \frac{dv_i}{dt}$ írható. Rugalmas szilárd testekben a $\frac{dv_i}{dt}$ gyorsulása a $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ helyi gyorsulással helyettesíthető, mert a konvektív gyorsulás elhanyagolhatóan kicsi (1. a (4.41)-et). Mivel $v_i = \dot{s}_i$.

$$\varrho \frac{dv_i}{dt} ds_i = \varrho \frac{\partial v_i}{\partial t} ds_i = \varrho \ddot{s}_i ds_i = \varrho \ddot{s}_i \dot{s}_i dt = \frac{1}{2} \varrho dv^2.$$

Feltételezzük, hogy a ϱ tömegsűrűség állandó, vagy elhanyagolhatóan kicsit változik a deformáció alatt. Ebben az esetben

$$\varrho \frac{dv_i}{dt} ds_i = d\left(\frac{1}{2} \varrho v^2\right).$$ (4.104. egyenlet)

Ezt a (4.103)-ba beírva,

$$\delta a = d\left(\frac{1}{2} \varrho v^2\right) + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}.$$ (4.105. egyenlet)

A jobb oldal első tagja a mozgási energia sűrűségének a növekedése. A deformáció során végzett munka egy része tehát megnöveli a test mozgási energiáját, a fennmaradó $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ pedig a deformációra fordított ún. deformációs munka. Jelöljük ezt $\delta \Phi$ -vel:

$$\delta \Phi = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}.$$ (4.106. egyenlet)

A következő pontban látni fogjuk, hogy ez csak izotermikus vagy adiabatikus deformációk esetén független a deformáció módjától, tehát ebben a két esetben a $\delta \Phi$ teljes differenciál.

Ilyenkor ez a tag úgy értelmezhető, hogy a deformációs munka a testben ún. rugalmas energiát halmoz fel és a $d\Phi$ ennek a megváltozása. Ekkor a Φ-t rugalmas potenciális energiasűrűségnek vagy röviden *rugalmas potenciálnak* nevezzük.

Mivel a (4.106) a Φ-t csak egy állandó erejéig határozza meg, ezért azt a deformálatlan állapotban zérusnak vehetjük.

Ha Φ teljes differenciál, akkor

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij},$$ (4.107. egyenlet)

amiből következik, hogy

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$ (4.108. egyenlet)

Eszerint a feszültségtenzor elemei a Φ rugalmas potenciál ε_{ij} szerinti parciális deriváltjai.

Visszatérve a (4.105) munkatételhez, a térfogategységen végzett δa elemi munka a mozgási energia sűrűségét és a rugalmas potenciális energiasűrűséget növeli meg:

$$\delta a = d\left(\frac{1}{2}\varrho v^2\right) + d\Phi.$$ (4.109. egyenlet)

Számítsuk ki a Φ potenciál idő szerinti parciális deriváltját:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}.$$

A $\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}$ a (4.38) szerint a $v_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ sebességtenzor V_{ij} szimmetrikus része. Mivel az antiszimmetrikus rész a szimmetrikus σ_{ij}-vel szorozva úgysem ad járulékot, a $\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}$ helyére a sebességtenzor írható. Tehát

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$ (4.110. egyenlet)

A (4.97) energiatétel jobb oldalának első tagja rugalmas szilárd testek esetén tehát valóban a rugalmas potenciális energiasűrűség időegységre eső csökkenése.

Az energiatétel szilárd testek rugalmas deformációjára végül is a következő alakba írható:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \Phi\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 v_j - \sigma_{ij} v_i\right) = v_i f_i.$$ (4.111. egyenlet)

Ha a külső erő f_i sűrűsége nem függ az időtől, akkor ez az egyenlet a $v_i = \dot{s}_i$ figyelembevételével a következőképpen alakul:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \Phi - f_i s_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 v_j - \sigma_{ij} v_i\right) = 0.$$ (4.112. egyenlet)

Gondoljunk el egy olyan zárt felületet, amely belsejében tartalmazza a rugalmas szilárd testet és az energiaáram-sűrűség normális komponense a felület mentén eltűnik. A felületen tehát energia nem áramlik sem ki, sem be. Integráljuk a (4.112) egyenletet e felülettel határolt *V* térfogatra. A divergencia Gauss-tétellel felületi integrállá alakítható, amely azonban a feltételeink szerint zérus. Így adódik, hogy

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \Phi - f_i s_i\right) dV = 0.$$ (4.113. egyenlet)

Ez az egyenlet az energia megmaradását fejezi ki integrális alakban. Ugyanis

$$\int_V \frac{1}{2}\varrho v^2 dV = E_{\mathrm{k}}$$ (4.114. egyenlet)

a test mozgási energiája, az

$$\int_V \left(\Phi - f_i s_i\right) dV = E_{\mathrm{p}}$$ (4.115. egyenlet)

pedig a potenciális energia. A kettő összege a test mechanikai energiája, amely (4.113) szerint állandó:

$$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \text{áll.}$$ (4.116. egyenlet)

A (4.115) potenciális energia két részből tevődik össze: u rugalmas potenciális energiából és az f_i külső erőtérnek megfelelőből. Utóbbit a $-\int_V f_i s_i dV$ integrál adja meg.

Térjünk vissza az energiatétel (4.97) általánosan érvényes alakjához. Gondoljuk meg, mi történik akkor, ha a deformáció során a test kis térfogatelemei egymás mellett súrlódással tolódnak el, mint pl. súrlódó folyadéknál. Ebben az esetben a σ_{ik} feszültségtenzor tartalmaz egy részt, amely a súrlódással kapcsolatos feszültségeket írja le:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)} + \sigma_{ik}'.$$ (4.117. egyenlet)

$\sigma_{ik}^{(0)}$ az eddigi, súrlódástól mentes feszültségtenzor, σ_{ik}' pedig a súrlódással kapcsolatos rész. A VI. fejezetben látni fogjuk, hogy σ_{ik}' súrlódó folyadékoknál a sebességtenzorral fejezhető ki.

A (4.97) előtti gondolatmenettel most a

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{1}{2}\varrho v^2 v_j-\left(\sigma_{ij}^{(0)}+\sigma_{ij}'\right)v_i\right]=-\left(\sigma_{ij}^{(0)}+\sigma_{ij}'\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+v_i f_i \quad \text{(4.118. egyenlet)}$$

energiatételhez jutunk. A feszültségtenzor súrlódásmentes $\sigma_{ij}^{(0)}$ része a (4.108) szerint most is kapcsolatba hozható rugalmas potenciállal, de a σ_{ij}' nem. Így végül a következőképpen alakul a (4.118) egyenlet:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2+\Phi\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{1}{2}\varrho v^2 v_j-\left(\sigma_{ij}^{(0)}+\sigma_{ij}'\right)v_i\right]=-\sigma_{ij}'\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+v_i f_i. \quad \text{(4.119. egyenlet)}$$

A jobb oldali $-\sigma_{ij}'\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ tag az energiaáram nyelőjeként jelenik meg. Ez arról az energiáról ad számot, amely a súrlódás révén hőenergiává alakul. Erről az ún. disszipációs függvényről további ismeretet akkor szerezhetünk, ha tudjuk, hogy a σ_{ij}' súrlódási tenzor hogyan függ a test mozgásállapotától és anyagi minőségétől.

22. A deformálható testek termodinamikája

Tegyük fel, hogy a deformálható testtel a munkavégzés mellett hőenergiát is közlünk. Az erők által végzett munka és a testbe vezetett hőenergia a termodinamika első főtétele szerint megnöveli a test mozgási és belső energiáját. A megfelelő mennyiségeket a test térfogategységére vonatkoztatva, az első főtétel így hangzik:

$$\delta a+\delta q=de_{\text{k}}+du. \quad \text{(4.120. egyenlet)}$$

Itt δa a térfogategységen végzett munka, δq a közölt hőmennyiség, e_{k} és *u* a térfogategységben levő anyag mozgási, illetve belső energiája. A δa munkavégzés és a mozgási energia de_{k} növekedésének a különbsége (4.105) szerint a

$$\delta\Phi=\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \quad \text{(4.121. egyenlet)}$$

deformációs munkával egyenlő. Ezt az első főtétel (4.120) alakjával összevetve, adódik, hogy

$$\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}=du-\delta q. \quad \text{(4.122. egyenlet)}$$

Ebből az egyenletből látszik, hogy $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ általában nem teljes differenciál, mert δq nem az. Ha a deformáció olyan lassú, hogy a rendszer az adott pillanatban fennálló külső feltételeknek megfelelő termodinamikai egyensúlyi állapotokon megy keresztül, akkor a folyamat megfordítható. Ebben az esetben a közölt δq hőmennyiség a *T* hőmérsékletnek és az *s entrópiasűrűség ds* növekedésének a szorzata: $\delta q = T\, ds.$ Ezt (4.122)-be beírva, megfordítható folyamatokra a következő egyenletet kapjuk:

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = du - T\, ds.$$ (4.123. egyenlet)

Ez az egyenlet a deformálható testek termodinamikájának egyik alapegyenlete. Vezessük be a test térfogategységének szabad energiáját az

$$f = u - Ts$$ (4.124. egyenlet)

definíció alapján. Így a (4.123) alapegyenlet a következő alakba írható:

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = df + s\, dT.$$ (4.125. egyenlet)

A termodinamikában gyakran használjuk a termodinamikai potenciált, amelyet most a test térfogategységére vonatkoztatva, a

$$g = u - Ts - \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$ (4.126. egyenlet)

képlettel definiálunk. (Megjegyezzük, hogy ez a $g = u - Ts - pV$ definíció általánosítása.) Ezt a kifejezést (4.125)-be helyettesítve, kapjuk, hogy

$$\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} = -s\, dT - dg.$$ (4.127. egyenlet)

A (4.123), (4.125) és (4.127) egyenletek a deformálható testek termodinamikájának alapegyenletei megfordítható folyamatokra.

A térfogategység *u* belső energiája, *f* szabad energiája és *g* termodinamikai potenciálja állapotfüggvények, ezért a *du, df* és *dg* megváltozások teljes differenciálok. Ezt figyelembe véve, a σ_{ij} feszültségtenzor ezek parciális deriváltjaiként is felírható:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_s = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_T.$$ (4.128. egyenlet)

Hasonlóképpen g-t a σ_{ij} feszültségtenzor elemei szerint differenciálva (4.127)-ből az ε_{ij} deformációtenzor elemeit kapjuk:

$$\varepsilon_{ij} = -\left(\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}\right)_T .$$ (4.129. egyenlet)

A (4.128)-ban és (4.129)-ben a parciális derivált melletti *s,* illetve *T* index azt jelenti, hogy a differenciálásnál ezeket a mennyiségeket állandónak kell tartani.

A (4.122), illetve a (4.125) egyenletet (4.121)-gyel összevetve, látszik, hogy adiabatikus folyamatoknál (δq =0)

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = du,$$ (4.130. egyenlet)

míg az izotermikusaknái *(dT*= 0)

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = df.$$ (4.131. egyenlet)

A deformációs munka ebben a két esetben teljes differenciál, és ezért a Φ is állapotmennyiség és így rugalmas potenciális energiaként értelmezhető. Az egyik esetben megegyezik a belső energia sűrűségével, a másikban a térfogategység szabad energiájával.

5. fejezet - A RUGALMAS SZILÁRD TESTEK MECHANIKÁJA

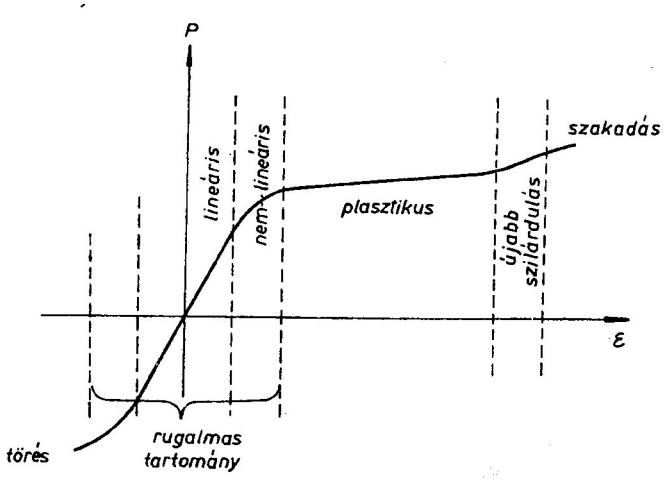
Az előző fejezetben megismertük a deformálható testek mozgására általánosan érvényes alaptörvényeket. Ezek közül legfontosabbak a (4.62) mozgásegyenletek, valamint a tömegmegmaradást kifejező (4.67) kontinuitási egyenlet. A többi megmaradási tétel ezek következményeként adódik. A továbbiak szempontjából gondoljuk meg még egyszer, hogy mi történik egy deformálható testtel, ha arra ismert **F** külső erő hat. Az erőhatás a test kis térfogatelemeit deformálja, aminek következtében abban feszültségek keletkeznek. A mozgásállapot megváltozásához ezek is hozzájárulnak a (4.62) egyenletek szerint. Ez abban nyilvánul meg, hogy a test egyes pontjai helytől és időtől függő sebességgel mozdulnak el. Közben megváltozik a tömegeloszlást jellemző $\varrho(\mathbf{r}, t)$ sűrűség is. A sebesség és a tömegsűrűség változása nem történhet egymástól függetlenül, mert az össztömegnek meg kell maradnia. Ezért járul a (4.62) három mozgásegyenlethez negyedikként a (4.67) kontinuitási egyenlet. Ebben a négy egyenletben ismert az f_i külső erősűrűség, ismeretlen a ϱ, a **v** sebesség három komponense és a σ_{ik} szimmetrikus feszültségtenzor hat független eleme. Az ismeretlen mennyiségek száma tehát tíz. Ezek egyértelmű meghatározásához a négy egyenlet nem elegendő. A hiányzó hat egyenletet az ún. anyagi egyenletek adják, amelyek kapcsolatot teremtenek a σ_{ik} feszültségtenzor és az ε_{ik} deformációtenzor között. Ez a kapcsolat már nem általános érvényű minden deformálható testre, hanem függ az anyagi minőségtől. A deformálható testek mechanikája ezen a ponton oszlik speciális fejezetekre. Nevezetesen a szilárd testek, a folyadékok és gázok mechanikájára. Az itt követett fenomenológiai tárgyalásban – amikor az anyag belső szerkezetéről semmit sem tételezünk fel – az említett három halmaz-állapotot a testek deformációval szembeni viselkedésével jellemezzük. A szilárd testek egészen kis deformációval szemben is igen nagy ellenállást fejtenek ki. Pontosabban fogalmazva, ez azt jelenti, hogy a szilárd testekben kis deformációk igen nagy belső feszültségeket keltenek. A folyadékok viszont csak olyan deformációkkal szemben fejtenek ki nagy ellenállást, amelyek térfogatváltozással járnak együtt. Végül a gázok bármely deformációval szemben csak egészen kis ellenállást tanúsítanak.

Ebben a fejezetben a szilárd testekkel foglalkozunk, ezért nézzük a fent említett értelmezést kicsit részletesebben. Gondoljunk el egy henger alakú acélrudat, amelynek egyik végét valamihez rögzítjük, a másik végét pedig *F* erővel húzzuk. A deformáció hatására a rúdban a keresztmetszetre merőleges *P* feszültség keletkezik, amely (4.46) szerint

$$P = \frac{F}{f},$$ (5.1. egyenlet)

ahol *f* a rúd keresztmetszete. Az *F* terhelés fokozatos, lassú növelésével változik a rúd ε relatív megnyúlása, és ezzel együtt változik a rúdban keletkezett feszültség is. Ha folyamatosan mérjük az ε-t és a *P*-t, akkor tapasztalati úton összefüggést találunk e két mennyiség között. A vízszintes tengelyre az ε-t, a függőlegesre a hozzá tartozó *P*-t felmérve, a relatív megnyúlás és a feszültség kapcsolatát egy görbével szemléltethetjük *(42. ábra).*

42. ábra -

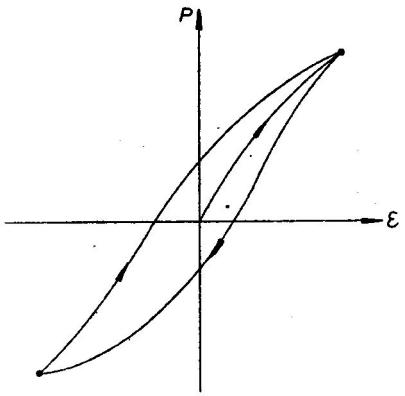


ε kis értékeire a P feszültség először lineárisan nő, majd a linearitás megszűnik, de még mindig rugalmas az alakváltozás, ami azt jelenti, hogy a terhelés megszüntetésével a rúd eredeti hosszát nyeri vissza. Más szóval, ebben az ún. rugalmas tartományban a deformáció megszüntetésére a feszültség is eltűnik. Tovább növelve a terhelést, olyan tartomány következik, amelyben az anyag plasztikusan alakítható, a deformáció megmarad akkor is, ha a külső erőt megszüntetjük. Ebben a tartományban egészen nagy deformációk hozhatók létre úgy, hogy alig változik a belső feszültség. E jelenséget folyásnak is szokták nevezni. Végül egészen nagy terhelésnél a rúd elszakad. Vannak olyan anyagok is, amelyeknél a plasztikus tartományt újabb szilárdulás követi, tehát ε-nal megint nő a feszültség egészen a szakadásig.

Ha a rudat nem nyújtjuk, hanem összenyomjuk, akkor csak rugalmas tartományt találunk, azt nem követi folyás, hanem mindjárt a törés következik.

Megemlítjük, hogy vannak olyan szilárd anyagok is, amelyek egészen kis deformációk esetén sem viselkednek tisztán rugalmasan. A terhelés megszüntetésével marad vissza deformáció, és ez csak ellentétes erőhatással (pl. nyomással) szüntethető meg. A feszültség – relatív megnyúlás görbéje a mágneses hiszterézishez hasonló, ezért ezt a jelenséget *rugalmas hiszterézisnek* nevezzük *(43. ábra).* A zárt hiszterézisgörbe által határolt terület a $P - \varepsilon$ síkon a megfelelő deformáció során végzett munkával egyezik meg.

43. ábra -



Az ún. képlékenyen alakítható anyagoknál (mint pl. az agyag vagy az ólom) a rugalmas tartomány teljesen hiányzik. Ezek viselkedése mindvégig plasztikus.

Az egyik végén befogott acélrúdra vonatkozó gondolat kísérletből arra a következtetésre juthatunk, hogy a feszültség és a deformáció között szoros kapcsolat van: P az ε függvénye. Nem adható meg azonban zárt alakban olyan $P(\varepsilon)$ függvény, amely a fenti viselkedést végig leírja. Ezért megelégszünk azzal, hogy az egyes (rugalmas, vagy plasztikus) tartományokra külön-külön adjuk meg a deformáció és a feszültség közötti összefüggést. Mi még ennél is tovább egyszerűsítjük a tárgyalást, ugyanis könyvünkben csak a rugalmas deformációk lineáris tartományával foglalkozunk. De az anyagi egyenletek meghatározásánál követett eljárás könnyen kiterjeszthető a nemlineáris rugalmas tartományra is.

A teljesen rugalmas deformációkon azt értjük, hogy a feszültségek csak a pillanatnyi és a helyi deformációktól függnek. Ha a deformációt megszüntetjük, akkor a feszültségek is eltűnnek. Kis deformációkra szorítkozva, ez a közelítés nagyon sok szilárd testre jól alkalmazható. Nem szabad figyelmen kívül hagyni persze, hogy ez csak bizonyos határon belül használható. A megfelelően nagy terhelésnek kitett szilárd testben olyan nagy deformációk jöhetnek létre, hogy a terhelés megszűnése után is tartós alakváltozás marad vissza. Ilyen esetekben természetesen már nem alkalmazható a rugalmas deformációkra vonatkozó közelítés.

23. Az anyagi egyenletek szilárd testekre, rugalmas deformációknál, lineáris közelítésben.

A Hooke-törvény

A szilárd test rugalmas alakváltozásakor a testben keletkezett feszültségek a pillanatnyi és a helyi deformációk egyértelmű függvényei. A szimmetrikus σ_{ik} feszültségtenzor hat független eleme egyedül az ε_{ik} deformációtenzor ugyancsak hat független komponensének a függvénye:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= f_1(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}),\\
\sigma_{22} &= f_2(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}),\\
&\vdots\\
\sigma_{23} &= f_6(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}).
\end{aligned}$$ (5.2. egyenlet)

Az $\varepsilon_{ik} = 0$ deformálatlan állapotban a testben nincsenek feszültségek, ezért $f_i(0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0$ ($i = 1, 2, ..., 6$). Gondoljunk el kis deformációt a test x, y, z koordinátájú pontja környezetében, és az f_i függvényeket fejtsük Taylor-sorba a deformálatlan állapot közelében,

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= f_1(0,0,0,0,0,0) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_{11}}\right)_0 \varepsilon_{11} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_{22}}\right)_0 \varepsilon_{22} + \ldots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_{23}}\right)_0 \varepsilon_{23} + \ldots,\\
\sigma_{22} &= f_2(0,0,0,0,0,0) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_{11}}\right)_0 \varepsilon_{11} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_{22}}\right)_0 \varepsilon_{22} + \ldots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_{23}}\right)_0 \varepsilon_{23} + \ldots,\\
&\vdots\\
\sigma_{23} &= f_6(0,0,0,0,0,0) + \left(\frac{\partial f_6}{\partial \varepsilon_{11}}\right)_0 \varepsilon_{11} + \left(\frac{\partial f_6}{\partial \varepsilon_{22}}\right)_0 \varepsilon_{22} + \ldots + \left(\frac{\partial f_6}{\partial \varepsilon_{23}}\right)_0 \varepsilon_{23} + \ldots.
\end{aligned}$$ (5.3. egyenlet)

Mi olyan kis deformációkra szorítkozunk, hogy az ε_{ik}-ban magasabb rendű tagok a lineáris részhez képest elhanyagolhatóan kicsik. Tehát csak az. ε_{ik} -kban lineáris részt tartjuk meg. Az f_i függvények ε_{ik} szerinti deriváltjait az $\varepsilon_{ik} = 0$ értékeknél kell venni, ezért ezek a test egy adott pontjában az ε_{ik} -tól független mennyiségek. Jelöljük ezeket C_{ijkl}-lel. Mivel $f_i(0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0$, az (5.3) lineáris közelítésben a következőképpen írható:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}.$$ (5.4. egyenlet)

A C_{ijkl} egy negyedrendű tenzor, amelynek elemeit *rugalmas együtthatóknak* nevezzük. Ezek általában függhetnek a helytől, ezért a test minden pontjához más és más együtthatók rendszere tartozhat. Homogén testek esetén ezek a helytől függetlenek, ilyenkor rugalmas állandóknak hívjuk őket. A fenomenológiai elméletben a rugalmas együtthatókat kísérleti úton határozzuk meg, ezek tehát az anyagra jellemző kísérleti paraméterek. Az anyag szerkezetét is figyelembe vevő ún. mikroszkopikus elmélet ezeket a rugalmas együtthatókat univerzális állandókra vezeti vissza.

Mivel a σ_{ij} feszültségtenzor és az ε_{kl} deformációtenzor szimmetrikus, a C_{ijkl}-re érvényesek a következő összefüggések:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}.$$ (5.5. egyenlet)

További szimmetriaösszefüggések adódnak a (4.108)-ból. Eszerint

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}.$$ (5.6. egyenlet)

Ebből

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}\partial \varepsilon_{ij}}.$$ (5.7. egyenlet)

A Φ rugalmas potenciál az ε_{ik}-k reguláris függvénye, ezért a vegyes parciális deriváltak megegyeznek egymással:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}.$$

Ebből következik, hogy

$$C_{ijkl} = C_{klij}.$$ (5.8. egyenlet)

Az (5.5), (5.8) szimmetriaösszefüggések szerint a C_{ijkl} együtthatók közül csak 21 független egymástól a legáltalánosabb esetben is. Ahhoz tehát, hogy a szilárd test rugalmas viselkedését leírhassuk, a fenomenológiai elméletben a legáltalánosabb esetben 21 rugalmas együtthatót, mint a testre jellemző kísérleti paramétert, kell megadnunk. Látni fogjuk, hogy a test szimmetriájával ezek száma jelentősen csökken. Izotrop testeknél például csak két független rugalmas együttható szerepel.

Visszatérve a feszültségtenzor és a deformációk közötti (5.4) anyagi egyenlethez, megállapíthatjuk, hogy kis rugalmas alakváltozások esetén ez a kapcsolat lineáris. Ha a magasabb rendű tagok nem hagyhatók figyelmen kívül, akkor ezek az egyenletek kiegészülnek az ε_{kl}-ben nemlineáris tagokkal az (5.3) sorfejtésnek megfelelően.

A feszültségek és a deformációk közötti lineáris összefüggést egyszerűbb alakban először Hooke állapította meg 1676-ban kísérleti úton. Ezért (5.4)-et róla nevezték el, és Hooke-törvény néven szerepel a szakirodalomban.

A σ_{ij} feszültségtenzor és az ε_{kl} deformációtenzor közötti kapcsolatot kifejező (5.4) anyagi egyenlet alapján meghatározhatjuk a *Φ* rugalmas potenciált is. Eddig ugyanis csak a teljes differenciálját adtuk meg a (4.107) definícióval. Írjuk be a (4.107)-be a σ_{ij} helyére az (5.4)-beli kifejezését:

$$d\Phi = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}d\varepsilon_{ij}.$$ (5.9. egyenlet)

Ebből adódik, hogy

$$\Phi = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}.$$ (5.10. egyenlet)

A Φ rugalmas potenciál tehát lineáris rugalmas deformációknál a deformációtenzor elemeinek homogén kvadratikus kifejezése.

A rugalmas alakváltozások a valóságban általában hőenergia-cserével járnak együtt. Ennek megfelelően a rugalmas potenciál a deformációtenzoron kívül függ még a hőmérséklettől is. Ez könnyen kiderül a következőkből. A deformálható testek termodinamikájával foglalkozó 22. pontban láttuk, hogy a rugalmas potenciál adiabatikus deformációknál a belső energia sűrűségével, izotermikus folyamatnál pedig a térfogategység szabad energiájával egyezik meg. Ezek a mennyiségek pedig a hőmérséklet függvényei. Ezért a C_{ijkl} rugalmas együtthatók e két esetben általában különböznek, és értékük függ a hőmérséklettől. A szilárd testeknél e különbség nem olyan jelentős, mint pl. gázoknál.

24. A kristályok rugalmas tulajdonságai

Mint az előző pontban láttuk, a szilárd testek rugalmas tulajdonságai a legáltalánosabb esetben 21 rugalmas együtthatóval jellemezhetőek. Említettük, hogy a test szimmetriájával a független együtthatók száma csökken. Most a kristályos anyagok szimmetriáinak figyelembevételével megmutatjuk, hogy ez valóban így van.

A háromhajlású (triklin) rendszerbe tartozó kristályok nem rendelkeznek olyan szimmetriával, amely a C_{ijkl} együtthatókra valamilyen megszorítást jelentene, ezért ezek az általános esetnek megfelelően 21 rugalmas együtthatóval jellemezhetőek.

Tekintsünk most egy olyan kristályt, amely az egyhajlású (monoklin) rendszerbe tartozik. Ennek van egy szimmetriatengelye, amely körül jobbra vagy balra 180°-kal elforgatva, a kristály önmagával fedésbe hozható. Ez azt jelenti, hogy a test fizikai sajátságait jellemző mennyiségek (mint pl. a C_{ijkl} rugalmas együtthatók) a forgatás során nem változnak meg. Válasszuk az x_3 koordinátatengelyt a szimmetriatengellyel egybeesőnek, és forgassuk el a koordináta-rendszert 180°-kal az x_3 tengely körül. A koordináták az

$$x_i' = a_{ik} x_k$$ (5.11. egyenlet)

képlet szerint transzformálódnak. Az a_{ik} transzformációs mátrix most diagonális, és a következő alakú:

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ (5.12. egyenlet)

Könnyű belátni, hogy (5.11) az (5.12)-vel az x_3 körüli 180°-os forgatást írja le. Ugyanis

$$x_1' = -x_1, \qquad x_2' = -x_2, \qquad x_3' = x_3.$$ (5.13. egyenlet)

A C_{ijkl} negyedrendű tenzor forgatáskor úgy transzformálódik, mint a megfelelő négy koordináta szorzata (l. Függelék 5. pont):

$C'_{ijkl} = a_{ir}a_{js}a_{kt}a_{lu}C_{rstu}$. (5.14. egyenlet)

A mondottak értelmében a C_{ijkl}-nek invariánsnak kell lennie a forgatással szemben, tehát a

$C'_{ijkl} = C_{ijkl}$ (5.15. egyenlet)

egyenlőségnek fenn kell állnia. A C_{ijkl} tenzornak azok az elemei, amelyekben a „3" index páratlanszor fordul elő, előjelet váltanak, a többi komponens pedig változatlan marad. Az előjelet váltó elemeknek az (5.15) egyenlőség miatt zérusnak kell lenniük. Ezek a komponensek a következők: C_{1123}, C_{1131}, C_{2223}, C_{2231}, C_{3323}, C_{3331}, C_{2321} , C_{3121}. Ez azt jelenti, hogy csak 13 független rugalmas együttható különbözik zérustól. Az egyhajlású (monoklin) kristály rugalmas tulajdonságait tehát tizenhárom független együttható jellemzi.

Az ortorombos (vagy röviden rombos) kristályokban három egymásra merőleges szimmetriatengely van, amelyek körüli 180°-os elforgatás a kristályt önmagával fedésbe hozza. A fentiek szerint ezek a forgatások a kristály fizikai tulajdonságait nem változtatják meg, tehát a C_{ijkl} rugalmas együtthatókat is változatlanul kell hagyniuk. Nyilvánvaló, hogy a C_{ijkl} elemek közül azok maradnak zérustól különbözőek, amelyek az 1, 2, 3 indexeket páros számszor tartalmazzák. Ezek a következők lesznek: C_{1111}, C_{2222}, C_{3333}, C_{1122}, C_{1133}, C_{2233} , C_{1212}, C_{1313}, C_{2323}. A rombos kristályoknak tehát 9 független rugalmas együtthatója van.

Hasonló megfontolással látható be, hogy a négyzetes rendszerbeli kristályokat 6, a szabályosakat (vagy köböseket) pedig 3 független rugalmas együttható jellemzi. Utóbbiaknál a három egymásra merőleges szimmetriatengely egyenértékű, ezért az előbbi hat együttható közül kettő-kettő megegyezik egymással, és így a C_{1111}, C_{1122} és a C_{1212} együtthatók lesznek függetlenek.

A szabályos kristály rugalmas potenciálja az (5.10) szerint tehát a következő:

$$\Phi = \frac{1}{2}C_{1111}\left(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2\right) + C_{1122}\left(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}\right) + 2C_{1212}\left(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2\right).$$ (5.16. egyenlet)

Végül megjegyezzük, hogy a kristályok rugalmas tulajdonságaira vonatkozó megállapításaink csak az ún. egykristályokra vonatkoznak. A polikristályos anyagok kis kristályokból, ún. krisztallitokból épülnek fel. Utóbbiak elhelyezkedése azonban tetszőleges irányú lehet, ezért a polikristályok, ha a krisztallitok mérete elegendően kicsi, izotrop testeknek tekinthetők. Az izotrop testeket az jellemzi, hogy bennük semmilyen irány sincs kitüntetve, tehát minden irány egyenértékű. A polikristályos anyag persze csak akkor tekinthető izotropnak, ha a krisztallitok méreteihez képest nagy deformációkkal foglalkozunk. Az izotrop szilárd testek rugalmasságát, a rájuk vonatkozó anyagi egyenleteket a következő pontban tárgyaljuk.

25. Az anyagi egyenletek izotrop szilárd testek rugalmas deformációira

Az izotrop testekben minden irány egyenértékű, ezért bármely irány körüli forgatás nem változtatja meg a test fizikai tulajdonságait. Más szóval, a testre jellemző fizikai mennyiségeknek invariánsaknak kell lenniük a koordináta-rendszer tetszőleges elforgatásával szemben. Következésképpen a Φ rugalmas potenciálnak is változatlannak kell maradnia.

Kiindulunk a szabályos kristály (5.16) rugalmas potenciáljából, és a koordinátatengelyeket úgy vesszük fel, hogy azok tetszőleges irányúak legyenek, tehát ne essenek egybe a szabályos kristály szimmetriatengelyeivel. Az izotrop test abban különbözik a kristálytól, hogy bármely irány körüli forgatás változatlanul hagyja pl. a Φ-t. A számolás egyszerűsítése céljából az x_1 tengely körül forgatjuk el a koordináta-rendszert elemi kis szöggel, és megköveteljük, hogy ez a forgatás a rugalmas potenciált ne változtassa meg. A koordinátatranszformáció tehát a következő lesz:

$$x_1' = x_1, \qquad x_2' = x_2 - \alpha x_3, \qquad x_3' = \alpha x_2 + x_3.$$ (5.17. egyenlet)

Az a paraméter az elemi forgatásnak megfelelően olyan kicsi, hogy csak az első hatványa számottevő, a magasabb hatványok elhagyhatók. Az (5.17) transzformáció is (5.11) alakba írható, ha az a_{ik} transzformációs mátrix a következő:

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$ (5.18. egyenlet)

Számítsuk ki a transzformált rugalmas potenciált, a Φ'-t. Mivel ez invariáns az (5.17)-tel szemben, ezért a

$$\Phi' = \Phi$$ (5.19. egyenlet)

egyenlőségnek fenn kell állnia. Látni fogjuk, hogy ez megszorítást jelent a rugalmas együtthatókra, és így a korábbi három közül csak kettő lesz független:

$$\Phi' = C_{1111}\left(\varepsilon_{11}'^2 + \varepsilon_{22}'^2 + \varepsilon_{33}'^2\right) + C_{1122}\left(\varepsilon_{11}'\varepsilon_{22}' + \varepsilon_{11}'\varepsilon_{33}' + \varepsilon_{22}'\varepsilon_{33}'\right) + 2C_{1212}\left(\varepsilon_{12}'^2 + \varepsilon_{13}'^2 + \varepsilon_{23}'^2\right).$$ (5.20. egyenlet)

Az itt szereplő ε'_{ik} tenzorkomponenseket az (5.11), (5.18) transzformációval kifejezzük a transzformálatlan ε_{ik}-kal. Az egyszerű számítás eredménye (csak az α-ban lineáris tagokat tartva meg):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}' &= \varepsilon_{11}, & \varepsilon_{12}' &= \varepsilon_{12} - \alpha\varepsilon_{13}, \\ \varepsilon_{22}' &= \varepsilon_{22} - 2\alpha\varepsilon_{23}, & \varepsilon_{13}' &= \varepsilon_{13} + \alpha\varepsilon_{12}, \\ \varepsilon_{33}' &= \varepsilon_{33} + 2\alpha\varepsilon_{23}, & \varepsilon_{23}' &= \varepsilon_{23} + \alpha\left(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}\right). \end{aligned}$$ (5.21. egyenlet)

A rugalmas potenciál invariáns voltát kifejező (5.19) egyenletbe behelyettesítve, a C_{1111}, C_{1122}, C_{1212} rugalmas együtthatók között a következő kapcsolatot találjuk:

$$C_{1111} = C_{1122} + 2C_{1212}.$$ (5.22. egyenlet)

Eszerint a három közül egyik kifejezhető a másik kettővel, ezért az izotrop szilárd test 2 független rugalmas együtthatóval jellemezhető. Az irodalomban szokásos jelöléseket használva,

$$C_{1122} = \lambda, \qquad C_{1212} = \mu.$$ (5.23. egyenlet)

Az izotrop szilárd test rugalmas potenciálja tehát

$$\Phi = \frac{1}{2}\lambda\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right)^2 + \mu\left(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2\varepsilon_{12}^2 + 2\varepsilon_{13}^2 + 2\varepsilon_{23}^2\right) = \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{ll}^2 + \mu\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ik}.$$ (5.24. egyenlet)

Ehhez a kifejezéshez egyszerűbben is eljuthatunk, ha meggondoljuk, hogy a rugalmas potenciál skalár. Az ε_{ik} szimmetrikus tenzor elemeiből két független másodrendű skalár képezhető, az ε_{ll}^2 valamint az $\varepsilon_{lk}\varepsilon_{ik}$. Másrészt a lineáris deformációkra vonatkozó közelítésben a Φ homogén másodfokú függvénye az ε_{ik}-nak, ezért egyszerűen felírható az (5.24) kifejezés.

Ebből a (4.108) alapján számíthatjuk ki a σ_{ik} feszültségtenzort. Mielőtt ezt megtennénk, vegyük észre, hogy az (5.24) első tagjában az ε_{ik} deformációtenzor ε_{ll} spurja szerepel, amely (4.26) szerint a Θ relatív térfogatváltozással egyezik meg. A feszültségtenzorra végül a

$$\sigma_{ik} = 2\mu\varepsilon_{ik} + \lambda\delta_{ik}\varepsilon_{ll} = 2\mu\varepsilon_{ik} + \lambda\delta_{ik}\Theta$$ (5.25. egyenlet)

kifejezést kapjuk. Ezek az egyenletek az izotrop szilárd test anyagi egyenletei kis rugalmas deformációkra. A testre jellemző λ, μ paramétereket Lamé-féle rugalmas együtthatóknak nevezzük.

A Φ rugalmas potenciál az ε_{ik} deformációtenzor (4.27) felbontásával felírható a következőképpen is:

$$\Phi = \mu\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{ll}\right)^2 + \frac{K}{2}\varepsilon_{ll}^2,$$ (5.26. egyenlet)

ahol

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu.$$ (5.27. egyenlet)

A μ együtthatót torziómodulusnak, a K-t pedig kompressziómodulusnak nevezzük.

A termodinamikai egyensúlyban a rugalmas potenciálnak minimuma van. Ha külső erők nem hatnak, akkor Φ az $\varepsilon_{ik} = 0$-nál veszi fel a minimális értéket, amely (5.26) szerint zérus. Ezért az (5.26) homogén másodfokú kifejezés mindig ≥ 0. Ebből következik, hogy a K és μ együtthatók pozitívak: $K > 0$, $\mu > 0$. Az (5.25) anyagi egyenletek ezekkel kifejezve:

$$\sigma_{ik} = 2\mu\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{ll}\right) + K\delta_{ik}\varepsilon_{ll}.$$ (5.28. egyenlet)

Az első tag a térfogatváltozással nem járó deformációknál, a második pedig az alakot megőrzőknél fellépő feszültségeket adja meg.

Az alkalmazások miatt sokszor szükségünk van a fordított összefüggésekre is, amelyek a deformációkat fejezik ki a feszültségekkel. Képezzük e célból az (5.28) spurját:

$$\sigma_{ll} = 3K\varepsilon_{ll},$$

amiből

$$\varepsilon_{ll} = \frac{1}{3K}\sigma_{ll}. \quad \text{(5.29. egyenlet)}$$

Ezt (5.28)-ba helyettesítve, adódik, hogy

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll}\right). \quad \text{(5.30. egyenlet)}$$

Az ε_{ik} deformációtenzor a σ_{ik} feszültségtenzor lineáris függvénye. Szavakkal kifejezve ez azt jelenti, hogy kis rugalmas deformációk arányosak a testre ható erővel. Ez a Hooke-törvénynek a szokásosabb megfogalmazása.

Itt ismét megjegyezzük, hogy ha a deformáció állandó hőmérsékleten megy végbe, akkor az (5.24), illetve (5.26) rugalmas potenciál a test szabad energiájával egyezik meg, és a *λ, μ, K* az izotermikus rugalmas együtthatók. Ha viszont adiabatikus a deformáció, akkor *Φ* a test belső energiáját jelenti, és a megfelelő *λ*, *μ, K* paraméterek az adiabatikus rugalmas együtthatók, amelyek általában különböznek az előbbiektől, miként arra már korábban rámutattunk.

26. A hőmérséklet-változással járó deformációk

A test hőmérséklete megváltozhat pl. melegítés hatására vagy a deformáció következményeként. Ilyenkor a testben keletkezett feszültségek nemcsak az ε_{ik} deformációtenzortól, hanem a hőmérséklet-változástól is függnek. Most az (5.25) anyagi egyeneteket erre az esetre fogjuk általánosítani.

Feltesszük, hogy a test izotrop, és a hőmérséklete a deformálatlan állapotban T_0. Gondoljuk el, hogy melegítéssel a hőmérséklet *T*-re változik. Ennek következtében deformációk lépnek fel még akkor is, ha külső erők nem hatnak. A deformációk a testben feszültségeket keltenek, amelyek hozzáadódnak az állandó hőmérsékleten számított (5.25) kifejezéshez. Feltéve, hogy a $T-T_0$ hőmérséklet-változás kicsi, a σ_{ik} feszültségtenzort a T_0 hely környezetében sorba fejtve, a lineáris tagnál megállhatunk. Így adódik, hogy

$$\sigma_{ik} = 2\mu\varepsilon_{ik} + \lambda\delta_{ik}\varepsilon_{ll} + \beta(T - T_0)\delta_{ik}. \quad \text{(5.31. egyenlet)}$$

Nagyobb hőmérséklet-változáskor a $T-T_0$ magasabb hatványai is fellépnek, de most ezektől eltekintünk.

A β együttható jelentésének a meghatározásához tekintsük a feszültségmentes állapotot ($\sigma_{ik} = 0$), és vegyük az (5.31) egyenlet spurját. Ebből adódik

$$\varepsilon_{ii} = \Theta = -\frac{3\beta}{2\mu + 3\lambda}(T - T_0).$$ (5.32. egyenlet)

A $-\frac{3\beta}{2\mu + 3\lambda} = \alpha$ jelöléssel

$$\Theta = \alpha(T - T_0).$$ (5.33. egyenlet)

A relatív térfogatváltozás arányos a hőmérsékletváltozással. Az α a térfogati hőtágulási együttható. Az (5.27) szerint $\frac{2\mu + 3\lambda}{3}$ a K kompressziómodulussal egyezik meg, és így a β paraméterre adódik, hogy

$$\beta = -K\alpha.$$ (5.34. egyenlet)

Ezt (5.3l)-be behelyettesítve, a hőmérséklet-változás következtében fellépő feszültségeket is figyelembe vevő anyagi egyenlet végül a következő alakba írható:

$$\sigma_{ik} = 2\mu\varepsilon_{ik} + \lambda\delta_{ik}\varepsilon_{ll} - K\alpha\delta_{ik}(T - T_0),$$ (5.35. egyenlet)

vagy (5.28) mintájára:

$$\sigma_{ik} = 2\mu\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{ll}\right) + K\delta_{ik}\varepsilon_{ll} - K\alpha\delta_{ik}(T - T_0).$$ (5.36. egyenlet)

A megfelelő rugalmas potenciál:

$$\Phi = \mu\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{ll}\right)^2 + \frac{K}{2}\varepsilon_{ll}^2 - K\alpha(T - T_0)\varepsilon_{ll}.$$ (5.37. egyenlet)

Ugyanis ebből a

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ik}}$$

képlet alapján kapjuk az (5.36) feszültségeket.

27. A rugalmas szilárd testek mozgásegyenletei

A deformálható testek (4.62) általános mozgásegyenletei, valamint az izotrop testekre vonatkozó (5.25) anyagi egyenletek alapján most már felírhatok az izotrop rugalmas szilárd testek mozgásegyenletei. Ezek a következők:

$$\varrho\frac{dv_i}{dt} = f_i + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j},$$ (5.38. egyenlet)

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{ll}.$$ (5.39. egyenlet)

Ezekhez járul még a tömeg megmaradását kifejező kontinuitási egyenlet:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\ \varrho\mathbf{v} = 0.$$ (5.40. egyenlet)

Ez éppen tíz egyenlet a tíz ismeretlen függvény (ϱ, v_i, σ_{ij}) számára. Az (5.38) – (5.40) egyenletek az izotrop rugalmas test mozgását írják le a kis deformációknak megfelelő lineáris közelítésben. Mivel (5.39)-ben a hőmérséklet-változással járó feszültségeket nem vettük figyelembe, ezért csak izotermikus esetre szorítkozunk.

Az alapegyenletek tovább egyszerűsödnek, ha feltételezzük, hogy a test homogén, vagyis a ϱ, μ, λ mennyiségek nem függnek a helytől. Másrészt figyelembe vesszük, hogy szilárd testekben a gyorsulás (**v**, grad) **v** konvektív része elhanyagolhatóan kicsi és így a $\frac{dv_i}{dt}$ a $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ helyi gyorsulással helyettesíthető.

Írjuk be az (5.39) feszültségeket (5.38)-ba, és vegyük figyelembe, hogy

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right).$$

Így az izotrop homogén rugalmas szilárd test mozgásegyenleteit a következő alakban kapjuk:

$$\varrho\frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2} = f_i + \mu\frac{\partial^2 s_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\mu + \lambda)\frac{\partial^2 s_j}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$ (5.41. egyenlet)

Ez a három egyenlet egy vektoregyenletbe foglalható össze:

$$\varrho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = \mathbf{f} + \mu\, \Delta \mathbf{s} + (\mu + \lambda)\, \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s}$$ (5.42. egyenlet)

Az (5.41), illetve (5.42) három másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet az **s** elmozdulásvektor $s_i(\mathbf{r}, t)$ három komponensére. Ezekben a külső erő **f** sűrűsége adott függvénynek tekintendő annak megfelelően, hogy a testnek ismert külső erő hatására bekövetkező mozgását tanulmányozzuk. A mozgásfeladat egyértelmű megoldásához meg kell még adnunk a kezdeti és határfeltételeket.

Kezdeti feltételként az elmozdulásvektort és a sebességvektort adjuk meg a vizsgált tartomány minden pontjában a kezdeti $t = 0$ időpontban.

Határfeltételként megadhatjuk az elmozdulásvektort a tartomány határán minden időpontra. Tehát

$$s_i = s_i^{(0)},$$ (5.43. egyenlet)

ahol $s_i^{(0)}$ előre megadott függvények a tartomány határán minden időben. Lehetséges az is, hogy a test felületén ható erőket adjuk meg, vagyis

$$P_{(\mathbf{n})i} = \sigma_{ij} n_j = P_{(\mathbf{n})i}^{(0)},$$ (5.44. egyenlet)

ahol $P_{(\mathbf{n})i}^{(0)}$ a megadott normális irányú feszültség *i*-edik komponense a test határán.

Ezeknek speciális esete az, amikor a szilárd test felülete rögzített, vagyis az elmozdulásvektor a test határán mindig zérus. Vagy a másik egyszerű eset, amikor a test felülete szabad, tehát a határon a $P_{(\mathbf{n})i}^{(0)}$ feszültségek eltűnnek.

Az (5.41) mozgásegyenletből a megadott kezdeti és határfeltételeknek megfelelő s elmozdulásvektor kiszámítható. Az így kiszámított s elmozdulástér tulajdonképpen egy egyenletes transzláció és merev forgás erejéig egyértelműen meg van határozva. Ami azt jelenti, hogy a mozgásegyenleteknek az adott kezdeti és határfeltételeknek megfelelő két megoldása egy egyenletes transzlációban és merev forgásban különbözhet egymástól, de mindkettő ugyanazt a deformációt írja le. Az alapegyenletek tehát a szilárd test rugalmas deformációit egyértelműen meghatározzák.

28. Az egyensúlyi állapot

A fizikai rendszer mechanikai szempontból akkor van egyensúlyban, ha a gyorsulása zérus. Tehát a nyugalom vagy az egyenesvonalú egyenletes mozgás felel meg az egyensúlyi állapotnak. A szilárd testek mechanikai egyensúlyával kapcsolatban általában a következő típusú feladatokról van szó. Valamilyen külső erő hat a testre, aminek következtében az deformálódik, és bizonyos deformációnál beáll az egyensúlyi állapot. Ez akkor következik be, amikor a deformációk hatására ébredt feszültségek kiegyenlítik a külső erők hatását. Kíváncsiak vagyunk arra, hogy a test

pontjainak milyen elmozdulásai felelnek meg az egyensúlynak. Keressük tehát az egyensúlyi állapothoz tartozó elmozdulásvektort a helykoordináták függvényében.

Az egyensúlyi állapotot jellemző alapegyenletet az (5.42) mozgásegyenletből kapjuk meg úgy, hogy abban a $\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2}$ gyorsulást zérusnak vesszük. A szilárd testek egyensúlyi rugalmas deformációit meghatározó egyenlet tehát a következő:

$$\mathbf{f} + \mu\, \Delta \mathbf{s} + (\mu + \lambda)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{s} = 0. \quad \text{(5.45. egyenlet)}$$

Ehhez járulnak még a konkrét feladatnak megfelelő határfeltételek. (Mivel most sztatikai problémáról van szó, az időbeli változás kiindulópontját megadó kezdeti feltételek nem fordulnak elő.) Határfeltételként az (5.43) vagy az (5.44) egyenleteket írjuk elő. Az egyensúlyi állapot meghatározása tehát a következő matematikai fel-adatra vezet. Keressük az (5.45) parciális differenciálegyenleteknek azt a megoldását, amely a megadott határfeltételeknek megfelel. Ilyen megoldás csak egy van, és ez éppen az egyensúlyi feladat fizikai megoldása.

A gyakorlati életben előforduló alkalmazásoknál általában a határfeltételekből indulunk ki, és az (5.45) differenciálegyenlet ezeknek megfelelő partikuláris meg-oldását keressük meg ahelyett, hogy az (5.45) egyenlet általános megoldását számítanánk ki előbb és a benne előforduló integrálási állandókat, illetve függvényeket a határfeltételeknek megfelelően választanánk. Ez az út egyszerűbb, és könnyebben vezet a helyes megoldáshoz.

Ezzel egyenértékű, de célravezetőbb az az eljárás, amely a feladatot lépésenként oldja meg. Előbb kiszámítjuk a határfeltételeket is kielégítő egyensúlyi feszültségeket a deformálható testek egyensúlyát leíró

$$f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \quad \text{(5.46. egyenlet)}$$

differenciálegyenletekből, majd ezután meghatározzuk az (5.25) anyagi egyenletek megfordítottjaként adódó

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}\delta_{ij}\sigma_{ll} \quad \text{(5.47. egyenlet)}$$

egyenletekből a deformációkat, és végül (ha szükséges) az

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right) \quad \text{(5.48. egyenlet)}$$

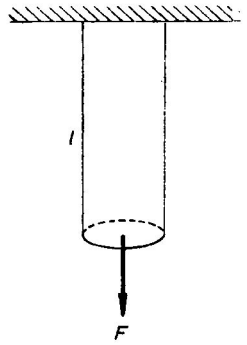
képletek alapján az s_i (**r**) elmozdulásokat. Nyilvánvaló, hogy ez a közvetett eljárás egyenértékű az (5.45) egyenletek megoldásával, hiszen utóbbiakat az (5.46)-ból kaptuk az (5.47) és az (5.48) figyelembevételével.

A következőkben a gyakorlati alkalmazások szempontjából fontosabb néhány egyensúlyi problémával foglalkozunk.

28.1 Nyújtás

Henger alakú, *l* hosszúságú homogén rúd egyik véglapja legyen rögzítve, a másik végét meghúzzuk a tengely irányában ható *F* erővel, amely a lap mentén egyenletesen oszlik el. A rúd keresztmetszetét jelöljük *q*-val. A koordináta-rendszert válasszuk úgy, hogy az *xy* sík legyen a rögzített lap, a *z* tengely a rúd tengelyével párhuzamos, a húzóerővel egy irányú (*44. ábra)*.

44. ábra -



Először az (5.44) határfeltételeket elégítjük ki. Ha a *z* tengely függőleges irányú, akkor a rögzített lapot felső, a másikat alsó lapnak nevezhetjük.

A palástón külső feszültség nem hat, $\mathbf{P}_{(n)}^{(0)} = \mathbf{0}$, a külső normális irányába mutató **n** egységvektor n_j komponensei közül az $n_3 = 0$. Így az (5.44) határfeltételek a palástón kielégíthetők a

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0, \qquad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad \text{(5.49. egyenlet)}$$

feltevéssel.

Az alsó lapon ható $\mathbf{P}_{(n)}^{(0)}$ külső feszültség *z* irányú, ezért

$$P_{(n)1}^{(0)} = P_{(n)2}^{(0)} = 0, \qquad P_{(n)3}^{(0)} = \frac{F}{q}. \quad \text{(5.50. egyenlet)}$$

Az n_i iránykoszinuszok:

$$n_1 = n_2 = 0, \qquad n_3 = 1.$$ (5.51. egyenlet)

Ezeket az (5.44)-be beírva, látható, hogy a határfeltételek az alsó lapon kielégíthetők a

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \qquad \sigma_{33} = \frac{F}{q}$$ (5.52. egyenlet)

feltevéssel.

Ezeket összefoglalva, azt mondhatjuk, hogy az (5.49), (5.52) feszültségtenzor a rúd teljes felületén kielégíti a határfeltételeket, ugyanis a $\sigma_{33} = \frac{F}{q}$ a paláston az $n_3 = 0$-val van szorozva, és ezért a $F^{(0)}_{(n)\beta} = 0$-ra vezet.

Ezután megnézzük, hogy az (5.49), (5.52) feszültségek a test belsejében is érvényesek-e. Ehhez az (5.46) egyenleteknek kellene teljesülniük a test minden pontjában. Mivel most külső térfogati erő nem hat ($f_i = 0$), a σ_{ij} feszültségtenzornak divergencia-mentesnek kell lennie. Azonnal látszik, hogy az (5.49), (5.52) ezt teljesíti, mert a σ_{33} állandó, a többi elem pedig zérus. Az (5.49), (5.52) feltevés tehát mind a határ-feltételeket, mind az egyensúly differenciálegyenleteit kielégíti. Ez éppen a keresett fizikai megoldás.

A homogén rúd állandó erővel történő húzásakor a benne keletkezett egyensúlyi feszültségek tenzora tehát a következő:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{q} \end{pmatrix}.$$ (5.53. egyenlet)

Ennek ismeretében (5.47)-ből számíthatók ki az egyensúlyi állapotnak megfelelő deformációk. Látható, hogy az ε_{ij} deformációtenzor vegyes indexű elemei zérusok:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0.$$ (5.54. egyenlet)

Az azonos indexűek pedig a következők:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}\frac{F}{q},$$ (5.55. egyenlet)

$$\varepsilon_{33} = \frac{\mu + \lambda}{\mu(2\mu + 3\lambda)} \frac{F}{q}.$$ (5.56. egyenlet)

Utóbbiak (4.19) szerint a koordinátatengelyek irányába eső relatív hosszúságváltozások. Mivel (5.56) jobb oldala pozitív, ε_{33} a rúd $\frac{\delta l}{l}$ relatív megnyúlását jelenti. Erre a kísérleti fizikában a

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{q}$$ (5.57. egyenlet)

kifejezést találtuk. A testre jellemző *E* együtthatót Young-modulusnak nevezzük. Az (5.56)-tal való összehasonlítás mutatja, hogy a Young-modulus az

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}$$ (5.58. egyenlet)

képlet szerint fejezhető ki a Lamé-féle állandókkal.

Az ε_{11} és ε_{22} a keresztmetszet lineáris méreteinek relatív megváltozását jelenti. Ez (5.55) szerint negatív, tehát a keresztmetszet szűkül a megnyújtás hatására. Ilyenkor az ε_{11}-et (illetve ε_{22}-t) haránt-összehúzódásnak nevezzük.

A haránt-összehúzódás és a relatív megnyúlás hányadosának − 1-szerese,

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$ (5.59. egyenlet)

a test anyagi minőségére jellemző pozitív mennyiség, amelyet Poisson-számnak hívunk.

Ha az *F* erő nem húzó-, hanem nyomóerő, akkor a rúd megrövidül és a keresztmetszete megnő. A relatív hosszúságváltozásokra most is az (5.55), illetve (5.56) kifejezések érvényesek, de bennük az $\frac{F}{q}$ helyére ennek −1-szerese írandó, mert most $\sigma_{33} = -\frac{F}{q}$.

28.2 Egyenletes összenyomás

Gondoljunk tetszőleges alakú szilárd testre, amelynek felületére merőlegesen befelé mutató, mindenütt ugyanakkora *p* nyomást fejtünk ki. (Nyomáson a felület-egységre ható nyomóerőt értjük.) A határfelület mentén ható $\mathbf{P}^{(0)}_{(n)}$ feszültség komponensei:

$$P^{(0)}_{(n)1} = -pn_1, \qquad P^{(0)}_{(n)2} = -pn, \qquad P^{(0)}_{(n)3} = -pn_3.$$ (5.60. egyenlet)

A negatív előjelek azért vannak, mert az **n** normális irányú egységvektor a felületre merőlegesen kifelé mutat. Az (5.44) határfeltételek kielégülnek, ha a felület minden pontjában

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p, \qquad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$ (5.61. egyenlet)

Ezek a feszültségek a test valamennyi belső pontjára is érvényesek, mert az egyensúlyi állapotot leíró (5.46) egyenleteknek is megoldásai az f_i = 0 esetben. Az egyensúlynak megfelelő feszültségtenzor tehát :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$ (5.62. egyenlet)

Ezt (5.47)-be helyettesítve, megkapjuk az egyenletes összenyomás hatására bekövetkező deformációkat. Az ε_{ij} deformációtenzor vegyes indexű elemei zérusok:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0,$$ (5.63. egyenlet)

a főátlóban állók pedig megegyeznek egymással, és értékük

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{1}{2\mu + 3\lambda} p.$$ (5.64. egyenlet)

Tehát

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{p}{2\mu + 3\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{2\mu + 3\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p}{2\mu + 3\lambda} \end{pmatrix}.$$ (5.65. egyenlet)

A relatív térfogatváltozást az ε_{ij} tenzor spurja adja meg:

$$\Theta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{ii} = -\frac{3}{2\mu + 3\lambda} p.$$ (5.66. egyenlet)

A térfogat az összenyomás hatására csökken, ezért Θ negatív. A szilárd testek összenyomással szembeni térfogati rugalmasságának a jellemzésére az egységnyi nyomásnövekedésre eső relatív térfogatcsökkenést, az ún. *kompresszibilitást* használjuk. Ennek pontos definíciója:

$$\varkappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T.$$ (5.67. egyenlet)

Ha kis deformációkról van szó, akkor az ε_{ii} relatív térfogatváltozás és a p nyomás is kicsi, és ezért a kompresszibilitás a

$$\varkappa = -\frac{1}{p}\frac{\Delta V}{V}$$ (5.68. egyenlet)

alakba írható. A $\Delta V/V$ hányadost az (5.66)-ból ide behelyettesítve, összefüggést kapunk a $\varkappa$ kompresszibilitás és a Lamé-féle rugalmassági állandók között:

$$\varkappa = \frac{3}{2\mu + 3\lambda}.$$ (5.69. egyenlet)

Gyakran a $\varkappa$ reciprokát használjuk, amelyet kompressziómodulusnak nevezünk és K-val jelölünk:

$$K = \frac{1}{\varkappa} = \frac{2\mu + 3\lambda}{3}.$$ (5.70. egyenlet)

28.3 Nyírás

Ha a test térfogatelemeit határoló felületekre ható erőknek csak érintőleges komponensei különböznek zérustól (vagyis a σ_{ij} feszültségtenzor főátlóban álló elemei mind eltűnnek), akkor a test elemi rétegei „elcsúsznak" egymáson, és ilyenkor a deformációt nyírásnak nevezzük. Foglalkozzunk azzal a legegyszerűbb esettel, amikor a σ_{ij} feszültségtenzor vegyes indexű elemei közül csak egy különbözik zérustól, mondjuk a σ_{12}, és ez is állandó:

$$\sigma_{12} = \text{áll.}, \qquad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$ (5.71. egyenlet)

Az egyszerűség kedvéért még azt is feltesszük, hogy a test alakja négyzet keresztmetszetű derékszögű hasáb, és a tömegeloszlás homogén.

Most a fordított egyensúlyi feladatot vizsgáljuk. Adottnak vesszük az (5.71) feszültségeket, és keressük azokat a külső felületi erőket, amelyek ezt a feszültséget keltik nyírás útján. Derékszögű koordináta-rendszert használunk, amelynek tengelyeit a hasáb éleivel azonosnak választjuk.

Ismeretes, hogy a feszültségek az anyagi egyenletek szerint meghatározzák a keletkezett deformációkat. Ha a test hőmérséklete a deformáció alatt állandó, akkor ezt a kapcsolatot az (5.47) adja meg. Az (5.71) alapján ezekből adódik, hogy

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{12},$$ (5.72. egyenlet)

a többi elem zérus.

Ha külső térfogati erőket nem tekintünk ($f_i = 0$), akkor az (5.71) feszültségek kielégítik az egyensúlyt meghatározó (5.46) differenciálegyenleteket. A megfelelő külső felületi erőket az (5.44) határfeltételekből számíthatjuk ki. A számítást a hasáb párhuzamos lapjaira együtt végezzük el.

Az x és $-x$ normálisú lapokra $n_1 = \pm 1$, $n_2 = n_3 = 0$, és ennek megfelelően

$$P^{(0)}_{(\pm x)y} = \pm\sigma_{12} = \pm 2\varepsilon_{12}, \qquad P^{(0)}_{(\pm x)x} = P^{(0)}_{(\pm x)z} = 0.$$ (5.73. egyenlet)

Az y és $-y$ normálisú lapokra $n_2 = \pm 1$, $n_1 = n_3 = 0$,

$$P^{(0)}_{(\pm y)x} = \pm\sigma_{12} = \pm 2\varepsilon_{12}, \qquad P^{(0)}_{(\pm y)y} = P^{(0)}_{(\pm y)z} = 0.$$ (5.74. egyenlet)

Végül a z és $-z$ normálisú lapokra $n_3 = \pm 1$, $n_1 = n_2 = 0$,

$$P^{(0)}_{(\pm z)x} = P^{(0)}_{(\pm z)y} = P^{(0)}_{(\pm z)z} = 0.$$ (5.75. egyenlet)

Az eredmények fizikai jelentése a következő. Ahhoz, hogy az (5.72) egyensúlyi nyírásokat hozzuk létre a testben, annak lapjaira az (5.73)−(5.75) külső feszültségeket kell kifejteni. Az x normálisú lapra y irányú, a $-x$ normálisúra $-y$ irányú egyenlő nagyságú, érintőleges felületi erő, ún. nyíróerő hat. Hasonlóképpen az y és $-y$ normálisú lapokra. Sőt, e négy erőnek a nagysága is egyenlő.

Az (5.72) deformációtenzorból (5.48) alapján meghatározhatjuk a hasáb pontjainak s elmozdulását is:

$$s_2 = 2\varepsilon_{12}x, \qquad s_1 = s_3 = 0.$$ (5.76. egyenlet)

A deformációtenzor vegyes indexű elemeinek (4.22) geometriai jelentése alapján a hasáb minden x irányú szála elfordul az xy síkkal párhuzamosan

$$\varphi_{12} \sim 2\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\mu}$$ (5.77. egyenlet)

szöggel.

Az (5.77) összefüggés a kísérleti fizikában a

$$\varphi = \frac{1}{G}\frac{F}{q}$$ (5.78. egyenlet)

alakban szerepel, ahol *F* az említett oldalakra ható érintőleges külső felületi erő, *q* a lapok keresztmetszete, *G* pedig az ún. *nyírási modulus.* Mivel $\sigma_{12}=F/q$, az (5.77)-tel való összehasonlításból látszik, hogy *G* megegyezik a Lamé-féle μ rugalmassági állandóval:

$$G = \mu.$$ (5.79. egyenlet)

A deformációtenzor főátlóban álló elemei nyírásnál zérusok, ezért annak spurja is eltűnik. Ennélfogva (4.26) szerint nyírásnál térfogatváltozás nem lép fel.

Ezek az eredmények természetesen infinitezimális elmozdulásokra vonatkoznak a lineáris közelítésben.

28.4 Csavarás

Tekintsünk *l* hosszúságú, kör keresztmetszetű (*R* sugarú) homogén egyenes hengert, amelynek egyik vége rögzítve van, a másik végét pedig elfordítjuk φ_0 kis szöggel a tengelye körül. A koordináta-rendszer *xy* síkja legyen a rögzített lap, a *z* tengely essék egybe a henger tengelyével. Külső térfogati erőtől eltekintünk, $\mathbf{f_i} = 0$.

A határfeltételek a következők. A henger palástján felületi erők nem hatnak, tehát az $r^2 = x_1^2 + x_2^2 = R^2$ pontokban

$$P_{(n)k} = \sigma_{ij} n_j = 0.$$ (5.80. egyenlet)

A rögzített alsó lapon, $x_3 = 0$-nál az elmozdulásvektor minden pontban zérus:

$$s_i = 0.$$ (5.81. egyenlet)

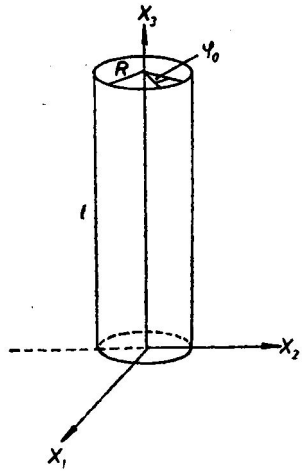
A felső lapot elforgattuk φ_0 szöggel a tengely körül, ezért a fedőlap pontjainak elmozdulása az $x_3=l$ helyen

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}.$$ (5.82. egyenlet)

A $\boldsymbol{\varphi}$ vektor *z* irányú: $\boldsymbol{\varphi}$ (0, 0, φ_0). Az (5.82)-t komponensekkel kifejezve, az $x_3=l$ helyen

$$s_1 = -\varphi_0 x_2, \qquad s_2 = \varphi_0 x_1, \qquad s_3 = 0.$$ (5.82′. egyenlet)

46. ábra -



Az egyensúlyi elmozdulásokat leíró differenciálegyenletek:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0,$$ (5.83a. egyenlet)

vagy

$$\mu \frac{\partial^2 s_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 s_j}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$ (5.83b. egyenlet)

A feladat ezeknek a parciális differenciálegyenleteknek a megoldása az (5.80)−(5.82) határfeltételekkel.

Feltesszük, hogy a henger különböző magasságú rétegei a rögzített alaplaphoz képest azzal párhuzamosan x_3-tól függően elcsavarodnak, tehát az x_3 magasságú lap pontjainak elmozdulása:

$$s_1 = -\varphi(x_3) x_2, \quad s_2 = \varphi(x_3) x_1, \quad s_3 = 0.$$ (5.84. egyenlet)

Az (5.81), (5.82) elmozdulástérnek megfelelő deformációtenzor a következő:

$$\varepsilon_{13} = -\frac{1}{2} x_2 \frac{d\varphi}{dx_3}, \qquad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} x_1 \frac{d\varphi}{dx_3},$$
$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0. \qquad \text{(5.85. egyenlet)}$$

Mivel az ε_{ik} deformációtenzor főátlóban álló elemei zérusok, térfogatváltozás nem lép fel, ugyanis

$$\Theta = \varepsilon_{ii} = 0. \quad \text{(5.86. egyenlet)}$$

Az (5.85)-ből az (5.39) anyagi egyenletek alapján kiszámíthatóak a henger csavarása során keletkezett feszültségek:

$$\sigma_{13} = -\mu x_2 \frac{d\varphi}{dx_3}, \qquad \sigma_{23} = \mu x_1 \frac{d\varphi}{dx_3},$$
$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0. \qquad \text{(5.87. egyenlet)}$$

A csavarodás φ szögének x_3-tól való függését az (5.83) egyensúlyi feltételekből lehet kiszámítani:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = -\mu x_2 \frac{d^2\varphi}{dx_3^2} = 0,$$
$$\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = \mu x_1 \frac{d^2\varphi}{dx_3^2} = 0. \qquad \text{(5.88. egyenlet)}$$

Ezek megoldása:

$$\varphi(x_3) = c_1 x_3 + c_2. \quad \text{(5.89. egyenlet)}$$

A c_1, c_2 integrálási állandókat a $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l)=\varphi_0$ határfeltételekből határozzuk meg. Így adódik

$$c_1 = \frac{\varphi_0}{l}, \qquad c_2 = 0. \qquad \text{(5.90. egyenlet)}$$

A megoldás tehát

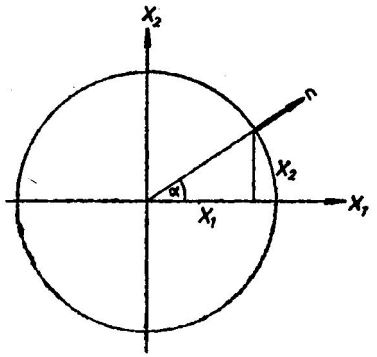
$$\varphi(x_3) = \frac{\varphi_0}{l} x_3. \quad \text{(5.91. egyenlet)}$$

Az (5.84) feltevés kielégíti az egyensúlyi feltételeket, valamint a henger felső és alsó lapjára vonatkozó határfeltételeket. Most még arról is meg kell győződnünk, hogy a palástra vonatkozó (5.80) határfeltételek kielégülnek-e. A palláston a normális irányú egységvektor komponensei:

$$n_1 = \cos\alpha, \qquad n_2 = \sin\alpha, \qquad n_3 = 0,$$ (5.92. egyenlet)

ahol *(47. ábra)*

47. ábra -



$$\cos\alpha = \frac{X_1}{R}, \qquad \sin\alpha = \frac{X_2}{R}.$$ (5.93. egyenlet)

Az (5.87) feszültségeket, valamint n_j (5.92) komponenseit (5.80)-ba behelyettesítve:

$$P_{(n)1} = 0, \qquad P_{(n)2} = 0,$$

$$P_{(n)3} = \sigma_{31}\cos\alpha + \sigma_{32}\sin\alpha = -\mu X_2 \frac{\varphi_0}{l}\cos\alpha + \mu X_1 \frac{\varphi_0}{l}\sin\alpha =$$

$$= -\mu R \frac{\varphi_0}{l}\cos\alpha\sin\alpha + \mu R \frac{\varphi_0}{l}\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Az (5.83) tehát a palláston is kielégíti a határfeltételeket, ezért a feladat megoldása a következő:

$$s_1 = -\frac{\varphi_0}{l}x_2x_3, \qquad s_2 = \frac{\varphi_0}{l}x_1x_3, \qquad s_3 = 0.$$ (5.94. egyenlet)

Végül kiszámítjuk a felső lapon ható felületi erőket és azoknak a henger tengelyére ható nyomatékát.

A felső lapon a normális irányú egységvektor **n** (0, 0, 1), ezért

$$P_{(n)1} = \sigma_{13} = -\mu x_2 \frac{\varphi_0}{l},$$

$$P_{(n)2} = \sigma_{23} = \mu x_1 \frac{\varphi_0}{l},$$

$$P_{(n)3} = 0. \qquad \text{(5.95. egyenlet)}$$

Mivel $P_{(n)3} = 0$, a felső lapon ható feszültség érintő irányú. Könnyen belátható, hogy $\mathrm{P}_{(n)}\mathbf{r} = 0$, ahol **r** a tengelytől számított vektor az $x_3 = l$ síkban. Az (5.95) feszültség nyomatéka;

$$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}_{(n)}. \qquad \text{(5.96. egyenlet)}$$

Ennek a vektornak csak az x_3 komponense különbözik zérustól.

Az egész felső lapra ható erőnyomatékot az (5.96) sűrűség felületi integrálja adja meg:

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{m}\, df. \qquad \text{(5.97. egyenlet)}$$

$$M_3 = \int \left(P_{(n)2} x_1 - P_{(n)1} x_2 \right) df = \mu \frac{\varphi_0}{l} \int \left(x_2^2 + x_1^2 \right) df = \mu \frac{\varphi_0}{l} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} r^3 \, dr \, d\varphi = \mu \frac{\pi R^4}{2l} \varphi_0. \qquad \text{(5.98. egyenlet)}$$

Az **M** erőnyomaték x_3 irányú. A nagyságát szokás forgatónyomatéknak nevezni.

Tehát ahhoz, hogy az egyik végén rögzített henger pontjai az (5.94) elmozdulást végezzék, az

$$M = \mu \frac{\pi R^4}{2l} \varphi_0 \qquad \text{(5.99. egyenlet)}$$

forgatónyomatékot kell a szabad végére kifejteni. Eredményünket így is kifejezhetjük: ha az *l* hosszúságú homogén egyenes henger szabad végére *M* forgatónyomatékot fejtünk ki, akkor az elcsavarodik és a szabad felület

$$\varphi_0 = \frac{2lM}{\mu \pi R^4} \qquad \text{(5.100. egyenlet)}$$

szöggel fordul el.

A test anyagára jellemző *μ* Lamé-féle rugalmas együtthatót ezért szokták csavarási vagy torziómodulusnak nevezni. Az (5.100) eredmény az ún. torziós műszerek szempontjából fontos. Eszerint ha a torziós szál vastagságát kétszer, háromszor csökkentjük, a kitérés szöge ugyanazon feltételek mellett tizenhatszor, nyolcvanegyszer lesz nagyobb.

Az (5.99) forgatónyomatékot szokták az

$$M = D\varphi_0 \quad \text{(5.101. egyenlet)}$$

alakba is írni, ahol a

$$D = \mu \frac{\pi R^4}{2l} \quad \text{(5.102. egyenlet)}$$

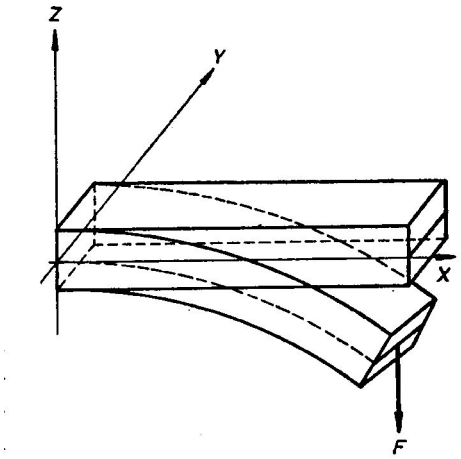
együtthatót a torziós szál irányító- (direkciós) nyomatékának nevezzük. *D* méréséből a *μ* torziómodulus meghatározható.

28.5 Hajlítás

Legyen *l* hosszúságú, mindenütt egyenlő keresztmetszetű, homogén, vízszintes rúd egyik végén rögzítve, a másik végére hasson függőlegesen lefelé irányuló *F* erő. A térfogati erőktől most is eltekintünk. Ez azt jelenti, hogy a rúd súlyát nem vesszük figyelembe. Az erő hatására a rúd lehajlik, a felső rétegei megnyúlnak, az alsók össze-húzódnak, és a keresztmetszete is deformálódik. Mi csak a kis lehajlás esetével foglalkozunk, mert csak ekkor alkalmazható a rugalmasságtan lineáris elmélete.

Bernoulli nyomán jó közelítéssel feltételezhető, hogy a rúdnak van egy olyan, a deformálatlan állapotban vízszintes rétege, amelynek hossza a lehajláskor nem vá1tozik meg, továbbá a rúd hossztengelyére merőleges síkkeresztmetszetek a meghajlás után is merőlegesek maradnak erre az ún. *semleges (neutrális) rétegre.*

48. ábra -



Olyan derékszögű koordináta-rendszert választunk, amelynek *xy* síkja megegyezik a deformálatlan állapotbeli semleges síkkal, a *z* tengelyt pedig függőlegesen felfelé irányítjuk. Az *x* tengely legyen a rúd hosszával párhuzamos. Meghatározzuk a semleges réteggel párhuzamos, tőle *z* távolságra levő réteg relatív hosszváltozását, a rúd végének lehajlását, a keresztmetszet megváltozását, valamint a rúdban keletkezett feszültségeket.

Tekintsük a rúdnak két közeli, *A*-val és *B*-vel jelölt keresztmetszetét, amelyek eredetileg *x* illetve *x*+*dx* távolságra voltak a rögzített végtől. A lehajlás következtében ezek egymással

$$d\varphi = \frac{dx}{R}$$ (5.103. egyenlet)

szöget zárnak be, ahol *R* a függőleges síkban fekvő semleges szál görbületi sugara.

A semleges rétegtől *z* távolságban levő réteg *AB* szakaszának relatív megnyúlása,

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial s_1}{\partial x} = \frac{(R+z)d\varphi - dx}{dx} = z\frac{d\varphi}{dx} = \frac{z}{R}.$$ (5.104. egyenlet)

Ez a megnyúlás a rúdban feszültséget kelt, amelyet az anyagi egyenletekből számíthatunk ki:

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} = \frac{E}{R}z,$$ (5.105. egyenlet)

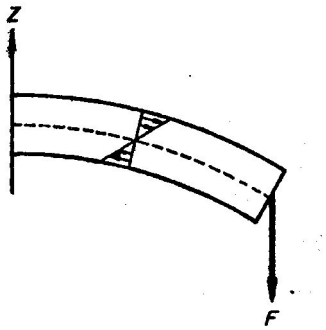
ahol *E* a rúd anyagára jellemző Young-modulus. A feszültségtenzor többi komponense zérus, tehát

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{E}{R}z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ (5.106. egyenlet)

Ez divergenciamentes, és kielégíti az (5.46) egyensúlyi feltételeket.

σ_{11} a semleges rétegtől felfelé a távolsággal lineárisan növekvő húzó-, attól lefelé pedig nyomófeszültséget jelent *(49. ábra).*

49. ábra -



Az *A* keresztmetszet *df=dy dz* elemére ható felületi erő $\sigma_{11}df$, az egész keresztmetszetre ható erő pedig ennek az integrálja:

$$F_A = \int_A \sigma_{11} df = \frac{E}{R}\int_A z\, dy\, dz.$$ (5.107. egyenlet)

Egyensúlyi állapotban bármelyik keresztmetszetre ható erőnek el kell tűnnie, ezért az (5.107) integrálnak zérusnak kell lennie:

$$\int_A z\, dy\, dz = 0.$$ (5.108. egyenlet)

Ez akkor teljesül, ha *z*-t a keresztmetszet tömegközéppontjától#[1] mérjük. Mivel *z* a semleges rétegtől mért merőleges távolság, ez azt jelenti, hogy a semleges rétegnek át kell mennie a keresztmetszetek tömegközéppontjain.

A rúd bármelyik keresztmetszetére ható felületi erők eredője ugyan zérus, de forgatónyomatékot fejtenek ki rá. Az *A* tömegközéppontján vízszintesen átmenő *y* tengelyre kifejtett forgatónyomaték,

$$M_h = \int_A z\sigma_{11} df = \frac{E}{R}\int_A z^2 df = \frac{E}{R} I,$$ (5.109. egyenlet)

ahol

$$I = \int_A z^2 df$$ (5.110. egyenlet)

a keresztmetszet másodrendű nyomatéka. Az utóbbi pl. kör keresztmetszetre

$$I_{\bigcirc} = \int_A z^2 df = \int_0^{R_0}\int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\varphi r \; d\varphi \; dr = \int_0^{R_0} r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \; d\varphi = \frac{\pi}{4} R_0^4,$$ (5.111. egyenlet)

ahol R_0 a keresztmetszet sugara, illetve az *a* szélességű, *h* magasságú négyszögre

$$I_{\square} = \int_A z^2 df = \int_{-h/2}^{h/2}\int_{-a/2}^{a/2} z^2 dy\, dz = a\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{ah^3}{12}.$$ (5.112. egyenlet)

A feszültségtől származó (5.109) M_h nyomatékot hajlítónyomatéknak nevezzük. Egyensúlyi állapotban ez megegyezik a külső erő forgatónyomatékával. Kis lehajlás esetén az *F* erőnek az *A* keresztmetszettől számított karja ($l - x$)-nek vehető, és ezért a külső erő forgatónyomatéka,

$$M(x) = F(l - x).$$ (5.113. egyenlet)

Ez függ a rögzített felülettől mért *x* távolságtól, ezért írtuk ki az argumentumban az *x*-et. A mondottak szerint egyensúly esetén $M_h = M(x)$. Az (5.109) és (5.113) alapján kapjuk, hogy

$$\frac{1}{R} = \frac{F}{EI}(l - x).$$ (5.114. egyenlet)

[1]# Síkidomok esetén gyakoribb a súlypont elnevezés használata.

Az *EI* szorzatot *hajlítási merevségnek* nevezzük.

Az (5.114) egyenletből meghatározható a semleges réteg és az *xz* sík metszésvonalának, az ún. semleges szálnak az egyenlete, a *z*=*z*(*x*). Ehhez felhasználjuk a differenciál-geometriából ismert összefüggést, miszerint az *z*(*x*) síkgörbe *1/R* görbülete,

$$\frac{1}{R}=\pm\frac{z''}{\left(1+z'^2\right)^{3/2}},$$ (5.115. egyenlet)

ahol $z'=\frac{dz}{dx}$.

Kis lehajlások esetén a nevezőben az z'^2 elhanyagolható az 1 mellett. Az (5.115) bal oldalára az (5.114)-et írva, a semleges szál differenciálegyenletére kapjuk, hogy

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\pm\frac{F}{EI}(l-x).$$ (5.116. egyenlet)

Ennek megoldása:

$$z=\pm\frac{F}{EI}\left(\frac{l}{2}x^2-\frac{x^3}{6}\right)+ax+b.$$ (5.117. egyenlet)

Az *a* és *b* integrálási állandókat abból a feltételből számíthatjuk ki, hogy a rúd rögzített *x* = 0 végén *z* = 0. Így adódik, hogy *a* = *b* = 0. A semleges szál egyenlete tehát

$$z=-\frac{F}{2EI}x^2\left(l-\frac{x}{3}\right).$$

(Itt azért választottuk a negatív előjelet, mert a mi koordináta-rendszerünkben a rúd lefelé hajlik, tehát a *z″* negatív, és ez az előjel ad (5.115)-ben pozitív görbületet.)

A semleges szál görbéje (5.118) szerint harmadrendű parabola. Az *x* = *l* helyettesítéssel a rúd végének az *s* = −*z*(*l*) lehajlását kapjuk:

$$s=\frac{l^3}{3EI}F.$$ (5.119. egyenlet)

Ha ide *l* helyére az (5.111), illetve az (5.112) kifejezést helyettesítjük, a kör illetve a négyszög keresztmetszetű rúd végének a lehajlását kapjuk:

$$s_{\circ} = \frac{4l^3 F}{3\pi E R_0^4},$$ (5.120. egyenlet)

$$s_{\square} = \frac{4l^3 F}{Eah^3}.$$ (5.121. egyenlet)

Térjünk vissza a rúdban keletkezett σ_{11} feszültség (5.105) kifejezéséhez. Látható,

hogy ez függ a semleges rétegtől számított *z* távolságtól, másrészt az $\frac{1}{R}$ görbülettől.

Utóbbit az egyensúlyi állapotban az (5.114) adja meg. Ezek alapján a feszültség helyfüggésére a következő kifejezést kapjuk:

$$\sigma_{11} = \frac{F}{I} z (l - x).$$ (5.122. egyenlet)

Ez maximális értékét az *x* = 0, tehát a rögzítés helyén a rúd felső és alsó szélén veszi fel. Ha a rúd keresztmetszetének magassága *h*, akkor

$$\sigma_{11}^{\max} = \frac{F}{I} \frac{hl}{2}.$$ (5.123. egyenlet)

Nagyobb terhelésnél az eltörés veszélye tehát a rögzítésnél a legnagyobb.

Az (5.47) szerint a deformációtenzornak a főátlóban álló másik két eleme is különbözik zérustól:

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \frac{E}{R} z.$$ (5.124. egyenlet)

A Young-modulus (5.58) kifejezését és az (5.59) Poisson-számot beírva:

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \frac{z}{R} = -\nu \frac{z}{R}.$$ (5.125. egyenlet)

A rúd lehajlásakor térfogatváltozás lép fel. A relatív térfogatváltozás:

$$\Theta = \varepsilon_{ii} = (1 - 2\nu) \frac{z}{R}.$$ (5.126. egyenlet)

Az ε_{22} és ε_{33} a 18.2 pont szerint az *y,* illetve a *z* tengely irányába eső relatív hosszúságváltozást jelenti. Mivel ezek nem zérusok, a rúdnak nemcsak a hosszirányú mérete változik, hanem a keresztmetszete is.

Nézzük először az *y* irányú relatív hosszúságváltozást. Az (5.125) szerint pozitív *z* esetén ε_{22} negatív, tehát az *y* irányban rövidül a rúd keresztmetszete a *z*-vel lineárisan. A legkisebb értéket a felső szélén éri el. Negatív *z* értékekre, tehát a semleges réteg alatt, ε_{22} pozitív, vagyis szélesedik a rúd *y* irányban. A kiszélesedés az alsó szélen lesz a legnagyobb. A rúdnak az y=áll. síkkal való metszete a deformáció következtében a függőleges *z* tengely felé hajlik. Hasonló meggondolással adódik a *z* irányú hosszváltozásra, hogy a semleges réteg felett a *z* irányú méret rövidül, míg az alatta levő nyúlik.

Az egyik végén rögzített, és a másik végén *F* erővel lehajlított homogén rúd meghajlásának itt bemutatott közelítő jellegű elmélete kis deformációkra vonatkozik, és a Bernoulli-féle feltevésen alapszik. Az eredmények elég jól egyeznek a tapasztalattal. A pontos elmélet meglehetősen bonyolult, ezért itt nem ismertetjük, de rámutatunk azokra a pontokra, ahol a közelítő tárgyalás hibát követ el. A σ_{11} húzó-(vagy nyomó-) feszültség (5.105) kifejezésében az 1/*R* görbületet állandónak vettük, amikor az (5.46) egyensúlyi feltételeket kielégítettük, viszont az (5.114) szerint a görbület nem állandó, hanem függ az *x*-től. Ezért, ha az egyensúlyi feltételeket pontosan akarnánk kielégíteni, fel kellene tételezni nyírófeszültségeket is az *A* keresztmetszetben. Pl. a σ_{l2} nem lenne zérus. Ez azzal a következménnyel járna, hogy az ε_{12} sem tűnnék el, ami azt eredményezné, hogy a deformálatlan rúd tengelyére merőleges síkkeresztmetszetek a deformáció következtében nem maradnak síkok, ellentétben a Bernoulli-féle feltevéssel.

A (5.46) egyensúlyi feltételek pontosan teljesülnének, ha a rúd lehajlása körívet követne, mert ekkor az 1*/R* görbület állandó lenne. A következőkben erre az esetre szorítkozva, ugyancsak kis deformációkra bemutatjuk a hajlítás elméleti tárgyalását.

Feltételezzük, hogy a rúdban a feszültségek a következők:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} Cz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(5.127. egyenlet)}$$

ahol *C* állandó. Ezek kielégítik az (5.46) egyensúlyi feltételeket. Az (5.127) feszültségeloszlásból az (5.44) határfeltételek alapján meghatározhatók a felület mentén ható $\mathbf{P}_{(n)}$ felületi erők.

A palástonn **n** (0, n_2, n_3), ezért a

$$P_{(n)i} = \sigma_{ij} n_j,$$

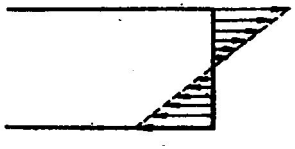
valamint az (5.127) alapján $\mathbf{P}_{(n)} = \mathbf{0}$.

A rúd szabad végén **n** (1, 0, 0), és így az ott ható feszültségre adódik, hogy

$$P_{(n)1} = Cz, \qquad P_{(n)2} = 0, \qquad P_{(n)3} = 0.$$

Ez a normális irányú feszültség a lap tömegközéppontján átmenő semleges száltól felfelé húzó-, lefelé nyomófeszültséget jelent *(50. ábra).*

50. ábra -



A szabad véglapra ható eredő erő zérus:

$$F_x = \int\int P_{(n)x}\,dy\,dz = C\int\int z\,dy\,dz = 0,$$

ugyanis az integrál a tömegközéppont *z* koordinátájával arányos, ez pedig zérus, mert ettől számítjuk a távolságokat. Bár az eredő erő eltűnik a rúd szabad végén, annak *y* tengelyre vonatkozó nyomatéka nem. Számítsuk ki ezt a forgatónyomatékot:

$$M_y = \int\int \left(\mathbf{r} \times \mathbf{P}_{(n)}\right)_y df = \int\int zP_{(n)1}\,dy\,dz = C\int\int z^2 dy\,dz = CI,$$
$$M_x = M_z = 0, \qquad \text{(5.128. egyenlet)}$$

ahol *I*-vel (5.110) szerint az integrált jelöltük. Tulajdonképpen arról van szó, hogy a rúd szabad végén az

$$M = CI \quad \text{(5.129. egyenlet)}$$

forgatónyomatékú erőpárnak kell hatnia ahhoz, hogy a rúdban az (5.127) feszültség alakuljon ki. Az *M*-et tehát határfeltételként adottnak kell tekinteni, és a *C* állandót (5.129) alapján lehet meghatározni:

$$C = \frac{M}{I}. \quad \text{(5.130. egyenlet)}$$

Könnyű belátni, hogy a rúd bármely keresztmetszetén ugyanekkora nyomatékot eredményeznek az (5.127) feszültségek.

Az (5.127) feszültségeknek megfelelő deformációkat az(5.47)-ből lehet kiszámítani. Az így adódó deformációtenzor,

$$\varepsilon_{ij}=\begin{pmatrix}\frac{C}{E}z & 0 & 0\\ 0 & -\nu\frac{C}{E}z & 0\\ 0 & 0 & -\nu\frac{C}{E}z\end{pmatrix},$$ (5.131. egyenlet)

ahol *E* a Young-modulust, ν a Poisson-számot jelenti. A deformációtenzor ismeretében, (5.48) alapján meghatározhatók az **s** elmozdulástér komponensei:

$$s_x=\frac{C}{E}xz,\qquad s_y=-\nu\frac{C}{E}yz,\quad s_z=\frac{C}{2E}\left[\nu\left(y^2-z^2\right)-x^2\right].$$ (5.132. egyenlet)

Megjegyezzük, hogy ezek a deformációs elmozdulás komponensei. A teljes elmozdulás ezektől még egy transzlációban és egy forgásban különbözhet, de most ezeket kizárjuk.

A rúd lehajlása után az (*x*, *y, z)* koordinátájú pont koordinátái az (5.132) elmozdulással megváltoznak. A deformáció utáni koordinátákat *x′, y′, z′*-vel jelölve,

$$x'=x\left(1+\frac{C}{E}z\right),$$
$$y'=y\left(1-\nu\frac{C}{E}z\right),$$
$$z'=z+\frac{C}{2E}\left[\nu\left(y^2-z^2\right)-x^2\right].$$ (5.133. egyenlet)

Ebből kiolvasható, hogy kis lehajlás (az általunk használt lineáris közelítés) esetén a semleges szál *y* = 0, *z* = 0 egyenlete:

$$z'=\frac{C}{2E}x'^2.$$ (5.134. egyenlet)

A $\frac{C}{E}$-ben másodrendű tagot elhagytuk az infinitezimális lineáris közelítés szellemében. Ez egy másodfokú parabolának az egyenlete. Pontosabban egy körívé, mert az

$$\frac{1}{R}=\frac{C}{E}=\frac{M}{EI}$$

görbület állandó. Az *x* = áll. keresztmetszetek síkok maradnak a hajlítás után is, és átmennek az *R* sugarú kör középpontján. Az *y* = áll. metszet is sík marad, de a *z* tengely felé fordul. A semleges réteggel párhuzamos $z' = z_0$ sík a

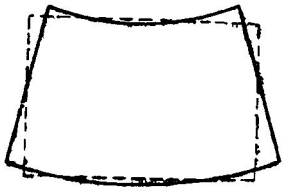
$$z' = z_0 + \frac{C}{2E}\left[\nu\left(y'^2 - z_0^2\right) - x'^2\right]$$ (5.135. egyenlet)

nyeregfelületbe megy át. A deformálódott semleges réteg egyenlete ebből a $z_0 = 0$ behelyettesítésével adódik:

$$z' = \frac{C}{2E}\nu\left(y'^2 - x'^2\right).$$ (5.136. egyenlet)

Az (5.135) nyeregfelület főgörbületeit az (5.115) alapján számíthatjuk ki az *x',* illetve az *y'* szerinti differenciálásokkal. Az általunk használt közelítésben a nevezőben szereplő derivált négyzete az 1 mellett elhagyható, ezért az *x* tengely menti görbületre $-\frac{C}{E}$, az *y* tengely mentire pedig $\nu\frac{C}{E}$ adódik. A négyszög keresztmetszetű rúd keresztmetszete tehát az *51. ábrának* megfelelően deformálódik a lehajlás során.

51. ábra -



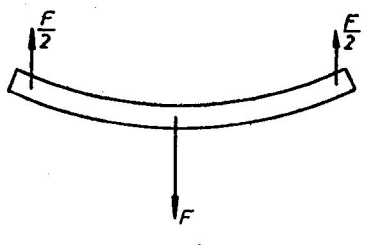
Ha a rúd szabad végének közepes lehajlását a semleges szál lehajlásával azonosítjuk, akkor erre az (5.134)-ből *x'* = *l* helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$s = -z(l) = \frac{C}{2E}l^2 = \frac{M}{2EI}l^2.$$ (5.137. egyenlet)

Térjünk vissza a jó közelítést adó (5.119) eredményhez, amely abban az esetben adja meg az egyik végén rögzített rúd szabad végének lehajlását, amikor a hajlítást a szabad lap mentén ható *F* erővel végezzük. Ennek alapján kiszámítható a két végén alátámasztott és a közepén *F* erővel terhelt vízszintes rúd meghajlása is. Ez ugyanis visszavezethető az egyik végén rögzített rúd esetére, mert felfogható úgy, mintha a középen rögzítve lenne és a két szélén $\frac{F}{2}$ erővel húznánk felfelé. Ennek megfelelően a rúd közepének lehajlását megkapjuk, ha az (5.119)-be *l* helyére $\frac{l}{2}$-t, *F* helyére $\frac{F}{2}$-t írunk. Tehát

$$s = \frac{l^3}{48EI} F.$$ (5.138. egyenlet)

52. ábra -



Ez 16-od része az (5.119) lehajlásnak.

Befejezésül még egy gyakorlatilag fontos esetet tárgyalunk. Gondoljunk el egy *l* hosszúságú homogén vízszintes rudat, amely a két végén van alátámasztva és a saját súlya alatt hajlik meg. Jelöljük a súlyát *Q*-vál, amelyet úgy képzelünk el, hogy egyenletesen terheli a rudat, a hossza mentén $q = \frac{Q}{l}$ sűrűséggel eloszló erővel. Az előbbiek szerint ezt is felfoghatjuk úgy, mintha a közepén rögzítve lenne és a két szélét $\frac{Q}{2} = q\frac{1}{2}$ erővel húznánk felfelé. A rúd bal oldali szélétől $x \leq \frac{1}{2}$ távolságban levő *A* keresztmetszetre forgatónyomatékkot fejt ki a végén ható $q\frac{l}{2}$ külső erő, másrészt a saját súlya. Az előbbinek a nagysága

$$M_1(x) = \frac{ql}{2} x,$$ (5.139. egyenlet)

az utóbbié pedig

$$M_2(x) = \int_0^x (x - x')\, q\, dx' = \frac{q}{2} x^2.$$ (5.140. egyenlet)

Az eredő forgatónyomaték e kettő összege, de mivel a két erő ellentétes irányban akarja a rudat forgatni, a kettő különbségét kell venni:

$$M_1(x) - M_2(x) = \frac{q}{2} x(l - x).$$ (5.141. egyenlet)

Egyensúly esetén ez megegyezik a feszültségektől származó (5.109) forgatónyomatékkal:

$$\frac{E}{R}I=\frac{q}{2}x(l-x).$$ (5.142. egyenlet)

Ebből

$$\frac{1}{R}=\frac{q}{2EI}x(l-x).$$ (5.143. egyenlet)

Az $\frac{1}{R}$ görbület (5.115) kifejezését a nevezőben szereplő z^2 elhagyásával (mivel ez kicsi az l-hez képest) beírva, a semleges szál differenciálegyenletére kapjuk, hogy

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{q}{2EI}x(l-x).$$ (5.144. egyenlet)

Ennek megoldása:

$$z=\frac{qx^3}{12EI}\left(l-\frac{x}{2}\right)+ax+b.$$

Az a és *b* integrálási állandókat a következő határfeltételekből határozzuk meg: *x* = 0-nál *z* = 0, *x*=*l*/2-nél $\frac{dz}{dx}$ = 0. Így adódik, hogy

$$a=-\frac{ql^3}{24EI},\qquad b=0.$$ (5.145. egyenlet)

A semleges szál egyenlete tehát

$$z=-\frac{ql^3}{24EI}x+\frac{q}{12EI}x^3\left(l-\frac{x}{2}\right).$$ (5.146. egyenlet)

Ez negyedfokú parabola egyenlete.

A rúd középpontjának lehajlását (5.146)-ból kapjuk meg az

$$s = -z(l/2)$$

alapján. Eredményül adódik:

$$s = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI} = \frac{5}{8}\frac{l^3}{48EI}Q \quad \text{(5.147. egyenlet)}$$

A középpontjában *F* erővel terhelt, két végén alátámasztott rúd közepének (5.138) lehajlásával összehasonlítva, látszik, hogy a rúd mentén egyenletesen megoszló terhelés esetén a megnyúlás 5/8-szor kisebb az előbbinél.

29. A rugalmas állandók közötti összefüggések homogén izotrop szilárd testekre

A σ_{ij} feszültségtenzor és az ε_{ij} deformációtenzor közötti kapcsolatot kifejező (5.25) anyagi egyenletekben és ennek következtében az alkalmazások során kapott elméleti eredményeinkben a λ, μ Lamé-féle rugalmassági állandók szerepelnek. A gyakorlati életben azonban általában nem ezeket használják, hanem az *E* Young-modulust, a ν Poisson-számot, a *K* kompressziómodulust és a *G* torziómodulust. Az előzőekben bemutatott alkalmazásoknál már bevezettük ezeket a rugalmas állandókat, és megadtuk a λ-, μ-vel való kapcsolatukat is. A könnyebb áttekintés és alkalmazás céljából most összefoglaljuk őket:

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}, \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)},$$
$$K = \frac{1}{\varkappa} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}, \qquad G = \mu. \quad \text{(5.148. egyenlet)}$$

Láttuk, hogy az izotrop testeket két független rugalmas állandóval jellemezhetjük, így tehát ezek közül bármely kettő alkalmas az anyagi minőség jellemzésére. Leginkább az *E*-*t* és a ν-t, vagy a *G*-t és az $m = \frac{1}{\nu}$-t szokták használni, ezért megadjuk a fordított összefüggéseket is:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-\nu)(1-2\nu)} = \frac{2G}{m-2},$$
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G,$$
$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \qquad E = \frac{2G(m+1)}{m}, \qquad \nu = \frac{1}{m} = \frac{E-2G}{2G}. \quad \text{(5.149. egyenlet)}$$

Az anyagi egyenletek E-vel és ν-vel kifejezve,

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1+2\nu}\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right),$$
$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ik} - \nu\sigma_{ll}\delta_{ik}\right].$$ (5.150. egyenlet)

A test szabad energiája:

$$F = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{ll}^2\right).$$ (5.151. egyenlet)

30. Rugalmas hullámok végtelen kiterjedésű izotrop homogén szilárd testekben

A következőkben a szilárd testek olyan rugalmas deformációival foglalkozunk, amelyek haladó hullámként terjednek a testben. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy térfogati erők nem hatnak, és a test homogén, izotrop, valamint végtelen kiterjedésű. Ez az utóbbi feltevés nagymértékben megkönnyíti a dolgunkat, mert a mozgásegyenletek megoldásánál határfeltételeket nem kell figyelembe vennünk. Bár az eredmények erre az idealizált esetre vonatkoznak, mégis igen jól alkalmazhatók azokra a gyakorlati esetekre, amikor a határfeltételektől eltekinthetünk éppen a test nagy méretei miatt.

Az izotrop, homogén szilárd test dinamikáját az (5.42) mozgásegyenlet írja le, amely most az **f** = **0** miatt a következő:

$$\varrho\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = \mu\Delta\mathbf{s} + (\lambda+\mu)\ \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \mathbf{s}.$$ (5.152. egyenlet)

A feltevések miatt a ϱ, μ és λ állandók.

A mozgásegyenletnek olyan megoldásait keressük, amelyek haladó hullámot írnak le, tehát amelyekben az **s** elmozdulásvektor haladó hullámként változik a testben.

Az általános esetben az **s**(**r**, *t*) elmozdulás-vektortér nem lesz mindenütt rotáció- és divergenciamentes. Ugyanis a (4.9) felbontásban a forgó mozgásnak megfelelő rész a rot **s**-et tartalmazza, amely (4.14) szerint az elemi elfordulás **φ** szögvektorát határozza meg. A deformáció során fellépő relatív térfogatváltozás pedig (4.26) szerint a div **s**-sel egyenlő. Viszont a vektoranalízis egyik tétele szerint (Függelék 6. pontja) az **s**(**r**) vektortér felbontható egy rotációmentes $\mathbf{s}_1$ és egy divergenciamentes $\mathbf{s}_2$ vektortér összegére:

$\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$, (5.153. egyenlet)

ahol

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \mathbf{s}_1 = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{s}_1 = \Theta, \\ &\operatorname{div} \mathbf{s}_2 = 0, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{s}_2 = 2\boldsymbol{\varphi}. \end{aligned}$$ (5.154. egyenlet)

A Függelék 6. pontjában megmutatjuk, hogy az $\mathbf{s_1}$ rotációmentes rész egy $\Phi(\mathbf{r}, t)$ skalárpotenciálból, a divergenciamentes $\mathbf{s_2}$ pedig egy $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ vektorpotenciálból származtatható az

$$\begin{aligned} &\mathbf{s}_1 = \operatorname{grad} \Phi, \\ &\mathbf{s}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{A} \end{aligned}$$ (5.155. egyenlet)

összefüggések alapján.

Az (5.152) mozgásegyenlet a

$\Delta \mathbf{s} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{s}$ (5.156. egyenlet)

vektoranalitikai azonosság felhasználásával a következő alakba írható:

$$\varrho \frac{\partial \mathbf{s}^2}{\partial t^2} = (2\mu + \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{s}.$$ (5.157. egyenlet)

Helyettesítsük be ide az (5.153) felbontást,és vegyük tekintetbe az (5.154) feltételeket, így adódik, hogy

$$\varrho \left(\frac{\partial^2 \mathbf{s}_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{s}_2}{\partial t^2} \right) = (2\mu + \lambda) \Delta \mathbf{s}_1 + \mu \Delta \mathbf{s}_2.$$ (5.158. egyenlet)

Ez az egyenlet teljesül, ha $\mathbf{s_1}$ és $\mathbf{s_2}$ kielégítik a

$$\begin{aligned} &\Delta \mathbf{s}_1 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \mathbf{s}_1}{\partial t^2} = 0, \\ &\Delta \mathbf{s}_2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \mathbf{s}_2}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$ (5.159. egyenlet)

hullámegyenleteket, ahol

$$c_1^2 = \frac{2\mu + \lambda}{\varrho}, \qquad c_2^2 = \frac{\mu}{\varrho}.$$ (5.160. egyenlet)

30.1 Síkhullámok

Vizsgáljuk először a hullámegyenletek síkhullámmegoldását. Ez utóbbin azt értjük, hogy a rendszer fizikai állapota (tehát az **s** elmozdulásvektor) rögzített időpillanatban egy sík minden pontjában ugyanaz, és az idő múlásával ez az állapot a sík normálisa irányában állandó sebességgel terjed. Jelöljük a sík normális irányú egységvektorát **n**-nel. A geometriából ismeretes, hogy a sík egyenlete

$$\mathbf{nr} = d = \text{áll.},$$ (5.161. egyenlet)

ahol *d* a síknak a koordináta-rendszer középpontjától mért távolságát jelenti. Könnyű belátni, hogy síkhullámnál az $\mathbf{s}_{1,2}$ az időt és a helykoordinátákat a $t \mp \frac{\mathbf{nr}}{v}$ alakban tartalmazza. A *v* egyelőre ismeretlen sebesség dimenziójú állandó paraméter. Tehát

$$\mathbf{s}_{1,2} = \mathbf{s}_{1,2}\left(t \mp \frac{\mathbf{nr}}{v_{1,2}}\right).$$ (5.162. egyenlet)

A függvény alakja tetszőleges lehet; a lényeg az, hogy kétszer differenciálható legyen és az argumentum $t \mp \frac{\mathbf{nr}}{v}$. Ugyanis **nr** az (5.161) szerint egy sík mentén állandó, és emiatt rögzített $t = t_0$-nál az $\mathbf{s}_{1,2}$ is az. A *v* paraméter fizikai jelentését a következő meggondolással kapjuk. Legyen t_1 időpontban a középponttól d_1 távolságra valamilyen állapot, amely a t_2 időpillanatban d_2 távolságra lesz a koordináta-rendszer középpontjától. Mivel e két síkban ugyanaz az állapot, ezért az argumentumoknak meg kell egyezniük:

$$t_1 \mp \frac{d_1}{v} = t_2 \mp \frac{d_2}{v}.$$
$$d_2 - d_1 = \pm v(t_2 - t_1).$$ (5.163. egyenlet)

Eszerint az argumentumban szereplő *v* állandó a hullám terjedési sebességét jelenti. Ha a hullám az **n** irányában terjed, akkor az argumentumban a negatív: ha pedig ellentétes irányban, akkor a pozitív előjel veendő.

Az (5.162) függvény alakját a hullámot gerjesztő forrás mozgásállapota határozza meg. Ha a hullámot időben periodikusan változó hatás hozza létre, akkor az elmozdulástér is periodikus függvénye az argumentumnak.

A hullám terjedési sebességét az (5.159) hullámegyenletekből lehet meghatározni. Ugyanis ahhoz, hogy (5.162) megoldása legyen ezeknek az egyenleteknek, a *v* nem lehet tetszőleges, hanem csak az egyenletek által megszabott értéket vehet fel. Tegyük fel, hogy (5.162) az (5.159) hullámegyenletek megoldása, és határozzuk meg ebből a követelményből a *v* terjedési sebességet:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{s_1}}{\partial t^2} = \mathbf{s_1''},$$

$$\Delta \mathbf{s_1} = \frac{\partial^2 \mathbf{s_1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{s_1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{s_1}}{\partial z^2} = \mathbf{s_1''} \frac{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}{v_1^2} = \frac{1}{v_1^2} \mathbf{s_1''},$$

ahol $\mathbf{s_1}'$ az $\mathbf{s_1}$-nek a teljes argumentum szerinti második deriváltját jelenti. Ezeket az (5.159) első egyenletébe helyettesítve,

$$\mathbf{s_1''} \left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) = 0.$$ (5.164. egyenlet)

Ez az egyenlet akkor teljesül a független változók minden értékére, ha a zárójeles kifejezés zérus, tehát

$$v_1 = c_1 = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\varrho}}.$$ (5.165. egyenlet)

Hasonlóképpen adódik az $\mathbf{s_2}$ hullám terjedési sebességére

$$v_2 = c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}.$$ (5.166. egyenlet)

Az (5.162) síkhullám tehát megoldása az (5.159) hullámegyenletnek, ha a $v_{1,\,2}$ terjedési sebességet az (5.165), illetve az (5.166) értékeknek választjuk. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{s}_1\left(t \mp \frac{\mathbf{nr}}{v_1}\right), \mathbf{s}_2\left(t \mp \frac{\mathbf{nr}}{v_2}\right)$ síkhullámok különböző sebességgel terjednek az izotrop homogén szilárd közegben.

Az $\mathbf{s_1}$- és $\mathbf{s_2}$-nek ki kell még elégíteniük az (5.154) feltételeket is. Ez további megszorítást jelent e hullámokra.

Nézzük először az $\mathbf{s_2}$-t. Ennek divergenciamentesnek kell lennie a tér minden pontjában:

$$\operatorname{div} \mathbf{s_2} = \frac{\partial s_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial s_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial s_{2z}}{\partial z} = \mp \frac{1}{v_2} \left(s'_{2x} n_x + s'_{2y} n_y + s'_{2z} n_z \right) = \mp \frac{1}{v_2} \mathbf{s'_2 n} = 0.$$ (5.167. egyenlet)

Eszerint

$\mathbf{s}_2'\mathbf{n} = 0.$

A teljes argumentum szerint integrálva

$\mathbf{s_2 n}$ = áll.

Az állandó értékét $\mathbf{s}_2^0\mathbf{n}$ alakba írva, $\mathbf{s}_2^0$ egy időben és térben állandó vektorteret jelent. Mivel most hullámmegoldást vizsgálunk, ez a homogén sztatikus elmozdulástér zérusnak vehető. így az $\mathbf{s_2}$ hullámra azt kapjuk, hogy

$\mathbf{s}_2\mathbf{n} = 0.$ (5.168. egyenlet)

Az $\mathbf{s_2}$ hullámban az elmozdulás tehát merőleges a hullám terjedési irányára. Az ilyen hullámot *transzverzálisnak* nevezzük.

Az $\mathbf{s_1}$-nek (5.154) szerint rotációmentesnek kell lennie a térben mindenütt. Képezzük a rot $\mathbf{s_1}$ *x*-komponensét:

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{s}_1)_x = \frac{\partial s_{1z}}{\partial y} - \frac{\partial^2 s_{1y}}{\partial z} = \mp\frac{1}{v_1}\left(s_{1z}'n_y - s_{1y}'n_z\right) = \mp\frac{1}{v_1}(\mathbf{n}\times\mathbf{s}_1')_x.$$

Hasonló számítással adódik a másik két komponensre,

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{s}_1)_y = \mp\frac{1}{v_1}(\mathbf{n}\times\mathbf{s}_1')_y, \qquad (\mathrm{rot}\,\mathbf{s}_1)_z = \mp\frac{1}{v_1}(\mathbf{n}\times\mathbf{s}_1)_z.$$

Ezeket összefoglalva, írhatjuk, hogy

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{s}_1) = \mp\frac{1}{v_1}(\mathbf{n}\times\mathbf{s}_1') = 0.$$

Az argumentum szerint integrálva,

$\mathbf{n}\times\mathbf{s}_1$ = áll.

Az állandóba foglalt homogén sztatikus elmozdulástértől eltekintve, az $\mathbf{s_1}$ síkhullámra adódik:

$\mathbf{n}\times\mathbf{s}_1 = 0.$ (5.169. egyenlet)

Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{s_1}$ hullámban az elmozdulás a terjedési iránnyal párhuzamos. Az ilyen hullámot *longitudinális* hullámnak nevezzük.

A szilárd közegben tehát mind transzverzális, mind longitudinális rugalmas hullám terjedhet. A két hullám sebessége különböző. A transzverzális síkhullám

$$v_t = v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}},$$ (5.170. egyenlet)

a longitudinális pedig

$$v_l = v_1 = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\varrho}}$$ (5.172. egyenlet)

ahol ψ az $\mathbf{s}_1$, illetve $\mathbf{s}_2$ bármelyik komponensét jelentheti.

Feltesszük, hogy ψ az időben periodikus: $\psi \approx \cos \omega t$. A fizikában gyakori a koszinusz- és szinuszfüggvényeket komplex alakban írni, de nem szabad elfelejteni, hogy a megfelelő fizikai mennyiség a használt komplex függvény valós részével egyezik meg. Ennek megfelelően ψ-t most a

$$\psi = \varphi(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t}$$ (5.173. egyenlet)

alakban vesszük fel. A $\varphi(\mathbf{r})$ egyelőre ismeretlen függvény. Ahhoz, hogy ψ megoldása legyen az (5.172) hullámegyenletnek, $\varphi(\mathbf{r})$-nek ki kell elégítenie a

$$\Delta\varphi + \frac{\omega^2}{v_2}\varphi = 0$$ (5.174. egyenlet)

egyenletet. Keressük ennek megoldását a

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z)$$ (5.175. egyenlet)

alakban. Tegyük fel, hogy ez megoldása az (5.174)-nek:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}\varphi_2\varphi_3 + \frac{d^2\varphi_2}{dy^2}\varphi_1\varphi_3 + \frac{d^2\varphi_3}{dz^2}\varphi_2\varphi_3 + \frac{\omega^2}{v^2}\varphi_1\varphi_2\varphi_3 = 0.$$

Osszuk el az egyenletet $\varphi_1\varphi_2\varphi_3$-mal (feltéve, hogy ez nem zérus):

$$\frac{1}{\varphi_1}\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{1}{\varphi_2}\frac{d^2\varphi_2}{dy^2} + \frac{1}{\varphi_3}\frac{d^2\varphi_3}{dz^2} + \frac{\omega^2}{v^2} = 0.$$ (5.176. egyenlet)

Ez az egyenlet akkor teljesül az *x, y, z* minden értékére, ha az első három tag külön-külön egy-egy állandóval egyenlő. Legyenek ezek rendre $-\alpha^2$, $-\beta^2$,$-\gamma$2. Tehát

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = -\alpha^2\varphi_1, \qquad \frac{d^2\varphi_2}{dy^2} = -\beta^2\varphi_2, \qquad \frac{d^2\varphi_3}{dz^2} = \gamma^2\varphi_3.$$ (5.177. egyenlet)

E három állandó nem független egymástól, mert (5.176) szerint fennáll az alábbi egyenlőség:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{v^2}.$$ (5.178. egyenlet)

Az (5.177) egyenletek megoldása:

$$\varphi_1(x) = e^{i\alpha x},$$
$$\varphi_2(y) = e^{i\beta y},$$
$$\varphi_3(z) = e^{i\gamma z}.$$ (5.179. egyenlet)

Ezek szorzata adja az (5.174) keresett megoldását:

$$\varphi(x,y,z) = e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}.$$ (5.180. egyenlet)

Ezt (5.173)-ba helyettesítve, az (5.172) hullámegyenlet periodikus megoldását kapjuk:

$$\psi(\mathbf{r},t) = ae^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z-\omega t)},$$ (5.181. egyenlet)

ahol az *a* amplitúdó állandó komplex szám. Látjuk, hogy ha a *ψ az* időben periodikus, akkor a helykoordináták szerint is annak kell lennie. Az *α*, *β*, *γ* állandókat egy **k** vektor három komponensének tekintve, ez a megoldás a következő szokásos alakba írható:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = ae^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}.$$ (5.182. egyenlet)

Mivel $k_x = \alpha$, $k_y = \beta$ és $k_z = \gamma$, az (5.178) összefüggés szerint a **k** vektor nagysága

$$k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \frac{\omega}{v}.$$ (5.183. egyenlet)

Az időben és térben periodikusan változó hullámok jellemzésére használjuk a rezgésidő, a frekvencia és a hullámhossz fogalmát. Ezeket a következőképpen definiáljuk. A tér egy rögzített helyén a fizikai állapot a *T rezgésidő* múlva ugyanaz lesz, mint a *t* időpontban volt, ezért a **kr − ωt** fázis ezalatt 2*π*-vel változik meg. Ennélfogva

$$\mathbf{kr} - \omega\left(t + T\right) = \mathbf{kr} - \omega t - 2\pi,$$

amiből

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$ (5.184. egyenlet)

A rezgésidő reciprok értéke *a frekvencia (rezgésszám):*

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$ (5.185. egyenlet)

A fázisban szereplő *ω* paraméter eszerint a *v* frekvencia 2*π*-szerese, amelyet *körfrekvenciának* nevezünk.

Hullámhosszon azt a legrövidebb távolságot értjük, amely rögzített *t* időpillanatban két olyan hullámfelület között van, amelyekben a fizikai állapot ugyanaz. Síkhullám esetén a hullámfelület a *t* időpillanatban $\frac{\mathbf{k}}{k}\mathbf{r} = d$ távolságra van a koordináta-rendszer középpontjától. Ha a hullámhosszt *λ*-val jelöljük, akkor a mondottak értelmében az adott időpontban *d+λ* távolságra lesz ugyanaz a fizikai állapot, mint a *d* távolságra levő hullámfelületen. Ez azt jelenti, hogy a két fázis egymástól 2*π*-ben különbözik:

$k(d+\lambda) - \omega t = kd - \omega t + 2\pi$.

Ebből

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$ (5.186. egyenlet)

Eszerint **k** a hullám terjedési irányába mutató, 2*π*/*λ* nagyságú vektor, amelyet *hullámszámvektornak* nevezünk.

$$\frac{\omega\lambda}{v} = 2\pi,$$ (5.187. egyenlet)

vagy

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = vT.$$ (5.188. egyenlet)

30.2 Gömbhullámok

Az (5.159), illetve (5.172) hullámegyenletnek az eddig tárgyalt síkhullámon kívül más megoldásai is vannak. Ezek közül az alkalmazásokban leggyakrabban az ún. gömbhullám fordul elő. Gömbhullámon olyan megoldást értünk, amelynél a fizikai állapot rögzített időpontban egy gömbfelület mentén ugyanaz, és véges sebességgel terjed a sugár irányában ki- vagy befelé. Mivel a gömbfelület pontjaira a hullámforrástól számított *r* rádiuszvektor állandó, ezért a gömbhullám fázisa az időn kívül csak az *r*-et tartalmazza $t \mp \frac{r}{v}$ alakban. Tehát

$$\psi = \psi\left(t \mp \frac{r}{v}\right).$$ (5.189. egyenlet)

Az (5.189) gömbszimmetrikus megoldás vizsgálatánál célszerű az (5.172) hullámegyenletet térbeli polárkoordinátákban felírni. Ekkor a Függelék 7. pontja szerint

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right].$$

A gömbszimmetria miatt ψ nem függ a ϑ, φ szögektől, ezért csak az első két tag különbözik most zérustól. Ezt az (5.172) hullámegyenletbe beírva, a gömbhullám

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$ (5.190. egyenlet)

differenciálegyenletét kapjuk. Az első két tag átalakítható a következőképpen:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi).$$

Az (5.190)-be behelyettesítve, majd az egyenletet *r*-rel megszorozva, kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial t^2} = 0.$$ (5.191. egyenlet)

Ennek megoldása:

$$r\psi = f\left(t \mp \frac{r}{v}\right),$$

amiből

$$\psi = \frac{1}{r} f\left(t \mp \frac{r}{v}\right).$$ (5.192. egyenlet)

Az *f* függvény konkrét alakját a hullámforrás mozgásállapota határozza meg. Időben koszinusz vagy szinusz szerint változó forrás esetén az *f* is ilyen függvény. A komplex írásmódot használva,

$$\psi = \frac{a}{r} e^{i(kr - \omega t)}.$$ (5.193. egyenlet)

A gömbhullám *a*/*r* amplitúdója a hullámforrástól távolodva, a távolsággal fordított arányban csökken. Az (5.192)-ből látszik, hogy az 1/*r* szerinti csökkenés minden gömbhullámra igaz.

Az (5.159) hullámegyenletek gömbhullámmegoldásairól ugyanúgy belátható, mint a síkhullámoknál, hogy az $\mathbf{s}_2$ transzverzális, az $\mathbf{s}_1$ pedig longitudinális hullámot jelent. Az előbbi sebessége

$$v_{tr} = c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}},$$

az utóbbié

$$v_l = c_1 = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\varrho}}.$$

A transzverzális gömbhullámban az elmozdulás a sugárirányú terjedésre merőleges síkban van, a longitudinálisnál sugárirányú.

30.3 Kompressziós és torziós hullámok

A következőkben megvizsgáljuk a szilárd közegben különböző sebességgel terjedő kétféle (transzverzális és longitudinális) rugalmas hullám további fizikai tulajdonságait. Az elmozdulás-vektortér rotációmentes $\mathbf{s}_1$ része a közeg kis tartományának olyan elmozdulását írja le, amely térfogatváltozással van kapcsolatban. Ugyanis a Θ relatív térfogatváltozás (4.26) szerint

$$\Theta = \operatorname{div} \mathbf{s} = \operatorname{div} \mathbf{s}_1,$$ (5.194. egyenlet)

mivel div $\mathbf{s_2} = 0$.

A divergenciamentes $\mathbf{s_2}$ a test kis részeinek forgó mozgásából származó elmozdulás. Az elemi elfordulás $\boldsymbol{\varphi}$ szögvektora (4.14) szerint

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{s} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{s}_2. \qquad \text{(5.195. egyenlet)}$$

Ezekkel az elmozdulásvektorokkal jellemzett fizikai állapot az előzőek szerint haladó hullám formájában terjed tova a szilárd közegben. A fenti kapcsolatok szerint várható, hogy a közeg valamely helyén keltett relatív térfogatváltozás, tehát sűrűsödés vagy ritkulás, valamint forgás szintén haladó hullámként terjed. Könnyű megmutatni, hogy ez valóban így van, ugyanis az (5.152) mozgásegyenletből mind a Θ-ra, mind a $\boldsymbol{\varphi}$-re (5.159) típusú hullámegyenlet adódik. Képezzük e célból előbb az (5.159) egyenlet mindkét oldalának a divergenciáját, majd a rotációját

$$\varrho\frac{\partial^2 \operatorname{div}\mathbf{s}}{\partial t^2} = \mu\,\operatorname{div}(\Delta\mathbf{s}) + (\mu+\lambda)\operatorname{div}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{s},$$

$$\varrho\frac{\partial^2 \operatorname{rot}\mathbf{s}}{\partial t^2} = \mu\,\operatorname{rot}(\Delta\mathbf{s}) + (\mu+\lambda)\operatorname{rot}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{s}.$$

A jobb oldalak első tagjaiban a div és a Δ, valamint a rot és a Δ műveletek sorrendje felcserélhető, másrészt div grad= Δ, továbbá rot grad ≡ 0. így e két egyenlet a következőképpen alakul:

$$\varrho\frac{\partial^2 \operatorname{div}\mathbf{s}}{\partial t^2} = (2\mu+\lambda)\Delta(\operatorname{div}\mathbf{s}),$$

$$\varrho\frac{\partial^2 \operatorname{rot}\mathbf{s}}{\partial t^2} = \mu\,\Delta(\operatorname{rot}\mathbf{s}).$$

Az (5.194) és (5.195) szerint ezek az egyenletek a Θ relatív térfogatváltozásra, illetve a φ forgásvektorra vonatkozó hullámegyenletek:

$$\Delta\Theta - \frac{1}{C_1^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta\boldsymbol{\varphi} - \frac{1}{C_t^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} = 0, \qquad \text{(5.196. egyenlet)}$$

ahol

$$C_1^2 = \frac{2\mu+\lambda}{\varrho}, \qquad C_t^2 = \frac{\mu}{\varrho}.$$

Az (5.196) egyenletek hullámmegoldásai azt jelentik, hogy a közeg valamely helyén keletkezett ritkulás vagy sűrűsödés C_k sebességgel, a forgás pedig C_f sebességgel terjed haladó hullámként tova. Az előbbit ennek megfelelően *kompressziós* vagy *dilatációs,* az utóbbit *torziós* vagy *rotációs hullámnak* nevezzük. Szilárd közegben általában mindkét hullám egyszerre fellép, ugyanis valamely helyen keletkezett zavar a (4.9) felbontás szerint tartalmazhat dilatációs és forgó részt is.

A kompressziós hullámban (5.194) szerint az $\mathbf{s_1}$ elmozdulás terjedésirányú, míg a torziós hullámban a terjedésre merőleges. Előbbi a longitudinális hullám sebességével, utóbbi a transzverzáliséval terjed. A longitudinális hullámmal tehát sűrűsödés, illetve ritkulás jár együtt, a transzverzálissal általában forgás.

Be lehet látni, hogy a transzverzális periodikus hullámok − ellentétben a longitudinálissal − polarizáltak. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{s_2}$ elmozdulásvektor végpontjának a terjedési irányra merőleges síkra való vetülete ellipszist, kört vagy egyenest ír le. Ennek megfelelően beszélünk elliptikusan, cirkulárisan vagy lineárisan polarizált rugalmas transzverzális hullámokról. A terjedési irányra merőleges $\mathbf{s_2}$ elmozdulásvektor mindig felbontható két egymásra merőleges összetevőre, amelyek a tér egy adott helyén két merőleges harmonikus rezgést jelentenek. E két összetevő közötti fáziskülönbség szabja meg a polarizáció jellegét. A részletes tárgyalást az elektromágneses hullámokkal kapcsolatban mutatjuk be az Elektrodinamika c.#[2] könyv 50. pontjában.

31. Rugalmas hullámok visszaverődése és törése két közeg határán

Gondoljuk el, hogy ω frekvenciájú monokromatikus rugalmas síkhullám két különböző közeg határfelületére érkezik az egyik közegből. A hullámban a közeg részecskéi harmonikus rezgést végeznek, tehát az **s** elmozdulásvektor periodikus függvény, amelyet most is komplex alakban veszünk fel. Egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a két közeget elválasztó felület sík, és ezt a koordináta-rendszer *xy* síkjával vesszük azonosnak. A *z* tengely iránya mutasson az első (1-gyel jelölt) közegbe. A beeső hullám **k** hullámszámvektorának komponenseit α-, β-, γ-val jelölve,

$$\mathbf{s} = \mathbf{s_0} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t)},$$ (5.197. egyenlet)

ahol az $\mathbf{s_0}$ amplitúdó állandó komplex vektor.

Az elválasztó felület pontjai a beeső hullám hatására harmonikus rezgőmozgást végeznek és újabb hullámok forrásai lesznek. Megjelenik az első közegbe visszavert és a másodikba irányváltozással behatoló ún. megtört hullám. A visszaverődés és törés során a hullám jellege általában megváltozik. Ha a beeső hullám tiszta transzverzális vagy longitudinális volt, a visszavert és megtört általában mindkét fajtát fogja tartalmazni. A hullám jellege csak akkor nem változik meg, ha merőlegesen esik a határfelületre, vagy ha a transzverzális hullám tetszőleges szög alatt esik ugyan, de a rezgés a két közeget elválasztó síkkal párhuzamos.

A visszaverődés és törés törvényét a határfeltételek határozzák meg. Ezek a következők. Az *xy* síkban a két közeg pontjainak elmozdulása megegyezik, másrészt a rezgés hatására keletkezett feszültségvektornak az elválasztó sík két oldalán ugyanannak kell lennie, mert a két közeg az érintkezési felület mentén egymásra ugyanakkora, de ellentétes irányú erőt fejt ki.

[2]# Nagy Károly: Elektrodinamika 3. kiadás, Tankönyvkiadó, 1979, 182. oldal.

Jelöljük a visszavert hultám elmozdulásvektorát **s'**-vel, a megtörtét **s"**-vel. A megfelelő frekvenciákat és hullámszámvektorokat ω'-, ω''-vel és **k'**-, **k"**-vel. Ennek megfelelően a visszavert és megtört síkhullámok

$$\mathbf{s}' = \mathbf{s}_0' e^{i(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z - \omega' t)} \quad \text{(5.198. egyenlet)}$$

$$\mathbf{s}'' = \mathbf{s}_0'' e^{i(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z - \omega'' t)}. \quad \text{(5.199. egyenlet)}$$

A határfeltétel miatt a két közeget elválasztó $z = 0$ síkban

$$\mathbf{s} + \mathbf{s}' = \mathbf{s}'', \quad \text{(5.200. egyenlet)}$$

amely a hullámok (5.197)−(5.199) kifejezéseit beírva, a következő egyenletre vezet:

$$\mathbf{s}_0 e^{i(\alpha x + \beta y - \omega t)} + \mathbf{s}_0' e^{i(\alpha' x + \beta' y - \omega' t)} = \mathbf{s}_0'' e^{i(\alpha'' x + \beta'' y - \omega'' t)}. \quad \text{(5.201. egyenlet)}$$

Differenciáljuk az egyenlet mindkét oldalát az idő szerint:

$$\omega \mathbf{s}_0 e^{i(\alpha x + \beta y - \omega t)} + \omega' \mathbf{s}_0' e^{i(\alpha' x + \beta' y - \omega' t)} = \omega'' \mathbf{s}_0'' e^{i(\alpha'' x + \beta'' y - \omega'' t)}. \quad \text{(5.202. egyenlet)}$$

Az (5.201), (5.202) egyenleteknek az *xy* sík minden pontjára minden időben fenn kell állniuk. Ez csak akkor teljesül, ha a három frekvencia megegyezik egymással:

$$\omega = \omega' = \omega''. \quad \text{(5.203. egyenlet)}$$

Ezt figyelembe véve, az (5.201) egyenlőség egyenértékű az

$$\mathbf{s}_0 e^{i(\alpha x + \beta y)} + \mathbf{s}_0' e^{i(\alpha' x + \beta' y)} = \mathbf{s}_0'' e^{i(\alpha'' x + \beta'' y)} \quad \text{(5.204. egyenlet)}$$

határfeltétellel.

Legyen először az *y* értéke rögzített, és differenciáljuk az egyenlet mindkét oldalát *x* szerint, majd rögzített *x* mellett differenciáljunk *y* szerint:

$$\alpha \mathbf{s}_0 e^{i(\alpha x + \beta y)} + \alpha' \mathbf{s}_0' e^{i(\alpha' x + \beta' y)} = \alpha'' \mathbf{s}_0'' e^{i(\alpha'' x + \beta'' y)}, \quad \text{(5.205. egyenlet)}$$

$$\beta \mathbf{s}_0 e^{i(\alpha x + \beta y)} + \beta' \mathbf{s}_0' e^{i(\alpha' x + \beta' y)} = \beta'' \mathbf{s}_0'' e^{i(\alpha'' x + \beta'' y)}. \quad \text{(5.206. egyenlet)}$$

Az (5.204)−(5.206) egyenletekből következik, hogy

$$\alpha = \alpha' = \alpha'',$$ (5.207. egyenlet)

$$\beta = \beta' = \beta''.$$ (5.208. egyenlet)

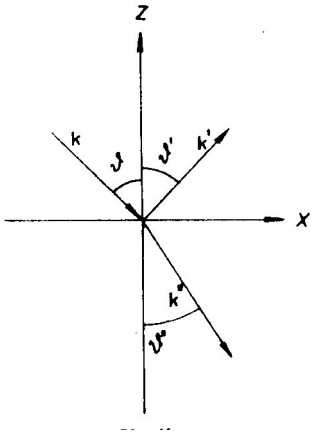
Ezek azt jelentik, hogy a **k**, **k'**, **k"** hullámszámvektorok *x,* illetve *y* komponensei megegyeznek egymással. Másként kifejezve, a hullámszámvektorok *xy* síkra való vetületei egyenlőek. A hullámszámvektor nagyságának (5.183) kifejezését figyelembe véve, (5.207) és (5.208) így írható:

$$\frac{\cos(\mathbf{k}, x)}{v} = \frac{\cos(\mathbf{k}', x)}{v'} = \frac{\cos(\mathbf{k}'', x)}{v''},$$ (5.209. egyenlet)

$$\frac{\cos(\mathbf{k}, y)}{v} = \frac{\cos(\mathbf{k}', y)}{v'} = \frac{\cos(\mathbf{k}'', y)}{v''}.$$ (5.210. egyenlet)

Itt (**k**, x), (**k'** x), ..., (**k**, y), (**k'**, *y*), ... a megfelelő hullámszámvektoroknak az *x*, illetve *y* tengellyel bezárt szögét jelöli. Az (5.207)-, (5.208)-ból következik, hogy a három hullámszámvektor egy síkban van. Ugyanis, ha a koordináta-rendszer *x*, *y* tengelyeit úgy irányítjuk, hogy a beeső hullám hullámszámvektora az *xz* síkban legyen, akkor a másik kettő is benne lesz, mert ha $\beta = 0$, akkor $\beta' = \beta'' = 0$. A három **k** vektor által meghatározott síkot nevezzük *beesési síknak.* A sin δ = cos ($\delta + \pi/2$) trigonometriai összefüggés, valamint az *53. ábra* alapján látható, hogy az (5.209) egyenlőségből a visszaverődés és törés törvényére adódik

53. ábra -



$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}=\frac{v}{v'},$$ (5.211. egyenlet)

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta''}=\frac{v}{v''}.$$ (5.212. egyenlet)

ϑ a beeső hullám terjedési irányának a két közeget elválasztó síkra merőleges egyenessel bezárt szöge, az ún. beesési szög. Hasonló a jelentése a ϑ' visszaverődési és ϑ'' törési szögnek.

Tegyük fel most, hogy a beeső hullám transzverzális. Ekkor $v=v_{\mathrm{trl}}$ a transzverzális hullám sebessége az „1" közegben. A visszavert hullámnak van transzverzális és longitudinális része. Az előbbire $v' = v_{\mathrm{trl}}$, és így az (5.211)-ből adódik, hogy

$$\vartheta=\vartheta',$$ (5.213. egyenlet)

vagyis a visszavert transzverzális hullám visszaverődési szöge megegyezik a beesési szöggel. A visszavert longitudinális hullám sebessége $v' = v_{\mathrm{l1}}$, és emiatt

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}=\frac{v_{\mathrm{trl}}}{v_{\mathrm{l1}}}.$$ (5.214. egyenlet)

Mivel $v_{\mathrm{trl}} \neq v_{\mathrm{l1}}$, ezért a longitudinális visszavert hullám ϑ' szöge nem egyezik meg a beesési szöggel.

A megtört hullám is transzverzális és longitudinális részből áll, amelyek törési szögeire adódik:

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta''}=\frac{v_{tr1}}{v_{tr2}},$$ (5.215. egyenlet)

illetve

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta''}=\frac{v_{\mathrm{trl}}}{v_{\mathrm{l2}}}.$$ (5.216. egyenlet)

Hasonlóképpen határozhatók meg a visszaverődés és a törés szögei, ha a beeső hullám longitudinális. Most a longitudinális hullám verődik vissza ugyanolyan szögben, mint a beesési szög.

A visszavert és megtört hullám $\mathbf{s}_0'$ illetve $\mathbf{s}_0''$ amplitúdójának meghatározásához figyelembe kell vennünk a másik határfeltételt is, amely szerint a feszültségvektor a határfelület két oldalán megegyezik. A számítás tetszőleges beesési irány esetére elég bonyolult, ezért csak a merőleges beeséssel foglalkozunk. A fizikai tartalom ebből is kiderül.

Feltesszük tehát, hogy a beeső hullám a − *z* tengely irányában esik a határfelületre. Onnan egy része ugyancsak merőlegesen visszaverődik, másik része továbbhalad törés nélkül a második közegbe.

Először longitudinális beeső hullámot tekintünk. Ekkor mind a visszavert, mind a második közegbe bemenő hullám is longitudinális lesz. Az **s**, **s'**, **s"** elmozdulásvektorok ennek megfelelően az elválasztó síkra merőlegesek, vagyis csak a *z* komponensük különbözik zérustól:

$$s_z = s = -s_0 e^{i(-kz-\omega t)},$$
$$s'_z = s' = s'_0 e^{i(-k'z-\omega t)},$$
$$s''_z = s'' = -s''_0 e^{i(-k''z-\omega t)}. \quad \text{(5.217. egyenlet)}$$

Az (5.200) határfeltétel:

$$-s_0 + s'_0 = -s''_0. \quad \text{(5.218. egyenlet)}$$

A feszültségvektorok egyenlőségére vonatkozó határfeltétel a *z* = 0 síkban:

$$\mathbf{P}_{(n)} + \mathbf{P}'_{(n)} = \mathbf{P}''_{(n)}. \quad \text{(5.219. egyenlet)}$$

A $\mathbf{P}_{(n)}$ feszültségvektor és a σ_{ik} feszültségtenzor közötti $\mathbf{P}_{(n)i} = \sigma_{ij} n_j$ összefüggést figyelembe véve, az (5.219) vektoregyenlet komponensekben így írható a *z* = 0 helyen:

$$\sigma_{iz} + \sigma'_{iz} = \sigma''_{iz} \qquad (i = x, y, z). \quad \text{(5.220. egyenlet)}$$

Az (5.217) elmozdulásokból az általuk keltett feszültségek kiszámíthatók. Előbb az ε_{ik} deformációtenzort, majd abból a

$$\sigma_{ik} = 2\mu\varepsilon_{ik} + \lambda\varepsilon_{ll}\delta_{ik} \quad \text{(5.221. egyenlet)}$$

anyagi egyenletek alapján a σ_{ik}-t határozzuk meg. Mivel az elmozdulás a longitudinális hullámokban a *z* tengely mentén történik, az ε_{ik} definíciójából következik, hogy csak az ε_{zz} elemek különböznek zérustól:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial s_z}{\partial z} = ikz_0 e^{i(-kz-\omega t)},$$
$$\varepsilon'_{zz} = \frac{\partial s'_z}{\partial z} = ik's'_0 e^{i(k'z-\omega t)},$$
$$\varepsilon''_{zz} = \frac{\partial s''_z}{\partial z} = ik''s''_0 e^{i(-k''z-\omega t)}. \quad \text{(5.222. egyenlet)}$$

Az (5.221) szerint a feszültségtenzornak is csak a σ_{zz} elemei lesznek zérustól különbözőek:

$$\sigma_{zz} = (2\mu_1 + \lambda_1)\varepsilon_{zz} = (2\mu_1 + \lambda_1)ik s_0 e^{i(-kz-\omega t)},$$
$$\sigma'_{zz} = (2\mu_1 + \lambda_1)\varepsilon'_{zz} = (2\mu_1 + \lambda_1)ik' s'_0 e^{i(k'z-\omega t)},$$
$$\sigma''_{zz} = (2\mu_2 + \lambda_2)\varepsilon''_{zz} = (2\mu_2 + \lambda_2)ik'' s''_0 e^{i(-k''z-\omega t)}, \quad \text{(5.223. egyenlet)}$$

ahol μ_1, λ_1, μ_2, λ_2 a két közeg Lamé-féle rugalmas állandói.

Ezeket kell az (5.220) határfeltételbe helyettesíteni. Mivel $k = k'$, azt kapjuk, hogy

$$(2\mu_1 + \lambda_1)k(s_0 + s'_0) = (2\mu_2 + \lambda_2)k'' s''_0. \quad \text{(5.224. egyenlet)}$$

Az (5.218) és (5.224) két határfeltételi egyenletből az s'_0 és s''_0 amplitúdók kifejezhetők a beeső hullám s_0 amplitúdójával. Egyszerű számítás eredményeként adódik, hogy

$$s'_0 = \frac{(2\mu_2 + \lambda_2)k'' - (2\mu_1 + \lambda_1)k}{(2\mu_2 + \lambda_2)k'' + (2\mu_1 + \lambda_1)k} s_0,$$
$$s''_0 = \frac{2(2\mu_1 + \lambda_1)k}{(2\mu_2 + \lambda_2)k'' + (2\mu_1 + \lambda_1)k} s_0. \quad \text{(5.225. egyenlet)}$$

Figyelembe véve, hogy a longitudinális hullámok sebessége a két közegben,

$$v_{l1} = \sqrt{\frac{2\mu_1 + \lambda_1}{\varrho_1}}, \qquad v_{l2} = \sqrt{\frac{2\mu_2 + \lambda_2}{\varrho_2}}, \quad \text{(5.226. egyenlet)}$$

másrészt

$$k = \frac{\omega}{v_{l1}}, \qquad k'' = \frac{\omega}{v_{l2}}, \quad \text{(5.227. egyenlet)}$$

a visszavert és a második közegbe behatoló longitudinális hullámok amplitúdóira kapjuk, hogy

$$s'_0 = \frac{-1 + \frac{\varrho_2 v_{l2}}{\varrho_1 v_{l1}}}{1 + \frac{\varrho_2 v_{l2}}{\varrho_1 v_{l1}}} s_0, \quad \text{(5.228. egyenlet)}$$

$$s_0'' = \frac{2}{1+\frac{\varrho_2 v_2}{\varrho_1 v_1}} s_0 .$$ (5.229. egyenlet)

Az (5.228)-ból látszik, hogy teljes visszaverődés akkor következik be, ha $|s_0'| = |s_0|$, vagyis amikor a

$$\frac{\varrho_2 v_2}{\varrho_1 v_1} = \sqrt{\frac{\varrho_2 (2\mu_2 + \lambda_2)}{\varrho_1 (2\mu_1 + \lambda_1)}} = \sqrt{\frac{\varrho_2 G_2 (1-\nu_2)(1-2\nu_1)}{\varrho_1 G_1 (1-\nu_1)(1-2\nu_2)}}$$ (5.230. egyenlet)

hányados zérus vagy végtelen. Ha ez a kifejezés 1, akkor nincs visszaverődés. Itt *G* a közeg torziómodulusa, ν pedig a Poisson-száma.

A szilárd közeget határoló szabad felület jól visszaveri a rugalmas longitudinális hullámot, mert a második közegnek tekintett levegőben vagy vákuumban $G_2 \approx 0$, $\varrho_2 \approx 0$. Hasonlóképpen teljes a visszaverődés összenyomhatatlan közeg határfelületén is, mert az ilyen közegek Poisson-száma $\nu_2 = 1/2$, és ezért $s_0' = s_0$, $s_0'' = 0$. Ez az oka annak, hogy a hanghullámok levegőből nagyon gyengén hatolnak be a szilárd testekbe.

Most megvizsgáljuk a merőlegesen beeső transzverzális hullám visszaverődését és a második közegbe hatolásának feltételeit. Az elmozdulásvektor mind a három hullámban párhuzamos az elválasztó síkkal, ezért felbontható *x* és *y* irányú összetevőkre. Ha a tengelyek irányába mutató egységvektorokat $\mathbf{e}_1$, illetve $\mathbf{e}_2$-vel jelöljük, akkor a három síkhullám a következőképpen írható:

$$\mathbf{s} = \left(\mathbf{e}_1 s_{0z} - \mathbf{e}_2 s_{0x}\right) e^{i(-kz-\omega t)},$$
$$\mathbf{s}' = \left(\mathbf{e}_2 s_{0x}' - \mathbf{e}_1 s_{0z}'\right) e^{i(-k'z-\omega t)},$$
$$\mathbf{s}'' = \left(\mathbf{e}_1 s_{0z}'' - \mathbf{e}_2 s_{0x}''\right) e^{i(-k''z-\omega t)}.$$ (5.231. egyenlet)

Ahhoz, hogy mindkét határfeltételt felírhassuk, előbb meg kell határoznunk az (5.231) elmozdulásoknak megfelelő ε_{ik} deformációkat és azután a felület mentén keletkezett feszültségeket. Az ε_{ik} tenzornak az alábbi elemei különböznek zérustól:

$$\varepsilon_{xz} = -\frac{1}{2} s_{0y} ik e^{i(-kz-\omega t)},$$
$$\varepsilon'_{xz} = -\frac{1}{2} s'_{0y} ik' e^{i(kz-\omega t)},$$
$$\varepsilon''_{xz} = -\frac{1}{2} s''_{0y} ik'' e^{i(-kz-\omega t)},$$
$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} s_{0x} ik e^{i(-kz-\omega t)},$$
$$\varepsilon'_{yz} = \frac{1}{2} s'_{0x} ik' e^{i(kz-\omega t)},$$
$$\varepsilon''_{yz} = \frac{1}{2} s''_{0y} ik'' e^{i(-kz-\omega t)}.$$ (5.232. egyenlet)

Az (5.221) anyagi egyenlet szerint a feszültségtenzornak is a σ_{xz}, σ_{yz} elemei különböznek zérustól.

A határfeltételek az elválasztó sík menti elmozdulásokra és a feszültségekre vonatkoznak. Ezek a következők a $z = 0$ helyen:

$$s_{0x} - s'_{0x} = s''_{0x}, \qquad s_{0y} - s'_{0y} = s''_{0y},$$ (5.233. egyenlet)

$$\sigma_{xz} = \sigma'_{xz} = \sigma''_{xz}, \qquad \sigma_{yz} + \sigma_{yz} = \sigma''_{yz}.$$ (5.234. egyenlet)

A $\sigma_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz}$, $\sigma_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz}$ értékek behelyettesítése után az (5.234)-ből adódik:

$$\mu_1 k \left(s_{0y} + s'_{0y}\right) = \mu_2 k'' s''_{0y},$$
$$\mu_1 k \left(s_{0x} + s'_{0x}\right) = \mu_2 k'' s''_{0x}.$$ (5.235. egyenlet)

Az (5.233) és (5.235) algebrai egyenletekből fejezhetők ki a visszavert és a második közegbe hatoló hullám amplitúdói. Egyszerű számítás után kapjuk:

$$s'_{0x} = \frac{-1 + \frac{\mu_2 k''}{\mu_1 k}}{1 + \frac{\mu_2 k''}{\mu_1 k}} s_{0x} \qquad s'_{0y} = \frac{-1 + \frac{\mu_2 k'}{\mu_1 k}}{1 + \frac{\mu_2 k'}{\mu_1 k}} s_{0y},$$
$$s''_{0x} = \frac{2}{1 + \frac{\mu_2 k''}{\mu_1 k}} s_{0x}, \qquad s'_{0y} = \frac{2}{1 + \frac{\mu_2 k''}{\mu_1 k}} s_{0y}.$$ (5.236. egyenlet)

A transzverzális hullámok sebessége a két közegben

$$v_{tr1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varrho_1}} \qquad \text{és} \qquad v_{tr2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varrho_2}}. \quad \text{(5.237. egyenlet)}$$

Ezeket a kifejezéseket, valamint a hullámszám és a sebességek kapcsolatát megadó

$$k = \frac{\omega}{v_{tr1}}, \qquad k'' = \frac{\omega}{v_{tr2}} \quad \text{(5.238. egyenlet)}$$

összefüggéseket figyelembe véve, a visszavert hullám amplitúdói:

$$s'_{0x} = \frac{-1 + \frac{\varrho_2 v_{tr2}}{\varrho_1 v_{tr1}}}{1 + \frac{\varrho_2 v_{tr2}}{\varrho_1 v_{tr1}}} s_{0x}, \qquad s'_{0z} = \frac{-1 + \frac{\varrho_2 v_{tr2}}{\varrho_1 v_{tr1}}}{1 + \frac{\varrho_2 v_{tr2}}{\varrho_1 v_{tr1}}} s_{0z}, \quad \text{(5.239. egyenlet)}$$

a második közegbe hatoló hullám amplitúdói pedig:

$$s''_{0x} = \frac{2}{1 + \frac{\varrho_2 v_{tr2}}{\varrho_1 v_{tr1}}} s_{0x}, \qquad s''_{0z} = \frac{2}{1 + \frac{\varrho_2 v_{tr2}}{\varrho_1 v_{tr1}}} s_{0z}. \quad \text{(5.240. egyenlet)}$$

A visszaverődés és a második közegbe hatolás mértékét a

$$\frac{\varrho_2 v_{tr2}}{\varrho_1 v_{tr1}} = \sqrt{\frac{\varrho_2 G_2}{\varrho_1 G_1}} \quad \text{(5.241. egyenlet)}$$

mennyiség szabja meg. Teljes visszaverődés akkor következik be, ha ez a mennyiség zérus vagy végtelen; vagyis amikor G_2 vagy ϱ_2 eltűnik vagy végtelen nagy. Ezek a feltételek szabad felületen, továbbá nagyon nehéz vagy nagyon merev anyag felületére teljesülnek. Ennek megfelelően ezekben az esetekben a transzverzális hullámok majdnem teljesen visszaverődnek.

A követett gondolatmenettel határozhatók meg a visszavert és megtört hullámok amplitúdói ferdeszögű beesésnél is, azzal a különbséggel, hogy ilyenkor a tisztán transzverzális vagy longitudinális beeső hullámhoz mind transzverzális, mind longitudinális visszavert és megtört hullám tartozik.

32. Felületi rugalmas hullámok

Az elmozdulásvektorra vonatkozó (5.159) hullámegyenletnek vannak olyan megoldásai, amelyek arra az esetre vonatkoznak, amikor a hullámok nem hatolnak mélyen a szilárd közegbe, hanem csak a szabad felület közelében érezhetőek, és a felület mentén terjednek. Ezeknek az ún. felületi hullámoknak a földrengéseknél és a Föld szerkezetére vonatkozó kutatásokban van jelentőségük. Először Lord Rayleigh ismerte fel ezeket a hullámokat 1886-ban, és már akkor rámutatott a földrengésekkel kapcsolatos szerepükre, amelyet a későbbi szeizmológiai vizsgálatok teljesen igazoltak. A következőkben e felületi hullámok fontosabb sajátságait tanulmányozzuk.

Tegyük fel ismét, hogy a homogén iztorop szilárd közeg szabad felülete sík, és a koordináta-rendszert úgy választjuk, hogy annak *xy* síkja ezzel egybeesik, a *z* tengely pedig a felületre merőlegesen a közegbe irányul. A megoldandó (5.159) hullámegyenleteket a

$$\Delta s - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$ (5.242. egyenlet)

alakban vesszük fel, ahol *s* most az elmozdulásvektor transzverzális és longitudinális részének bármelyik komponensét jelentheti, és a *v* sebesség ennek megfelelően v_{tr} vagy v_l.

Megvizsgáljuk, hogy az *x* tengely mentén terjedő monokromatikus felületi hullám milyen feltételek mellett megoldása az (5.242) egyenletnek. Ennek megfelelően *s*-et a következő alakban keressük:

$$s = e^{i(kx-\omega t)} f(z).$$ (5.243. egyenlet)

Ez akkor lesz megoldása az (5.242)-nek, ha *f*(*z*) kielégíti a

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right) f$$ (5.244. egyenlet)

egyenletet. Most az eddig tárgyalt ún. térbeli hullámokkal ellentétben feltesszük, hogy $k \neq \omega/v$. Ha a $k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} < 0$, akkor *f*(*z*) periodikus függvény és az így adódó *s* ismét síkhullámot jelent, amely a test belsejébe haladva nem tűnik el, tehát nem felületi hullámot ír le. Ezért legyen $k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} > 0$. Bevezetve a

$$p^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}$$ (5.245. egyenlet)

jelölést, az (5.244) egyenletnek az

$f(z) = e^{-pz}$ és $f(z) = e^{pz}$

két partikuláris megoldása van. Mivel a *z* tengelyt a testbe irányulónak választottuk, ezért a közegben *z*>0, így csak a kitevőben negatív előjellel szereplő megoldásnak lehet fizikai tartalma, mert a másik a *z*-vel exponenciálisan nő, ami fizikailag értelmetlen. A keresett megoldás tehát

$$s = s_0 e^{i(kx-\omega t)} e^{-pz}. \quad \text{(5.246. egyenlet)}$$

Ez az *x* tengely irányában haladó olyan monokromatikus hullám, amelyben a rezgések amplitúdója a test határától számított távolsággal exponenciálisan csökken. Ezért ez a megoldás a közeg felülete mentén terjedő hullámot ír le.

A teljes elmozdulásvektor az (5.153) felbontás szerint longitudinális és transzverzális elmozdulás szuperpozíciója:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2, \quad \text{(5.247. egyenlet)}$$

ahol $\mathbf{s_1}$ a longitudinális, $\mathbf{s_2}$ a transzverzális részt jelenti. Mindegyik (5.246) alakú, de a kitevőben szereplő *p* paraméter a kétfajta hullámnál más, ugyanis

$$p_1^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{v_1^2}, \qquad p_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{v_2^2}, \quad \text{(5.248. egyenlet)}$$

ahol

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\varrho}}, \qquad v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}. \quad \text{(5.249. egyenlet)}$$

Ennek megfelelően a rugalmas felületi hullám **s** elmozdulásvektora,

$$\mathbf{s} = \mathbf{s_{10}} e^{i(kx-\omega t)} e^{-p_1 z} + \mathbf{s_{20}} e^{i(kx-\omega t)} e^{-p_2 z}. \quad \text{(5.250. egyenlet)}$$

Ez a megoldás szabad paraméterként tartalmazza a *k* hullámszámot és az $\mathbf{s_{10}}$, $\mathbf{s_{20}}$ amplitúdókat, amelyek a határfeltételekből határozhatók meg. Pontosabban szólva, a *k* hullámszám és a sebességek közötti kapcsolat, valamint az amplitúdók aránya számítható ki a határfeltételekből, amelyek szabad felület esetén a *z* = 0 síkon

$$\sigma_{ij} n_j = 0. \quad \text{(5.251. egyenlet)}$$

Mivel **n** most *z* irányú, az (5.251)-ből a *z* = 0 síkon adódik:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0.$$ (5.252. egyenlet)

A

$$\sigma_{ik} = 2\mu\varepsilon_{ik} + \lambda\varepsilon_{ll}\delta_{ik}$$ (5.253. egyenlet)

anyagi egyenletek figyelembevételével az (5.252) határfeltételekből kapjuk, hogy a $z = 0$ síkon

$$\varepsilon_{xz} = 0, \qquad \varepsilon_{yz} = 0, \qquad (2\mu + \lambda)\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = 0.$$ (5.254. egyenlet)

Az ε_{yz} definíciója, valamint (5.254) második egyenlete szerint

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_z}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial s_y}{\partial z} = 0.$$ (5.255. egyenlet)

Az (5.250) *y* komponensét *z* szerint differenciálva és (5.255)-be beírva,

$$-p_1 s_{1y} - p_2 s_{2y} = 0.$$ (5.256. egyenlet)

Ezt az (5.247) *y* komponensével összehasonlítva, látható, hogy $s_{1y} = 0$, $s_{2y} = 0$. Az elmozdulásvektor tehát benne van a hullám terjedési iránya és a felület normálisa által meghatározott síkban.

Vizsgáljuk most külön a transzverzális, majd a longitudinális elmozdulást. Előbbi divergenciamentes, tehát div $\mathbf{s}_2 = 0$. Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{\partial s_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial s_{2z}}{\partial z} = 0,$$

amiből (5.246) alapján adódik, hogy

$$iks_{2x} - p_2 s_{2z} = 0.$$ (5.257. egyenlet)

Ebből

$$\frac{s_{2x}}{s_{2z}} = \frac{s_{20x}}{s_{20z}} = \frac{p_2}{ik}.$$ (5.258. egyenlet)

Az $\mathbf{s}_{20}$ amplitúdóvektor *x* és *z* komponense eszerint a következőképpen írható:

$$s_{20x} = p_2 A, \qquad s_{20z} = ikA,$$ (5.259. egyenlet)

ahol *A* egyelőre ismeretlen állandó.

A transzverzális hullám *x és z* komponense ezek alapján:

$$s_{2x} = Ap_2 e^{i(kz-\omega t)} e^{-p_2 r},$$
$$s_{2z} = Aike^{i(kz-\omega t)} e^{-p_2 r}.$$ (5.260. egyenlet)

A longitudinális hullám $\mathbf{s}_1$ elmozdulásvektora rotációmentes, tehát rot $\mathbf{s}_1$ = 0. Ebből következik, hogy

$$\frac{\partial s_{1x}}{\partial z} - \frac{\partial s_{1z}}{\partial x} = 0,$$

amiből (5.246) figyelembevételével adódik:

$$\frac{s_{1x}}{s_{1z}} = \frac{s_{10x}}{s_{10z}} = \frac{k}{ip_1}.$$ (5.261. egyenlet)

Ezért

$$s_{10x} = kB, \qquad s_{10z} = ip_1 B.$$

ahol *B* később meghatározandó állandó. A longitudinális hullám *x* és *z* komponense eszerint a következő alakba írható:

$$s_{1x} = Bke^{i(kz-\omega t)} e^{-p_1 r},$$
$$s_{1z} = Bip_1 e^{i(kz-\omega t)} e^{-p_1 r}.$$ (5.262. egyenlet)

Eddig az (5.254) határfeltételek második egyenletét vettük figyelembe. Nézzük most az első egyenletet, amely szerint

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x}\right) = 0.$$ (5.263. egyenlet)

Az (5.250), (5.260) és (5.262) alapján ebből adódik, hogy

$$A\left(p_2^2+k^2\right)+2kp_1B=0.$$

A határfeltétel harmadik egyenletéből a sebességek (5.249) kifejezéseit felhasználva, következik, hogy

$$A2kp_2v_2^2+B\left[v_1^2\left(p_1^2-k^2\right)+2k^2v_2^2\right]=0. \quad \text{(5.265. egyenlet)}$$

Az *A, B* állandókra vonatkozó (5.264), (5.265) homogén egyenletrendszernek akkor van triviálistól különböző megoldása, ha az együtthatók determinánsa zérus:

$$\begin{vmatrix} p_2^2+k^2 & 2kp_1 \\ 2kp_2v_2^2 & v_1^2\left(p_1^2-k^2\right)+2k^2v_2^2 \end{vmatrix}=0. \quad \text{(5.266. egyenlet)}$$

Kifejtett alakban az (5.248) összefüggések felhasználásával

$$\left(k^2-\frac{\omega^2}{2v_2^2}\right)=k^2\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{v_1^2}}\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{v_2^2}}. \quad \text{(5.267. egyenlet)}$$

Ez k^2-*re* harmadfokú algebrai egyenlet (ugyanis a négyzetre emelés után a k^8 kiesik), amelynek megoldásával kapjuk a hullámszám és a frekvencia, valamint a sebességek közötti kapcsolatot, továbbá az *A és B* együtthatók *A*/*B* arányát. E célból bevezetjük a következő jelölést:

$$\omega=v_2k\xi. \quad \text{(5.268. egyenlet)}$$

Ezt (5.267)-be helyettesítve, a ξ mennyiségre a

$$\xi^4-8\xi^4+8\xi^2\left(3-2\frac{v_2^2}{v_1^2}\right)-16\left(1-\frac{v_2^2}{v_1^2}\right)=0 \quad \text{(5.269. egyenlet)}$$

egyenletet kapjuk. Ebből látszik, hogy ξ egyedül a

$$\frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}} \quad \text{(5.270. egyenlet)}$$

hányadostól függ. Utóbbi a közeg minőségére jellemző állandó, amely a különböző anyagokra $\frac{1}{\sqrt{2}}$ és 0 között változik.

Az (5.268) összefüggésből következik, hogy ξ pozitív valós és az (5.244) alapján $\xi < 1$, mert csak ekkor lesz p a feltevésünkkel összhangban valós. Az (5.269) egyenletnek csak egy ilyen gyöke van, ezért adott v_2/v_1 hányadoshoz egyetlen megfelelő ξ szám tartozik. Értéke 0,874 és 0,955 között változik a közegtől függően.

Ezzel a hullámszám és a frekvencia közötti összefüggést meghatároztuk. A felületi hullámok V fázissebességét a

$$V = \frac{\omega}{k}$$

hányados adja meg. Az (5.268) alapján ez is kifejezhető a ξ-vel:

$$V = v_2 \xi. \quad \text{(5.271. egyenlet)}$$

Mivel $\xi < 1$, a felületi hullámok terjedési sebessége kisebb, mint a transzverzális térbeli hullám v_2 sebessége.

A transzverzális és longitudinális hullám amplitúdóinak A/B arányára (5.265)-ből és (5.268)-ból adódik

$$\frac{A}{B} = \frac{\xi^2 - 2}{2\sqrt{1 - \xi^2}}. \quad \text{(5.272. egyenlet)}$$

Felmerülhet még az a kérdés, hogy a közeg $z = 0$ felületétől számítva milyen mélyen érezhetők a felületi hullámok? Ennek mértékéül azt a z_h távolságot választjuk, amelynél a rezgés kitérése a felület mentinek e-ed részére csökken. Az (5.260)-ból és (5.262)-ből látszik, hogy

$$z_{h_1} = \frac{1}{p_1}, \qquad z_{h_2} = \frac{1}{p_2}. \quad \text{(5.273. egyenlet)}$$

Az (5.248) és az (5.268) összefüggések figyelembevételével adódik, hogy,

$$z_{h_1} = \frac{1}{k\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}\xi^2}}, \quad \text{(5.274. egyenlet)}$$

$$z_{h_2} = \frac{1}{k\sqrt{1 - \xi^2}}. \quad \text{(5.275. egyenlet)}$$

A longitudinális és transzverzális felületi hullámok z_h behatolási mélysége eszerint különbözik egymástól és függ a közegtől. Mivel $v_2 < v_1$ ezért $z_{h_1} < z_{h_2}$. Figyelembe véve a $k=2\pi/\lambda$ összefüggést, z_{h_1} *és* z_{h_2} a hullámhosszal is kifejezhető:

$$z_{h_1} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{1-\frac{v_2^2}{v_1^2}\xi^2}}, \qquad z_{h_2} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{1-\xi^2}}.$$

(5.276. egyenlet)

A ξ mennyiség lehetséges értékeit véve, a nevezők 1-nél nagyobbak, ezért a hullámok behatolása kisebb a hullámhossznál.

A bevezetőben már említettük, hogy a felületi hullámoknak a földrengések észlelésénél van fontos szerepük, különösen azért, mert ezek a Föld felülete mentén terjednek – szemben az ún. térbeli hullámokkal –, és így a rengés megfigyelésében ezek érvényesülnek jobban, annál is inkább, mert ezek elválnak a térbeli hullámoktól. Kisebb sebességük és hosszabb útjuk miatt később érkeznek a megfigyelőműszerekhez, mint a térbeli hullámok. A földrengést először a longitudinális térbeli hullámok – mint előfutárok – jelzik (ezeknek legnagyobb a sebességük), ezt követik a transzverzális hullámok és később a jól megfigyelhető felületi hullámok.

A Földben terjedő rugalmas hullámoknak nemcsak a földrengések megfigyelésében van szerepük, hanem a szerkezet kiderítésében is, mert a Föld anyagának diszkontinuitásai e hullámok terjedését, törését és visszaverődését jelentősen befolyásolják.

33. Hullámok szuperpozíciója. Csoportsebesség

Az eddig tárgyalt monokromatikus harmonikus rugalmas hullámok végtelen hosszú hullámvonulatot jelentenek. A közegben hullámként tovaterjedő zavarok viszont véges kiterjedésűek. Megmutatjuk, hogy az ilyen ún. hullámcsomag (vagy -csoport) előállítható különböző frekvenciájú harmonikus hullámok szuperpozíciójaként.

Először azt a legegyszerűbb esetet tekintjük, amikor két azonos amplitúdójú, különböző frekvenciájú síkhullám terjed egy irányban. Az egyszerűség kedvéért még azt is feltesszük, hogy a terjedési irány a pozitív x tengely, és mindkét hullám az y irányban polarizált transzverzális hullám. Az elmozdulásvektornak tehát csak az s_y komponense különbözik zérustól:

$$s_{y1} = A\cos(k_1 x - \omega_1 t), \qquad s_{y2} = A\cos(k_2 x - \omega_2 t).$$ (5.277. egyenlet)

Az eredő elmozdulás az s_{y1} *és* s_{y2} összege:

$$s_y = s_{y1} + s_{y2} = A\left[\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)\right] =$$
$$= 2A\cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right).$$

Mivel a hullámegyenlet lineáris, ez az összeg is megoldás. Vezessük be a

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = k_0, \qquad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_0,$$
$$k_1 - k_2 = \Delta k, \qquad \omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega \quad \text{(5.278. egyenlet)}$$

jelöléseket. így

$$s_y = 2A\cos\frac{1}{2}(\Delta kx - \Delta\omega t)\cos(k_0 x - \omega_0 t) = C\cos(k_0 x - \omega_0 t), \quad \text{(5.279. egyenlet)}$$

ahol

$$C = 2A\cos\frac{1}{2}(\Delta kx - \Delta\omega t). \quad \text{(5.280. egyenlet)}$$

A két hullám szuperpozíciójaként adódó (5.279) is felfogható egy olyan hullámnak, amelynek a *C* amplitúdója nem állandó, hanem (5.280) szerint periodikusan változik a hellyel és az idővel. Ez a változás lassabb, mint a másik tényezőé, hiszen a fázisban a hullámszámok és a frekvenciák különbsége, míg az utóbbiban ezek összege szerepel.

A két harmonikus hullám összetevéséből eredő hullám fázissebességét a gyorsabban változó cos ($k_0x - \omega_0t$) tényező fázisának állandóságából számíthatjuk ki:

$$k_0 x - \omega_0 t = \text{áll.}$$

Ebből adódik:

$$v = \frac{\omega_0}{k_0}. \quad \text{(5.281. egyenlet)}$$

Ez nem nagyon különbözik a részhullámok

$$v_1 = \frac{\omega_1}{k_1}, \qquad v_2 = \frac{\omega_2}{k_2} \quad \text{(5.282. egyenlet)}$$

fázissebességeitől.

A hullámcsoport terjedési sebessége, az ún. *csoportsebesség* megegyezik az amplitúdó valamelyik értékének – pl. maximumának – sebességével. Ennek megfelelően a csoportsebesség az amplitúdó fázisának állandóságából az $x\Delta k - t\Delta\omega$ = áll. összefüggésből számítható ki. Ebből

$$v_{cs} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$ (5.283. egyenlet)

Ha a k_1 és k_2 hullámszámok nagyon közel vannak egymáshoz, akkor a $\Delta k \to 0$ határátmenet vehető, és így a csoportsebességre a

$$v_{cs} = \frac{d\omega}{dk}$$ (5.284. egyenlet)

kifejezés adódik.

Az eredmények könnyen általánosíthatók arra az esetre, amikor nem két, hanem végtelen sok periodikus hullámot adunk össze, amelyek frekvenciái, illetve hullámszámai folytonosan változnak ω_0, illetve k_0 középérték körüli $2\Delta\omega_0$, $2\Delta k_0$ intervallumban. A komplex írásmódot használva,

$$s_y = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} A(k) e^{i(kx-\omega t)} dk,$$ (5.285a. egyenlet)

vagy

$$s_y = \int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} \tilde{A}(\omega) e^{i(kx-\omega t)} d\omega.$$ (5.285b. egyenlet)

A kitevőt átalakítva,

$$kx - \omega t = k_0 x - \omega_0 t + (k - k_0)x - (\omega - \omega_0)t,$$

az (5.285) eredő hullám így írható:

$$s_y = Ce^{i(k_0 x - \omega_0 t)},$$ (5.286. egyenlet)

ahol a *C* amplitúdó,

$$C(x, t) = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} A(k) e^{i[(k-k_0)x - (\omega-\omega_0)t]} dk.$$ (5.287. egyenlet)

Ez ismét periodikus hullám, az időben és a hellyel változó (5.287) amplitúdóval. A csoportsebesség,

$$v_{cs} = \frac{\omega - \omega_0}{k - k_0},$$ (5.288. egyenlet)

amely ismét az (5.284) alakba írható, ha a *Δk* tartomány elég kicsi.

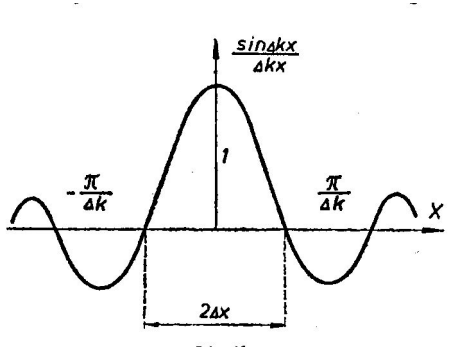
Vizsgáljuk meg a *C*(*x*, *t*) amplitúdót kicsit részletesebben, azzal a feltevéssel, hogy *A*(*k*) lassan változik a *k*-val. Ekkor

$$C(x,\ t) = A(k_0) \int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{j(k-k_0)(x-v_{cs}t)} d(k-k_0) = 2A(k_0)\Delta k \frac{\sin\left[\Delta k(x-v_{cs}t)\right]}{\Delta k(x-v_{cs}t)}.$$ (5.289. egyenlet)

Ez az amplitúdó rögzített időpillanatban (pl. *t* = 0-kor) a hellyel úgy változik, mint a $\frac{\sin \Delta kx}{\Delta kx}$ függvény (*54. ábra*). A hullámcsoport térbeli kiterjedésének mértékéül választjuk a főmaximum 2*Δx* szélességét, amely $\frac{2\pi}{\Delta k}$-val egyenlő:

$$2\Delta x = \frac{2\pi}{\Delta k}.$$

54. ábra -



A hullámcsoport *Δx* kiterjedése tehát fordítva arányos az összetett harmonikus hullámok *Δk* hullámszám-intervallumával. Eszerint a térben nagyon rövid csoportot akkor kapunk, ha az (5.287)-ben gyakorlatilag minden hullámszámra integrálunk 0-tól ∞-ig.

A *k* hullámszámú részhullám *A*(*k*) amplitúdóját a kezdeti feltételként megadott $s_y(x,0) = f(x)$ függvényből lehet meghatároznia Fourier-integrálok elméletéből ismert eljárással. Ennek részletes tárgyalásával itt nem foglalkozunk, csupán megemlítjük, hogy az *f*(*x*) függvény bizonyos matematikai természetű feltevések mellett előállítható Fourier-integrálok alakjában. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges *f*(*x*) alakú jel (vagy „zavar") végtelen sok monokromatikus hullám szuperpozíciójára bontható a térbeli mérettől függő *Δk* intervallumban.

Visszatérve a csoportsebesség (5.284) definíciójához, abból következik, hogy csak abban az esetben egyezik meg a fázissebességgel, ha utóbbi független a hullámszámtól, vagy ami ugyanaz, a hullámhossztól. Ugyanis $\omega = kv$-ből adódik

$$v_{cs} = \frac{d\omega}{dk} = v + k\frac{dv}{dk}.$$ (5.290. egyenlet)

Figyelembe véve a hullámszám $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ definícióját, (5.290) így is írható:

$$v_{cs} = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}.$$ (5.291. egyenlet)

A fázissebességnek a hullámhossztól való függését nevezzük *diszperziónak.* Az (5.290), (5.291) eredményünk úgy is kifejezhető, hogy a csoportsebesség a diszperziómentes esetben egyezik meg a fázissebességgel. Egyébként eltér attól. Az ún. normális diszperziónál $\frac{dv}{d\lambda} > 0$, és ezért $v_{cs} < v$, az anomális diszperzió esetén pedig $\frac{dv}{d\lambda} < 0$, tehát $v_{cs} > v$.

A hullámcsoport alakja a diszperziómentes esetben változatlan marad a terjedés során, míg a diszperziónál szétterül az idővel, ugyanis a részhullámok sebessége a hullámhossztól való függés miatt különbözik egymástól.

A csoportsebesség (5.284) definíciója csak a sebesség nagyságát adja meg. Ha iránnyal, vagyis vektorként értelmezzük, akkor az (5.284) helyébe a

$$\mathbf{v}_{cs} = \mathrm{grad}_{\mathbf{k}}\,\omega$$ (5.292. egyenlet)

kifejezés lép. A **k** index azt jelenti, hogy a **k** komponensei szerint kell a gradienst képezni.

34. Rugalmas hullámok kristályokban

Eddig izotrop szilárd közegekben terjedő rugalmas hullámokkal foglalkoztunk. A kristályos közegekben a jelenségek sokkal bonyolultabbak, mert a közeg anyagi minőségét több rugalmas állandó jellemzi, és emiatt a feszültségek és a deformációtenzor közötti kapcsolatot megadó anyagi egyenletek sem olyan egyszerűek, mint az izotrop közegekben. Az általános esetben (5.4) szerint

$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$. (5.293. egyenlet)

A test térbeli szimmetriái ugyan csökkentik a független C_{ijk}, együtthatók számát, de még így is elég bonyolult az (5.293) kapcsolat.

Már ez a körülmény is arra mutat, hogy a kristályos közegekben terjedő rugalmas hullámok tulajdonságai mások lehetnek, mint az izotrop esetre vonatkozóak. A következőkben a részletes tárgyalást mellőzve, csupán kvalitatív képet adunk a kristályok rugalmas hullámainak fontosabb sajátságairól.

A deformálható testek (4.62) általános mozgásegyenletéből indulunk ki, és feltesszük, hogy térfogati erők nem hatnak, továbbá a gyorsulás (4.43) kifejezésében a konvektív részt elhagyjuk. Szilárd testeknél ezt a közelítést a korábban mondottak szerint megtehetjük. Emlékezzünk rá, hogy izotrop esetben is így jártunk el. A mozgásegyenletek tehát,

$$\varrho\frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}.$$ (5.294. egyenlet)

Az (5.293) egyenletet ide behelyettesítve,

$$\varrho\frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2} = C_{ijkl}\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_j} = \frac{1}{2}C_{ijkl}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial s_k}{\partial x_l} + \frac{\partial s_l}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{2}C_{ijkl}\frac{\partial^2 s_k}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{1}{2}C_{ijkl}\frac{\partial^2 s_l}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Mivel a C_{ijkl} tenzor a *k és l* indexekre szimmetrikus, felcserélve a második tagban a *k* és *l* összegező indexet, látszik, hogy a jobb oldal két tagja megegyezik egymással. Ezért

$$\varrho\frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2} = C_{ijkl}\frac{\partial^2 s_l}{\partial x_j \partial x_k}.$$ (5.295. egyenlet)

Keressük ennek az egyenletnek monokromatikus síkhullám megoldását végtelen, kristályos közegben. Feltesszük tehát, hogy

$s_i = s_{i0}e^{j(\mathbf{kr}-\omega t)}$, (5.296. egyenlet)

és megvizsgáljuk, hogy ez milyen feltételek mellett elégíti ki az (5.295) egyenleteket. Az (5.296)-ot (5.295)-be helyettesítve, kapjuk:

$\varrho\omega^2 s_i = C_{ijkl}k_j k_k s_l$. (5.297. egyenlet)

Figyelembe véve, hogy $s_i = \delta_{il}s_l$, az (5.297) a következőképpen írható:

$$\left(\varrho\omega^2\delta_{il} - C_{ijkl}k_jk_k\right)s_l = 0 \qquad (i = x, y, z). \quad \text{(5.298. egyenlet)}$$

Ennek a három homogén egyenletből álló egyenletrendszernek akkor van triviálistól különböző megoldása, ha az együtthatók determinánsa zérus. Tehát

$$\begin{vmatrix} \varrho\omega^2 - C_{1jk1}k_jk_k & -C_{1jk2}k_jk_k & -C_{1jk3}k_jk_k \\ -C_{2jk1}k_jk_k & \varrho\omega - C_{2jk2}k_jk_k & -C_{1jk3}k_jk_k \\ -C_{3jk1}k_jk_k & -C_{3jk2}k_jk_k & \varrho\omega^2 - C_{3jk3}k_jk_k \end{vmatrix} = 0. \quad \text{(5.299. egyenlet)}$$

Ez az ω^2-re harmadfokú algebrai egyenlet, amelynek három, általában egymástól különböző megoldása van. Ez azt jelenti, hogy adott **k** hullámszámvektorhoz e gyököknek megfelelő három frekvencia tartozik. Az így kiszámított ω_1, ω_2, ω_3 frekvenciákat az (5.298) egyenletekbe külön-külön beírva, meghatározhatjuk a hozzájuk tartozó elmozdulásvektorok s_i komponenseit. (Pontosabban szólva, az egyenletek homogén volta miatt a komponenseknek csak az arányát kapjuk meg, nagyságukat nem. Ezért a kapott számhármast egy-egy állandóval megszorozhatjuk, és ez is megoldása lesz a mozgásegyenleteknek.)

Egy adott **k** hullámszámvektorhoz három különböző frekvencia, és ennek megfelelően három különböző sebesség tartozik. Ezért a kristályokban minden irányban három rugalmas hullám terjedhet különböző sebességgel, de ugyanazzal a hullámhosszal. Vannak olyan kitüntetett irányok, amelyekben e sebességek megegyeznek. A három különböző sebességgel terjedő hullám elmozdulásvektorai longitudinális és transzverzális részt egyaránt tartalmaznak, ellentétben az izotrop közegekben haladó rugalmas hullámokkal, ahol a két különböző sebességnek tisztán longitudinális vagy transzverzális hullám felel meg.

35. A húr rezgései

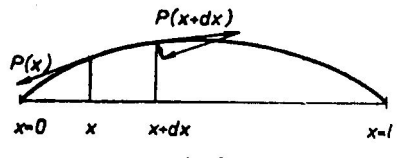
Húrnak az olyan szilárd testet nevezzük, amelynek keresztmetszete a hosszúságához képest annyira kicsi, hogy hajlítással szemben gyakorlatilag semmilyen ellen-állást nem tanúsít. Gondoljunk egy *l* hosszúságú rúdra, amelynek a keresztmetszetét fokozatosan csökkentjük, míg végül a semleges szál közvetlen környezete marad csak meg. A 28.5 pontban tárgyalt hajlításnál tanultak szerint a hajlítással szemben ható feszültség gyakorlatilag elhanyagolhatóvá válik, mert az a semleges száltól számított merőleges távolsággal arányos [1. az (5.106) képletet]. Az ún. hajlítási merevség (5.114) a keresztmetszet csökkentésével zérushoz tart. A húr tehát csak a nyújtással szemben fejt ki ellenállást. Ebből következik, hogy a húrban transzverzális rezgések csak akkor keletkezhetnek, ha azt a két végénél kifeszítjük. Ez viszont azt jelenti, hogy a nyugalmi állapot nem feszültségmentes. Ezért a húr mozgásegyenletei nem vezethetők le közvetlenül az (5.42) mozgásegyenletekből, mert ott feltételeztük, hogy a deformálatlan állapotban nincsenek feszültségek. Könnyen általánosíthatnánk az (5.42) alapegyenleteket arra az esetre, amikor a nyugalmi állapotban is vannak feszültségek, és az így adódó egyenleteket alkalmaznánk a húrra. Egyszerűbb azonban a húr mozgásegyenletét közvetlenül meghatározni.

Legyen a húr hossza *l*, keresztmetszete *q,* amely mindenütt ugyanaz. A koordináta-rendszer *x* tengelye essék egybe a húr tengelyével. Ha a feszítő erőt *F*-fel jelöljük, akkor a *q* keresztmetszetre merőlegesen ható *P* feszültség $P = F/q$. A megfeszített húrt nyugalmi állapotából kicsit kimozdítva,

megváltozik a hossza, és a nyújtás révén megnövekszik a feszültség, de ez a feszültségnövekedés csak a longitudinális rezgésekre lesz hatással, a transzverzálisakra nem. A deformált állapotban a húr *dx* elemi szakaszának két végpontjában ható **P**(*x*), illetve **P**(*x*+*dx*) feszültségek nem lesznek egy irányúak. Az eredő feszültségnek lesz az *x*-re merőleges összetevője is. Ha a húr kimozdítása az *y* irányban történt, akkor a *dx* szakasz két végpontjában ható, *q*-ra merőleges erők eredőjének lesz *x* és *y* komponense:

$$F_x = qP(x-dx)\cos(\alpha-d\alpha)-P(x)\cos\alpha,$$
$$F_y = qP(x-dx)\sin(\alpha-d\alpha)-P(x)\sin\alpha. \quad \text{(5.300. egyenlet)}$$

55. ábra -



α a **P**(*x*) feszültségvektornak az *x* tengellyel bezárt szögét, *dα* pedig a *dx* szakasz végpontjaiban ható feszültségek közötti szöget jelöli. Ha kis elmozdulásokra korlátozódunk, akkor *α* is kicsi és így a cos *α*-ra, illetve sin *α*-ra használható a

$$\cos\alpha \approx 1\frac{\alpha^2}{2} \qquad \text{és} \qquad \sin\alpha \approx \alpha \approx \text{tg}\ \alpha \quad \text{(5.301. egyenlet)}$$

közelítés.

Foglalkozzunk először az erő F_y komponensével. A *P(x+dx)* feszültséget az *x* hely közelében sorba fejtve,

$$F_y = q\left[P(x)+\frac{\partial P}{\partial x}dx\right](\alpha+d\alpha)-qP(x)\alpha.$$

Vegyük figyelembe, hogy a szög kicsi, és a fentiek szerint a tg *α*-val helyettesíthető.

Utóbbi pedig a $\frac{\partial s_y}{\partial x}$ differenciálhányadossal fejezhető ki. Így

$$F_y = q\left[P(x)+\frac{\partial P}{\partial x}dx\right]\left(\frac{\partial s_y}{\partial x}\right)_{x+dx}-qP(x)\left(\frac{\partial s_y}{\partial x}\right)_x.$$

A $\left(\frac{\partial s_y}{\partial x}\right)_{x+dx}$-et is sorba fejtjük és a lineáris tagnál megállunk:

$$F_y = q\left[P(x)+\frac{\partial P}{\partial x}dx\right]\left[\left(\frac{\partial s_y}{\partial x}\right)_x+\left(\frac{\partial^2 s_y}{\partial x^2}\right)_x dx\right]-qP(x)\left(\frac{\partial s_y}{\partial x}\right)_x.$$

Kis elmozdulásokra szorítkozva, a feszültség változása is kicsi a $P(x)$-hez képest. Az elmozdulás deriváltjaival megszorozva, másodrendű tagokat kapunk. Ha csak az elsőrendű kis mennyiségekre korlátozódunk, akkor ezt a tagot már nem vesszük figyelembe. így adódik,

$$F_y = qP\frac{\partial^2 s_y}{\partial x^2}dx.$$

A mozgásegyenlet szerint ez egyenlő a dx szakasz gyorsulásának y komponensével

$$\varrho q\,dx\frac{\partial^2 s_y}{\partial t^2} = qP\,dx\frac{\partial^2 s_y}{\partial x^2}.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 s_y}{\partial x^2} = \frac{\varrho}{P}\frac{\partial^2 s_y}{\partial t^2}.$$ (5.302. egyenlet)

Ez a transzverzális rezgést leíró hullámegyenlet, amelyet

$$\frac{\partial^2 s_y}{\partial x^2}-\frac{1}{v_{tr}^2}\frac{\partial^2 s_y}{\partial t^2}=0$$ (5.303. egyenlet)

alakba írva, láthatjuk, hogy a transzverzális hullámok sebessége a megfeszített húrban,

$$v_{tr} = \sqrt{\frac{P}{\varrho}} = \sqrt{\frac{F}{\varrho q}}.$$ (5.304. egyenlet)

Nézzük most az x irányú, longitudinális mozgást leíró egyenletet. Ehhez először az erő x komponensével foglalkozunk. Az (5.301) közelítés figyelembevételével

$$F_x = q\left[P(x) + \frac{\partial P}{\partial x}dx\right]\left[1 - \frac{(\alpha + d\alpha)^2}{2}\right] - qP(x)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right).$$

Ismét elsőrendű kicsi tagokra szorítkozva, a szögek négyzetei elhagyhatók, mert ezek már másodrendűek. Így

$$F_x = qdx\frac{\partial P}{\partial x}.$$

Vegyük tekintetbe, hogy a *P* feszültség és a relatív megnyúlás között fennáll az (5.57) összefüggés:

$$P = E\frac{\partial s_x}{\partial x}.$$

Ezért

$$F_x = Eq\ dx\frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2}.$$

Ez egyenlő a *dx* szakasz gyorsulásának *x* komponensével:

$$\varrho q\ dx\frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = qE\ dx\frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2}.$$

Ebből adódik, hogy

$$\frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} = \frac{\varrho}{E}\frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2}.$$ (5.305. egyenlet)

A longitudinális mozgást is hullámegyenlet írja le, de a transzverzálistól különböző sebességgel. A longitudinális hullámok sebessége,

$$v_1 = \sqrt{\frac{E}{\varrho}},$$ (5.306. egyenlet)

ahol *E* a Young-modulus.

A két végén megfeszített húr mozgását az (5.302) és az (5.303) hullámegyenletek írják le. Előbbi a transzverzális, utóbbi a longitudinális mozgások egyenlete. Figyeljük meg, hogy a transzverzális hullámok (5.302) egyenletében a húr rugalmasságára vonatkozó adat nem szerepel, hanem csak

a feszítést előidéző *F* erő. Ezzel szemben a longitudinális hullámok terjedési sebessége a húr rugalmasságát jellemző Young-modulustól is függ a sűrűségen kívül. Ebben viszont az *F* feszítő erő nem lép fel. Az (5.302) és (5.305) mozgásegyenletek azonos alakúak, ezért a következőkben a

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$ (5.307. egyenlet)

hullámegyenlet megoldásával foglalkozunk. ψ az elmozdulásvektor s_x, s_y komponenseinek, v a v_l és v_{tr} sebességek összefoglaló jelölésére szolgál. Az (5.307) hullám-egyenlet egyértelmű megoldásához még meg kell adnunk a feladathoz tartozó kezdeti és határfeltételeket. Kezdeti feltételként megadjuk a húr minden pontjának helyét és sebességét a $t = 0$ időben. Határfeltételként pedig előírjuk, hogy a húr két végpontja minden időben legyen nyugalomban. A $\psi(x, t)$ függvénynek tehát ki kell elégítenie a

$$\psi(x,\,0)=F(x),\qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{t=0}=G(x)$$ (5.308. egyenlet)

kezdeti, és a

$$\psi(0,\,t)=\psi(l,\,t)=0$$ (5.309. egyenlet)

határfeltételeket. $F(x)$ és $G(x)$ a $[0,l]$ intervallumban előre megadott tetszőleges, folytonos és differenciálható függvények. Az (5.307) hullámegyenletet megpróbáljuk kielégíteni a

$$\psi(x,\,t)=f(x)g(t)$$ (5.310. egyenlet)

szorzattal. E kifejezést (5.307)-be helyettesítve,

$$f''g=\frac{1}{v^2}fg'',$$ (5.311. egyenlet)

ahol vesszővel a megfelelő változók szerinti differenciálhányadost jelöltük. Az egyenletet fg-vel elosztva (feltéve, hogy $fg \neq 0$),

$$\frac{f''}{f}=\frac{1}{v^2}\frac{g''}{g}.$$ (5.312. egyenlet)

A bal oldal csak az x-től, a jobb oldal csak a t-től függ. Ez az egyenlet csak úgy teljesülhet a független változók minden értékére, ha mindkét oldal egy állandóval egyenlő. Az állandót $-k^2$-tel jelölve,

$$f''=-k^2f\qquad \text{és}\qquad g''=k^2v^2g.$$ (5.313. egyenlet)

(Megjegyezzük, hogy ha az állandót + k^2-nek vennénk, a határfeltételek nem teljesülnének.)

Az (5.313) közönséges differenciálegyenleteknek két-két partikuláris megoldása van:

$$f_1 = \cos kx, \qquad f_2 = \sin kx;$$
$$g_1 = \cos kvt, \qquad g_2 = \sin kvt. \quad \text{(5.314. egyenlet)}$$

Nézzük először az f_1 és f_2 megoldásokat. A határfeltételek szerint ezeknek el kell tűnniük a húr két végén. Tehát

$$f_1 = (0) = f_1(l) = 0,$$
$$f_2 = (0) = f_2(l) = 0.$$

Mivel a cos *kx* az *x* = 0 helyen nem zérus, ezért az f_1 nem felel meg a határfeltételeknek, így ez nem jöhet szóba. Az f_2 az *x* = 0 helyen zérus, bármilyen értékű is a *k.* Az *x*=*l*-nél azonban csak akkor tűnik el, ha a *kl* a *π*-nek egész számú többszöröse:

$$k = k_n = n\frac{\pi}{l} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ldots). \quad \text{(5.315. egyenlet)}$$

Az (5.313) első egyenletének megszámlálhatóan végtelen sok olyan megoldása van, amelyek mind kielégítik a határfeltételeket is. Ezek a megoldások:

$$f_n = \sin n\frac{\pi}{l}x \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ldots). \quad \text{(5.316. egyenlet)}$$

A *k* állandó (5.315) lehetséges értékeit *sajátértékeknek,* a megfelelő (5.316) függvényeket *sajátfüggvényeknek* nevezzük.

Az időtől függő g_1 és g_2 függvényekben *k* ugyanezeket az értékeket veheti fel. Ennek megfelelően

$$g_{1n} = \cos k_n vt, \qquad g_{2n} = \sin k_n vt. \quad \text{(5.317. egyenlet)}$$

Vezessük be a

$$k_n v = 2\pi\nu_n = \omega_n \quad \text{(5.318. egyenlet)}$$

jelölést. Így

$$g_{1n} = \cos\omega_n t, \quad \text{és} \qquad g_{2n} = \sin\omega_n t. \quad \text{(5.319. egyenlet)}$$

A fentiekben a

$$\nu_n = n\frac{v}{2l} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ldots)$$ (5.320. egyenlet)

mennyiségeket a húr *sajátfrekvenciáinak* nevezzük. Az (5.307) hullámegyenletnek lehetséges megoldásai tehát:

$$\psi_{1n} = \sin n\frac{\pi x}{l}\cos\omega_n t,$$
$$\psi_{2n} = \sin n\frac{\pi x}{l}\sin\omega_n t.$$ (5.321. egyenlet)

Mivel az (5.307) egyenlet lineáris, ezeknek egy-egy állandóval szorzott összegük is megoldás:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sin n\frac{\pi x}{l}\cos\omega_n t + b_n \sin n\frac{\pi x}{l}\sin\omega_n t\right).$$ (5.322. egyenlet)

Az a_n és b_n együtthatókat úgy kell megválasztani, hogy (5.322) kielégítse az (5.308) kezdeti feltételeket. Tehát

$$\psi(x,0) = F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\frac{\pi x}{l},$$ (5.323. egyenlet)

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{t=0} = G(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n b_n \sin n\frac{\pi x}{l}.$$ (5.324. egyenlet)

Az $F(x)$, $G(x)$ függvényeknek ezt a $n\frac{\pi x}{l}$ függvények szerinti sor alakjában történő előállítását nevezzük Fourier-sornak. Ezek elméletével a matematikai analízisnek egy fejezete foglalkozik. Ebből ismert, hogy az $F(x)$, $G(x)$, függvényeknek milyen feltételeket kell teljesíteniük ahhoz, hogy az (5.323) (5.324) végtelen sorok konvergensek legyenek és megadják az adott függvényeket. Mi most feltesszük, hogy ezek a feltételek teljesülnek.

Az a_n, b_n együtthatók meghatározása a következőképpen történik. Az (5.323) sort megszorozzuk $\sin m\frac{\pi x}{l}$-lel (m szintén egész szám), és integráljuk mindkét oldalt 0-tól *l-ig:*

$$\int_0^l F(x)\sin m\frac{\pi x}{l}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l a_n \sin n\frac{\pi x}{l}\sin m\frac{\pi x}{l}\,dx.$$

A jobb oldali integrál a szinuszfüggvények ortogonalitása miatt a δ_{mn} Weierstrass-szimbólummal arányos:

$$\int_0^l \sin m\frac{\pi x}{l}\sin n\frac{\pi x}{l}dx = \frac{l}{2}\delta_{mn}.$$

Ezt figyelembe véve,

$$a_m = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin m\frac{\pi x}{l}dx.$$ (5.325. egyenlet)

Hasonlóképpen adódik a b_m együtthatóra, hogy

$$b_m = \frac{2}{\omega_m l}\int_0^l G(x)\sin m\frac{\pi x}{l}dx.$$ (5.326. egyenlet)

Az (5.322) az így meghatározott a_m, b_m együtthatókkal a kezdeti és határfeltételeket is kielégítő megoldása a megfeszített húr mozgásproblémájának.

Az eredmény fizikai tartalmának könnyebb kiderítése érdekében az a_n, b_n együtthatókat a következő alakba írjuk:

$$a_n = A_n\cos\delta_n, \qquad b_n = A_n\sin\delta_n.$$ (5.327. egyenlet)

Ezeket (5.322)-be helyettesítve, a $\psi(x, t)$ megoldásra adódik:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\frac{\pi x}{l}\cos(\omega_n t - \delta_n).$$ (5.328. egyenlet)

Tekintsük ennek a végtelen sornak *n*-edik tagját:

$$\psi(x,t) = A_n \sin n\frac{\pi x}{l}\cos(\omega_n t - \delta_n).$$ (5.329. egyenlet)

Ez olyan harmonikus rezgést ír le, amelynek az $A_n \sin n\frac{\pi x}{l}$ amplitúdója periodikusan változik a húr végétől számított x távolsággal, a rezgés $\omega_n t - \delta$ fázisa viszont minden pontban ugyanaz. Az (5.328) általános megoldás tehát a hellyel periodikusan változó amplitúdójú harmonikus rezgések szuperpozíciója. A rezgések

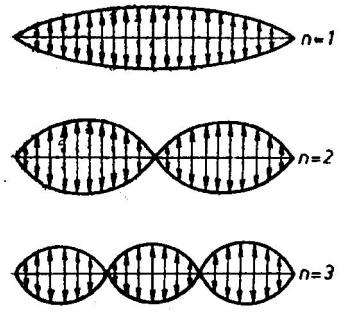
$$\nu_n = n\frac{v}{2l} \qquad (n = 1,\ 2,\ldots)$$

frekvenciái a határfeltételek által meghatározott sajátfrekvenciák. Ezek nem lehetnek tetszőlegesek, hanem a húrban haladó hullám *v* sebességétől és a húr hosszától függő $\frac{v}{2l}$ mennyiségnek egész számú többszörösei. Az $A_n \sin n\frac{\pi x}{l}$ amplitúdó az

$$x = 0, \qquad \frac{l}{n}, \qquad \frac{2l}{n}, \ldots, l \qquad \text{(5.330. egyenlet)}$$

helyeken zérus. Ezeket a zérus amplitúdójú helyeket *csomópontoknak* nevezzük.

56. ábra -



Az *n* = l-nek megfelelő ún. *alaprezgésnél* csak a húr két végén van csomópont, a közepén pedig maximális az amplitúdó. Az *n* = 2-nél a két végén kívül a húr közepe is csomópont. Az *n* =2, 3, ... rezgéseket felharmonikus rezgéseknek hívjuk. Az alaprezgést akusztikai kifejezéssel élve *alaphangnak,* a felharmonikus rezgéseket pedig *felhangoknak* nevezzük.

Az *n*-edik sajátrezgés (5.329) kifejezése ω_n frekvenciájú állóhullámot ír le. Egyszerű trigonometriai átalakítással belátható, hogy ez két egymással szemben haladó azonos amplitúdójú és frekvenciájú haladó hullám szuperpozíciója. Felhasználva a

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

összefüggést, adódik, hogy

$$\psi_n(x,t) = A_n \sin n\frac{\pi x}{l}\cos(\omega_n t-\delta) = \frac{A_n}{2}\left\{\sin\left[\frac{n\pi}{l}(x+vt)-\delta\right]+\sin\left[\frac{n\pi}{l}(x-vt)+\delta\right]\right\}. \qquad \text{(5.331. egyenlet)}$$

A {...} zárójel első tagja a −*x* irányban, a második tagja a +*x* irányban *v* sebességgel haladó periodikus hullám.

A húr sajátrezgései eszerint úgy is felfoghatók, hogy a húrban hosszirányban *v* sebességgel haladó hullámok a végeken visszaverődnek, és a szemben futó hullámok szuperpozíciójaként alakulnak ki az állóhullámok.

Az (5.322), illetve (5.328) általános megoldás tehát az (5.320) sajátfrekvenciájú állóhullámok szuperpozíciója. A levezetésből látszik, hogy a sajátfrekvenciákat és az állóhullám-megoldást az (5.309) határfeltételek szabják meg.

Az a_n, b_n Fourier-együtthatóknak a kezdeti feltételekből (5.325) és (5.326) alapján történő meghatározására példaként vegyük azt az esetet, amikor t = 0-kor a húrt d szélességű kalapáccsal a közepén megütjük. Ez a kezdeti feltétel a következőképpen fogalmazható meg:

t = 0-kor $\psi(x, 0) = F(x) = 0$,

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{t=0} = G(x) = v_0 = \text{állandó}$$

az $\left(\frac{l-d}{2}, \frac{l+d}{2}\right)_{t=0}$ intervallumban, a többi x helyen pedig $G(x) = 0$.

Az (5.325)-ből következik, hogy $a_m = 0$.

A b_m-re (5.326)-ból kapjuk:

$$b_m = \frac{2}{\omega_m l}\int_{\frac{l-d}{2}}^{\frac{l+d}{2}} v_0 \sin m\frac{\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{2v_0}{\omega_m m\pi}\left[\cos\frac{m\pi(l-d)}{2l} - \cos\frac{m\pi(l-d)}{2l}\right] = \frac{4v_0}{\omega_m m\pi}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{m\pi d}{2l}. \quad \text{(5.332. egyenlet)}$$

Ezt (5.322)-be beírva, adódik a húr sajátrezgéseit leíró $\psi(x, t)$ függvény:

$$\psi(x, t) = \frac{4v_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi d}{2l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\omega_n t. \quad \text{(5.333. egyenlet)}$$

Az összegben a páros n egész számokhoz tartozó tagok zérusok az első sin-tényező miatt. Ezért az itt megadott kezdeti feltételek mellett az n = 1 alaphangon kívül a páratlan felhangok alakulnak ki a húrban. Természetes, hogy ha a húrt nem a közepén ütjük meg, akkor mások lesznek a b_n együtthatók.

A valóságban a húr minden *dx* elemére súrlódási erő is hat, amely a kitérés sebességével arányosnak és ellentétes irányúnak vehető. A *dx* elemre ható súrlódási erő eszerint $-\alpha\frac{\partial\psi}{\partial t}dx$. Ha ezt az erőt is figyelembe vesszük, akkor az (5.302) mozgásegyenlet helyett a

MA: [$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\frac{2\varkappa}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}$ #-#5.334]

egyenletet kapjuk. Itt az $\frac{\alpha}{\varrho q}=2\varkappa$ jelölést alkalmaztuk.

Könnyen belátható, hogy ennek az egyenletnek általános megoldása:

$$\psi(x,\ t)=e^{-\varkappa t}\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\frac{\pi x}{l}\left(a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t\right),$$ (5.335. egyenlet)

ahol

$$\omega_n=2\pi\nu_n=2\pi\sqrt{\left(\frac{n\nu}{2l}\right)^2-\left(\frac{\varkappa}{2\pi}\right)^2}.$$ (5.336.. egyenlet)

Az a_n, b_n Fourier-együtthatók most is a kezdeti feltételekből számíthatók ki.

A húr a súrlódás hatására csillapított rezgéseket végez, amelyek az idővel exponenciálisan lecsengenek. Az (5.336) sajátfrekvenciák a $\varkappa$ súrlódási együttható miatt kisebbek, mint a harmonikus sajátrezgések *nv*/2*l* frekvenciái.

36. A membrán rezgései

A membrán olyan vékony hártya, amely a hajlítással szemben gyakorlatilag semmilyen ellenállást nem tanúsít. Ahhoz, hogy benne a szilárd testekre jellemző rezgések alakulhassanak ki, a szélén ki kell feszíteni. Ezért feltesszük, hogy a membrán az *xy* síkban valamilyen keret mentén egyenletesen van kifeszítve. Ez azt jelenti, hogy nyugalmi állapotban mindenütt ugyanaz a nyújtó feszültség, vagyis $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = P$, a többi komponens pedig zérus.

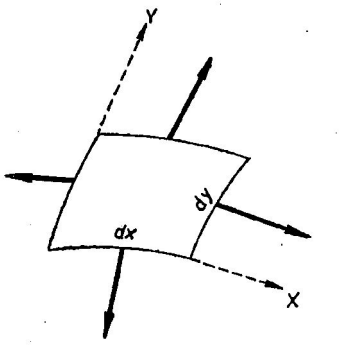
A mozgásegyenlet meghatározásához ugyanazt a gondolatmenetet követjük, mint a húrnál tettük. Most csak a kis transzverzális rezgéseket vizsgáljuk, ezért a nyugalmi helyzetéből kimozdított membrán *dx dy* felületelemére ható erő eredőjének *z* komponensét határozzuk meg, és ezt egyenlővé tesszük a *dxdy* felületű, *h* vastagságú membrándarab tömegének és *z* irányú gyorsulásának szorzatával. Mivel a megfeszített hártya a húr kétdimenziós általánosításának tekinthető, az (5.302) előtti gondolatmenettel adódik, hogy az x = áll. és *x*+ *dx*=áll. keresztmetszetekre ható húzóerők eredőjének *z* komponense:

$$F_{z1} = qP dx \frac{\partial^2 s_z}{\partial x^2} = h\, dy P\, dx \frac{\partial^2 s_z}{\partial x^2},$$ (5.337. egyenlet)

mert a tekintett *h* vastagságú membrándarab *q* keresztmetszete *q = h dy.* Hasonlóképpen kapjuk az *y* és *y+dy* végeken ható húzóerő eredőjének *z* komponensét:

$$F_{z2} = h\, dx P\, dy \frac{\partial^2 s_z}{\partial y^2}.$$ (5.338. egyenlet)

57. ábra -



A tekintett membrándarabra ható erő *z* komponense az F_{z1} és F_{z2} összege:

$$F_z = F_{z1} = F_{z2} = hP\, dx\, dy \left(\frac{\partial^2 s_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_z}{\partial y^2} \right).$$ (5.339. egyenlet)

Newton második axiómája szerint ez egyenlő $\varrho h\, dx\, dy \frac{\partial^2 s_z}{\partial t^2}$ -tel. Az egyszerűsítések után a membrán transzverzális rezgéseit leíró mozgásegyenletre a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial^2 s_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_z}{\partial y^2} = \frac{1}{v_2} \frac{\partial^2 s_z}{\partial t^2},$$ (5.340. egyenlet)

ahol

$$v = v_{tr} = \sqrt{\frac{P}{\varrho}}.$$ (5.341. egyenlet)

E kétdimenziós hullámegyenlethez járulnak még a feladat konkrét jellegéből fakadó kezdeti és határfeltételek.

A következőkben téglalap alakú membrán transzverzális rezgéseivel foglalkozunk. A membrán nyugalmi állapotban az *xy* síkban van. A koordináta-rendszer kezdő-pontja legyen a membrán egyik csúcsa, oldalainak hossza *a*, illetve *b.*

A határfeltételek:

$$s_z(0, y, t) = s_z(a, y, t) = s_z(x, 0, t) = s_z(x, b, t) = 0,$$ (5.342. egyenlet)

minden *t* időpontban.

Kezdeti feltételként megadjuk a membrán pontjainak helyét és sebességét a $t = 0$ időben. Legyenek

$$s_z(x, y, 0) = F(x, y) \quad és \quad \left(\frac{\partial s_z}{\partial t}\right)_{t=0} = G(x, y),$$ (5.343. egyenlet)

ahol $F(x, y)$ és $G(x, y)$ a határfeltételeket is kielégítő megadott függvények.

Az (5.340) hullámegyenlet megoldásának menete ugyanaz, mint amit a húrnál követtünk. $s_z(x, y, t)$-t az

$$s_z(x, y, t) = f(x, y)e^{j\omega t}$$ (5.344. egyenlet)

alakban keressük. Ezt az (5.340) egyenletbe helyettesítve, az $f(x, y)$ függvényt meghatározó

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0$$ (5.345. egyenlet)

diferenciálegyenletet kapjuk. Legyen

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y).$$

(5.345)-ből adódik:

$$f_1'' f_2 + f_1 f_2'' + k^2 f = 0,$$

ahol a vesszővel a megfelelő változó szerinti differenciálhányadost jelöltük. Ezt *f*-fel elosztva

$$\frac{f_1''}{f_1} + \frac{f_2''}{f_2} + k_2 = 0.$$ (5.346. egyenlet)

Az első tag csak az x-től, a második csak y-tól függ. Az egyenlet akkor teljesül a független változók minden értékére, ha mindegyik egy-egy állandóval egyenlő:

$$\frac{f_1''}{f_1} = -\alpha^2; \qquad \frac{f_2''}{f_2} = -\beta^2.$$ (5.347. egyenlet)

Az *α, β* és *k* között (5.346) szerint fennáll az

$$\alpha^2 + \beta^2 = k^2$$ (5.348. egyenlet)

összefüggés. Az (5.346) egyenleteknek partikuláris megoldásai: sin *αx,* cos *αx*, illetve sin *βy* és cos *βy.*

A határfeltételeknek csak a szinuszfüggvények felelnek meg, ezért

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y) = \sin \alpha x \sin \beta y.$$ (5.349. egyenlet)

Az (5.342) második és negyedik egyenletéből következik, hogy

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \qquad \beta = \frac{n\pi}{b} (m, n = 1,\ 2,\ 3, \ldots).$$ (5.350. egyenlet)

Ezeket az értékeket (5.348)-ba helyettesítve látszik, hogy a hullámegyenletnek a határfeltételeket kielégítő megoldása csak diszkrét *k* értékek mellett van. Ezek az ún. sajátértékek:

$$k_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right),$$ (5.351. egyenlet)

a megfelelő sajátfüggvények:

$$f_{mn}(x,y)=\sin m\frac{\pi x}{a}\sin n\frac{\pi y}{b}\qquad (m,n=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$ (5.352. egyenlet)

A k_{mn} sajátértékekhez tartozó sajátfrekvenciákat a

$$k_{mn}v=2\pi\nu_{mn}$$

egyenlőségből kapjuk:

$$\nu_{mn}=\frac{v}{2}\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{\varrho}}\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}.$$ (5.353. egyenlet)

Az (5.344) időtényezőjének mind a valós, mind a képzetes része megoldás. Így adott k_{mn}-hez két partikuláris megoldás van:

$$f_{mn}(x,y)\cos\omega_{mn}t\qquad \text{és}\qquad f_{mn}(x,y)\sin\omega_{mn}t.$$ (5.354. egyenlet)

Az általános megoldás:

$$s_t(x,\ y,\ t)=\sum_m\sum_n\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\left(a_{mn}\cos\omega_{mn}t+b_{mn}\sin\omega_{mn}t\right).$$ (5.355. egyenlet)

Az a_{mn} és b_{mn} Fourier-együtthatók – a húrhoz hasonlóan – a kezdeti feltételekből számíthatók ki:

$$a_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b F(x,y)\sin m\frac{\pi x}{a}\sin n\frac{\pi y}{b}dx\,dy,$$ (5.356. egyenlet)

$$b_{mn}=\frac{4}{ab\omega_{mn}}\int_0^a\int_0^b G(x,y)\sin m\frac{\pi x}{a}\sin n\frac{\pi y}{b}dx\,dy.$$ (5.357. egyenlet)

Itt kihasználtuk a sajátfüggvények ortogonalitását kifejező

$$\int_0^a\int_0^b f_{mn}(x,y)f_{m'n'}(x,y)dx\,dy=\frac{ab}{4}\delta mm'\delta nn'$$ (5.358. egyenlet)

összefüggést.

Az (5.355) megoldás az (5.328)-hoz hasonlóan a következő alakba írható:

$$s_t(x,y,t)=\sum_m\sum_n A_{mn}\sin m\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\cos(\omega_{mn}t-\delta_{mn}).$$ (5.359. egyenlet)

Ez az (*m*, *n*) számpárok által jellemzett állóhullámok szuperpozíciója. Az (*m, n*)-hez tartozó állóhullám hullámszámát az (5.351), a megfelelő frekvenciát (5.353) adja meg. Az alaprezgés (alaphang) frekvenciája:

$$\nu_{11}=\frac{v}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{\varrho}}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}.$$ (5.360. egyenlet)

Az ehhez tartozó rezgésállapot:

$$s_t(x,y,t)=A_{11}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\cos(\omega_{11}t-\delta_{11}).$$ (5.361. egyenlet)

Ennek tartós zérushelyei az $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ egyenesek. A tartós zérushelyek által alkotott folytonos vonalakat *csomóvonalaknak* nevezzük. Az alaprezgés csomóvonalai tehát a membrán keretével azonosak.

Előfordulhat, hogy több sajátfrekvencia egybeesik, vagyis $\nu_{m_1n_1}=\nu_{m_2n_2}$. Ilyenkor egy sajátfrekvenciához több sajátfüggvény tartozik. Ezt az esetet elfajulásnak nevezzük. Ez akkor lehetséges, ha a b^2/a^2 arány racionális. Ugyanis (5.353) szerint

$$\frac{m_1^2}{a^2}+\frac{n_1^2}{b^2}=\frac{m_2^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2},$$

vagy

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{n_2^2-n_1^2}{m_1^2-m_2^2}.$$ (5.362. egyenlet)

A csomóvonalak meghatározását különválasztjuk a nem elfajult és az elfajult esetre. Ha minden frekvenciához csak egy sajátfüggvény tartozik, akkor a csomóvonalakat könnyű meghatározni. Az (*m, n*) számpárnak megfelelő állóhullám:

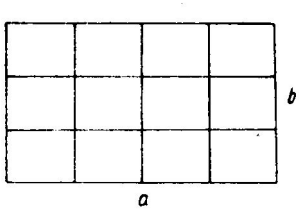
$$s_{t_{mn}}(x,y,t)=A_{mn}\sin m\frac{\pi x}{a}\sin n\frac{\pi y}{b}\cos(\omega_{mn}t-\delta_{mn}).$$ (5.363. egyenlet)

Ebből látszik, hogy az $s_{t_{mn}}$ az

$$x = 0,\ \frac{a}{m},\ \frac{2a}{m},\ldots,a; \qquad y = 0,\ \frac{b}{n},\ \frac{2b}{n},\ldots,b$$ (5.364. egyenlet)

egyenesek mentén minden időben zérus lesz. A csomóvonalak párhuzamosak a membrán oldalaival, és az egész membránt *mn* darab egyenlő nagyságú téglalapra osztják.

58. ábra -



Az elfajult esetre egy egyszerű példát veszünk. Legyen *a*=*b*=1 (a mértéket szabadon hagyjuk, lehet az cm, dm vagy m). Az egységnyi élhosszúságú négyzet alakú membrán sajátfrekvenciái:

$$\nu_{mn} = \frac{\nu}{2}\sqrt{m^2 + n^2}.$$ (5.365. egyenlet)

Ebből látszik, hogy a ν_{12}, ν_{21}, a ν_{13}, ν_{31} s í. t. frekvenciák megegyeznek egymással. Vegyük pl. a ν_{12}-t és a ν_{21}-et.

$$\nu_{12} = \nu_{21} = \nu.$$ (5.366. egyenlet)

Ehhez két sajátfüggvény tartozik:

$$f_1(x, y) = \sin \pi x \sin 2\pi y,$$
$$f_2(x, y) = \sin 2\pi x \sin \pi y.$$

Ezeknek tetszőleges lineáris kombinációja is megoldás, ezért írható

$$f(x, y) = A_1 \sin \pi x \sin 2\pi y + A_2 \sin 2\pi x \sin \pi y.$$ (5.367. egyenlet)

Mivel (5.367) a határfeltételeket is kielégíti, az időtényezővel megszorozva, ez is lehetséges rezgésállapota a membránnak. A csomóvonalak egyenlete ebben az állapotban:

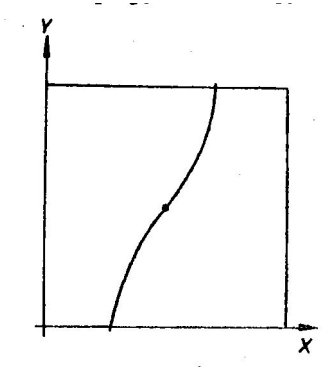
$A_1 \sin \pi x \sin 2\pi y + A_2 \sin 2\pi x \sin \pi y = 0.$ (5.368. egyenlet)

Figyelembe véve a sin 2*α*=2 sin *α* cos *α* összefüggést, a *λ*= − A_1/A_2 jelöléssel kapjuk:

$\cos \pi x = \lambda \cos \pi y.$

Ha *λ*=1, akkor az *y*=*x,* 45°-ban hajló egyenes lesz a csomóval. Ha *λ*≠1, akkor (5.368) egy transzcendens egyenlet, és olyan görbét ír le, amely átmegy a membránközéppontján, ugyanis $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ pont mindig kielégíti az egyenletet, bármilyen értéke van is a *λ*-nak. Ha *λ*=1/2, akkor a görbe az *y*=0 egyenest az $x = \frac{1}{\pi} \text{arc} \cos \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ pontban, az *y* = 1 egyenest a $x = \frac{2}{3}$ pontban metszi.

59. ábra -



Az elfajult sajátállapotokban tehát úgy kell meghatározni a csomóvonalakat, hogy az elfajult állapot sajátfüggvényeinek lineáris kombinációit vesszük, és ezeknek keressük meg a zérushelyeit.

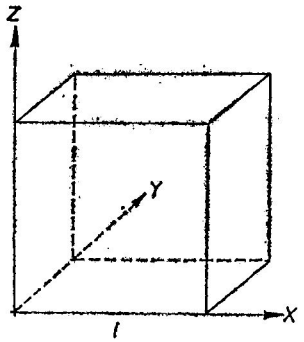
37. Kocka alakú szilárd test sajátrezgései

A későbbi tanulmányainkban majd foglalkozunk a szilárd anyag fajhőjének hőmérsékletfüggésével. Az alacsony hőmérsékletek tartományában olyan ellentmondás mutatkozott az elmélet és a tapasztalat között, amelyet az ún. klasszikus fizika nem tudott feloldani. A tapasztalattal megegyező magyarázatot csak a kvantumelmélet alapján adhatunk. Tulajdonképpen ez volt az egyik probléma, amelynek helyes értelmezése a kvantummechanika kialakulásához vezetett. Majd látni fogjuk, hogy a magyarázathoz szükségünk van a test rugalmas sajátrezgései számának

spektrális eloszlására. Ennek előkészítéseképpen most megvizsgáljuk, hogy véges kiterjedésű szilárd test meghatározott határfeltételek mellett milyen sajátrezgéseket végezhet. Az egyszerűség kedvéért *l* élhosszúságú, *kocka alakú szilárd testet* vizsgálunk. A koordináta-rendszer kezdőpontját az egyik csúcsba helyezzük, és a tengelyeket az élekkel egy irányúaknak választjuk. Ki fog derülni, hogy a végeredmény nem függ a test alakjától, hanem csak annak térfogatától, ezért nem jelent korlátozást, ha a test alakját kockának választjuk.

Már az előző pontokban láttuk, hogy a sajátrezgések kialakulásában, illetve a feladat megoldásában a határfeltételeknek milyen fontos szerepük van. Lényegében ezek felelősek a sajátrezgésekért, mert a mozgásegyenlet a végtelen kiterjedésű közegnél is ugyanaz, mint a végesnél; de az előbbi esetben nincsenek határfeltételek, és emiatt lehetnek megoldások a véges sebességgel terjedő haladó hullámok, míg a húrnál vagy membránnál a határfeltételek következtében ezek a hullámok a test szélein visszaverődnek és állóhullámok keletkeznek. Így a határfeltételek miatt alakulnak ki húrban, illetve membránban a sajátrezgések.

60. ábra -



Hasonló a helyzet a háromdimenziós problémánál is, de a megoldandó matematikai feladat hosszú ideig nehéznek tűnt éppen a határfeltételek miatt. Nézzük, miben áll ez a nehézség. Ha a kocka felületét szabadnak gondoljuk, akkor a feszültségeknek a felület mentén el kell tűnniük. Ez fizikailag azt jelenti, hogy a test zárt rendszer, tehát a környezetével semmilyen energiacsere nincs. Ezzel a határfeltétellel, hogy a húzó és nyírófeszültségék legyenek a test felületén zérusok, a mozgásegyenleteket nem lehetett egzaktul megoldani. Nagy előrehaladást jelentett, amikor Ritz 1909-ben kidolgozott egy közelítő eljárást az ilyen típusú matematikai feladat megoldására. Ezzel az ún. szukcesszív approximáción alapuló eljárással jó közelítő megoldást lehetett találni.

Debye 1912-ben egzakt megoldást adott elég nagy sugarú, gömb alakú, szabad felületűnek feltételezett szilárd test sajátrezgéseire. A megoldás elég körülményes, eredményül gömbfüggvények adódnak, és csak abban az esetben vonatkoztatható nem gömb alakú testekre, ha kiterjedésük nagy. Ekkor ugyanis a gömbfüggvények aszimptotikus alakját lehet használni. Sommerfeld ismerte fel ugyancsak 1912-ben, hogy más határfeltételekkel a feladat egzaktul és viszonylag könnyen megoldható. A számítás elvégzését és az eredmény közlését tanítványára, Ortvay Rudolfra bízta. Mi most az Ortvay-féle megoldást ismertetjük.

Az *x* normálisú lap felületegységén az **s** elmozdulás során a feszültségek által végzett elemi munka:

$$\delta A = \sigma_{xx} s_x + \sigma_{xy} s_y + \sigma_{xz} s_z.$$ (5.369. egyenlet)

Ha a környezettel nincs energiacsere, akkor ennek el kell tűnnie. Ez zérus lesz, ha

$$\sigma_{xx} + \sigma_{xy} + \sigma_{xz} = 0,$$ (5.370. egyenlet)

vagyis szabad a felület; vagy ha

$$s_x = s_y = s_z = 0,$$ (5.371. egyenlet)

ami annak felel meg, hogy a test merev falakkal van körülvéve.

Mint említettük, a feladat nehézsége az (5.370) határfeltételekkel volt kapcsolatban. Az (5.369)-ből látszik – miként arra Somigliana már 1902-ben az egyensúlyi feladat tárgyalásánál rámutatott –, hogy a δA=0 akkor is, ha

$$\sigma_{xx} = 0, \qquad s_y = s_z = 0,$$ (5.372. egyenlet)

vagy

$$s_x = 0, \qquad \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0.$$ (5.372'. egyenlet)

Az (5.372') határfeltételek fizikailag a következőképpen értelmezhetők. A kocka merev falakkal van körülvéve, ezért normálisirányú elmozdulás nem lehetséges, tehát $s_x = 0$; csak a lap mentén mozdulhat el, de súrlódásmentesen, azaz $\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$. Az (5.372′)-höz hasonló határfeltételek vannak az *y* és *z* normálisú lapokra. A megoldandó

$$\varrho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{s} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s}$$ (5.373. egyenlet)

mozgásegyenlethez tehát az (5.372′) határfeltételek járulnak.

Az (5.372′) határfeltétel az $x = 0$ és $x = l$ lapokra vonatkozik. Mivel $s_x = 0$ az egész lap mentén, ezért s_x független az *y*-tól és *z*-től:

$$\frac{\partial s_x}{\partial y} = \frac{\partial s_x}{\partial z} = 0 \quad \text{az} \qquad x = 0, \quad x = l$$ (5.374. egyenlet) helyen.

Másrészt

$$\sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} = 2\mu\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x}\right) = 0,$$
$$\sigma_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz} = 2\mu\left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x}\right) = 0. \quad \text{(5.375. egyenlet)}$$

Az (5.374)-gyel együtt ez azt jelenti, hogy

$$\frac{\partial s_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial s_z}{\partial x} = 0 \quad \text{az} \quad x = 0, \quad x = l \quad \text{(5.376. egyenlet) lapokon.}$$

Összefoglalva az $x = 0$, $x=l$ lapokra vonatkozó határfeltételeket:

$$s_x = 0, \quad \frac{\partial s_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial s_z}{\partial x} = 0. \quad \text{(5.377. egyenlet)}$$

Hasonló meggondolással kapjuk a kocka többi lapjára vonatkozó határfeltételeket.

Az $y = 0$, $y=l$ lapokra

$$s_y = 0, \quad \frac{\partial s_x}{\partial y} = \frac{\partial s_z}{\partial y} = 0, \quad \text{(5.378. egyenlet)}$$

a $z = 0$, $z=l$-re

$$s_z = 0, \quad \frac{\partial s_y}{\partial z} = \frac{\partial s_y}{\partial z} = 0. \quad \text{(5.379. egyenlet)}$$

Az (5.377)−(5.379) határfeltételeket kielégítik a következő függvények:

$$s_x = (x, y, z, t) = A\sin n_1\frac{\pi x}{l}\cos n_2\frac{\pi y}{l}\cos n_3\frac{\pi z}{l}e^{i\omega t},$$
$$s_y = (x, y, z, t) = B\cos n_1\frac{\pi x}{l}\sin n_2\frac{\pi y}{l}\cos n_3\frac{\pi z}{l}e^{i\omega t},$$
$$s_z = (x, y, z, t) = C\cos n_1\frac{\pi x}{l}\cos n_2\frac{\pi y}{l}\sin n_3\frac{\pi z}{l}e^{i\omega t}, \quad \text{(5.380. egyenlet)}$$

Az n_1, n_2, n_3 egész számokat, az *A, B, C* állandókat jelentenek. Utóbbiakat úgy kell megválasztani, hogy (5.380) megoldása legyen az (5.373) mozgásegyenletnek. Feltesszük, hogy ezek megoldások; így az *A, B, C* együtthatókra kapunk algebrai egyenleteket, amelyekből azok meghatározhatók. Kiszámítjuk először a div **s**-et.

$$\operatorname{div}\mathbf{s}=\frac{\partial s_x}{\partial x}+\frac{\partial s_y}{\partial y}+\frac{\partial s_z}{\partial z}=\frac{\pi}{l}\left(n_1A+n_2B+n_3C\right)\cos n_1\frac{\pi x}{l}\cos n_2\frac{\pi y}{l}\cos n_3\frac{\pi z}{l}e^{i\omega t}. \quad \text{(5.381. egyenlet)}$$

A grad div **s** komponensei:

$$\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\mathbf{s}=-n_1\frac{\pi^2}{l^2}\left(n_1A+n_2B+n_3C\right)\sin n_1\frac{\pi x}{l}\cos n_2\frac{\pi y}{l}\cos n_3\frac{\pi z}{l}e^{i\omega t}, \quad \text{(5.382. egyenlet)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\mathbf{s}=-n_2\frac{\pi^2}{l^2}\left(n_1A+n_2B+n_3C\right)\cos n_1\frac{\pi x}{l}\sin n_2\frac{\pi y}{l}\cos n_3\frac{\pi z}{l}e^{i\omega t}, \quad \text{(5.383. egyenlet)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\mathbf{s}=-n_3\frac{\pi^2}{l^2}\left(n_1A+n_2B+n_3C\right)\cos n_1\frac{\pi x}{l}\cos n_2\frac{\pi y}{l}\sin n_3\frac{\pi z}{l}e^{i\omega t}. \quad \text{(5.384. egyenlet)}$$

A Laplace-operátort az s_x-re alkalmazva, kapjuk:

$$\Delta s_x=\frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 s_x}{\partial z^2}=-A\frac{\pi^2}{l^2}\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right)\sin n_1\frac{\pi x}{l}\cos n_2\frac{\pi y}{l}\cos n_3\frac{\pi z}{l}e^{i\omega t}. \quad \text{(5.385. egyenlet)}$$

Hasonlóképpen adódik:

$$\Delta s_y=-B\frac{\pi^2}{l^2}\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right)\cos n_1\frac{\pi x}{l}\sin n_2\frac{\pi y}{l}\cos n_3\frac{\pi z}{l}e^{i\omega t}, \quad \text{(5.386. egyenlet)}$$

$$\Delta s_z=-C\frac{\pi^2}{l^2}\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right)\cos n_1\frac{\pi x}{l}\cos n_2\frac{\pi y}{l}\sin n_3\frac{\pi z}{l}e^{i\omega t}. \quad \text{(5.387. egyenlet)}$$

Végül

$$\frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2}=-\omega^2 s_x, \qquad \frac{\partial^2 s_y}{\partial t^2}=-\omega^2 s_y, \qquad \frac{\partial^2 s_z}{\partial t^2}=-\omega^2 s_z. \quad \text{(5.388. egyenlet)}$$

Mindezeket a mennyiségeket a komponensekben felírt (5.373) mozgásegyenletbe behelyettesítve, az *A, B, C* együtthatókra a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$A\left(a_1-\varrho\omega^2\right)+Bb_1+Cb_2=0,$$
$$Ab_1+B\left(a_2-\varrho\omega^2\right)+Cb_3=0,$$
$$Ab_2+Bb_3+C\left(a_3-\varrho\omega^2\right)=0, \quad \text{(5.389. egyenlet)}$$

ahol

$$a_1=\frac{\pi^2}{l^2}\left[\left(\lambda+\mu\right)n_1^2+\mu\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right)\right],$$
$$a_2=\frac{\pi^2}{l^2}\left[\left(\lambda+\mu\right)n_2^2+\mu\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right)\right],$$
$$a_3=\frac{\pi^2}{l^2}\left[\left(\lambda+\mu\right)n_3^2+\mu\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right)\right], \quad \text{(5.390. egyenlet)}$$

$$b_1=\left(\lambda+\mu\right)\frac{\pi^2}{l^2}n_1n_2,$$
$$b_2=\left(\lambda+\mu\right)\frac{\pi^2}{l^2}n_1n_3,$$
$$b_3=\left(\lambda+\mu\right)\frac{\pi^2}{l^2}n_2n_3, \quad \text{(5.391. egyenlet)}$$

Az (5.389) homogén lineáris egyenletrendszer az *A, B, C* együtthatókra. Ennek akkor van az *A*=*B*=*C*=0 triviálistól különböző megoldása, ha a rendszer determinánsa zérus:

$$\begin{vmatrix} a_1-\varrho\omega^2 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_2-\varrho\omega^2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & a_3-\varrho\omega^2 \end{vmatrix}=0. \quad \text{(5.392. egyenlet)}$$

A determináns kifejtésével ω_2-re a

$$\left[\mu\frac{\pi^2}{l^2}\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right)-\varrho\omega^2\right]^2\left[\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\pi^2}{l^2}\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right)-\varrho\omega^2\right]=0 \quad \text{(5.393. egyenlet)}$$

harmadfokú algebrai egyenletet kapjuk. Ennek ω-ra három valós pozitív gyöke van, amelyek közül kettő megegyezik:

$$\omega_1 = \omega_2 = \pi\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}\frac{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}{l}, \quad \text{(5.394. egyenlet)}$$

$$\omega_3 = \pi\sqrt{\frac{2\mu+\lambda}{\varrho}}\frac{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}{l}. \quad \text{(5.395. egyenlet)}$$

A longitudinális, illetve transzverzális rugalmas hullámok

$$v_l = \sqrt{\frac{2\mu+\lambda}{\varrho}}, \quad v_{tr} = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$$

sebességeit bevezetve:

$$\nu_1 = \nu_2 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{v_{tr}}{2l}\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}, \quad \text{(5.396. egyenlet)}$$

$$\nu_3 = \frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{v_l}{2l}\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}. \quad \text{(5.397. egyenlet)}$$

Az így meghatározott frekvenciákat (5.389)-be helyettesítve, kiszámíthatjuk az *A, B, C* együtthatók arányát. Az *A, B,* C-t tehát egy közös faktor erejéig határozhatjuk meg.

A határfeltételeket is kielégítő (5.380) megoldások állóhullámokat jelentenek. Minden n_1, n_2, n_3 számhármashoz tartozik két transzverzális és egy longitudinális állóhullám. A megfelelő frekvenciákat az (5.396) és (5.397) adja meg. A transzverzális hullámok számának kétszereződése a két egymásra merőleges polarizációs állapotnak felel meg.

Vezessük be a

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\pi}{l}n_1, \quad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{\pi}{l}n_2, \quad k_3 = \frac{2\pi}{\lambda_3} = \frac{\pi}{l}n_3 \quad \text{(5.398. egyenlet)}$$

hullámszámokat. λ_1, λ_2, λ_3 az *x, y* és z irányú állóhullámok hullámhossza. A k_1, k_2, k_3 hullámszámok négyzetösszege,

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{\pi^2}{l^2}\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right) \quad \text{(5.399. egyenlet)}$$

a ν_1, ν_2, ν_3 frekvenciákkal a következő kapcsolatban van:

$$\nu_1 = \nu_2 = \frac{\nu_\pi}{2\pi} k, \qquad \nu_3 = \frac{\nu_1}{2\pi} k.$$ (5.400. egyenlet)

A kocka alaprezgésének λ_2, λ_3, λ_3 hullámhosszai megegyeznek egymással. Ugyanis ekkor $n_1=n_2=n_3=1$, és ezért

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2l.$$ (5.401. egyenlet)

A megfelelő frekvenciák:

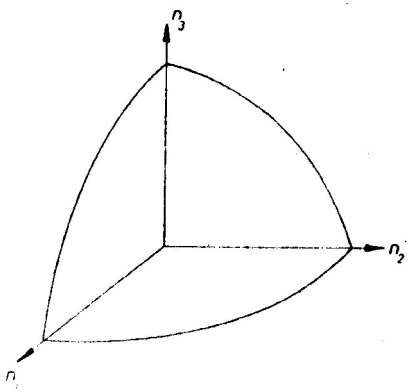
$$\nu_1 = \nu_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\nu_\pi}{l}; \qquad \nu_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\nu_1}{l}.$$ (5.402. egyenlet)

A további n_1, n_2, n_3 számhármasok a magasabb frekvenciájú sajátrezgéseket adják meg.

A bevezetőben említett fajhőproblémánál szükségünk lesz annak ismeretére, hogy mennyi azoknak a sajátrezgéseknek a száma, amelyek v frekvenciája a ν és $\nu+d\nu$ intervallumba esik. Ehhez könnyen jutunk, ha előbb azoknak a sajátrezgéseknek a számát határozzuk meg, amelyek frekvenciája egy megadott ν-nél kisebb.

Ábrázoljuk az n_1, n_2, n_3 számhármasokat egy n_1, n_2, n_3 tengelyű derékszögű koordináta-rendszerben. Mivel n_1, n_2, n_3 pozitív egész számok, ezért az egységnyi rácstávolságú pontrácsnak a pozitív nyolcadba eső pontjait kapjuk.

61. ábra -



Egy adott ν értéknél kisebb ν_1 frekvenciájú transzverzális rezgések az n_1, n_2, n_3 olyan értékeihez tartoznak, amelyek rácspontjai az

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \left(\frac{2l}{\nu_{tr}}\nu\right)^2 \quad \text{(5.403. egyenlet)}$$

gömbfelület és a koordinátasíkok által határolt $\frac{2l}{\nu_{tr}}\nu$ sugarú pozitív gömbnyolcadban vannak. Mivel a térfogategységre egy rácspont esik, ezért ha a ν vagy az l elég nagy, akkor a gömbnyolcad térfogata adja meg a keresett rácspontok, illetve a ν-nél kisebb frekvenciájú transzverzális sajátrezgések számát. E számot $N_\nu^{(1)}$-gyel jelölve,

$$N_\nu^{(1)} = \frac{1}{8}\cdot\frac{4\pi}{3}\left(\frac{2l\nu}{\nu_{tr}}\right)^3 = \frac{4\pi}{3}l^3\left(\frac{\nu}{\nu_{tr}}\right)^3 = \frac{4\pi}{3}V\left(\frac{\nu}{\nu_{tr}}\right)^3, \quad \text{(5.404. egyenlet)}$$

ahol V a kocka térfogatát jelenti. Mivel a két transzverzális rezgés frekvenciája megegyezik, a ν_2-höz tartozó rezgések $N_\nu^{(2)}$ száma is megegyezik $N_\nu^{(1)}$-gyel.

Hasonló gondolatmenettel adódik a $\nu_3 < \nu$ frekvenciájú longitudinális rezgések $N_\nu^{(3)}$ számára:

$$N_\nu^{(3)} = \frac{4\pi}{3}V\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)^3. \quad \text{(5.405. egyenlet)}$$

A ν-nél kisebb frekvenciájú összes sajátrezgések száma:

$$N_\nu = N_\nu^{(1)} + N_\nu^{(2)} + N_\nu^{(3)} = \frac{4\pi}{3}V\nu^3\left(\frac{1}{\nu_1^3} + \frac{2}{\nu_{tr}^3}\right). \quad \text{(5.406. egyenlet)}$$

A ν és $\nu + d\nu$ intervallumba eső ν frekvenciájú sajátrezgések száma (5.406)-ból a ν szerinti differenciálással adódik:

$$dN_\nu = 4\pi V\nu^2\left(\frac{1}{\nu_1^3} + \frac{2}{\nu_{tr}^3}\right)d\nu. \quad \text{(5.407. egyenlet)}$$

Az (5.406)-ból és (5.407)-ből látszik, hogy mind az N_ν mind a dN_ν független a szilárd test alakjától, csak annak V térfogatától függ.

A levezetésből kiderül, hogy a sajátrezgések számára kapott eredmények akkor jók, ha a ν vagy a kocka mérete nagy, mert ebben az esetben lehetett a rácspontok számát a gömbnyolcad térfogatával egyenlőnek venni. Ugyanis az itt elkövetett relatív hiba zérushoz tart, ha a gömbsugarat minden határon túl növeljük.

6. fejezet - FOLYADÉKOK ÉS GÁZOK MECHANIKÁJA

A folyadékok és gázok jellemzése. Az állapotegyenlet

A folyadékok — a tapasztalat szerint — térfogatváltozással nem járó alakváltozással szemben csak igen kicsi ellenállást tanúsítanak, ha a deformáció lassan megy végbe. A szomszédos folyadékrétegek nagyon kis erővel elcsúsztathatók egymás mentén. Ez azt jelenti, hogy lassú deformációknál a nyírófeszültségek elhanyagolhatóan kicsik. A folyadékok folytonos anyageloszlású modelljében ezt a tulajdonságukat használjuk fel jellemzésükre. Nyugalmi állapotukban a nyírófeszültségek teljesen eltűnnek, ezért folyadékon olyan testeket értünk, amelyek nyugalmi állapotában

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0.$$ (6.1. egyenlet)

Feltételezve, hogy a folyadék izotrop, az (5.25), valamint (6.1) alapján adódik, hogy a folyadékok μ torziómodulusa zérus. Tehát egyetlen anyagi együtthatóval, a Lamé-féle λ-val lehet őket jellemezni. Ez pedig a $\mu = 0$ esetén (5.70) szerint megegyezik a $\mathrm{K} = \frac{1}{\varkappa}$ kompressziómodulussal. A nyugvó folyadékok anyagi egyenletei tehát

$$\sigma_{ik} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ik},$$ (6.2. egyenlet)

vagy

$$\sigma_{ik} = K \varepsilon_{ll} \delta_{ik}.$$ (6.2'. egyenlet)

Ebből következik, hogy a $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ normálisirányú feszültségek a nyugvó folyadékban megegyeznek egymással. A σ_{xx} az *x* normálisú lap felületegységére ható *x* irányú erőt jelenti. Hasonló a jelentése a σ_{yy} *és* σ_{zz}-nek is az *y*, illetve *z* normálisú lapnál. A folyadékok elméletében a felületegységre merőlegesen ható erőt *nyomásnak* nevezzük, és akkor tekintjük pozitívnak, ha a tekintett térfogatelembe befelé mutat. Ennek megfelelően

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p.$$ (6.3. egyenlet)

Ezt (6.2')-vel összevetve,

$$p = -K\Theta = -K \operatorname{div} \mathbf{s}.$$ (6.4. egyenlet)

A *K* kompressziómodulus tehát

$$K = -\frac{p}{\Theta}.$$ (6.5. egyenlet)

Vagy ha általánosabban a $-\Theta = -\frac{\Delta V}{V}$ -n a nyomásnövekedés okozta relatív térfogatcsökkenést értjük, akkor

$$K = -V\frac{\Delta p}{\Delta V} = -V\frac{dp}{dV}.$$ (6.6. egyenlet)

A folyadékok fizikai állapotát a *p* nyomással, a ϱ tömegsűrűséggel és a *T* hőmérséklettel adjuk meg. Ezért a feszültségek és a deformációk közötti (6.2), (6.2') vagy (6.4) anyagi egyenletek helyett e három mennyiség kapcsolatát kifejező

$$f(p, \varrho, T) = 0$$ (6.7. egyenlet)

állapotegyenletet használjuk. Ezt természetesen a tapasztalatból határozzuk meg. Ha a *T* hőmérséklet állandó, vagyis izotermikus folyamatokra szorítkozunk, akkor

$$f(p, \varrho,) = 0,$$ (6.8. egyenlet)

amiből

$$p = p(\varrho) \quad \text{vagy} \quad \varrho = \varrho(p).$$ (6.9. egyenlet)

A (6.7) általános esetben

$$p = p(\varrho, T) \quad \text{vagy} \quad \varrho = \varrho(p, T).$$ (6.10. egyenlet)

A folyadékok széles körű alkalmazásokban összenyomhatatlannak tekinthetők, tehát a ϱ tömegsűrűség (vagy a *V* térfogat) független a nyomástól. Az összenyomhatatlan (inkompresszibilis) folyadék izotermikus állapotegyenlete

$$\varrho = \text{áll}.$$ (6.11. egyenlet)

A (6.1) és (6.3) összefüggések — definíció szerint — nyugvó folyadékokra vonatkoznak. A mozgó folyadékokban a belső súrlódás miatt fellépnek nyírófeszültségek is, de ezek sok folyamatnál olyan kicsik, hogy gyakorlatilag figyelmen kívül hagyhatók. Éppen ezért először olyan idealizált

folyadékok mozgását vizsgáljuk, amelyeknél a mozgás folyamán sem lépnek fel nyírófeszültségek. Az ilyen folyadékokat ideális vagy *súrlódásmentes folyadékoknak* nevezzük. A valódi, *súrlódó folyadékokra* a (6.1) és (6.3) egyenletek természetesen módosulnak a súrlódás miatt. Az utóbbiak mozgását a fejezet második részében tárgyaljuk.

A gázok a folyadékoktól a térfogatváltozással, illetve az összenyomással szembeni viselkedésükben különböznek. A folyadékok összenyomásához olyan nagy erőre van szükség, hogy azok gyakorlatilag összenyomhatatlanoknak tekinthetők. Ezzel szemben a gázok összenyomhatók, sőt maguktól szabadon kitöltik a rendelkezésükre álló térfogatot. A mondottak értelmében a (6.1)—(6.6) képletek gázokra is vonatkoznak. Az állapotegyenletük azonban különbözik a folyadékokétól.

A gázok fizikai állapotát is a *p* nyomással, a ϱ tömegsűrűséggel és a *T* hőmérséklettel jellemezzük. Ideális gáznak — a folyadékokhoz hasonlóan — az olyan gázt nevezzük, amelyben nyírófeszültségek a mozgás folyamán sem lépnek fel. Az ilyen gázok általános állapotegyenlete:

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{R}{M} T,$$ (6.12. egyenlet)

ahol *R* az univerzális gázállandót, *M* a relatív molekulatömeget jelenti.

A gyakorlati alkalmazásokban két fontos speciális eset szokott többször előfordulni. Az egyikben a folyamatok állandó hőmérsékleten mennek végbe, ezért ezeket izotermikus folyamatoknak nevezzük. A (6.12) általános egyenletből következik, hogy ilyenkor a

$$\frac{p}{\varrho} = \text{áll.}$$ (6.13. egyenlet)

állapotegyenlet érvényes.

A másik, az ún. adiabatikus folyamatok esete. Ezekre az jellemző, hogy a tekintett fizikai rendszer a környezetével nem cserél hőenergiát. Az adiabatikus változásoknál az állapotegyenlet:

$$\frac{p}{\varrho^{\gamma}} = \text{áll.},$$ (6.14. egyenlet)

ahol γ az állandó nyomáson és az állandó térfogaton vett fajhő hányadosa.

Az ideális folyadékok és gázok fenti egyenleteit összevetve megállapíthatjuk, hogy a különbség mindössze annyi, hogy míg az ideális folyadékok általában összenyomhatatlanok, addig az ideális gázok összenyomhatók és a nyomás (6.12)—(6.14) szerint változik a ϱ sűrűséggel. Ezért a következőkben az egyszerűbb szóhasználat miatt folyadékokról beszélünk, de az eredményeink a tekintetbe vett állapotegyenlettől függően értelem szerint ideális folyadékokra, illetve gázokra vonatkoznak.

Visszatérve a (6.3) egyenlethez, ennek az a fizikai tartalma, hogy ideális folyadékban és gázban a nyomás bármely pontban független az iránytól. Vagyis az adott ponton átmenő bármely *df* felületelemre, annak irányításától független, rá merőleges *pdf* nyomóerő hat. Ezt a törvényt *Pascal* ismerte fel először 1695-ben, ezért a szakirodalomban Pascal-törvény néven szerepel.

A) Ideális folyadékok és gázok dinamikája

A mozgásegyenletek

A folyadékok és gázok mechanikai tulajdonságainak tanulmányozásánál is azt a gondolatmenetet követjük, amelyet az előző fejezetekben alkalmaztunk. Először meghatározzuk a mozgástörvényt, amely a rendszer fizikai állapotának időbeli változását leírja. A folytonos anyageloszlás modelljét használva, az ideális folyadék és gáz fizikai állapotát az **s**(**r**, *t*) elmozdulástér és a **v**(**r**, *t*) sebességtér jellemzi. Az állapot a környezettel való kölcsönhatás miatt változik meg. Mivel a folyadék is deformálható test, a (4.62) általános mozgásegyenletek írják le a folyadékok dinamikáját is. Tehát

$$\varrho \frac{dv_i}{dt} = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}.$$ (6.15. egyenlet)

Most figyelembe kell vennünk az ideális folyadékokat és gázokat jellemző (6.1) és (6.3) egyenleteket, amelyeket összevont alakban így írhatunk:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}.$$ (6.16. egyenlet)

Ezt (6.15)-be helyettesítve,

$$\varrho \frac{dv_i}{dt} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij}.$$ (6.17. egyenlet)

A $\frac{dv_i}{dt}$ gyorsulás (4.42) szerint

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k.$$ (6.18. egyenlet)

Ezt (6.17)-be beírva,

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k = \frac{1}{\varrho} f_i - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$ (6.19. egyenlet)

Ezek az ún. *Euler-egyehletek* az ideális folyadékok mozgásegyenletei. E három egyenlet összefoglalható egy vektoregyenletbe:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \operatorname{grad})\,\mathbf{v} = \frac{1}{\varrho}\mathbf{f} - \frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p. \quad \text{(6.20. egyenlet)}$$

Az Euler-egyenletekben ismert a külső térfogati erő **f** sűrűsége, ismeretlen a sebesség három v_i komponense, a *p* nyomás és a ϱ sűrűség. Ennek az öt függvénynek a meghatározására a (6.19), (6.20) három egyenlet nem elegendő. A negyedik egyenletet a nyomás és a sűrűség közötti kapcsolatot kifejező

$$p = p(\varrho) \quad \text{(6.21. egyenlet)}$$

állapotegyenlet adja, és ezekhez járul ötödikként a tömegmegmaradás általános érvényű tételét megfogalmazó (4.67) kontinuitási egyenlet,

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0. \quad \text{(6.22. egyenlet)}$$

Ez az öt egyenlet — az Euler-egyenletek, az állapotegyenlet és a kontinuitási egyenlet — foglalja magába az ideális folyadékok és gázok dinamikájának alaptörvényeit. Egyértelmű megoldásukhoz a feladat jellegének megfelelő kezdeti és határfeltételek megadása szükséges.

A határfeltételek a következők. A folyadék felületén a nyomásnak meg kell egyeznie a külső erőkből származó $\mathbf{P}_{(n)}$ feszültséggel. A (4.55) szerint

$$P_{(n)i} = \sigma_{ij} n_j = -p\delta_{ij} n_j, \quad \text{(6.23. egyenlet)}$$

ahol n_j a felület külső normálisa irányába mutató egységvektor *j*-edik komponense. Másrészt merev fal mentén az ideális folyadék súrlódásmentesen elcsúszhat, ezért ott csak a sebesség normálisirányú komponensének kell eltűnnie:

$$v_n = 0 \text{ a merev falnál.} \quad \text{(6.24. egyenlet)}$$

A (6.19)—(6.24) egyenletek a kezdeti feltételekkel együtt egyértelműen meghatározzák a mozgó folyadék **v**=**v**(**r**, *t*) sebességterét, a *p*=*p*(**r**, *t*) nyomását és $\varrho = \varrho(\mathbf{r}, t)$ sűrűségeloszlását a hely és az idő függvényeként.

A (6.19) Euler-egyenleteket az alkalmazások miatt még más alakban is felírjuk. Ehhez felhasználjuk a következő azonos átalakítást:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k = v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}(v_k v_k) - v_k \frac{\partial v_l}{\partial x_j}\left(\delta_{ji}\delta_{kl} - \delta_{li}\delta_{jk}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(v_k v_k) - v_k \frac{\partial v_l}{\partial x_j} e_{jlr} e_{ikr}. \quad \text{(6.25. egyenlet)}$$

Korábbi megállapodásunknak megfelelően az egy kifejezésben kétszer előforduló indexre összegezés értendő 1-től 3-ig $\text{pl.}\left(v_k v_k = \sum_{k=1}^{3} v_k v_k\right)$. Az e_{ikr} a (4.10)-ben definiált teljesen antiszimmetrikus egységtenzor, amelyre teljesül az itt felhasznált

$$e_{jkr}e_{ikr} = \delta_{ji}\delta_{lk} - \delta_{jk}\delta_{li} \quad \text{(6.26. egyenlet)}$$

összefüggés.

A (6.25) a vektoriális szorzat (4.13) kifejezése, valamint a rotáció definíciója alapján a következő vektoregyenletbe foglalható össze:

$$(\mathbf{v}, \operatorname{grad})\mathbf{v} = \frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}. \quad \text{(6.27. egyenlet)}$$

A (6.20) Euler-egycnlet ezek felhasználásával a következő alakba írható:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{1}{\varrho}\mathbf{f} - \frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p. \quad \text{(6.28. egyenlet)}$$

Megmaradási tételek

A deformálható testekre a 21. pontban bemutatott megmaradási tételek általános érvényüknél fogva természetesen az ideális folyadékokra is fennállnak. Emlékeztetünk rá, hogy ezek a mozgásegyenletek következményeiként adódtak. Most ezeket a tételeket foglaljuk össze ideális folyadékokra és gázokra specializált alakban.

Az impulzustétel

A (4.76)-ból (6.16) figyelembevételével adódik

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho v_i v_j + p\delta_{ij}) = f_i \qquad (i = 1, 2, 3). \quad \text{(6.29. egyenlet)}$$

Ez az egyenlet fejezi ki az impulzustételt ideális folyadékokra és gázokra. A ϱv_i az áramló folyadék impulzussűrűségének *i*-edik komponense. A

$$p_{ij} = \varrho v_i v_j + p\delta_{ij} \quad \text{(6.30. egyenlet)}$$

kétindexes szimmetrikus tenzor az impulzusáram sűrűsége.

Ha a folyadékra külső térfogati erő nem hat, akkor a (6.29)-nek valamely véges *V* térfogatra vett integrálja,

$$\frac{d}{dt}\int_V \varrho \mathbf{v}\, dV = -\int_{F_V} \hat{p}_n df \quad \text{(6.31. egyenlet)}$$

az impulzus megmaradását fejezi ki. $\hat{p}_n$ a (6.30) tenzor normális irányú komponense a *V* tartományt határoló felületen*[1]. A bal oldal a *V* térfogatban levő folyadék impulzusának időegységre eső növekedése. A jobb oldal a felületen ugyancsak egységnyi idő alatt beáramló impulzus. Ha a rendszer zárt, akkor $\hat{p}_n$ a felület mentén eltűnik, és ekkor a folyadék impulzusa időben állandó marad.

Az impulzusnyomaték-tétel

A deformálható testekre levezetett (4.90) impulzusnyomaték-tételből ideális folyadékokra a (6.16) tekintetbevételével

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r}\times\varrho\mathbf{v}) + \operatorname{div}\hat{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{f}, \quad \text{(6.32. egyenlet)}$$

ahol

$$\left(\hat{L}\right)_{ik} = L_{ik} = e_{ijl}x_j\left(\varrho v_l v_k + p\delta_{lk}\right) \quad \text{(6.33. egyenlet)}$$

a folyadék impulzusnyomatékának áramsűrűség-tenzora.

A V térfogatú tartományra integrálva, a Gauss-tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}\int_V (\mathbf{r}\times\varrho\mathbf{v})\, dV = -\int_{F_V} \hat{L}_n\, df + \int_V \mathbf{r}\times\mathbf{f}\, dV. \quad \text{(6.34. egyenlet)}$$

A folyadék *V* térfogatú részének impulzusnyomatéka két okból változik meg: a *V*-t határoló felületen impulzusnyomaték áramlik be, másrészt a külső térfogati erők nyomatékot fejtenek ki, amely megnöveli az impulzusnyomatékot. A (6.32), illetve (6.34) az impulzusnyomaték-tételt fejezi ki ideális folyadékokra. Ha térfogati erők nem hatnak, és a tartomány felületén $\hat{L}_n$ eltűnik, akkor a tartomány impulzusnyomatéka állandó marad.

[1]* Lásd a Függelék 9. pontját!

Az energiatétel

A 21.4 pontban követett gondolatmenettel az ideális folyadékok (6.19) mozgásegyenletéből levezethető az energiatétel. Egyszerűbben jutunk célhoz, ha most is a deformálható testekre általánosan érvényes (4.97) egyenletet vesszük kiindulásul, és abba a σ_{ij} helyére a (6.16) kifejezést helyettesítjük. Így

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}v_j\left(\frac{1}{2}\varrho v^2+p\right)=p\frac{\partial v_j}{\partial x_j}+v_j f_j. \quad \text{(6.35. egyenlet)}$$

A jobb oldali első tag fizikai jelentésének kiderítéséhez vegyük figyelembe, hogy a folyadék a *p* nyomás hatására egész kis mértékben összenyomódik és az erre fordított deformációs munka megnöveli a folyadék ún. rugalmas potenciális energiáját [l. (4.109)]. Könnyű belátni, hogy izotermikus vagy adiabatikus alakváltozás esetén $p\frac{\partial v_j}{\partial x_j}$ a folyadék rugalmas potenciális energiasűrűségének időegységre eső csökkenésével egyezik meg. Az ideális folyadék Φ rugalmas potenciálját az izotrop szilárd testek (5.26) kifejezéséből kapjuk meg legkönnyebben, ha abban μ helyére zérust írunk. Tehát

$$\Phi=\frac{K}{2}\Theta^2, \quad \text{(6.36. egyenlet)}$$

ahol $\Theta=\varepsilon_{ii}$ a relatív térfogatváltozás. Képezzük ennek idő szerinti differenciálhányadosát:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=K\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial t}. \quad \text{(6.37. egyenlet)}$$

A $\Theta=\operatorname{div}\mathbf{s}$ figyelembevételével adódik

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=K\Theta\operatorname{div}\mathbf{v}. \quad \text{(6.38. egyenlet)}$$

A $K\Theta$ tényező (6.5) szerint a nyomással fejezhető ki:

$$K\Theta=-p. \quad \text{(6.39. egyenlet)}$$

Így

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -p \operatorname{div} \mathbf{v} = -p \frac{\partial v_j}{\partial x_j}.$$ (6.40. egyenlet)

A (6.35) jobb oldalának első tagja tehát valóban a Φ rugalmas potenciál időegységre eső csökkenése. A (6.35) energiatétel ennek alapján a következő alakba írható:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \Phi\right) + \frac{\partial}{\partial x_j} v_j \left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + p\right) = v_j f_j.$$ (6.41. egyenlet)

Az $\frac{1}{2}\varrho v^2 + \Phi$ az ideális folyadék mozgási és rugalmas potenciális energiasűrűségének az összege. A divergencia jele mögötti

$$\mathbf{S} = \mathbf{v}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + p\right)$$ (6.42. egyenlet)

vektor az energia áramsűrűsége. A (6.41) jobb oldalán az energia forrása áll. Utóbbi a külső térfogati erők teljesítménysűrűsége. A (6.41) egyenlet tehát az energiatételt fejezi ki differenciális alakban ideális folyadékokra és gázokra.

Ha a folyadékra ható külső erő konzervatív, akkor az erőtér $\frac{\mathbf{f}}{\varrho}$ erőssége (tömegegységre ható erő) egy $U(\mathbf{r})$ skalártér negatív gradienseként írható fel:

$$\frac{\mathbf{f}}{\varrho} = -\operatorname{grad} U,$$ (6.43. egyenlet)

vagy komponensekben

$$f_j = -\varrho \frac{\partial U}{\partial x_j}.$$ (6.44. egyenlet)

A (6.41) egyenlet jobb oldala ebben az esetben a kontinuitási egyenlet felhasználásával a következő alakra hozható:

$$v_j f_j = -\varrho v_j \frac{\partial U}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varrho v_j U\right) + U \frac{\partial\left(\varrho v_j\right)}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varrho v_j U\right) - U \frac{\partial \varrho}{\partial t}.$$ (6.45. egyenlet)

Mivel konzervatív erőtér esetén az $U(\mathbf{r})$ potenciál nem függ expliciten az időtől, ezért

az utolsó tag $\frac{\partial(\varrho U)}{\partial t}$ alakba írható. Így

$$v_j f_j = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varrho v_j U\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\varrho U).$$ (6.46. egyenlet)

Ezt (6.41)-be helyettesítve, átrendezés után

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \Phi + \varrho U\right) + \frac{\partial}{\partial x_j} v_j \left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + p + \varrho U\right) = 0.$$ (6.47. egyenlet)

Ez az egyenlet a mechanikai energia megmaradását fejezi ki differenciális alakban. Erről könnyen meggyőződhetünk, ha az egyenletet integráljuk a térben rögzített V térfogatra:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \Phi + \varrho U\right) dV + \int_V \operatorname{div}\left[\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + p + \varrho U\right)\right] dV = 0.$$

Mivel a térfogat nem mozog, az idő szerinti parciális differenciálás jele az integráljel elé vihető, másrészt a div térfogati integrálja Gauss-tétellel a V tartományt határoló felületre vett felületi integrállá alakítható:

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \Phi + \varrho U\right) dV = -\int_{Fv} v_n \left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + p + \varrho U\right) df.$$ (6.48. egyenlet)

A bal oldali integrál a V térfogatban foglalt folyadék teljes mechanikai energiája

$$E = \int_V \left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \Phi + \varrho U\right) dV.$$ (6.49. egyenlet)

A jobb oldal a V-t határoló felületen időegység alatt beáramló mechanikai energia. Ezért

$$\frac{dE}{dt} = -\int_{Fv} v_n \left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + p + \varrho U\right) df.$$ (6.50. egyenlet)

Ha a határfelület mentén v_n eltűnik, akkor a jobb oldal zérus. A merev fallal határolt ideális folyadékra (6.24) szerint ez a feltétel teljesül, ezért

$$\frac{dE}{dt} = 0,$$ (6.50. egyenlet)

amiből következik, hogy az

$$E = \int_V \left(\frac{1}{2} \varrho v^2 + \Phi + \varrho U \right) dV = \text{áll.}$$ (6.52. egyenlet)

A teljes mechanikai energia három részből tevődik össze:

$$E = E_k + E_r + E_p,$$ (6.53. egyenlet)

ahol

$$E_k = \int_V \frac{1}{2} \varrho v^2 dV$$ (6.54. egyenlet)

az áramló folyadék mozgási energiája,

$$E_r = \int_V \Phi dV$$ (6.55. egyenlet)

az összenyomhatóságból származó rugalmas potenciális energia, és

$$E_p = \int_V \varrho U dV$$ (6.56. egyenlet)

a külső konzervatív térfogati erők hatására fellépő potenciális energia.

Tegyük fel, hogy a folyadékra a földi nehézségi erő hat. Ha a koordináta-rendszer *z* tengelyét függőlegesen felfelé irányítjuk, akkor $f_x = f_y = 0, \quad f_z = -\varrho g,$ ahol *g* a nehézségi gyorsulás. A (6.43)-ból következik, hogy

$$U = \varrho z.$$ (6.57. egyenlet)

A nehézségi erőből származó potenciális energia,

$$E_p = \int_V \varrho g z \, dV.$$ (6.58. egyenlet)

Az E_t rugalmas potenciális energia csak akkor különbözik zérustól, ha a folyadék összenyomható. Összenyomhatatlan folyadéknál nincs térfogatváltozás, és így a (6.36) és a (6.39) alapján $\Phi = 0.$ Ezért az E_t is eltűnik. A (6.41) energiatétel az összenyomhatatlan ideális folyadékra ennek megfelelően a következőképpen egyszerűsödik:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_j} v_j \left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + p\right) = v_j f_j.$$ (6.59. egyenlet)

Konzervatív erőtérben

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_j} v_j \left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + p + \varrho U\right) = 0.$$ (6.60. egyenlet)

Ebből az egyenletből a stacionárius folyadékáramlásra az alkalmazások szempontjából fontos eredmény adódik. Stacionárius áramlás esetén az idő szerinti differenciálhányados zérus, és ezért

$$\frac{\partial}{\partial x_j} v_j \left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + p + \varrho U\right) = 0.$$

A bal oldalt átalakítva,

$$\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + p + \varrho U\right)\frac{\partial v_j}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + p + \varrho U\right) = 0.$$

Mivel a folyadék összenyomhatatlan ($\varrho = \text{áll.}$), a (6.22) kontinuitási egyenlet szerint div **v**=0, és így

$$v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + p + \varrho U\right) = 0.$$ (6.61. egyenlet)

Ha a gradienst olyan vonal mentén képezzük, amely vonal érintőjének iránya minden pontban az ottani sebesség irányával egyezik meg, akkor (6.61) szerint az

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + p + \varrho U = \text{áll.}$$ (6.62. egyenlet)

e vonal mentén. Ez a később részletesen tárgyalásra kerülő *Bernoulli-egyenlet.*

Folyadékok és gázok egyensúlyi állapota. Hidrosztatika

A folyadékok és gázok egyensúlyi állapotát meghatározó alapegyenleteket a (6.20) mozgásegyenletből kapjuk meg, ha abban a $\frac{d\mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, grad)\,\mathbf{v}$ gyorsulást zérussal tesszük egyenlővé. Mivel nyugvó folyadékban a súrlódási erő eltűnik, ezért a sztatika alaptörvényei egyaránt érvényesek ideális, valamint reális folyadékokra és gázokra. Nevezetesen

$$\mathbf{f} = \operatorname{grad} p.$$ (6.63. egyenlet)

Komponensekben

$$f_i = \frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad (i = 1,2,3).$$ (6.64. egyenlet)

Ehhez járul még a nyomás és a sűrűség kapcsolatát kifejező

$$p = p(\varrho, T)$$ (6.65. egyenlet)

állapotegyenlet, amely összenyomhatatlan folyadéknál a $\varrho = \text{áll.}$, míg ideális gáznál a (6.12) alakot veszi fel.

A (6.63) egyenletből kiszámítható egy adott külső térfogati erő hatásának kitett folyadék nyomása a hely függvényeként. Ennek ismeretében az állapotegyenletből meghatározható az egyensúlyi sűrűségeloszlás. Az egyértelmű megoldáshoz határfeltételként meg kell adnunk a nyomás értékét a folyadék felületén. Az eredményül adódó *p*-t nevezzük *hidrosztatikai nyomásnak.*

Ha a hőmérséklet állandó, akkor *p* egyedül a sűrűség függvénye. Pontosabban szólva, a sűrűségen keresztül függ a helytől.

Az összenyomható és összenyomhatatlan folyadékok egységes tárgyalása érdekében bevezetjük a

$$P = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho(p)}$$ (6.66. egyenlet)

nyomásfüggvényt. Ennek gradiense,

$$\operatorname{grad} P = \frac{dP}{dp} \operatorname{grad} p = \frac{1}{\varrho(p)} \operatorname{grad} p.$$ (6.67. egyenlet)

Összenyomhatatlan folyadékra $\varrho = \text{áll.}$, tehát

$$P = \frac{p - p_0}{\varrho},$$ (6.68. egyenlet)

ahol a p_0 állandó a határfeltételből számítható ki.

A (6.67) összefüggést az egyensúly (6.63) alapegyenletébe helyettesítve,

$$\mathbf{f} = \varrho(p) \operatorname{grad} P.$$ (6.69. egyenlet)

Az erőtér $\mathbf{f^*} = \frac{\mathbf{f}}{\varrho}$ erősségére adódik:

$$\mathbf{f^*} = \operatorname{grad} P.$$ (6.70. egyenlet)

Ebből az egyenletből következik, hogy az erőtér **f*** erőssége egy skalárfüggvény gradienseként állítható elő. A korábbi megállapodásnak megfelelően ezt a függvényt *U*-val jelöljük. Tehát

$$\mathbf{f^*} = -\operatorname{grad} U.$$ (6.71. egyenlet)

Másrészt, mivel *P* értelménél fogva a helynek egyértékű függvénye, ezért az *U*-nak is annak kell lennie. A folyadék tehát csak akkor van egyensúlyban, ha a térfogati erők erősségének van egyértékű potenciálja, vagyis ha az erőtér konzervatív.

A (6.70) és (6.71) szerint

$$\operatorname{grad}(U + P) = 0,$$ (6.72. egyenlet)

amiből következik, hogy egyensúlyi állapotban

$U + P = \text{áll.}$, (6.73. egyenlet)

vagy

$$U + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho(p)} = \text{áll.}$$ (6.74. egyenlet)

Ez az egyensúlyi feltétel mind az összenyomható, mind az összenyomhatatlan folyadékokra egyaránt érvényes. Az utóbbi esetben $\varrho = \text{áll.}$ és így

$$U + \frac{p}{\varrho} = \text{áll.}$$ (6.75. egyenlet)

Példaként tekintsük a földi nehézségi erőtér hatásának kitett folyadékot. Ekkor a (6.57) szerint

$U = gz$,

és így az egyensúlyi nyomáseloszlásra adódik, hogy

$$gz + \frac{p}{\varrho} = \text{áll.}$$

A sűrűséggel szorzott állandót p_0 -val jelölve,

$p = p_0 - \varrho g z.$ (6.76. egyenlet)

Ebből látszik, hogy p_0 a nyomást jelenti a $z = 0$ síkon. Ha a koordináta-rendszerünket úgy választjuk, hogy ez a sík a folyadék szabad felszíne, akkor p_0 a határfeltételként megadott légnyomással egyezik meg. A folyadék belsejében a hidrosztatikai nyomás $-\varrho g z$-vel nagyobb, mint a felület menti légnyomás. A $p - p_0$ nyomáskülönbség arányos a felszíntől számított $h = -z$ távolsággal.

A (6.76) eredményből az is látszik, hogy egy folyadékot tartalmazó edény alján a nyomás csak a folyadék magasságától függ, az alakjától független, bármilyen alakú is az edény.

Nézzük meg, milyen az egyensúlyi nyomáseloszlás állandó hőmérsékletű gázban a nehézségi erőtérben. A nyomás és a sűrűség hányadosa (6.13) szerint állandó:

$$\frac{p}{\varrho} = \text{áll.}$$

Az állandót p_0 / ϱ_0 -val jelölve,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho_0 p}.$$ (6.77. egyenlet)

Ezt a (6.74) egyensúlyi feltételbe helyettesítve,

$$gz + \frac{p_0}{\varrho_0}\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p} = C.$$ (6.78. egyenlet)

A *C* állandó értékét a határfeltételből számítjuk ki. Jelentse p_0 a nyomást, ϱ_0 a sűrűséget a $z = 0$ helyen. Így $C = 0$ adódik. Ezt figyelembe véve, (6.78)-ból kapjuk, hogy

$$p = p_0 e^{-\frac{\varrho_0 gz}{p_0}}.$$ (6.79. egyenlet)

Az izotermikus gáz egyensúlyi nyomása a nehézségi erőtérben a $z = 0$-tól számított magassággal exponenciálisan csökken. A (6.77) szerint ugyanígy csökken a tömegsűrűség is:

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{\varrho_0 gz}{p_0}}.$$ (6.80. egyenlet)

A $\frac{\varrho_0}{p_0}$ hányados a (6.12) állapotegyenletből kifejezhető a gáz *M* molekulatömegével és a *T* hőmérséklettel:

$$\frac{\varrho_0}{p_0} = \frac{M}{RT}.$$

A nyomás és a sűrűség magasság szerinti eloszlása ennek alapján így is írható:

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}, \quad \varrho = \varrho_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}.$$ (6.81. egyenlet)

Ebből látszik, hogy a nyomás és a sűrűség a. magassággal annál erősebben csökken, minél nagyobb a gáz *M* relatív molekulatömege és minél kisebb a hőmérséklet, amely feltevésünk szerint állandó.

A hidrosztatikai nyomás (6.76), illetve (6.79) kifejezéséből következik, hogy egy folyadékba vagy gázba merülő test felületének alsó részére nagyobb nyomás hat, mint a felsőre. Ezért az egész felületre ható erőnek felfelé mutató eredője van. Ezt nevezzük *felhajtóerőnek.*

Számítsuk ki a felhajtóerőt összenyomhatatlan folyadék esetében. A folyadékba teljesen bemerült test felületére ható erő,

$$\mathbf{F}_f = -\int_F p\mathbf{n}\,df,$$ (6.82. egyenlet)

ahol **n** a felületre merőleges, a testből kifelé mutató egységvektor. Az integrál a test felületére van kiterjesztve. Ha a koordináta-rendszert úgy választjuk, hogy a folyadék felszíne az *xy* sík, és a z tengely a nehézségi erővel ellentétes irányban felfelé mutat, akkor (6.76) szerint

$$p = p_0 - \varrho g z.$$ (6.83. egyenlet)

A (6.82) felületi integrál kiszámításánál a test helyére az általa kiszorított folyadék gondolható, amelyben a nyomást a (6.83) adja meg a test által elfoglalt *V* tartomány pontjaiban. A (4.58) utáni gondolatmenettel adódik, hogy

$$\mathbf{F}_f = -\int_F p\mathbf{n}\,df = -\int_V \operatorname{grad} p\,dV = \varrho g\mathbf{e}_z\int_V dV = \mathbf{e}_z g\varrho V = \mathbf{e}_z gm,$$ (6.84. egyenlet)

ahol $\mathbf{e}_z$ a *z* tengely irányába mutató egységvektor, *m* pedig a test által kiszorított folyadék tömege. Eszerint a testre ható felhajtóerő nagysága megegyezik az általa kiszorított folyadék súlyával. Ezt nevezzük *Archimedes-törvénynek.*

A fenti levezetésből nyilvánvaló, hogy ha a test csak részben merül a folyadékba, a felhajtóerő akkor is a kiszorított folyadék súlya lesz, amely természetesen kisebb, mint a teljesen bemerült test esetén.

Mivel a felhajtóerő a nehézségi erővel ellentétes irányú, ezért az levonódik a test súlyából. A folyadékba merülő test akkor úszik a folyadékban, ha a test súlya megegyezik a felhajtóerő nagyságával, vagyis amikor a testre ható eredő erő zérus. Az eredő erő eltűnése azonban általában nem határozza meg egyértelműen az úszó test egyensúlyi állapotát, mert e két erő még forgatónyomatékot is kifejthet a testre, és egyensúly esetén ennek is el kell tűnnie.

A test egy tetszőleges pontjának helyvektorát **r**-rel jelölve, a nehézségi erőnek az *O* kezdőpontra vonatkoztatott nyomatéka,

$$\mathbf{M_g} = -g\int(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_z)\,dm' = g\mathbf{e}_z\times\int\mathbf{r}\,dm' = (\mathbf{e}_z\times\mathbf{r}_s)m'g,$$ (6.85. egyenlet)

ahol *m*' a test tömege, $\mathbf{r}_s$ pedig a súlypont helyvektora. A felhajtóerő nyomatéka,

$$\mathbf{M_f} = -\int_F(\mathbf{r}\times\mathbf{n})p\,df.$$ (6.86. egyenlet)

Egyensúly esetén az $\mathbf{M_g}$ és $\mathbf{M_f}$, eredőjének zérusnak kell lennie.

A 20. pontban megmutattuk, hogy a differenciális alakban felírt mozgásegyenletekben a felületi erők járuléka formálisan térfogati erő sűrűségeként jelenik meg. Nevezetesen a feszültségtenzor divergenciája lesz a megfelelő térfogati erő sűrűsége. Ezt figyelembe véve, $\mathbf{M_f}$ kiszámítható úgy is, hogy a $\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}$ erősűrűség nyomatékának a térfogati integrálját vesszük:

$$M_{fi} = e_{ikl}\int x_k\frac{\partial\sigma_{lj}}{\partial x_j}dV = -e_{ikl}\int x_k\frac{\partial}{\partial x_j}\left(p\,\delta_{lj}\right)dV =$$
$$= -e_{ikl}\int\frac{\partial}{\partial x_j}(x_k p)\,dV + e_{ikl}\int p\frac{\partial x_k}{\partial x_l}dV =$$
$$= -e_{ikl}\int\frac{\partial}{\partial x_l}(x_k p)\,dV + e_{ikl}\int p\,\delta_{kl}\,dV.$$

A jobb oldal utolsó tagja az e_{ikl} antiszimmetrikus egységtenzor tulajdonságai miatt zérus, ugyanis $e_{ikk} = 0$. Az első tag a rot (**rp**) vektor *i*-edik komponensének a térfogati integrálja. Ezért

$$\mathbf{M_f} = \int_V \mathrm{rot}\,(\mathbf{r}p)\,dV.$$ (6.87. egyenlet)

Vegyük figyelembe a $\mathrm{rot}(\mathbf{r}p) = p\,\mathrm{rot}\,\mathbf{r} + \mathrm{grad}\,p\times\mathbf{r}$ összefüggést. Mivel $\mathrm{rot}\,\mathbf{r} = 0$,

$$\mathbf{M_f} = -\int_V(\mathbf{r}\times\mathrm{grad}\,p)\,dV.$$ (6.88. egyenlet)

A (6.76)-ból következik, hogy

$$\operatorname{grad} p = -\mathbf{e}_z \varrho g.$$

Ezt (6.88)-ba helyettesítve,

$$\mathbf{M}_f = g\int_V \varrho(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_z)\,dV = g\int \varrho\mathbf{r}\,dV\times\mathbf{e}_z = m'g\mathbf{r}_0\times\mathbf{e}_z, \qquad \text{(6.89. egyenlet)}$$

ahol *m* a test által kiszorított folyadék tömege, $\mathbf{r}_0$ pedig a folyadék súlypontjának helyvektora.

Egyensúly esetén a test súlyának meg kell egyeznie a felhajtóerővel, másrészt a két nyomaték eredőjének is el kell tűnnie:

$$m'g = mg, \quad \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_f = 0. \qquad \text{(6.90. egyenlet)}$$

A (6.85), (6.89) és (6.90) alapján ennek feltétele, hogy

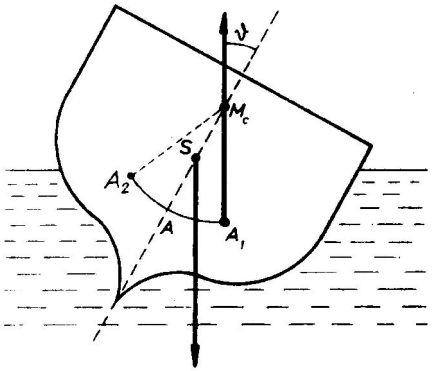
$$(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_s)\times\mathbf{e}_z = 0. \qquad \text{(6.91. egyenlet)}$$

Az $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_s$ vektornak $\mathbf{e}_z$-vel párhuzamosnak kell lennie. Ez akkor teljesül, ha a felhajtóerő $\mathbf{r}_0$ támadáspontja a test súlypontján átmenő függőleges egyenesen van.

Vizsgáljuk meg az úszó test egyensúlyi állapotának stabilitását. Gondoljuk el, hogy a testet valamilyen tengely körül kis ϑ szöggel kifordítjuk az egyensúlyi állapotából. A *62. ábra* a testnek a súlypontján átmenő, a forgástengelyre merőleges metszetét tünteti fel ebben a kimozdított helyzetben. A felhajtóerő támadáspontját jelöljük A_1-gyel. A $-\vartheta$ szöggel kimozdított szimmetrikus helyzetben A_2 jelöli a felhajtóerő támadáspontját. A $-\vartheta$-tól ϑ-ig terjedő helyzetek A_1 támadáspontjai egy görbén helyezkednek el. Az egyensúlyi helyzet *A* támadáspontjához simuló kör M_c középpontját hívjuk a vizsgált egyensúlyi helyzet *metacentramának*. Ha a metacentrum a test *S* súlypontja fölött van (mint az ábrán), akkor a test súlya és a felhajtóerő által alkotott erőpár olyan forgatónyomatékot fejt ki, amely visszatéríti a testet az egyensúlyi helyzetébe. Ezzel szemben, ha M_c az *S* alatt van, akkor az erőpár forgatónyomatéka a testet továbbforgatja az egyensúlyi helyzettől. Az előbbi egyensúlyi helyzet tehát stabil, míg az utóbbi labilis.

Az általános esetben különböző irányú (nemcsak a rajz síkjára merőleges) forgástengelyek körüli forgások lehetnek, és ennek megfelelően az A_1 támadáspontok egy felületen mozoghatnak. Az egyensúlyi helyzet *A* támadáspontjához két fő simulókör és ennek megfelelően két metacentrum tartozik. Az úszó test egyensúlyi helyzete akkor stabil, ha mindkét metacentrum a test súlypontja fölött van.

62. ábra -



Az áramlások osztályozása

Mielőtt rátérünk a folyadékok és gázok dinamikájának részletes vizsgálatára, bevezetünk az áramlásokkal kapcsolatban gyakran használt néhány fogalmat.

Áramlási tér, áramvonalak

A folyadék- és gázáramlás kinematikai jellemzésére használjuk a $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sebességteret, amelyet *áramlási térnek* nevezünk. Ezt a vektorteret az erőtérhez hasonlóan vonalakkal, az ún. *áramvonalakkal* szemléltetjük. Az áramvonal érintője valamely pontban adott időben megadja a **v** sebesség irányát az illető helyen. Mivel az áramvonalak az időben változnak, ezért ezek általában nem egyeznek meg az egyes folyadékrészecskék pályájával. Egyedül a stacionárius áramlásnál esik egybe a folyadékrészecskék pályája valamelyik áramvonallal. A kis zárt görbén átmenő áramvonalakat *áramcsőnek* hívjuk.

Ha megállapodunk abban, hogy az áramvonalakat olyan sűrűn rajzoljuk fel, hogy, az egységnyi felületen merőlegesen annyi áramvonal halad keresztül, mint a sebesség nagyságának mérőszáma az adott helyen, akkor a vonalakkal nemcsak az áramlás iránya, hanem a sebesség nagysága is szemléltethető.

Az áramlás részletesebb jellemzésére még egy vektorteret, a (4.36)-ban értelmezett

$$\omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v} \qquad \text{(6.92. egyenlet)}$$

örvényvektorteret is szoktuk használni. Az $\omega = \omega(\mathbf{r}, t)$ vektor adott helyen a *t* időpontban megadja az éppen ott tartózkodó folyadékrészecske szögsebességét. Ez a vektortér is szemléltethető vonalakkal, amelyek érintője az ω irányát adja a tekintett helyen a *t* időpillanatban. Ezek a vonalak az *örvényvonalak*.

Stacionárius áramlás

Ha az áramló folyadék fizikai állapota időben nem változik, akkor *stacionárius áramlásról* beszélünk. Ebben az esetben a folyadékot, illetve gázt jellemző fizikai mennyiségek — sebesség, nyomás és a sűrűség — a tér bármely pontjában függetlenek az időtől. Ezért az áramlásra vonatkozó minden fizikai mennyiség idő szerinti parciális deriváltja zérus. A folyadékrészecskék pályavonalai stacionárius áramlásnál megegyeznek az áramvonalakkal.

Összenyomhatatlan folyadék áramlása

Az összenyomhatatlan folyadékot az jellemzi, hogy a ϱ sűrűség mind az időben, mind a térben állandó. A (4.67) kontinuitási egyenletből következik, hogy ebben az esetben a sebességtér mindenütt divergenciamentes:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$ (6.93. egyenlet)

Homogén folyadék áramlása

Ha a sűrűség a térben állandó, akkor homogén a folyadék. Ennek feltétele, hogy

$$\operatorname{grad} \varrho = \mathbf{0}.$$ (6.94. egyenlet)

Megjegyezzük, hogy az összenyomhatatlansághoz ez még nem elég, ahhoz stacionáriusnak is kell lennie.

Örvénymentes áramlás

Ha a (6.92) örvényvektor a folyadék minden pontjában eltűnik, akkor az áramlás örvénymentes. Ennek feltétele, hogy a tér minden pontjában

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$ (6.95. egyenlet)

A vektoranalízisből ismert, hogy ebben az esetben a **v** sebességtér egy skalártér gradienseként állítható elő:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi.$$ (6.96. egyenlet)

A $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$ függvényt *sebességpotenciálnak* nevezzük.

Az örvénymentes áramlásra a (6.28) Euler-egyenlet egyszerűsödik, mert (6.95) miatt a $\mathbf{v} \times \mathrm{rot}\, \mathbf{v}$ tag eltűnik.

Még ennél is egyszerűbben tárgyalható az összenyomhatatlan folyadék örvénymentes áramlása. A (6.96)-ot (6.93)-ba helyettesítve, adódik, hogy

$$\mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, \Phi = \Delta \Phi = 0.$$ (6.97. egyenlet)

Ennek a határfeltételeket is kielégítő megoldásából a sebességtér egyszerű gradiensképpzéssel számítható ki.

A Bernoulli-egyenlet

Vizsgáljuk örvénymentes ideális folyadék áramlását konzervatív külső térfogati erő hatása mellett. Az ilyen folyadékáramlást jellemzi, hogy

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{v} = \mathrm{grad}\, \Phi \quad \text{és} \quad \mathbf{f}^* = \frac{\mathbf{f}}{\varrho} = -\mathrm{grad}\, U.$$ (6.98. egyenlet)

Ezeket az Euler-egyenlet (6.28) alakjába helyettesítve,

$$\mathrm{grad}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathrm{grad}\, \Phi)^2 + U + P \right] = 0,$$ (6.99. egyenlet)

ahol

$$P = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho(p)}.$$

Ebből következik, hogy a szögletes zárójelben álló mennyiség egy adott időpillanatban az egész térben állandó:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathrm{grad}\, \Phi)^2 + U + P = C(t).$$ (6.100. egyenlet)

A $C(t)$ *-t* $C_0 + C_1(t)$ alakba írhatjuk, és a $C_1(t)$ időfüggést a Φ sebességpotenciálba belefoglalhatjuk, mert annak (6.96) definíciója ezt megengedi. így adódik, hogy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\operatorname{grad}\Phi)^2+U+P=C_0=\text{áll.}$$ (6.101. egyenlet)

Örvénymentes áramlásnál ez az egyenlet teremt kapcsolatot a *P* nyomásfüggvény és a Φ sebességpontenciál között. A (6.101) az Euler-egyenleteknek egy integrálja.

Másik fontos integrálhoz jutunk, ha stacionárius áramlást vizsgálunk ugyancsak konzervatív erőtérben. A sebesség idő szerinti parciális deriváltja az áramlás stacionárius volta miatt zérus, másrészt feltevésünk szerint $\mathbf{f^*}=-\operatorname{grad}U.$

Integráljuk a (6.28) Euler-egyenletet egy áramvonal mentén annak két pontja között:

$$\int_1^2 \operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2}+U+P\right)d\mathbf{s}=\int_1^2(\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v})\,d\mathbf{s}.$$ (6.102. egyenlet)

Mivel az áramvonal *d***s** íveleme párhuzamos a **v** sebességgel, a jobb oldali integrál zérus. Így (6.102)-ből adódik, hogy

$$\left(\frac{v^2}{2}+U+P\right)_2=\left(\frac{v^2}{2}+U+P\right)_1.$$ (6.103. egyenlet)

Ez azt jelenti, hogy a $\frac{v^2}{2}+U+P$ mennyiség az áramvonal mentén állandó:

$$\frac{v^2}{2}+U+P=C.$$ (6.104. egyenlet)

A *C* állandó értéke különböző áramvonalakra más és más lehet. Ha viszont az áramlás örvénymentes $(\operatorname{rot}\mathbf{v}=\mathbf{0})$ akkor a *C* állandó az egész térben ugyanaz.

A (6.104) egyenletet *Bernoulli-egyenletnek* nevezzük. Az alkalmazások szempontjából ez a hidrodinamika egyik legfontosabb egyenlete.

Összenyomhatatlan folyadék esetén $\left(\varrho=\text{áll.}, P=\frac{p}{\varrho}\right)$ Bernoulli-egyenlet a

$$p+\frac{1}{2}\varrho v^2+\varrho U=\text{áll.}$$ (6.105. egyenlet)

alakot veszi fel. A földi nehézségi erőtérben *U=gz,* a jobb oldali állandó pedig a nyugvó folyadék felületén $(z=0-\text{nál})$ érvényes p_0 légnyomás. Ezeket figyelembe véve

$$p = p_0 - \varrho g z - \frac{1}{2}\varrho v^2.$$ (6.106. egyenlet)

A Bernoulli-egyenletnek ez az alakja megadja a nehézségi erőtérben stacionáriusán áramló összenyomhatatlan folyadék nyomását. Az első két tag (6.83) szerint a sztatikai nyomás $p_{\text{szt}} = p_0 - \varrho g z.$ Az áramló folyadék nyomása tehát kisebb, mint a sztatikai nyomás:

$$p = p_{\text{szt}} - \frac{1}{2}\varrho v^2.$$ (6.107. egyenlet)

Az $\frac{1}{2}\varrho v^2$ mennyiséget *torlónyomásnak* nevezzük. A (6.107)-ből látszik, hogy a *p* nyomás annál kisebb, minél nagyobb sebességgel áramlik a folyadék.

Visszatérve az összenyomható folyadékokra és gázokra is érvényes (6.104) egyenlethez, alkalmazzuk azt a nehézségi erőtérben levő izotermikus ideális gázra. Az állapotegyenlet

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{RT}{M},$$ (6.108. egyenlet)

ahol most *T* állandó. Ezt (6.104)-be helyettesítve

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{RT}{M}\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p} = C.$$

Ha p_0 a nyugvó gáz nyomása a $z=0$ felületen (tehát a légnyomás), akkor $C=0$.

Ebből az egyenletből *p*-re adódik:

$$p = p_0 e^{-\frac{M}{RT}\left(gz+\frac{v^2}{2}\right)}.$$ (6.109. egyenlet)

A (6.81) szerint a $p_0 e^{-\frac{M}{RT}gz}$ a sztatikai nyomás, ezért az áramló gáz *p* nyomása,

$p = p_{sz} e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}$. (6.110. egyenlet)

A stacionáriusán áramló összenyomható ideális gáz nyomása is kisebb, mint a sztatikai nyomás, és annál kisebb, minél nagyobb sebességgel áramlik.

Ha a (6.109)-ben az exponenciális függvényt sorbafejtjük, akkor az $e^{-x} = 1 - x + \dots$ alapján írható, hogy

$$p = p_0 \left(1 - \frac{M}{RT} gz - \frac{Mv^2}{2RT} + \dots \right).$$

Mivel $\frac{p_0}{\varrho_0} = \frac{RT}{M}$,

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\varrho_0}{p_0} gz - \frac{\varrho_0 v^2}{2p_0} + \dots \right) = p_0 - \varrho_0 gz - \frac{1}{2} \varrho_0 v^2 + \dots .$$ (6.111. egyenlet)

A (6.109) nyomás sorbafejtett alakjának első tagjai az összenyomhatatlan folyadék nyomását adják meg. Az összenyomhatóság a magasabb rendű tagokban jelentkezik.

Az összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlására vonatkozó (6.107) egyenletből következik, hogy ha a sebesség eléri a $v_{kr} = \sqrt{2p_{sz} / \varrho}$ értéket, a nyomás zérussá válik. Ennél nagyobb sebességeknél a nyomás negatív lesz, vagyis húzás lép fel, amely a folyadék szétszakítását okozza. A valóságban már olyan sebességeknél, amelyeknél a nyomás a folyadék telített gőzének nyomása alá süllyed, a folyadékban gőzbuborékok képződnek. Ezt. a jelenséget hívjuk *kavitációnak.*

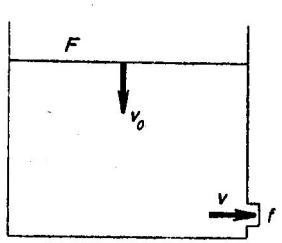
Folyadék kiáramlása keskeny nyíláson

A Bernoulli-egyenlet alkalmazására gondoljunk el egy nagy keresztmetszetű tartályt, amelyből szűk nyíláson áramlik ki összenyomhatatlan folyadék.

Ha a tartály mérete nagy, akkor nem hosszú időtartamon belül a nyomás- és sűrűségeloszlás az edény belsejében olyan lassan változik az időben, hogy az áramlás közelítőleg stacionáriusnak vehető. A tartályban levő folyadék felszínét jelöljük *F*-fel, a nyílás keresztmetszetét *f*-fel. Legyen a folyadék sebessége v_0 az edény felszínén, *v* a nyílásnál. Könnyű belátni, hogy

$v_0 F = vf$. (6.112. egyenlet)

63. ábra -



Integráljuk az összenyomhatatlan folyadékra jellemző $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ egyenletet a folyadék teljes térfogatára, és használjuk fel a Gauss-tételt:

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{v}\,dV=\int_{Fv} v_n df=0. \qquad \text{(6.113. egyenlet)}$$

Mivel a sebességnek csak az *F* és *f* mentén van zérustól különböző merőleges összetevője, ezért a felületi integrál e két felületre vett integrál összege lesz:

$$\int_F v_n df+\int_f v_n df=0. \qquad \text{(6.114. egyenlet)}$$

Az első integrálban a **v** iránya a külső normálissal ellentétes, a másodikban megegyező. Másrészt *v* a felületek mentén állandó, ezért (6.114)-ből adódik a (6.112) egyenlőség. A Bernoulli-egyenletnek (6.105) alakját vegyük a tartálybeli folyadékfelszínre és a nyílásra, ahol a *p* nyomások a p_0 légköri nyomással egyeznek meg, továbbá a koordináta-rendszer *xy* síkja legyen a folyadék felszíne, és a *z* tengely mutasson felfelé. Így adódik

$$\frac{1}{2}\varrho v_0^2=\frac{1}{2}\varrho v^2+\varrho g z.$$

A folyadékoszlop $-z$ magasságát *h*-val jelölve,

$$\frac{1}{2}\varrho v_0^2=\frac{1}{2}\varrho v^2-\varrho g h. \qquad \text{(6.115. egyenlet)}$$

Ebből (6.112) figyelembevételével a szűk nyíláson kiáramló folyadék sebességére kapjuk, hogy

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1-\left(\frac{f}{F}\right)^2}}$$ (6.116. egyenlet)

Ha az $(f/F)^2$ olyan kicsi, hogy az 1 mellett elhagyható, akkor a kiömlő folyadék sebességére a

$$v = \sqrt{2gh}$$ (6.117. egyenlet)

Torricelli-képlet adódik. Eszerint a sebesség akkora, mintha *h* magasságból szabadon esett volna a folyadék.

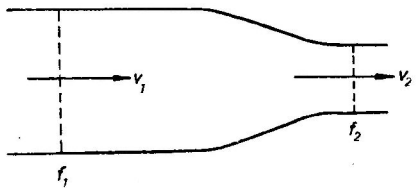
Stacionárius áramlás változó keresztmetszetű fúvókán

Gondoljunk el egy keskeny, változó keresztmetszetű csövet, amelyen ideális folyadék áramlik át stacionáriusán. A folyadékról egyelőre nem tételezzük fel, hogy összenyomhatatlan. Ha a cső vízszintes helyzetű, akkor a kis keresztmetszet miatt a ϱgz potenciális energiasűrűség állandónak vehető, sőt a $z = 0$ választással elhagyható. A (6.104) Bernoulli-egyenlet ebben az esetben a

$$\frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho(p)} = 0$$ (6.118. egyenlet)

alakba írható

64. ábra -



Mivel az áramlás stacionárius, a kontinuitási egyenlet

$$\mathrm{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0.$$ (6.119. egyenlet)

Integráljuk ezt az egyenletet a cső f_1 *és* f_2 két keresztmetszete által határolt tartományra, és alkalmazzuk a Gauss-tételt:

$$\int_V \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v})\, dV = \int_{F_V} \varrho v_n\, df = 0.$$ (6.120. egyenlet)

A folyadék sebességének normális irányú komponense a cső falánál eltűnik, ezért a felületi integrál a két keresztmetszetre vett integrálok összege lesz:

$$\int_{f_1} \varrho v_n\, df + \int_{f_2} \varrho v_n\, df = 0.$$ (6.121. egyenlet)

Az f_1 felület külső normálisa ellentétes irányú a **v** sebességgel, az f_2 *-é* vele egy irányú. A keresztmetszetek mentén a ϱ és *v* állandó, ezért (6.121)-ből adódik, hogy

$$\varrho_1 v_1 f_1 = \varrho_2 v_2 f_2,$$

tehát

$$\varrho v f = \text{áll.}$$ (6.122. egyenlet)

a cső (fúvóka) bármely keresztmetszetére. Az állandót *M*-mel jelölve

$$\varrho v f = M.$$ (6.122'. egyenlet)

Az *M* mennyiség fizikai jelentése: az *f* keresztmetszeten időegység alatt átáramló folyadék tömege.

A (6.118) és a (6.122) egyenletből meghatározható, hogyan változik a folyadék nyomása a keresztmetszettel. Képezzük e célból a (6.122') egyenletnek a logaritmikus, a (6.118)-nak pedig a közönséges differenciálját:

$$\frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{dv}{v} + \frac{df}{f} = 0,$$ (6.123. egyenlet)

$$v dv + \frac{dp}{\varrho} = 0.$$ (6.124. egyenlet)

E két egyenletből következik, hogy

$$\frac{df}{f} = -\frac{d\varrho}{\varrho} - \frac{dv}{v} = -\frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{dp}{\varrho v^2} = \frac{dp}{\varrho v^2}\left(1 - v^2 \frac{d\varrho}{dp}\right).$$ (6.125. egyenlet)

Alkalmazva a

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}$$ (6.126. egyenlet)

jelölést,

$$\frac{df}{f} = \frac{dp}{\varrho v^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$ (6.127. egyenlet)

[Az 51. pontban látni fogjuk, hogy a (6.126) képlettel definiált *c* mennyiség a hangsebességet jelenti a közegben.]

Nézzük a (6.127) összefüggést összenyomhatatlan folyadékra. Mivel ebben az esetben $\varrho = \text{áll.}$, a (6.123)-ban az első tag zérus, és emiatt

$$\frac{df}{f} = \frac{dp}{\varrho v^2}.$$ (6.128. egyenlet)

Ezt a (6.127)-tel összevetve, látszik, hogy abból $c \to \infty$ határesetben kapjuk az összenyomhatatlan folyadékra vonatkozó megfelelő képletet. Valóban, a hangsebesség az összenyomhatatlan folyadékban végtelen a (6.126) alapján is.

A (6.127)-ből látszik, hogy összenyomható folyadékban a nyomás addig nő a keresztmetszettel $(df > 0, dp > 0)$, amíg az áramlás sebessége kisebb a közegbeli hangsebességnél, ugyanis ebben az esetben $v/c < 1$, és emiatt a zárójel pozitív. Ha az áramlás sebessége nagyobb mint a hangsebesség $(v > c)$, akkor a keresztmetszet tágulásával csökken a nyomás.

Ezzel szemben az összenyomhatatlan folyadékban a nyomás mindig nő a keresztmetszet növelésével.

A (6.127) egyenlet (6.124) alapján a következő alakba is írható:

$$\frac{df}{f} = \frac{dv}{v}\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right).$$ (6.129. egyenlet)

Ezt az egyenletet nevezik *Hugoniot-egyenletnek.* Összenyomhatatlan folyadékra

$$\frac{df}{f} = -\frac{dv}{v}.$$ (6.130. egyenlet)

A Hugoniot-egyenletből az összenyomható folyadék sebességének a keresztmetszettel való változása olvasható ki. Nevezetesen, amíg az áramlás sebessége kisebb a hangsebességnél $(v < c)$, a sebesség *dv* változása ellentétes előjelű a keresztmetszet *df* változásához képest. Tehát a fúvóka keresztmetszetének csökkenésével nő a sebesség. Ha $v > c$, akkor pedig fordítva van: a hangsebesség fölötti áramlási sebességek tartományában a sebesség nő a keresztmetszettel. Ebből következik, hogy a keresztmetszet csökkentésével az áramlás sebessége csak a hangsebességig növelhető. Ha további sebességnövelést akarunk elérni, akkor a keresztmetszetet ismét növelni kell. A gőzturbináknál az ún. Laval-fúvókákban ezt a törvényszerűséget használják ki.

Az örvénymentes áramlás általános törvényei

A következőkben összenyomhatatlan folyadék örvénymentes áramlásának általános tulajdonságait tanulmányozzuk. Feltesszük, hogy a folyadékra konzervatív külső erő hat. Tehát

$$\mathbf{f}^* = \frac{\mathbf{f}}{\varrho} = -\operatorname{grad} U.$$ (6.131. egyenlet)

Az örvénymentes áramlás feltétele (6.95) szerint az, hogy a tér minden pontjában

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$ (6.132. egyenlet)

Ebben az esetben a **v**(**r**, *t*) sebességtér a $\Phi(\mathbf{r}, t)$ sebességpotenciál gradienseként állítható elő [1. a (6.96)-ot]:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi.$$ (6.133. egyenlet)

Mivel a folyadék feltevésünk szerint összenyomhatatlan $(\varrho = \text{áll.})$, a kontinuitási egyenletből következik, hogy

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$ (6.134. egyenlet)

A (6.133)-at (6.134)-be helyettesítve, a Φ sebességpotenciálra adódik

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \Delta \Phi = 0.$$ (6.135. egyenlet)

Ebből a parciális differenciálegyenletből lehet a sebességpotenciáit kiszámítani. Ehhez természetesen a konkrét feladatnak megfelelő határfeltételek járulnak. Az így meghatározott Φ-ből (6.133) alapján számítható ki az áramlás sebességtere.

A nyomáseloszlást a (6.101) Bernoulli-egyenlet adja meg. Összenyomhatatlan, folyadék esetén utóbbi a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\operatorname{grad}\Phi\right)^2+U+\frac{p}{\varrho}=C$$ (6.136. egyenlet)

alakot veszi fel. A *C* állandó értékét úgy határozzuk meg, hogy a nyomást a tér valamely pontjában megadjuk. Pl. a folyadék szabad felületén *p* a légköri nyomással megegyezik.

Az összenyomhatatlan folyadék örvénymentes áramlását a fenti egyenletek teljesen leírják. A feladat lényegében a (6.135) Laplace-egyenlet megoldása adott határfeltételekkel. Φ ismeretében a sebesség- és nyomáseloszlás a (6.133), illetve (6.136) alapján könnyen kiszámítható.

Források

Ha az áramlási térben források is vannak, akkor a kontinuitási egyenletnek a (4.68) alakját kell használnunk. Ebből az összenyomhatatlan folyadékra (6.134) helyett a

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\frac{q}{\varrho}$$ (6.137. egyenlet)

egyenlet adódik, ahol *q* a térfogategységre vonatkoztatott forráserősség vagy forrássűrűség, amelyet a hely folytonos függvényének tekintünk. Ebben az esetben (6.137), valamint (6.133) alapján a Φ sebességpotenciálra a

$$\Delta\Phi=\frac{q}{\varrho}$$ (6.138. egyenlet)

Poisson-egyenletet kapjuk. A q/ϱ mennyiséget *Q*-val jelölve

$$\Delta\Phi=Q.$$ (6.139. egyenlet)

A tömegegységre vonatkoztatott *Q* forrássűrűség a források helyén zérustól különböző, előre megadott függvény. Ennek ismeretében a sebességpotenciál a Poisson-egyenletből számítható ki. Az egyértelmű megoldáshoz meg kell adnunk a Φ-re vonatkozó határfeltételeket, amelyek a (6.24)-ből adódnak:

$(\mathrm{grad}\,\Phi)_n = 0$ a merevfalmentén. (6.140. egyenlet)

Az így kiszámított Φ-ből az előbb megismert képletek alapján meghatározható a **v**(**r**) sebességtér és a *p*(**r**) nyomáseloszlás.

Gondoljunk el egy pontszerű forrást, amely a koordináta-rendszer kezdőpontjában van. Határozzuk meg a sebességpotenciált a tér valamelyik *P*(*x, y, z*) pontjában. A forráson kívül $Q = 0$, ezért a (6.139) egyenlet jobb oldala az origó kivételével zérus. A megoldandó egyenlet tehát

$\Delta\Phi = 0.$ (6.141. egyenlet)

A pontszerű forrás sebességtere gömbszimmetrikus, emiatt Φ csak az origótól számított *r* távolságtól függ. Ezért célszerű a (6.141) egyenletet polárkoordinátákban felírni. Mivel Φ nem függ a polárszögektől, (6.141) polárkoordinátákban a következő alakot veszi fel:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr} = 0.$$ (6.142. egyenlet)

Vezessük be a $\Psi = r\Phi$ függvényt, amelyre (6.142)-ből adódik, hogy

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} = 0.$$ (6.143. egyenlet)

Ennek megoldása

$\Psi(r) = Ar + B,$ (6.144. egyenlet)

ahol *A* és *B* állandók. A Φ sebességpotenciál,

$$\Phi = \frac{\Psi}{r} = \frac{B}{r} + A.$$ (6.145. egyenlet)

A sebesség és a Φ közötti (6.133) összefüggés megengedi, hogy a potenciál értékét egy pontban önkényesen előírjuk. Legyen Φ zérus a végtelenben. Ennek alapján adódik, hogy *A* = 0.

A pontszerű forrás potenciálja és sebességtere tehát

$$\Phi = \frac{B}{r}, \qquad \mathbf{v} = \operatorname{grad}\Phi = -\frac{B}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$ (6.146. egyenlet)

A *B* állandó értéke a forrás erősségével van kapcsolatban. Vegyük körül a pontszerű forrást *r* sugarú gömbbel, és képezzük a sebesség normális irányú komponensének a gömbfelületre vett integrálját:

$$\int v_n df = -\frac{B}{r^2} 4\pi r^2 = -4\pi B.$$ (6.147. egyenlet)

A bal oldal annak a folyadékmennyiségnek a térfogatát jelenti, amely a forrást körülvevő zárt felületen időegység alatt kiáramlik. A *B* állandó, tehát ennek a térfogatnak a (-4π)-ed része.

A (6.146)-ból látszik, hogy ha *B* negatív, akkor az áramvonalak a pontszerű forrásból sugárirányban mennek kifelé, ha *B* pozitív, akkor pedig befelé. Utóbbi esetben az origóban nem forrás, hanem nyelő van.

Ha az áramlási térben nem egy, hanem több pontszerű forrás van, akkor az eredő potenciál a Poisson-egyenlet linearitása miatt az egyes források által keltett áramlási tér Φ_i potenciáljainak a szuperpozíciója lesz. Ugyanis lineáris differenciálegyenletnek az egyes megoldások összege is megoldása. Ezért

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i}{r_i},$$ (6,148. egyenlet)

ahol

$$r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}.$$ (6.149. egyenlet)

Az áramlási teret szemléltető áramvonalak a forrásokból indulnak ki és a nyelőkbe torkollnak be.

Ha a forrás nem pontszerű, hanem véges térfogatú, akkor a forrás erősségét a *Q* sűrűségfüggvénnyel jellemezzük. Megmutatjuk, hogy folytonos forráseloszlás esetén a (6.139) Poisson-egyenletnek a megoldása a

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{Q(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$ (6.150. egyenlet)

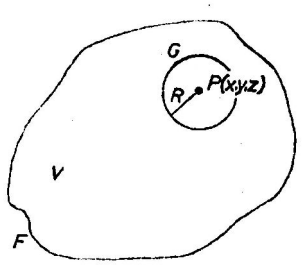
alakban előállítható. Itt **r** annak a pontnak a helyvektora, amelyben a Φ potenciált keressük, **r'** pedig az integrálási futóponté.

Állításunk bizonyításához felhasználjuk a matematikából ismert Green-tételt.*[2] Feltesszük, hogy Ψ és Φ differenciálhányadosaikkal együtt reguláris függvényei az *x, y, z* változóknak a *V* térfogatban. A Green-tétel szerint akkor érvényes a következő, egyenlőség:

$$\int_V (\psi \Delta \Phi - \Phi \Delta \psi)\, dV = \int_F (\psi \operatorname{grad} \Phi - \Phi \operatorname{grad} \psi)_n\, df, \qquad \text{(6.151. egyenlet)}$$

ahol *F* a *V* tartományt határoló zárt felület. Legyen *P*(*x, y, z*) a *V* tartomány egy tetszőleges belső pontja *(65. ábra).* A többi pontnak ettől számított távolságát *r*-rel jelöljük. A Ψ függvényt válasszuk speciálisan úgy, hogy kielégítse a $\Delta \psi = 0$ egyenletet. Nevezetesen legyen $\psi = \frac{1}{r}$. Ez a függvény a *P* pontban nem reguláris, ezért a Green-tétel csak akkor alkalmazható, ha a *P* pontot egy *P* középpontú *R* sugarú kis gömbbel körülvéve kirekesztjük az integrálási tartományból, majd a végén a *G* felületű gömböt összehúzzuk a *P* pontra.

65. ábra -



Alkalmazzuk a (6.151) Green-tételt az *F* és *G* által határolt tartományra. Ebben mind a Ψ, mind a Φ reguláris. Φ-ről feltesszük, hogy a keresett sebességpotenciál, tehát kielégíti a (6.139) Poisson-egyenletet. Így (6.151)-ből adódik, hogy

$$\int_{V\text{-gömb}} \frac{\Delta \Phi}{r}\, dV = \int_F \left(\frac{1}{r} \operatorname{grad} \Phi - \Phi \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)_n df + \int_G \left(\frac{1}{r} \operatorname{grad} \Phi - \Phi \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)_n df, \qquad \text{(6.152. egyenlet)}$$

A gömb felületére vett integrálban

$$(\operatorname{grad} \Phi)_n = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=R}, \qquad \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)_n = \frac{1}{R^2},$$

$$df = R^2 d\Omega,$$

[2]* Lásd a Függelék 4.5 pontját!

ahol $d\Omega$ a *P*-ből kiinduló elemi térszög. Ha a *G* gömbfelületet folytonosan összehúzzuk a *P* pontra, a gömbre vett felületi integrál $-4\pi\Phi(P)$-hez tart. Ennélfogva

$$\Phi(P) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\Delta\Phi}{r}dV + \frac{1}{4\pi}\int_F \left(\frac{1}{r}\operatorname{grad}\Phi - \Phi\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_n df. \quad \text{(6.153. egyenlet)}$$

Most feltételezzük, hogy a tekintett tartomány az egész végtelen tér, és a Φ potenciál differenciálhányadosaival együtt mindenütt reguláris. Az $F \to \infty$ határátmenetnél a Φ úgy tart végtelenhez, mint a pontszerű forrás potenciálja, tehát mint $1/r$. A $(\operatorname{grad}\Phi)_n$ és a $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_n$ pedig úgy, mint $1/r^2$. Az egész integrandusz ezért úgy viselkedik a végtelenben, mint az $1/r^3$. A $df = r^2 d\Omega$ felületelem másodfokú függvényként tart a végtelenhez. A felületi integrál tehát zérushoz tart. Ennélfogva a (6.153) átmegy a következőbe:

$$\Phi(P) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\Delta\Phi}{r}dV.$$

A (6.139) Poisson-egyenlet alapján A $\Delta\Phi$ helyébe a *Q* írható, ezért végül $\Phi(P)$-re adódik, hogy

$$\Phi(P) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{Q}{r}dV. \quad \text{(6.154. egyenlet)}$$

Ha a *P* pont helyvektorát **r**-rel, az integrálási pontot **r'**-vel jelöljük, akkor

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{Q(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'. \quad \text{(6.155. egyenlet)}$$

Ezzel megmutattuk, hogy a (6.139) Poisson-egyenlet megoldása zárt alakban felírható.

Ha a *Q*(**r**) forrássűrűséget ismerjük a hely függvényeként, akkor a sebességpotenciált a (6.155)-ből számíthatjuk ki.

A cirkuláció

Cirkulációnak nevezzük a sebességvektornak valamilyen zárt görbére vett vonalmenti integrálját, és ezt Γ-val jelöljük:

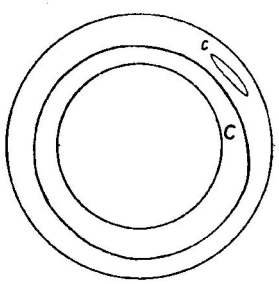
$$\Gamma = \oint \mathbf{v}\, ds.$$ (6.156. egyenlet)

A Stokes-tétel alkalmazásával ez az integrál a zárt görbére mint határvonalra illeszkedő felületre vett integrállá alakítható:

$$\Gamma = \oint \mathbf{v}\, ds = \int_F (\mathrm{rot}\, \mathbf{v})_n\, df.$$ (6.157. egyenlet)

Ha a felület teljesen benne van az örvénymentes áramlási térben, vagyis a rot **v** annak minden pontjában eltűnik, akkor a Γ cirkuláció zérus. Általában azonban nem igaz, hogy az örvénymentes áramlási térben a cirkuláció eltűnik. Ez csak akkor igaz, ha a tartomány *egyszeresen összefüggő.* Ezen azt értjük, hogy minden olyan zárt görbe, amely a tartomány belsejében van, folytonos deformációval egy, a tartományhoz tartozó tetszőleges pontba összehúzható. Az ilyen görbét *redukálható görbének* nevezzük. Egyszeresen összefüggő tartomány pl. a síkban egy körnek vagy háromszögnek a belseje. Viszont két koncentrikus kör közötti rész már nem egyszeresen, hanem kétszeresen összefüggő. A *66. ábrán* felrajzolt *C* görbe nem húzható össze folytonos deformációval a körgyűrű tetszőleges pontjára. A kétszeresen összefüggő tartományokra az jellemző, hogy kétféle olyan zárt görbe van bennük (*C* és a *c*), amelyek folytonos deformációval nem vihetők át egymásba. Ennek megfelelően definiáljuk az *n*-szeresen összefüggő tartományt. Ebben *n* különböző típusú görbe van, amelyek nem vihetők át egymásba. A folyadékok áramlásánál a tartomány összefüggő jellegének azért van nagy jelentősége, mert a gyakorlati életben olyan csőrendszereket alkalmaznak, amelyek általában többszörösen összefüggő tartományt alkotnak. A nem egyszeresen összefüggő tartománynál a nem redukálható zárt görbére (pl. a *66. ábra C* görbéjére) illeszkedő felület egy része nem tartozik a tartományhoz, ezért ott a rot **v** nem feltétlenül zérus (sőt általában nem az), és amikor a Stokes-tételt alkalmazzuk, a felületi integrál integrandusza nem tűnik el a felület minden pontjában, és emiatt a cirkuláció sem lesz zérus. Csak az egyszeresen összefüggő tartományokra igaz az, hogy a bennük felvett bármely zárt görbére illeszthető olyan felület, amely teljes egészében a tartományhoz tartozik és így örvénymentes áramlásnál a rot **v** annak minden pontjában eltűnik, következésképpen a cirkuláció is.

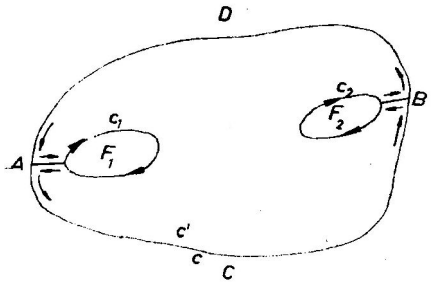
66. ábra -



Példaként nézzünk egy háromszorosan összefüggő tartományt *(67. ábra).* A c_1 és c_2 görbékre illeszkedő F_1 és F_2 felületek nem tartoznak a tartományhoz. Ezekben vagy nem örvénymentes az áramlás, vagy egyáltalán nincs bennük folyadék.

Az egész tartomány a rajzon látható két vágással egyszeresen összefüggő tartománnyá alakítható. A nyilakkal bejelölt *c′* görbe által határolt tartományban a folyadék örvénymentes, és így az erre vett cirkuláció Stokes-tétellel olyan felületi integrállá alakítható, amelyben a rot **v** mindenütt eltűnik, ezért a Γ' cirkuláció is. A *c′* görbére vett vonalmenti integrál azonban egyenlő a *c*-re, valamint a c_1 és c_2-re vett integrálok összegével. Az ábráról látszik, hogy a c_1-en és a c_2-n való körüljárás iránya a *c*-n való körüljárásával ellentétes.

67. ábra -



Ezért

$$\oint_{c'} \mathbf{v}\,ds = \oint_{c} \mathbf{v}\,ds - \oint_{c_1} \mathbf{v}\,ds - \oint_{c_2} \mathbf{v}\,ds = \Gamma - \Gamma_1 - \Gamma_2 = 0,$$ (6.158. egyenlet)

amiből következik, hogy

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2.$$ (6.159. egyenlet)

A Γ_1 és Γ_2 nem zérusok, következésképpen a többszörösen összefüggő tartomány *c* görbéjére vett Γ cirkuláció sem tűnik el.

A sebességtér most is származtatható potenciálból a

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi$$ (6.160. egyenlet)

összefüggés szerint, de a Φ sebességpotenciál többszörösen összefüggő tartományban *nem* egyértékű. Ennek belátásához a *c* zárt görbére vett vonalmenti integrált bontsuk fel az *ACB,* majd a *BDA* szakaszon vett integrálok összegére:

$$\Gamma = \oint_c \mathbf{v}\,d\mathbf{s} = \int_{ACB} \mathbf{v}\,d\mathbf{s} + \int_{BDA} \mathbf{v}\,d\mathbf{s} = \int_{ACB} \mathbf{v}\,d\mathbf{s} - \int_{ADB} \mathbf{v}\,d\mathbf{s} =$$
$$= \int_{ACB} \operatorname{grad}\Phi\,d\mathbf{s} - \int_{ADB} \operatorname{grad}\Phi\,d\mathbf{s} = \int_{ACB} d\Phi - \int_{ADB} d\Phi. \quad \text{(6.161. egyenlet)}$$

Mivel $\Gamma \neq 0$, ezért a potenciál $\int_{AB} d\Phi$ megváltozása függ attól, hogy melyik úton jutunk

el az *A* ponttól a *B* pontig. Ha az *A* pontból kiindulva a *c′* görbén jutunk vissza az *A*-ba, akkor a Φ potenciál *A* pontbeli megváltozása,

$$\Phi_A - \Phi_A^0 = \Gamma_1 + \Gamma_2. \quad \text{(6.162. egyenlet)}$$

Általában, ha a tartomány *n*-szeresen összefüggő, akkor

$$\Phi_A = \Phi_A^0 + \nu_1\Gamma_1 + \nu_2\Gamma_2 + \ldots + \nu_{n-1}\Gamma_{n-1}. \quad \text{(6.163. egyenlet)}$$

A Φ sebességpotenciál tehát csak az egyszeresen összefüggő tartományban lesz egyértékű, egyébként nem az. ν_i azt az egész számot jelenti, ahányszor a c_i görbét körüljárjuk. A potenciál többértékűsége a sebességtérnek (6.160) alapján történő kiszámítását nem zavarja, mert a **v** egyértékű lesz ebben az esetben is.

Az egyszeresen és a többszörösen összefüggő tartományok közötti különbség akkor mutatkozik meg, amikor összenyomhatatlan folyadék áramlását vizsgáljuk merev falakkal határolt térben. Látni fogjuk, hogy merev falakkal határolt egyszeresen összefüggő tartományban az összenyomhatatlan folyadék örvénymentesen nem áramolhat, míg többszörösen összefüggőben igen.

Ennek belátásához a Green-tétel nem szimmetrikus alakját alkalmazzuk (l. a Függelék 4.5 pontját). Eszerint, ha a Φ és Ψ a *V* tartományban véges, egyértékű és deriváltjaikkal együtt folytonos függvények, akkor

$$\int_V \operatorname{grad}\Phi \operatorname{grad}\psi\,dV + \int_V \Phi\Delta\psi\,dV = \int_F \Phi\left(\operatorname{grad}\psi\right)_n df, \quad \text{(6.164. egyenlet)}$$

ahol *F* a *V* tartományt határoló felület. Legyen a Ψ azonos a Φ-vel. Ebben a speciális esetben

$$\int_V \left(\operatorname{grad}\Phi\right)^2 dV + \int_V \Phi\Delta\Phi\,dV = \int_F \Phi\left(\operatorname{grad}\Phi\right)_n df. \quad \text{(6.165. egyenlet)}$$

Most feltesszük, hogy összenyomhatatlan folyadék örvénymentesen áramlik merev falakkal határolt egyszeresen összefüggő tartományban, és Φ ennek a sebességpotenciálja. Ebben az esetben Φ egyértékű, és ezért alkalmazható rá a (6.165) Green-tétel. A $\Delta\Phi = 0$ a tartományon belül mindenütt, másrészt $v_n = (\operatorname{grad}\Phi)_n = 0$ a merev falat jelentő *F* felületen. Így (6.165)-ből következik, hogy $(\operatorname{grad}\Phi)^2 = v^2 = 0.$ Ez pedig éppen azt jelenti, hogy a merev falakkal határolt egyszeresen összefüggő tartományban az összenyomhatatlan folyadéknak nincs örvénymentes áramlása. Viszont, ha a tartomány többszörösen összefüggő, akkor a Φ többértékűsége miatt a Green-tétel nem alkalmazható rá, és így az örvénymentes áramlás lehetséges.

A cirkuláció megmaradásának tétele. Thomson-tétel

Gondoljunk el az áramlási térben valamilyen zárt *C* görbét, és tekintsük azokat a folyadékrészecskéket, amelyek a t_0 időpontban ezen a görbén helyezkednek el. A későbbi *t* időpillanatban a kiszemelt folyadék részek másik görbén lesznek, de az ugyanazon folyadékrészek által alkotott görbére vett cirkuláció az áramlás során állandó marad. Természetesen a folyadék áramlásával a *C* görbe is mozog a térben és változtatja az alakját. Számítsuk ki a

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v}\,d\mathbf{s}$$

cirkulációnak az idő szerinti differenciálhányadosát:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C \frac{d\mathbf{v}}{dt}d\mathbf{s} + \oint_C \mathbf{v}\frac{d}{dt}d\mathbf{s}. \qquad \text{(6.166. egyenlet)}$$

Tegyük fel, hogy a folyadékra konzervatív külső erő hat. A (6.17) mozgásegyenlet szerint

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{f}}{\varrho} - \frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p = -\operatorname{grad} U - \operatorname{grad} P = -\operatorname{grad}(U+P), \qquad \text{(6.167. egyenlet)}$$

ahol

$$\mathbf{f}^* = \frac{\mathbf{f}}{\varrho} = -\operatorname{grad} U,$$

$$P = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho(p)}.$$

U a külső erő potenciálja, *P* a nyomásfüggvény. A ϱ sűrűségről feltesszük, hogy csak a nyomástól függ, illetve összenyomhatatlan folyadék esetén állandó. Ebben az esetben mind az *U,* mind a *P* egyértékű függvénye a helynek.

A (6.167)-et a (6.166)-ba helyettesítve,

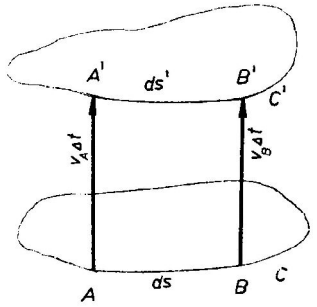
$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint_C \operatorname{grad}(U+P)\,d\mathbf{s} + \oint_C \mathbf{v}\frac{d}{dt}d\mathbf{s}.$$ (6.168. egyenlet)

Mivel *U* és *P* a hely egyértékű függvényei, ezért az első integrál zérussal egyenlő.

Tehát

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C \mathbf{v}\frac{d}{dt}d\mathbf{s}.$$ (6.169. egyenlet)

68. ábra -



A *ds* vonalelem a folyadék részekkel együtt mozog **v** sebességgel, így Δt idő múlva a

$$d\mathbf{s}' = d\mathbf{s} + (d\mathbf{s},\operatorname{grad})\,\mathbf{v}\,\Delta t$$

ívelembe megy át. Ebből következik, hogy

$$\frac{d}{dt}d\mathbf{s} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{d\mathbf{s}'-d\mathbf{s}}{\Delta t} = (d\mathbf{s},\operatorname{grad})\,\mathbf{v}.$$ (6.170. egyenlet)

Ezt (6.169)-be helyettesítve,

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\oint_c \mathbf{v}(d\mathbf{s},\mathrm{grad})\,\mathbf{v}=\frac{1}{2}\oint_c(\mathrm{grad}\,v^2)d\mathbf{s}=\frac{1}{2}\oint_c dv^2=0. \qquad \text{(6.171. egyenlet)}$$

(Ez az integrál azért zérus, mert v^2 is egyértékű függvénye a helynek.) Végül tehát azt kaptuk, hogy

$$\frac{d\Gamma}{dt}=0,$$

amiből következik, hogy

$\Gamma = \text{áll.}$ (6.172. egyenlet)

Ez a *cirkuláció megmaradásának tétele,* amelyet röviden *Thomson-tételnek* nevezünk. Eszerint az ugyanazon folyadékrészecskékből alkotott zárt görbére vett cirkuláció időben állandó, ha az ideális folyadékra ható térfogati erő konzervatív, és a sűrűség csak a nyomástól függ vagy állandó. Ez a tétel egyaránt érvényes ideális folyadék örvénymentes és örvényes áramlására.

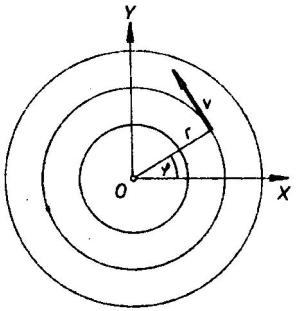
Síkbeli örvénymentes áramlás két koncentrikus kör között

Tekintsük az *xy* síkban felvett koordináta-rendszer origója mint középpont körüli két koncentrikus kör által határolt gyűrű alakú tartományt. A körök merev falakat jelentsenek. A körgyűrűben összenyomhatatlan folyadék áramolják úgy, hogy az áramvonalak is *O* középpontú koncentrikus körök legyenek. A sebesség legyen az $r=\sqrt{x^2+y^2}$ sugárral fordítva arányos:

$$v=\frac{A}{r};\qquad v_x=-v\sin\varphi=-A\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$v_y=v\cos\varphi=A\frac{x}{x^2+y^2},\qquad v_z=0. \qquad \text{(6.173. egyenlet)}$$

69. ábra -



Könnyű belátni, hogy ez az áramlás örvénymentes, vagyis $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}=0;$ továbbá a sebességpotenciál,

$$\Phi = A\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = A\varphi.$$ (6.174. egyenlet)

Ugyanis Φ-nek az *x*, illetve *y* szerinti parciális deriváltjai a (6.173)-beli v_x, illetve v_y komponensekét adják. Hasonlóan belátható, hogy Φ kielégíti a

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0$$ (6.175. egyenlet)

kétdimenziós Laplace-egyenletet.

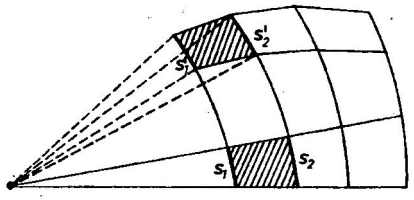
Bár az áramlás örvénymentes a körgyűrűben, az *r* sugarú körre vett cirkuláció mégsem zérus:

$$\Gamma = \oint v_s\,ds = \int_0^{2\pi}\frac{A}{r}r\,dr = 2\pi A.$$ (6.176. egyenlet)

Ez teljes egyezésben van az előző alpontban megismert tétellel, ugyanis a tartomány kétszeresen összefüggő, és ennek megfelelően a (6.174) sebességpotenciál nem egyértékű, hanem minden körülfutásnál $2\pi A$-val megváltozik.

Az ilyen áramlást, amelynél a Γ cirkuláció nem zérus, *cirkulációs áramlásnak* nevezzük. Cirkulációs áramlásnál a folyadék elemi kis tartománya az áramlás során deformálódik, amint az a *70. ábrából* könnyen belátható. Az érintő menti kis s_1 ív bizonyos idő múlva az s_1' helyzetbe kerül, az *O*-tól távolabbi s_2 a kisebb sebesség miatt s_2'-be. Az s_1, s_2 körívek és a sugarak által határolt kis tartomány tehát deformálódik.

70. ábra -



Ha a belső merev falat alkotó henger hiányoznék, akkor az áramló folyadék tartománya egyszeresen összefüggő lenne, és az előzőekben tárgyalt tétel szerint az áramlás nem lehetne mindenütt örvénymentes. Valóban, az $r = 0$ helyen (a *z* tengely mentén) a sebesség (6.173) szerint végtelenné válik, a *z* tengely mentén πA erősségű izolált örvényfonal van (1. a 46.1*f* pontot).

A Green-tétel alapján az is belátható, hogy az áramlási feladat megoldása *egyértelmű.* Vagyis, ha egyszeresen összefüggő tartomány határfelületének minden pontjában adva van a sebesség normális irányú komponense,

$$v_n = (\mathrm{grad}\,\Phi)_n = f(x, y, z),$$ (6.177. egyenlet)

akkor a tartományon belül az örvénymentes áramlás egyértelműen meg van határozva. Ha ugyanis két megoldás lenne, Φ_1 és Φ_2, akkor a

$$(\mathrm{grad}\,\Phi_1)_n = (\mathrm{grad}\,\Phi_2)_n = f(x, y, z)$$ (6.178. egyenlet)

és a

$$\Delta\Phi_1 = \Delta\Phi_2 = 0$$ (6.179. egyenlet)

egyenletekből a

$$\psi = \Phi_1 - \Phi_2$$ (6.180. egyenlet)

függvényre következik, hogy

$$\Delta\psi = 0 \qquad \text{és} \qquad (\operatorname{grad}\psi)_n = 0.$$ (6.181. egyenlet)

ψ-t a (6.165) Green-tételbe helyettesítve, abból adódik, hogy

$$(\operatorname{grad}\psi)^2 = 0$$ (6.182. egyenlet)

az áramlási tér minden pontjában. Tehát

$$\psi = \Phi_1 - \Phi_2 = \text{áll.},$$

azaz

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \text{áll.}$$ (6.183. egyenlet)

A Φ_1 és Φ_2 megoldások csak additív állandóban különböznek egymástól, ezért a $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\Phi$ összefüggés alapján ugyanazt a sebességteret adják. Ez éppen azt jelenti, hogy a **v** sebesség valóban egyértelműen meg van határozva.

Az örvényes áramlás tulajdonságai

A folyadékáramlást örvényesnek mondjuk, ha a (6.92)-ben értelmezett

$$\omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v}$$ (6.184. egyenlet)

örvényvektor az áramlási tér egy részében zérustól különböző. Az $\omega(\mathbf{r}, t)$ vektor a tér valamely helyén a *t* időpontban az éppen ott tartózkodó folyadékrészecske szögsebességét jelenti. Az örvényvektorteret is szemléltethetjük folytonos vonalakkal, amelyek érintője adott helyen *t* időben az ω irányát adja meg. Ezeket a vonalakat nevezzük *örvényvonalaknak.* A kis zárt görbe által körülfogott felületen átmenő örvényvonalakat *örvénycsőnek* hívjuk. Ha az örvénytér szemléltetésénél az örvényvonalakat olyan sűrűn rajzoljuk, hogy az ω-ra merőleges felületegységen éppen annyi örvényvonal halad át, mint amennyi az adott helyen az $|\omega|$, akkor a vonalak sűrűsége az örvény nagyságáról is számot ad. Ha az örvénycső keresztmetszete olyan kicsi, hogy ezen belül az ω állandónak tekinthető, akkor az örvénycsövet *örvényfonálnak* hívjuk. Az ω vektor normális irányú komponensének valamely felületre vett integrálja az örvényfluxus:

$$\mathcal{F} = \int_F \omega_n df.$$ (6.185. egyenlet)

Az ω vektor (6.184) definíciójából következik, hogy zárt felületre vett örvényfluxus mindig zérus. Ugyanis a Gauss-tétel, valamint (6.174) alapján adódik, hogy

$$\mathcal{F} = \int_F \omega_n df \int_V \operatorname{div} \omega \, dV = \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} \, dV = 0.$$ (6.186. egyenlet)

Másrészt a Stokes-tétel felhasználásával belátható, hogy valamely felületen átmenő örvényfluxus a felületet határoló görbére vett cirkuláció felével egyenlő:

$$\mathcal{F} = \int_F \omega_n df = \frac{1}{2} \int_F (\operatorname{rot} v)_n df = \frac{1}{2} \oint v_s ds = \frac{1}{2} \Gamma.$$ (6.187. egyenlet)

A Helmholtz-féle örvénytételek

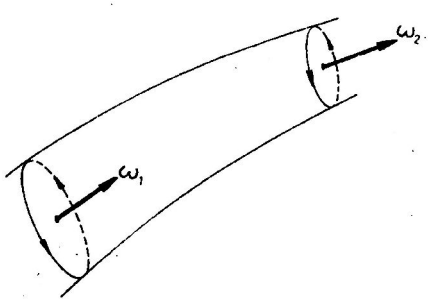
Tekintsük egy örvénycsőnek két tetszőleges keresztmetszettel határolt szakaszát. Integráljuk a

$\operatorname{div} \omega = 0$ (6.188. egyenlet)

egyenletet a csődarab térfogatára, és alkalmazzuk a Gauss-tételt:

$$\int_V \operatorname{div} \omega \, dv = \int_F \omega_n df = 0.$$

71. ábra -



A felületi integrál a csőszakasz falára és a két keresztmetszetre vett integrálok összegére bontható. Az örvénycső falán az ω_n értelem szerint zérus, ezért csak a két keresztmetszetre vett integrál marad meg. Mivel az F_1 felület külső normálisa ω_1-gyel ellentétes irányú, ezért az erre vett integrál negatív előjellel szerepel.

Így

$$\int_{F_1} \omega_n df = \int_{F_2} \omega_n df. \quad \text{(6.189. egyenlet)}$$

Ezek az integrálok a két keresztmetszeten átmenő $\mathcal{F}_1$, illetve $\mathcal{F}_2$ örvényfluxust jelentik. Eszerint az örvénycső bármely keresztmetszetére vett örvényfluxus ugyanaz.

Ha most cső helyett örvényfonalat veszünk, akkor (6.189)-ből következik, hogy

$$\omega_1 F_1 = \omega_2 F_2. \quad \text{(6.190. egyenlet)}$$

Az örvényfonál szögsebessége tehát fordítva arányos a keresztmetszettel. A

$$\mu = \omega F \quad \text{(6.191. egyenlet)}$$

mennyiséget az örvényfonal erősségének nevezzük. Mivel ez (6.187) alapján a cirkuláció felével egyenlő, és utóbbi a Thomson-tétel szerint időben állandó, ezért a μ, *örvényerősség nemcsak az örvényfonál mentén, hanem az időben is állandó.*

Most megvizsgáljuk az örvényvektor időbeli változását. Kiindulunk az Euler-egyenlet

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\operatorname{grad}(U + P)$$

alakjából. Vegyük mindkét oldal rotációját:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{v} - \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0,$$

amely a (6.184) alapján a

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \mathrm{rot}\left(\mathbf{v} \times \omega\right) = 0$$

alakot veszi fel. Vegyük tekintetbe a

$$\mathrm{rot}\left(\mathbf{v} \times \omega\right) = \left(\omega, \mathrm{grad}\right)\mathbf{v} - \left(\mathbf{v}, \mathrm{grad}\right)\omega + \mathbf{v}\,\mathrm{div}\,\omega - \omega\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}$$

vektoranalitikai összefüggést. Összenyomhatatlan folyadékra korlátozódva, $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0;$ a div ω pedig ω definíciójánál fogva zérus. Így

$$\mathrm{rot}\left(\mathbf{v} \times \omega\right) = \left(\omega, \mathrm{grad}\right)\mathbf{v} - \left(\mathbf{v}, \mathrm{grad}\right)\omega$$ (6.193. egyenlet)

Ezt (6.192)-be helyettesítve

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \mathrm{grad}\right)\omega = \left(\omega, \mathrm{grad}\right)\mathbf{v}.$$ (6.194. egyenlet)

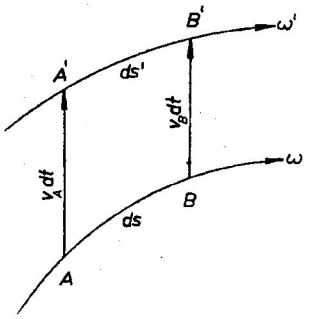
A bal oldal az ω örvényvektor idő szerinti teljes deriváltja, tehát

$$\frac{d\omega}{dt} = \left(\omega, \mathrm{grad}\right)\mathbf{v}.$$ (6.195. egyenlet)

Ha nincs a folyadékban örvény, vagyis $\omega = 0$, akkor ideális folyadékban nem is keletkezik. *Az örvények ideális folyadékban maguktól nem keletkezhetnek és természetesen nem is tűnhetnek el.*

Mivel minden folyadék valamikor nyugalomban volt, és ekkor határozottan örvénymentes volt az állapota, a (6.195) szerint az ideális folyadékban egyáltalán nem lehetnek örvények. E tétel levezetésénél kihasználtuk, hogy a folyadékra ható külső térfogati erők konzervatívak és a sűrűség csak a nyomástól függ. A valóságban ezek a feltételek nem teljesülnek szigorúan. A súrlódó folyadékok elméleti tárgyalásánál látni fogjuk, hogy az örvények az edény falánál keletkeznek a súrlódás következtében fellépő érintőleges feszültségek miatt.

72. ábra -



Vegyünk szemügyre két folyadékrészecskét, amelyek a *t* időpontban egy örvényvonal két szomszédos, *A* és *B* pontjában vannak. Az *AB* ívelem

$d\mathbf{s} = \omega d\lambda$ (6.196. egyenlet)

alakba írható, ahol λ az örvényvonal jellemzésére szolgáló skalár paraméter. Az *A* pontbeli folyadékrész sebessége legyen **v**, a *B* pontbelié

$$\mathbf{v} + (d\mathbf{s}, \operatorname{grad})\mathbf{v} = \mathbf{v} + d\lambda(\omega, \operatorname{grad})\mathbf{v}.$$

dt idő múlva az *A* pont *A'*-be, a *B* pedig *B'*-be megy át, és a *d***s** vonalelem *d***s'**-re változik:

$d\mathbf{s}' = d\mathbf{s} + (d\mathbf{s}, \operatorname{grad})\mathbf{v}\,dt = d\lambda\left[\omega + dt(\omega, \operatorname{grad})\mathbf{v}\right]$. (6.197. egyenlet)

A szögletes zárójeles kifejezés azonban a (6.195) egyenlőség alapján az *A* pontbeli részecske *t*+*dt* időponthoz tartozó örvényvektorával egyezik meg. Ugyanis

$$\omega' = \omega + \frac{d\omega}{dt}dt = \omega + dt(\omega, \operatorname{grad})\mathbf{v}.$$

Az ugyanehhez az időponthoz tartozó *d***s'** ívelem (6.197) szerint ismét

$d\mathbf{s}' = \omega' d\lambda$ (6.198. egyenlet)

alakú. A *B* pontbeli folyadékrészecske tehát ugyanazon az örvény vonalon marad, amelyen az *A*-beli mozog. Az örvényvonal a rajta levő folyadékrészecskékkel együtt mozog. Érvényes tehát a következő tétel: *az örvényvonalat mindig ugyanazok a folyadékrészek alkotják.* Az örvényvonalak alakja és helyzete változhat az időben, az anyagi összetétele azonban nem.

A (6.196)- és (6.198)-ból következik, hogy

$$\frac{|d\mathbf{s}'|}{|d\mathbf{s}|} = \frac{|\omega'|}{|\omega|}.$$ (6.199. egyenlet)

Ez viszont azt jelenti, hogy az örvényvektor nagyobb lesz, ha az örvényfonál az idő során megnyúlik.

Az örvényes áramlásra most megismert (a szövegben dőlt betűvel szedett) tételeket *Helmholtz-féle örvénytételeknek* nevezzük.

Az áramlási tér származtatása az örvénytérből

Feltesszük, hogy az $\omega(\mathbf{r})$ örvénytér ismert, és ebből akarjuk meghatározni a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sebességteret összenyomhatatlan ideális folyadékra. Mint korábban láttuk, az ilyen folyadék sebességtere mindenütt divergenciamentes:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0.$$ (6.200. egyenlet)

Ez az egyenlet kielégíthető, ha **v**-t egy segédvektor rotációjaként írjuk fel:

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot}\mathbf{A}.$$ (6.201. egyenlet)

Az $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ vektort *vektorpotenciálnak* hívjuk. Az **A** és ω között a (6.184) összefüggés teremt kapcsolatot. Eszerint

$$\omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}.$$ (6.202. egyenlet)

Most vegyük figyelembe a vektoranalízisből ismert

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}$$

összefüggést. Ennélfogva

$$\Delta \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - 2\omega.$$ (6.203. egyenlet)

Az **A** és a **v** közötti (6.201) kapcsolat nem egyértelmű, mert az

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi$$ (6.204. egyenlet)

vektor ugyanazt a sebességet adja. Itt χ tetszőleges skalárfüggvény. Ezt a körülményt felhasználjuk arra, hogy a sok lehetséges **A** vektor közül azt választjuk, amelyik a számítás szempontjából a legcélszerűbb. Ezt akkor érjük el, ha **A**-ra kikötjük a

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$ (6.205. egyenlet)

mellékfeltételt. Ebben az esetben az **A**-t meghatározó (6.203) differenciálegyenlet a

$$\Delta \mathbf{A} = -2\omega$$ (6.206. egyenlet)

egyszerű alakot veszi fel. Ez a korábbról már ismert Poisson-egyenlet.

A **v**(**r**) sebességtér kiszámítását így visszavezettük az **A** vektorpotenciál meghatározására. Ha **A**-t ismerjük, akkor belőle a sebesség a (6.201) alapján számítható ki. A vektorpotenciált a (6.206), (6.205) egyenletek határozzák meg. Mivel a (6.206) egyenlet teljesen olyan alakú, mint a Φ sebességpotenciálra vonatkozó (6.139) egyenlet, megoldásánál követhetjük az ott használt eljárást. Eredményül (6.150) mintájára adódik

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_V \frac{\omega(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$ (6.207. egyenlet)

Most még meg kell győződnünk arról, hogy (6.207) kielégíti-e a (6.205) mellékfeltételt is. Képezzük a (6.207) divergenciáját az **r** vektor *x*, *y*, *z* koordinátái szerint, és közben használjuk az $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ jelölést:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{2\pi} \int_V \operatorname{div}_{(\mathbf{r})} \frac{\omega}{r} dV = \frac{1}{2\pi} \int_V \left[\frac{1}{r} \operatorname{div}_{(\mathbf{r})} \omega(\mathbf{r}') + \left(\omega(\mathbf{r}'), \operatorname{grad}_{(\mathbf{r})} \frac{1}{r} \right) \right] dV.$$ (6.208. egyenlet)

Itt figyelembe vettük a

$$\operatorname{div} \frac{\omega}{r} = \frac{1}{r} \operatorname{div} \omega + \left(\omega, \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right)$$ (6.209. egyenlet)

vektoranalitikai összefüggést. A jobb oldali integrál első tagjában $\mathrm{div}_{(\mathbf{r})}\omega(\mathbf{r}')=0$, mert ω az **r'**-től függ, a divergenciát pedig az **r** vektor koordinátái szerint képezzük. A második tagot átalakítjuk a

$$\mathrm{grad}_{(\mathbf{r})}\frac{1}{r}=-\mathrm{grad}_{(\mathbf{r}')}\frac{1}{r}$$ (6.210. egyenlet)

összefüggés figyelembevételével. A (6.209) és (6.210) felhasználásával írható, hogy

$$\left(\omega,\mathrm{grad}_{(\mathbf{r})}\frac{1}{r}\right)=-\left(\omega,\mathrm{grad}_{(\mathbf{r}')}\frac{1}{r}\right)=-\mathrm{div}_{(\mathbf{r}')}\frac{\omega}{r}+\frac{1}{r}\mathrm{div}_{(\mathbf{r}')}\omega(\mathbf{r}').$$

A jobb oldal utolsó tagja eltűnik, mert (6.202) alapján $\mathrm{div}_{(\mathbf{r}')}\omega(\mathbf{r}')=0$. Ezért

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}=-\frac{1}{2\pi}\int_V \mathrm{div}_{(\mathbf{r}')}\frac{\omega(\mathbf{r}')}{r}dV,$$ (6.211. egyenlet)

amely a Gauss-tétellel a folyadék felületére vett integrállá alakítható:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}=-\frac{1}{2\pi}\int_F \frac{\omega_n}{r}df.$$ (6.212. egyenlet)

Feltéve, hogy a folyadék merev fallal határolt térrészben súrlódásmentesen áramlik, a v_n zérus a felület mentén. Ebből viszont a rotáció (F. 59) értelmezése alapján következik, hogy az ω_n is eltűnik az *F* felületen. Ezt beláthatjuk úgy, hogy a zárt görbét a felületen olyan négyszögnek választjuk, amelynek két párhuzamos oldala áramvonal. Az ezeken vett integrálok kiejtik egymást, a másik két oldal mentén pedig *d***s** merőleges **v**-re, ezért ezek nem adnak járulékot. Az ω_n tehát zérus a felületen. Ezért a (6.207) megoldás kielégíti a (6.205) mellékfeltételt.

Az **A** vektorpotenciálból a **v** sebesség (6.201) szerint rotációképzéssel adódik. Természetesen a rotációt az **r** vektor *x*, *y, z* koordinátái szerint kell képezni:

$$\mathbf{v}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}=\frac{1}{2\pi}\int_V \mathrm{rot}_{(\mathbf{r})}\frac{\omega(\mathbf{r}')}{r}dV.$$ (6.213. egyenlet)

Vegyük figyelembe a

$$\mathrm{rot}_{(\mathbf{r})}\frac{\omega(\mathbf{r}')}{r}=\frac{1}{r}\mathrm{rot}_{(\mathbf{r})}\omega(\mathbf{r}')+\mathrm{grad}_{(\mathbf{r})}\frac{1}{r}\times\omega(\mathbf{r}')$$ (6.214. egyenlet)

vektoranalitikai összefüggést. A jobb oldal első tagja zérus, mert ω az **r**'-től függ és a rotációt **r** koordinátái szerint képezzük. A (6.214)-et (6.213)-ba helyettesítve

$$\mathbf{v}(\mathbf{r})=\frac{1}{2\pi}\int_V\left(\mathrm{grad}_{(\mathbf{r})}\frac{1}{r}\times\omega\right)dV=-\frac{1}{2\pi}\int_V\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\times\omega}{r^3}dV=\frac{1}{2\pi}\int_V\frac{\omega\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{r^3}dV.$$ (6.215. egyenlet)

Az $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ vektor a *dV* térfogatelemtől azon pont felé mutat, amelyben a **v** sebességteret számítjuk. Ezzel meghatároztuk az $\omega(\mathbf{r})$ örvénytértől származó áramlási teret.

A (6.213) kifejezés egyszerű alakot vesz fel nagyon vékony $\mu=\omega f=\Gamma/2$ erősségű örvényfonál esetén. Ha *d***s** jelenti az örvényfonál vonalelemét, akkor

$$\omega\,dV=\omega f\,d\mathbf{s}=\frac{1}{2}\Gamma d\mathbf{s}.$$ (6.216. egyenlet)

Ezt (6.215)-be helyettesítve,

$$\mathbf{v}=\frac{\Gamma}{4\pi}\int\frac{d\mathbf{s}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{r^3}.$$ (6.217. egyenlet)

Ez a vonalmenti integrál a teljes örvényfonálra veendő. Ez az egyenlet szemléletesen úgy értelmezhető, hogy az örvényfonál *d***s** vonaleleme a folyadéksebességhez

$$d\mathbf{v}=\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{d\mathbf{s}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{r^3}$$ (6.218. egyenlet)

mennyiséggel járul hozzá. Megjegyezzük, hogy ez formailag teljesen megegyezik a lineáris vezetőben folyó áram által keltett mágneses térre vonatkozó Biot—Savart-törvénnyel,

Síkbeli örvénymentes áramlás

A 44. pontban megismertük az örvénymentes áramlás általános törvényeit. Ezek jelentősége az örvényekre vonatkozó előző pontbeli tételek alapján még fokozódott, hisz megismertük, hogy ideális folyadékban örvények maguktól nem keletkeznek, és ha már voltak, akkor nem szűnnek

meg. Ezért az ideális folyadékok mozgásának lehetőségei között az örvénymentes áramlások fontos szerepet kapnak. Most konkrétabb feltételek mellett tanulmányozzuk az örvénymentes áramlásokat. Először az alkalmazások szempontjából fontos síkbeli áramlásokkal foglalkozunk. Ezekre az jellemző, hogy az áramló folyadék állapota egymással párhuzamos síkokban ugyanaz. Ha a koordináta-rendszert úgy választjuk, hogy e síkok az *xy* síkkal párhuzamosak, akkor az áramlási tér a mondottak értelmében nem függ a *z* koordinátától. Ez azt jelenti, hogy a

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi$$ (6.219. egyenlet)

összefüggéssel értelmezett Φ sebességpotenciál csak az *x*, *y* koordináták függvénye. Ennélfogva a Φ-t meghatározó (6.135) differenciálegyenlet a kétdimenziós

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$ (6.220. egyenlet)

Laplace-egyenletre egyszerűsödik. Ennek az egyenletnek a megoldását keressük a konkrét feladatnak megfelelő határfeltételekkel. A megoldásból (6.219) alapján számítható ki a **v** sebesség mint a helynek a függvénye, a (6.136)-ból pedig a nyomáseloszlás.

A síkbeli örvénymentes áramlások problémája így a (6.220) kétdimenziós Laplace-egyenlet megoldására vezethető vissza. Ez nagy könnyítést jelent, mert a komplex függvénytan ismert tételeinek segítségével a matematikai feladat egyszerűvé válik. Ehhez felidézünk néhány komplex függvénytani tételt. Vezessük be a

$$z = x + iy$$ (6.221. egyenlet)

komplex változót, és tekintsük ennek *w=f(z*) reguláris függvényét, amely szintén komplex. Bontsuk fel *w*-t valós és képzetes részre:

$$w = f(z) = f(x+iy) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y).$$ (6.222. egyenlet)

Képezzük *w*-nek az *x,* illetve *y* szerinti differenciálhányadosait:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial y} = if'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + i\frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$ (6.223. egyenlet)

Itt f' a *z* komplex változó szerint vett differenciálhányadost jelenti. Ha a (6.223) második egyenletét *i*-vel megszorozzuk, az első -1-szeresét kapjuk, ezért e kettő összege zérus:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}-\frac{\partial \Psi}{\partial y}+i\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)=0.$$ (6.224. egyenlet)

Ebből következik, hogy mind a valós, mind a képzetes résznek külön-külön zérusnak kell lennie:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=-\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$ (6.225. egyenlet)

Ezek a komplex függvénytanból ismert Cauchy—Riemann-féle relációk, amelyek szükséges és ha a fenti négy derivált folytonos, akkor elegendő feltételei annak, hogy az *f(z)* függvény analitikus legyen.

A (6.225) egyenletek *x*, illetve *y* szerinti differenciálásával, majd összeadásával, illetve kivonásával adódik, hogy mind a Φ, mind a Ψ kielégíti a kétdimenziós Laplace-egyenletet:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}=0.$$ (6.226. egyenlet)

Továbbá a (6.225) egyenleteket egymással megszorozva, kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y}=0,$$

amely így is írható:

$$(\operatorname{grad}\Phi, \operatorname{grad}\Psi)=0.$$ (6.227. egyenlet)

Az utóbbi egyenletnek szemléletes jelentése van. Tekintsük a

$$\Phi(x,y)=C_1=\text{áll.},$$ (6.228a. egyenlet)

$$\Psi(x,y)=C_2=\text{áll.}$$ (6.228b. egyenlet)

egyenleteket. Mindegyik egy-egy folytonos görbét ír le az *xy* síkon. A C_1, C_2 állandóknak különböző értékeket adva, két görbesereget kapunk. Mivel a grad Φ vektor merőleges a (6.228a) görbeseregre, a grad Ψ pedig a (6.228b) görbékre, a (6.227) azt jelenti, hogy a két görbesereg normálisai egymásra merőlegesek. Ebből nyilvánvaló, hogy maga a két görbesereg is merőleges egymásra.

A (6.226) szerint mind a Φ, mind a Ψ kielégíti a kétdimenziós Laplace-egyenletet, ezért az előzőek alapján bármelyik tekinthető egy örvénymentes síkbeli áramlás sebességpotenciáljának. Pontosabban szólva, egy tetszőleges *w=f(z)* analitikus függvény valós és képzetes része egyaránt lehet síkbeli örvénymentes áramlás sebességpotenciálja. Válasszuk a $\Phi(x,y)$ függvényt sebességpotenciálnak. A belőle

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad}\Phi$$

alapján származtatott sebességtér áramvonalai a $\Psi(x,y) = C_2$ görbékkel egyeznek meg. Ezért a Ψ függvényt *áramlási függvénynek* nevezzük.

A sebességvektor komponensei a $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\Phi$, valamint (6.225) szerint a következőképpen írhatók:

$$v_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \qquad v_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$ (6.229. egyenlet)

A v_x és v_y azonban a *w=f(z)* komplex függvény *z* szerinti deriváltjából közvetlenül is meghatározható. Ugyanis

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi}{\partial x} = v_x - iv_y.$$ (6.230. egyenlet)

Az $f'(z)$-t ezért *komplex sebességnek*, a $w \equiv f(z) = \Phi + i\Psi$ függvényt pedig *komplex potenciálnak* nevezzük.

A fentiek szerint ideális összenyomhatatlan folyadék síkbeli örvénymentes áramlásához analitikus komplex potenciál rendelhető. Az állítás fordítva is igaz: minden analitikus komplex függvényhez tartozik egy kinematikailag lehetséges örvénymentes síkbeli áramlás.

Megmutatjuk, hogy stacionárius áramlásnál a nyomáseloszlás is kifejezhető közvetlenül a komplex potenciál deriváltjával. A (6.136) egyenletből stacionárius esetben a *p* nyomásra adódik, hogy

$$p = p_0 - \varrho U - \frac{1}{2}\varrho\left(\operatorname{grad}\Phi\right)^2,$$ (6.231. egyenlet)

ahol p_0 nyomás dimenziójú állandót jelent.

A (6.225) Cauchy—Riemann-féle képletek alapján belátható, hogy

$$\left(\operatorname{grad}\Phi\right)^2 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 = \left|f'(z)\right|^2.$$ (6.232. egyenlet)

Ezt (6.231)-be helyettesítve, megkapjuk a keresett összefüggést a *p* nyomáseloszlásra:

$$p = p_0 - \varrho U - \frac{1}{2}\varrho\left|f'(z)\right|^2.$$ (6.233. egyenlet)

Néhány síkbeli áramlás komplex potenciálja

Most megvizsgáljuk, hogy néhány egyszerűbb komplex függvényhez mint komplex potenciálhoz milyen áramlási kép tartozik.

a. Legyen

$$w = Az = Ax + iAy,$$ (6.234. egyenlet)

ahol *A* valós állandó számot jelent. A sebességpotenciál

$$\Phi = Ax,$$ (6.235. egyenlet)

az áramlási függvény

$$\Psi = Ay.$$ (6.236. egyenlet)

Az állandó potenciálú helyek, az ún. *nívóvonalak* az *x* = áll. egyenletű, az *y* tengellyel párhuzamos egyenesek. Az áramvonalak pedig az *x* tengellyel párhuzamos egyenesek.

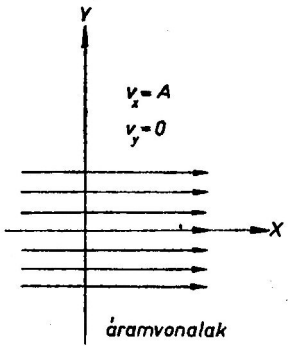
A komplex sebesség:

$$w' \equiv v_x - iv_y = A,$$

tehát

$$v_x = A, \qquad v_y = 0.$$ (6.237. egyenlet)

73. ábra -



b. Tekintsük a

$$w = Az^2 = A\left(x^2 - y^2\right) + 2iAxy \quad \text{(6.238. egyenlet)}$$

komplex potenciált. Az áramvonalak egyenlete:

$$\Psi\left(x, y\right) = 2Axy = \text{áll.}, \quad \text{(6.239. egyenlet)}$$

amiből

$$y = \frac{C}{x}. \quad \text{(6.240. egyenlet)}$$

Az áramvonalak tehát olyan hiperbolák, amelyeknek aszimptotái a koordinátatengelyek.

A komplex sebesség:

$$w'\left(z\right) = 2Az = 2Ax + 2iAy, \quad \text{(6.241. egyenlet)}$$

amiből

$$v_x = 2Ax, \qquad v_y = -2Ay. \quad \text{(6.242. egyenlet)}$$

Az áramvonalak aszimptotikusan közelednek a koordinátatengelyekhez. Mivel az ideális folyadék sebességének érintőleges komponensére a merev fal semmilyen megszorítást nem jelent, a normális irányú komponens pedig a határon eltűnik, az áramlási kép nem módosul, ha valamelyik áramvonalat merev fallal helyettesítjük. A koordinátatengelyek is áramvonalak, ugyanis ha a (6.239) jobb oldalán levő állandó helyére zérust írunk, akkor éppen a koordinátatengelyeket kapjuk áramlási görbeként. A (6.238) komplex potenciál tehát derékszögű merev falak közötti örvénymentes síkbeli áramlást ír le.

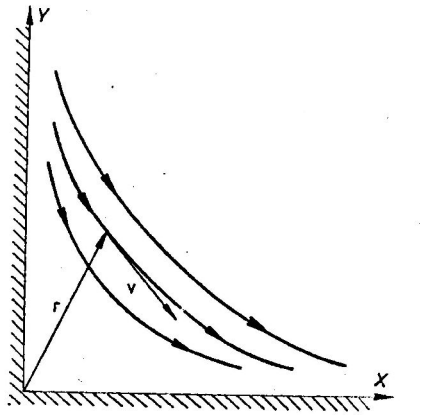
c. A (6.238) komplex potenciál

$w = Az^n \qquad (A \text{ és } n \text{ valós})$ (6.243. egyenlet)

általánosítása olyan áramlásnak felel meg. amely tetszőleges a hajlásszögű merev falak között lehetséges. Írjuk a *z* komplex változót trigonometrikus alakba: $z = re^{i\varphi}$, ekkor

$w = Az^n = Ar^n e^{in\varphi} = Ar^n \left(\cos n\varphi + i \sin n\varphi\right).$ (6.244. egyenlet)

74. ábra -

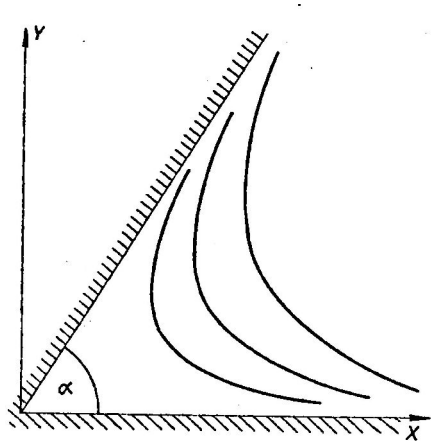


A sebességpotenciál és az áramlási függvény:

$\Phi(r, \varphi) = Ar^n \cos n\varphi,$ (6.245. egyenlet)

$\Psi(r, \varphi) = Ar^n \sin n\varphi.$ (6.246. egyenlet)

75. ábra -



A merev fal menti áramvonalat megint a

$\Psi(r, \varphi) = 0$ (6.247. egyenlet)

egyenletből határozzuk meg. Ezt az egyenletet kielégítik a $\varphi = 0$ és a $\varphi = \frac{\pi}{n}$ egyenesek. Eszerint, ha a (6.244) komplex potenciál *n* kitevőjét $n = \pi / \alpha$ -nak választjuk, akkor az az α hajlásszögű merev falak közötti örvénymentes síkbeli áramlást írja le. Tehát

$$\Phi(r, \varphi) = Ar^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos\frac{\pi}{\alpha}\varphi,$$ (6.248. egyenlet)

$$\Psi(r, \varphi) = Ar^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\frac{\pi}{\alpha}\varphi$$ (6.249. egyenlet)

A sebesség polárkomponensei:

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = A\frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \cos\frac{\pi}{\alpha}\varphi,$$ (6.250. egyenlet)

$$v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{\pi}{\alpha} A r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin\frac{\pi}{\alpha}\varphi$$ (6.251. egyenlet)

A sebesség nagysága:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \frac{\pi}{\alpha} A r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}.$$ (6.252. egyenlet)

Ebből látszik, hogy ha $\alpha < \pi$ akkor a sebesség mindenütt véges, kivéve az *r*=0 helyet, ahol zérus. Ha $\alpha > \pi$, akkor az *r*=0 hely szinguláris pont, ebben a sebesség végtelenné válik, máshol mindenütt véges.

Nézzük meg az $\alpha = 2\pi$ speciális esetet. Ez egy síklap körüli áramlásnak felel meg. Ekkor *n*=1/2, tehát

$$w = A\sqrt{z}.$$ (6.253. egyenlet)

Az áramlási függvény

$$\Psi = (r, \varphi) = A\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2},$$ (6.254. egyenlet)

ezért az áramvonalak egyenlete

$$A\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2} = \text{áll.}$$ (6.255. egyenlet)

Azért, hogy az áramlási görbék alakját könnyebben felismerjük, térjünk át derékszögű koordinátákra:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Másrészt vegyük figyelembe a

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$$

trigonometriai összefüggést. Ezek alapján (6.255)-ből adódik, hogy

$$y^2 = 2Cx + C^2,$$ (6.256. egyenlet)

ahol *C* állandó. Ez konfokális parabolák egyenlete. Az áramvonalak tehát konfokális-parabolák.

A sebességkomponensek:

$$v_r = \frac{A}{2\sqrt{r}}\cos(\varphi/2),$$ (6.257. egyenlet)

$$v_\varphi = \frac{A}{2\sqrt{r}}\sin(\varphi/2),$$ (6.258. egyenlet)

amiből

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \frac{A}{2\sqrt{r}}.$$ (6.259. egyenlet)

Látszik, hogy a sebesség az origóban végtelen, azon kívül mindenütt véges.

d. Vizsgáljuk meg a

$$w = \frac{A}{z} = \frac{A}{r}e^{-i\varphi}$$ (6.260. egyenlet)

komplex potenciál áramlási terét.

Az áramlási függvény

$$\Psi(r, \varphi) = -\frac{A}{r}\sin\varphi,$$ (6.261. egyenlet)

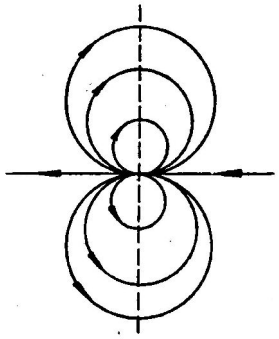
tehát az áramvonalak egyenlete

$$\frac{A}{r}\sin\varphi = C = \text{áll.},$$ (6.262. egyenlet)

mely derékszögű koordinátákkal kifejezve,

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2C}\right)^2=\frac{1}{4C^2}^2. \quad \text{(6.263. egyenlet)}$$

76. ábra -



Ez olyan kör egyenlete, amelynek középpontja az *y* tengelyen, az origótól $\frac{1}{2C}$ távolságra van, és sugara $\frac{1}{2C}$. A $\varphi=0$-nak az *x* tengely felel meg, tehát ez is áramvonal. Az áramlási képet a *76. ábra* szemlélteti. Az ilyen áramlást *dipóláramlásnak* nevezzük. Az elnevezés onnan származik, hogy egymáshoz igen közeli, ugyanolyan erősségű pontszerű forrásnak és nyelőnek („dipólnak") ilyen az áramlási tere. Pontosabban szólva, abban a határesetben, amikor a forrás és a nyelő távolsága zérushoz tart, de a forráserősség és e távolság szorzata közben álló marad (pontszerű dipól).

A sebességvektor derékszögű komponensei a komplex sebességből adódnak a legegyszerűbben:

$$w'=-\frac{A}{z^2}=-\frac{A}{r^2}e^{-2i\varphi}=-\frac{A}{r^2}\left(\cos 2\varphi-i\sin 2\varphi\right)=v_x-iv_y$$

Ebből

$$v_x=-\frac{A}{r^2}\cos 2\varphi, \qquad v_y=-\frac{A}{r^2}\sin 2\varphi. \quad \text{(6.264. egyenlet)}$$

e. Legyen

$$w=A\ln z=A\ln\left(re^{i\varphi}\right)=A\ln r+iA\varphi \quad \text{(6.265. egyenlet)}$$

A sebességpotenciál

$\Phi(r) = A \ln r,$ (6.266. egyenlet)

az áramlási függvény

$\Psi(\varphi) = A\varphi.$ (6.267. egyenlet)

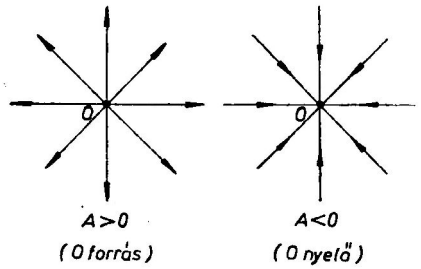
A $\Phi(r) = \text{áll.}$ egyenletű nívóvonalak az *O* középpont körüli koncentrikus körök.

Az áramvonalak pedig az *O*-ból kiinduló sugárirányú egyenesek ($\varphi = \text{áll.}$).

Az áramlás sebességterét a

$$w' = v_x - iv_y = \frac{A}{z} = \frac{A}{r} e^{-i\varphi}$$

77. ábra -



komplex sebességből számítjuk ki. Eszerint

$$v_x = \frac{A}{r} \cos\varphi = \frac{Ax}{x^2 + y^2}, \qquad v_y = \frac{A}{r} \sin\varphi = \frac{Ay}{x^2 + y^2}.$$ (6.268. egyenlet)

A koordináta-rendszer *O* középpontja az áramlási tér forrása vagy nyelője aszerint, hogy *A*>0 vagy *A*<0. Az *A* állandó a tömegegységre vonatkoztatott forráserősség 2π-ed része. Ugyanis az *r* sugarú körön — vagy pontosabban az *r* sugarú, egységnyi hosszúságú henger palástján — időegység alatt átáramló folyadék térfogata,

$$\oint v_r dr = \frac{A}{r} 2\pi r = 2\pi A.$$

Ezt a mennyiséget neveztük korábban a 44.1 pontban a tömegegységre vonatkoztatott forráserősségnek. Az *A* tehát valóban ennek 2π-ed része.

f. Legyen a komplex potenciál

$$w = \frac{A}{i} \ln z = -iA \ln \left(re^{i\varphi} \right) = A\varphi - iA \ln r.$$ (6.269. egyenlet)

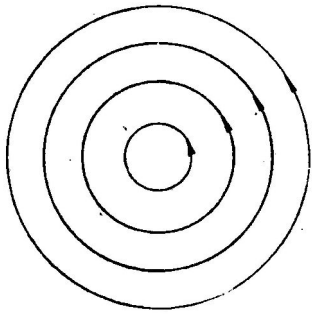
Az ennek megfelelő áramlás sebességpotenciálja

$$\Phi = A\varphi,$$ (6.270. egyenlet)

az áramlási függvénye

$$\Psi = -A \ln r.$$ (6.271. egyenlet)

78. ábra -



Ebből látszik, hogy az áramvonalak most az *O* középpontú koncentrikus körök, ugyanis ezek egyenlete a

Ψ = áll.,

ami a (6.271) szerint az *r* = áll.-nak felel meg. A sebesség v_x, v_y komponenseit a

$$w' = v_x - iv_y = -i\frac{A}{z} = -i\frac{A}{r}e^{-i\varphi} = -\frac{A}{r}\sin\varphi - i\frac{A}{r}\cos\varphi$$

alapján kapjuk meg:

$$v_x = -\frac{A}{r}\sin\varphi = -\frac{Ay}{x^2+y^2}, \qquad v_y = -\frac{A}{r}\cos\varphi = -\frac{Ax}{x^2+y^2}.$$ (6.272. egyenlet)

Az áramlás iránya az óramutató járásával ellentétes, a sebesség nagysága *v=A/r.* Ezzel az áramlással már foglalkoztunk a 44.4 pontban; azzal a különbséggel, hogy ott csak két koncentrikus kör közötti tartományt vizsgáltunk, és így a sebességtér mindenütt reguláris volt. Ezzel szemben most az origó is hozzátartozik az áramlási térhez. Az origó a sebességtérnek szinguláris pontja, itt a *v* végtelenné válik.

A (6.272) áramlás cirkulációs, ugyanis az áramvonalra vett Γ cirkuláció zérustól különbözik:

$$\Gamma = \oint v_s ds = \int_0^{2\pi} \frac{A}{r} r\, d\varphi = 2\pi A.$$ (6.273. egyenlet)

A (6.269) komplex potenciálban szereplő *A* valós állandó tehát a Γ cirkuláció 2π-ed része: $A = \Gamma / 2\pi$.

Mivel az *xy* síkkal párhuzamos síkokban ugyanaz az áramlási kép, mint amit itt leírtunk, a valóságban a *z* tengely az áramlási tér szinguláris vonala. Ez egy $\mu = \Gamma / 2$ erősségű örvényfonál.

g. Végül nézzük azt az esetet, amikor a komplex potenciál (6.265) alakú, de az *A* állandó nem valós, hanem komplex szám: *A = a + ib.* Tehát

$$w = (a+ib)\ln z = (a+ib)\ln\left(re^{i\varphi}\right) = a\ln r - b\varphi + i\left(b\ln r + a\varphi\right).$$ (6.274. egyenlet)

Ez a komplex potenciál a (6.265) és a (6.269) különbsége az *a,* illetve *b* valós állandókkal.

A sebességpotenciál

$$\Phi(r, \varphi) = a\ln r - b\varphi,$$ (6.275. egyenlet)

az áramlási függvény

$$\Psi = (r, \varphi) = b\ln r + a\varphi.$$ (6.276. egyenlet)

A sebesség v_x, v_y komponenseire a

$$w' = v_x - iv_y = (a+ib)\frac{1}{z} = (a+ib)\frac{1}{r}e^{-i\varphi} = \frac{a}{r}\cos\varphi + \frac{b}{r}\sin\varphi - i\frac{a}{r}\sin\varphi + i\frac{b}{r}\cos\varphi$$

alapján adódik:

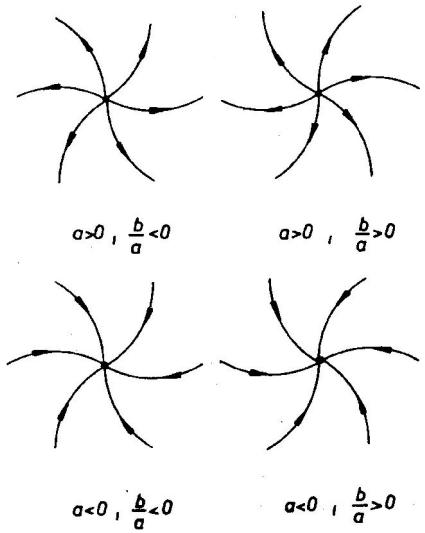
$$v_x = \frac{a}{r}\cos\varphi + \frac{b}{r}\sin\varphi = \frac{ax+by}{x^2+y^2},$$ (6.277. egyenlet)

$$v_y = \frac{a}{r}\sin\varphi - \frac{b}{r}\cos\varphi = \frac{ay+bx}{x^2+y^2}.$$ (6.278. egyenlet)

Az áramvonalak egyenlete:

$$\Psi(r, \varphi) = b\ln r + a\varphi = C = \text{áll.}$$ (6.279. egyenlet)

79. ábra -



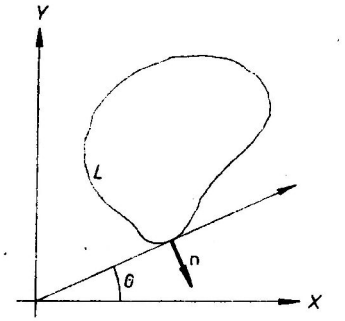
A (6.277), (6.278) sebességteret a (6.268)-cal és a (6.272)-vel összehasonlítva, látható, hogy a (6.274) komplex potenciál áramlási tere a fenti két áramlás szuperpozíciójának eredőjeként jön létre. Ennek megfelelően ezen összetett áramlásnak van forrása (illetve nyelője) és az origó egyúttal örvényhely is. Pontosabban szólva, a *z* tengely forrás (vagy nyelő) is és örvényfonál is. Az a állandó a tömegegységre vonatkoztatott forráserősség 2π-ed része, $-\pi b$ pedig az örvényfonál erőssége.

Az áramvonalakat szemlélteti a *79. ábra.* Ha az *a* valós állandó pozitív, akkor az áramvonalak az origóban levő forrásból indulnak ki, ha pedig *a*<0, akkor oda torkollanak be. Utóbbi esetben az *O* nyelője az áramlási térnek.

Síkbeli áramlás szilárd test körül

Most megvizsgáljuk, hogyan módosul az ideális folyadék síkbeli áramlása, ha az áramlási térben valamilyen szilárd test van. Azért, hogy az áramlás továbbra is síkbeli legyen, feltételezzük, hogy a testnek az áramlás irányára merőleges mérete végtelen hosszú, de a keresztmetszete tetszőleges alakú. A testnek az *xy* síkkal való metszésvonala ennek megfelelően egy tetszőleges zárt görbe, amelyet *L*-lel jelölünk. A szilárd test merev falánál — tehát az *L* görbe mentén — a sebesség normális irányú komponense zérus, vagyis a sebesség a test határán érintőleges, és ezért az *L* görbe is áramvonal lesz. Másrészt a testtől végtelen távol az áramlás olyan, mint egy egyenletes transzláció, ugyanis a test hatása itt már nem érződik. A feladat tehát az előzőekhez képest annyiban módosul, hogy a sebességtérnek a test felületén meghatározott határfeltételeket kell kielégítenie; nevezetesen a sebesség normális komponensének el kell tűnnie.

80. ábra -



Az áramló folyadékba helyezett szilárd test nemcsak az áramlási teret változtatja meg, hanem a nyomáseloszlást is. Ha ez a test felülete mentén nem szimmetrikus, akkor a testre a nyomáseloszlás változásából származó erő és forgatónyomaték hat. Megmutatjuk, hogy mind az erő, mind a forgatónyomaték tetszőleges keresztmetszetű hengerre kiszámítható a *w*(*z*) komplex potenciálból. Először az erővel foglalkozunk.

A henger egységnyi hosszúságú palástjára ható erő komponensei

$$F_x = \int P_{(\mathbf{n})x} df = -\oint_L p \cos(\mathbf{n}, x)\, ds,$$
$$F_y = \int P_{(\mathbf{n})y} df = -\oint_L p \cos(\mathbf{n}, y)\, ds, \quad \text{(6.280. egyenlet)}$$

ahol (**n**, .*x*), illetve (**n**, *y*) a felület külső normális egységvektorának az *x,* illetve az *y* tengellyel bezárt szögét jelenti. Vezessük be az

$$\bar{F} = F_x - iF_y \quad \text{(6.281. egyenlet)}$$

komplex mennyiséget. A (6.280) alapján írható, hogy

$$\bar{F} = -\oint_L p\left(\cos(\mathbf{n}, x) - i\cos(\mathbf{n}, y)\right) ds = -\oint_L p\left(\sin\theta + i\cos\theta\right) ds =$$
$$= -i\oint_L p\left(\cos\theta - i\sin\theta\right) ds = -i\oint_L p e^{-i\theta} ds, \quad \text{(6.282. egyenlet)}$$

ahol θ a görbe érintőjének az *x* tengely pozitív irányával bezárt szögét jelenti *(80. ábra).* Az *xy* síkot komplex *z* síknak tekintve, az *L* görbe mentén

$$dz = dx + i\,dy = \left(\cos\theta + i\sin\theta\right) ds = e^{i\theta} ds, \quad \text{(6.283. egyenlet)}$$

amiből

$$e^{-i\theta} ds = dz^*. \quad \text{(6.284. egyenlet)}$$

Ezt figyelembe véve, (6.282) a komplex *z* sík *L* zárt görbéjére vett komplex integrál alakjában írható:

$$\bar{F} = -i\oint_L p\, dz^*. \quad \text{(6.285. egyenlet)}$$

A *p* nyomást fejezzük ki a sebességgel a Bernoulli-egyenletből. Ha külső erőt nem tételezünk fel, akkor

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\varrho v^2, \quad \text{(6.286. egyenlet)}$$

ahol a p_0 az áramvonalon állandó. (A $v = 0$ helyen vett nyomás értékét jelenti.) Mivel a test *L* határgörbéje is áramvonal, a p_0 e mentén állandó. A (6.286)-ot (6.285)-be helyettesítve

$$\overline{F} = \frac{i\varrho}{2}\oint_L v^2 dz^* = \frac{i\varrho}{2}\oint_L v^2 e^{-2i\theta} dz.$$ (6.287. egyenlet)

Itt figyelembe vettük, hogy

$$\oint_L dz^* = 0.$$

A *w′*(*z*) komplex sebesség (6.230) definíciója szerint az *L* görbe mentén

$$w' = v_x - iv_y = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\, e^{-i\theta} = v e^{-i\theta},$$

amiből

$$v^2 e^{-2i\theta} = w'^2.$$ (6.288. egyenlet)

Ezt (6.287)-be behelyettesítve,

$$\overline{F} = \frac{i\varrho}{2}\oint_L w'^2 dz.$$ (6.289. egyenlet)

Az $\overline{F}$ tehát a *w(z*) komplex potenciálból számítható ki a (6.289) képlet szerint. Ebből a testre ható erő komponensei a (6.281) alapján adódnak:

$$F_x = \mathrm{Re}\,\overline{F}, \qquad F_y = -\mathrm{Im}\,\overline{F}.$$ (6.290. egyenlet)

Az $\overline{F}$ -et megadó (6.289) kifejezést *Blasius—Csapligin-képletnek* nevezzük.

Most meghatározzuk a testre ható erő nyomatékát. Szimmetriaokok folytán ez az erőnyomaték *z* irányú, tehát a henger tengelyének irányába mutat. Az erőnyomaték nagysága (a forgatónyomaték)

$$M = \int \left(xP_{(\mathbf{n})y} - yP_{(\mathbf{n})x}\right) df = -\oint_L p\left[x\cos(\mathbf{n}, y) - y\cos(\mathbf{n}, x)\right] ds.$$

Mivel $\cos(\mathbf{n}, x) = \sin\theta$ és $\cos(\mathbf{n}, y) = -\cos\theta$, továbbá $ds\cos\theta = dx$ és $ds\sin\theta = dy$,

$$M = \oint_L p\,(x\,dx + y\,dy).$$ (6.291. egyenlet)

A nyomást a (6.286) Bernoulli-egyenletből behelyettesítve,

$$M = p_0 \oint_L (x\,dx + y\,dy) - \frac{1}{2}\varrho \oint_L v^2\,(x\,dx + y\,dy).$$ (6.292. egyenlet)

A jobb oldali első integrál integrandusza az $\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ függvény teljes differenciálja, amelynek a zárt görbére vett integrálja zérus. Az *xy* síkot ismét komplex síknak tekintve,

$$z = x + iy, \qquad dz = dx + i\,dy, \quad dz^* = dx - i\,dy.$$

Ezek alapján könnyű belátni, hogy

$$z\,dz^* = x\,dx + y\,dy + i\,(y\,dx - x\,dy).$$

Tehát *x dx+y dy*= Re (z *dz*).* Ezt (6.292)-be helyettesítve,

$$M = \mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{2}\varrho \oint_L v^2 z\,dz^*\right\}.$$ (6.293. egyenlet)

Vegyük figyelembe, hogy (6.284) alapján

$$dz^* = e^{-2i\theta}\,dz,$$

másrészt (6.288) szerint az integrálási görbe mentén

$$w'^2 = v^2 e^{-2i\theta},$$

ezért

$$v^2 dz^* = w'^2 dz.$$ (6.294. egyenlet)

így a forgatónyomatékra végül az

$$M = \mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{2}\rho\oint_L w'^2 z\,dz\right\}$$ (6.295. egyenlet)

kifejezést kapjuk. Ezt nevezzük *második Blasius—Csapligin-képletnek*.

Összefoglalva tehát, ha ismerjük a test *xy* síkkal való metszetének határoló görbéjét, és a mentén a *w*(*z*) komplex potenciált, akkor a (6.289), illetve (6.295) képletek alapján kiszámítható a szilárd testre ható eredő nyomóerő és forgatónyomaték.

A Kutta—Zsukovszkij-féle erő

A fenti integrálok kiszámításához feltételezzük, hogy a $w'(z)$ komplex sebesség a szilárd testen kívüli tartományban reguláris (véges, egyértékű, folytonos és differenciálható) függvény. A *z* = 0 kezdőpont legyen az *L* görbe által határolt tartomány belsejében. A komplex függvénytanból ismert tétel alapján *w′*(*z*) előállítható az 1/*z* hatványai szerint haladó sor alakjában:

$$w'z = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$ (6.296. egyenlet)

Az a_0 a *w′*(*z*)-t adja a végtelen távoli pontban:

$$a_0 = w'(\infty) = v_x(\infty) - iv_y(\infty).$$ (6.297. egyenlet)

Az a_1 együttható jelentésének megállapításához számítsuk ki a *w′* komplex sebességnek az *L* zárt görbére vett komplex integrálját:

$$\oint_L w'\,dz = \oint_L (v_x - iv_y)(dx + i\,dy) = \oint_L (v_x\,dx + v_y dy) + \oint_L (v_x\,dy - v_y dx).$$

A jobb oldali első integrál az *L* görbére vett cirkuláció, ugyanis

$$\oint_L (v_x\,dx - v_y dy) = -\oint_L \mathbf{v}\,d\mathbf{s} = \Gamma.$$

A második integrál pedig zérus, mert (6.229) szerint

$$\oint_L \left(v_x\,dy - v_y dx\right) = -\oint_L \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy\right) = -\oint_L d\Psi,$$

és mivel az *L* görbe áramvonal, ezért azon a $\Psi = \text{áll.};$ tehát $d\Psi = 0.$ Marad tehát

$$\oint_L w'dz = \Gamma.$$ (6.298. egyenlet)

A (6.296) sort az integrálba beírva, a reziduumtétel szerint

$$\oint_L w'dz = 2\pi i a_1.$$ (6.299. egyenlet)

E kifejezést a (6.298)-cal összehasonlítva, adódik

$$a_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i}.$$ (6.300. egyenlet)

Az a_1 együttható tehát a cirkuláció $2\pi i$-ed része. Ebből egyúttal az is látszik, hogy a_1 tiszta képzetes szám.

Képezzük most a w'^2-et:

$$w'^2(z) = a_0^2 + \frac{a_0\Gamma}{\pi i z} + \left(2a_0a_2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\right)\frac{1}{z^2} + \dots\ .$$ (6.301. egyenlet)

Ezt a kifejezést kell a (6.289)-be helyettesíteni. Az integrál a reziduumtétel alapján könnyen kiszámítható. Eredményül adódik:

$$\overline{F} = F_x - iF_y = i\varrho a_0\Gamma = i\varrho\Gamma\left(v_x(\infty) - iv_y(\infty)\right) = \varrho\Gamma v_y(\infty) + i\varrho\Gamma v_x(\infty),$$ (6.302. egyenlet)

amiből

$$F_x = \varrho\Gamma v_y(\infty), \qquad F_y = -\varrho\Gamma v_x(\infty).$$ (6.303. egyenlet)

Az áramló folyadék a (6.303) nyomóerőt fejti ki az útjában levő szilárd test egységnyi hosszúságú palástjára. Ezt az erőt nevezzük *Kutta—Zsukovszkij-erőnek.*

Hasonlóképpen számítható ki a forgatónyomaték is. A *z*-vel szorzott (6.301) sort kell a (6.295)-be beírni és integrálni az *L* zárt görbére. Az integrál értéke ugyancsak a reziduumtétel szerint az 1/*z* együtthatójának $2\pi i$-szerese. Eszerint

$$M = \mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{2}\varrho 2\pi i\left(2a_0 a_2 - \frac{\Gamma}{4\pi^2}\right)\right\} = 2\pi\varrho v_x(\infty)\,\mathrm{Im}\,a_2 - 2\pi\varrho v_y(\infty)\,\mathrm{Re}\,a_2. \qquad \text{(6.304. egyenlet)}$$

A (6.303) Kutta—Zsukovszkij-erő és a (6.304) forgatónyomaték fejezik ki azt a hatást, amelyet az áramló ideális folyadék kifejt az áramlási térben levő hengerszerű (tetszőleges keresztmetszetű) szilárd test egységnyi hosszúságú palástjára. Mivel az áramlási kép az *xy* síkkal párhuzamos síkokban ugyanaz, a teljes palástra kifejtett erőt, illetve nyomatékot megkapjuk, ha a fenti kifejezéseket a henger hosszával megszorozzuk.

Tegyük fel, hogy az áramlás a testtől végtelen távol az *x* tengellyel párhuzamos, tehát $v_y(\infty) = 0.$ Ebben az esetben az erőnek csak az *y* komponense különbözik zérustól, ha a Γ cirkuláció nem zérus.

Az eredményünk a mindennapi tapasztalattal nincs összhangban, ugyanis e szerint a folyók áramlása pl. a hídpillérekre mozgásirányú erőt egyáltalán nem fejtene ki. Ha a pillérek körül van cirkuláció, akkor is csak oldalirányú erő hatna rájuk. Másrészt megfigyelhető, hogy a pilléreknél örvények keletkeznek. Ezek az ellentmondások arra mutatnak, hogy az ideális folyadék modellje nem ad megfelelő magyarázatot a testek körüli áramlásra. A valóságos helyzet leírásánál ugyanis a súrlódási erő nem hagyható figyelmen kívül. A fenti eredmények viszont sok esetben megegyeznek a tapasztalattal. Ha pl. áramló vízben forgó hengerre gondolunk, akkor a test felülete és a folyadék között ható súrlódóerő következtében a folyadék a test körül cirkulációs áramlást fog végezni, és az így kialakult áramlásra alkalmazva a fenti eredményeket, azok jó egyezésben vannak a megfigyelésekkel. A cirkuláció létrejöttében tehát fel kell tételezni a súrlódást, és az így kialakult áramlásra már jó közelítéssel használhatók az erőre és forgatónyomatékra vonatkozó fenti képletek.

A (6.303)-nak különösen az aerodinamikában van nagy jelentősége. Ez képezi az elméleti alapját a repüléstechnikának, ahol a repülőgép szárnya jelenti az áramlási térben levő szilárd testet. A fenti eredmények teljes egészében mégsem alkalmazhatók, mert a (6.303) levezetésénél feltettük, hogy a testnek az áramlás irányára merőleges mérete végtelen, a valóságban pedig nem az; de ez a jelenség lényegén nem változtat, csupán módosítja a fenti kifejezést. Ha a gép szárnya körül cirkuláció alakul ki, amely hozzáadódik az egyenletes vízszintes irányú levegőáramláshoz, akkor a (6.303)-nak megfelelő felhajtóerő jön létre, és ez emeli fel a gépet. Természetesen ugyanez érvényes, ha a levegő nyugalomban van és a gép mozog vízszintesen. Annak megértésére, hogyan alakul ki a szárny körül a cirkuláció, az ideális folyadékok elmélete nem ad semmi támpontot. Erre a kérdésre a súrlódó folyadékok elméleti tárgyalásánál, a 60. pontban visszatérünk.

Ideális folyadék áramlása körhenger körül

Az előzőekben kapott általános eredmények alkalmazásaként a körhenger körüli síkbeli áramlással foglalkozunk részletesen. Ennek a feladatnak azért van különös jelentősége, mert a tetszőleges keresztmetszetű test körüli áramlás elméleti leírása is visszavezethető az előbbire.

Feltesszük, hogy a kör keresztmetszetű henger végtelen hosszú — ugyanis ekkor lesz az áramlás síkbeli —, másrészt az áramló folyadék sebessége a hengertől elég távol (elméletileg a végtelenben) a henger tengelyére merőleges. A koordináta-rendszer középpontját a henger tengelyébe helyezzük.

Az áramlási képet leíró komplex potenciálnak olyannak kell lennie, hogy az *R* sugarú henger *xy* síkkal való metszeteként adódó kör kerülete áramvonal legyen és attól végtelen távol a komplex sebesség a $v_0 = v_{0x} - iv_{0y}$ megadott értékkel egyezzék meg. Könnyen belátható, hogy a

$$w(z) = v_0 z + \frac{v_0^* R^2}{z}.$$ (6.305. egyenlet)

függvény eleget tesz ennek a követelménynek. Az ebből adódó komplex sebesség ugyanis

$$w'(z) = v_x - iv_y = v_0 - \frac{v_0^* R^2}{z^2}.$$ (6.306. egyenlet)

Itt v_0^* a v_0 komplex konjugáltját jelenti. A végtelen távoli pontban $(z = \infty)$ ez valóban v_0-val egyenlő, másrészt a (6.305) képzetes részét jelentő Ψ áramlási függvény a kör kerületén zérus, ami éppen azt jelenti, hogy a kör áramvonal. Ugyanis

$$w(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y) =$$
$$= \left(v_{0x}x + v_{0y}y\right)\left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2}\right) + i\left(v_{0x}y - v_{0y}x\right)\left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2}\right),$$ (6.307. egyenlet)

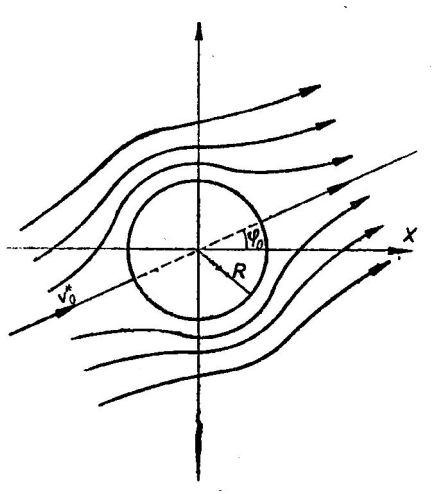
amiből

$$\Phi(x,y) = \left(v_{0x}x + v_{0y}y\right)\left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2}\right),$$ (6.308. egyenlet)

$$\Psi(x,y) = \left(v_{0x}y - v_{0y}x\right)\left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2}\right).$$ (6.309. egyenlet)

A $\Psi(x,y) = 0$ egyenletű áramvonal az $x^2 + y^2 = R^2$ egyenletet kielégítő kör, tehát a henger *xy* síkkal való metszetének határoló görbéje és a $v_{0x}y - v_{0y}x = 0$ egyenes.

81. ábra -



Utóbbit $y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x$ alakba írva, látszik, hogy ez a végtelen távoli sebességgel párhuzamos. A $\Psi(x,y) = \text{áll.}$ egyenletű görbék a $|z|>R$ tartományban adják az áramvonalakat (1. a *81. ábrát).*

A sebességtér v_x, v_y komponenseit a komplex sebesség (6.306) kifejezéséből kapjuk meg a valós és képzetes rész szétválasztásával. Célszerű itt a komplex számok trigonometrikus alakját használni. Eszerint

$$v_0 = |v_0| e^{-i\varphi_0} \quad \text{és} \quad z = re^{i\varphi}. \quad \text{(6.310. egyenlet)}$$

Ezeket a (6.306)-ba beírva, egyszerű számítás után adódik:

$$v_x = |v_0| \left\{ \cos\varphi_0 \left[1 - \frac{R^2}{r^2} \cos 2(\varphi_0 - \varphi) \right] - \frac{R^2}{r^2} \sin\varphi_0 \sin 2(\varphi_0 - \varphi) \right\},$$

$$v_y = |v_0| \left\{ \sin\varphi_0 \left[1 - \frac{R^2}{r^2} \cos 2(\varphi_0 - \varphi) \right] + \frac{R^2}{r^2} \cos\varphi_0 \sin 2(\varphi_0 - \varphi) \right\}. \quad \text{(6.311. egyenlet)}$$

A sebességnek a kör mentén felvett értékei

$$v_x(R) = |v_0|\{\cos\varphi_0\left[1-\cos 2(\varphi_0-\varphi)\right]-\sin\varphi_0\sin 2(\varphi_0-\varphi)\},$$
$$v_y(R) = |v_0|\{\sin\varphi_0\left[1-\cos 2(\varphi_0-\varphi)\right]+\sin\varphi_0\sin 2(\varphi_0-\varphi)\}. \quad \text{(6.312. egyenlet)}$$

amiből

$$|v| = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = 2|v_0|\sin(\varphi_0-\varphi). \quad \text{(6.313. egyenlet)}$$

Ebből látszik, hogy a kör kerületének két pontjában, a $\varphi=\varphi_0$ és a $\varphi=\varphi_0+\pi$ szögeknél a sebesség zérussá válik. Ezeket a pontokat *torlódási pontoknak* nevezzük.

A nyomás eloszlását az áramlási térben a Bernoulli-egyenletből határozhatjuk meg. Ha külső erőt nem veszünk tekintetbe, akkor

$$p = p_0+\frac{1}{2}\varrho\left(|v_0|^2-|v|^2\right) = p_0+\frac{1}{2}\varrho|v_0|^2\left(1-\frac{v_x^2+v_y^2}{|v_0|^2}\right). \quad \text{(6.314. egyenlet)}$$

Itt p_0 a végtelen távoli pontban $(r=\infty)$ érvényes nyomást jelenti. A v_x, v_y (6.311) szerinti kifejezéseit ide beírva, megkapjuk a p nyomást a hely függvényében.

A továbbiakban csak a henger felületén, tehát a kör mentén vizsgáljuk a nyomáseloszlást. A (6.313) figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$p = p_0+\frac{1}{2}\varrho|v_0|^2\left[1-4\sin^2(\varphi_0-\varphi)\right]. \quad \text{(6.315. egyenlet)}$$

Eszerint a henger felületére vonatkozó nyomáseloszlás független annak sugarától, és a torlódási pontokban maximális értéket vesz fel. E kifejezésnek a tapasztalattal való összehasonlítása azt mutatja, hogy az áramlással szembeni oldalon jó az egyezés az elmélet és a tapasztalat között, míg a másik oldalon elég nagy az eltérés. Ez azt jelenti, hogy a kör nem jó áramvonalidom. A gyakorlat számára fontos annak vizsgálata, hogy milyen keresztmetszetű testek illeszkednek legjobban az áramlási képhez. Más szóval, milyen profiloknál legjobb az egyezés az elméleti és a tapasztalati nyomáseloszlás között.

A körhenger menti nyomáseloszlás szimmetrikus az áramlás irányára, ezért a nyomástól származó erők eredője zérus. Tehát, a körhengerre az áramló ideális folyadék nem fejt ki erőt.

Módosítsuk az áramlást azáltal, hogy az eddigi transzlációs áramláshoz vegyük hozzá a 46.1 *f)* pontban tárgyalt cirkulációs áramlást. A komplex potenciál legyen

$$w(z) = v_0 z + \frac{v_0^* R^2}{z} - i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z.$$ (6.316. egyenlet)

Az előzőekből következik, hogy nem jelent megszorítást, ha a koordináta-rendszer tengelyeit úgy választjuk, hogy a sebesség iránya a végtelenben *x* irányú legyen. Ez azt jelenti, hogy a fenti képletekben $\varphi_0 = 0, \text{ és } v_{0y} = 0.$ Ebben az esetben v_0 pozitív valós szám. A komplex potenciál tehát

$$w(z) = v_0\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z.$$ (6.317. egyenlet)

A sebességpotenciál és az áramlási függvény a (6.317) valós, illetve képzetes része:

$$\Phi(r,\varphi) = v_0 r\cos\varphi\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi,$$ (6.318. egyenlet)

$$\Psi(r,\varphi) = v_0 r\sin\varphi\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r.$$ (6.319. egyenlet)

A sebességtér v_x, v_y komponensére a $w' = v_x - iv_y$ alapján adódik:

$$w' = v_0\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z} =$$
$$= v_0\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\cos 2\varphi\right) - \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{r}\sin\varphi - i\left(-v_0\frac{R^2}{r^2}\sin 2\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi r}\cos\varphi\right).$$

Tehát

$$v_x = v_0\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\cos 2\varphi\right) - \frac{\Gamma}{2\pi r}\sin\varphi,$$ (6.320. egyenlet)

$$v_y = -v_0\frac{R^2}{r^2}\sin 2\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi r}\cos\varphi.$$ (6.321. egyenlet)

Az *R* sugarú kör most is áramvonal, másrészt a végtelenben a sebesség v_0. A (6.317) komplex potenciál tehát megfelel a bevezetőben tett határfeltételeknek.

A torlódási pontokat a *w'* komplex sebesség zérushelyei adják. Ezek a következők:

$$z_{1,2} = \frac{i\Gamma}{4\pi v_0} \pm \sqrt{R^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_0^2}}.$$ (6.322. egyenlet)

Az áramlási képjellege ennek megfelelően attól függ, hogy a

$$|\Gamma| \lessgtr 4\pi R v_0.$$ (6.323. egyenlet)

a. Tegyük fel először, hogy $\Gamma > 4\pi R v_0$. A 46.1 *f)* pontban láttuk, hogy $\Gamma / 2\pi R$ a cirkulációs áramlás sebessége a henger felülete mentén. A $2v_0$ pedig (6.313) szerint a cirkulációmentes áramlás maximális sebessége ugyancsak a kör mentén. Az egyen-lőtlenség tehát azt jelenti, hogy a cirkulációs áramlás a domináló ebben az esetben. Most mind a két z_1, z_2 gyök tiszta képzetes, ugyanis

$$z_{1,2} = i\left(\frac{\Gamma}{4\pi v_0} \pm \sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_0^2} - R^2}\right),$$ (6.324. egyenlet)

és

$$|z_1| = \frac{\Gamma}{4\pi v_0} + \sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_0^2} - R^2} > R,$$ (6.325. egyenlet)

$$|z_2| = \frac{R^2}{|z_1|} < R.$$ (6.326. egyenlet)

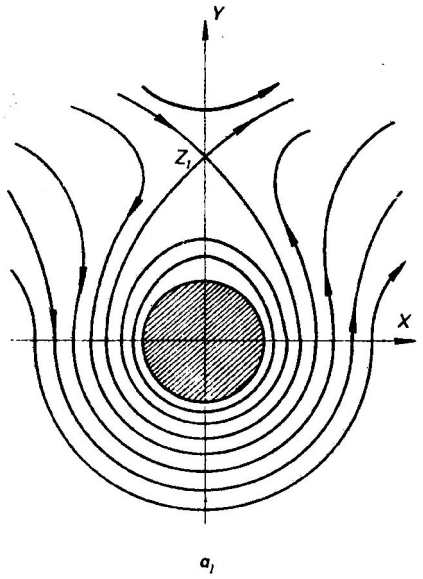
Az z_1 gyök a hengeren kívül, a képzetes tengelyen van. Ha $\Gamma > 0$, vagyis a folyadék áramlása az óramutató járásával ellentétes irányú, akkor z_1 a pozitív *y* tengelyen fekszik. Mivel $|z_2|<R$, a második torlódási pont a hengeren belül lenne, ott pedig nincs folyadékáramlás, ezért ennek nincs fizikai értelme. Azok a folyadékrészek, amelyek egy pillanatban a képzetes tengely z_1 pontja és a henger között vannak, zárt pályán mozognak *(82. a ábra).*

b) Vegyük most azt az esetet, amikor $|\Gamma| = 4\pi R v_0$. Ekkor a cirkulációs áramlás kör menti sebessége megegyezik a cirkulációmentes áramlás maximális sebességével. Ilyenkor a két torlódási pont egybeesik *(82. b ábra)*.

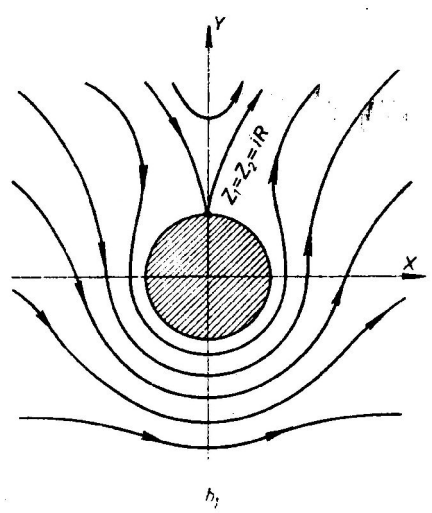
$z_1 = z_2 = \pm iR,$ (6.327. egyenlet)

attól függően, hogy $\Gamma = \pm 4\pi R v_0$.

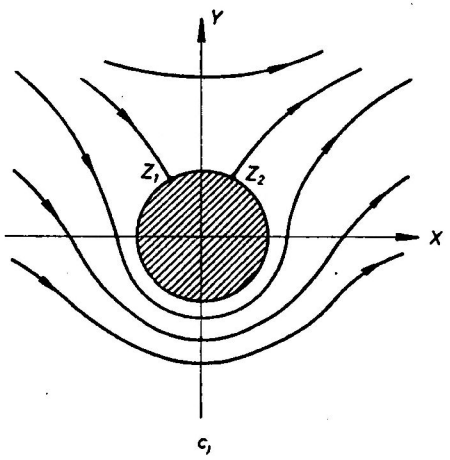
82a. ábra -



82b. ábra -



82c. ábra -



c) Végül a $|\Gamma| < 4\pi R v_0$ esetet tekintve, a két torlódási pont rajta van a körön, ugyanis $|z_1| = |z_2| = R,$ a valós részük nagysága megegyezik, de előjelük ellentétes. A torlódási pontok tehát a képzetes tengelyre szimmetrikusan helyezkednek el a kör kerületén *(82. c ábra)*. Ebben az esetben a henger körül zárt áramvonalak nem alakulnak ki.

A nyomáseloszlást (6.314)-ből kapjuk meg, ha abba a (6.320), (6.321) sebességkomponenseket behelyettesítjük. A henger felületén ($r = R$)

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\varrho v_0^2 (2\cos 2\varphi - 1) - \frac{1}{2}\varrho\left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2} - 2\frac{\Gamma v_0}{\pi R}\sin\varphi\right).$$ (6.328. egyenlet)

Most a nyomáseloszlás nem szimmetrikus az *x* tengelyre (pontosabban szólva, az *xz* síkra), ezért a hengerre ható nyomóerő eredője nem zérus.

A henger egységnyi hosszúságú szakaszára ható Kutta—Zsukovszkij-erő a (6.303) szerint (mivel $v_{0y} = 0$)

$$F_x = 0, \qquad F_y = -\varrho\Gamma v_0.$$ (6.329. egyenlet)

Ha a Γ cirkuláció pozitív, tehát a henger körül az óramutató járásával ellentétes irányú a cirkulációs áramlás, akkor a hatóerő az *y* tengellyel ellentétes irányú. A henger palástjának azon az oldalán, ahol $y < 0,$ a cirkulációs és cirkulációmentes áramlás sebessége összeadódik, a másik oldalon pedig kivonódik. Így az áramlás sebessége az alsó részen nagyobb, mint a felsőn. Ennek megfelelően a (6.328) nyomás az alsó oldalon kisebb, és ezért mutat az eredő erő az *y* tengellyel ellentétes irányban. Ha $\Gamma < 0,$ akkor az erő *y* irányú, és az áramvonalak a henger másik oldalán sűrűsödnek.

Természetesen — miként ezt már ez előző pontban említettük — a cirkuláció létrehozásához tekintetbe kell vennünk a henger felülete és a folyadék között ható súrlódási erőt. A cirkulációt adottnak véve, a (6.329) a tapasztalattal jó egyezésben adja meg a hengerre ható erőt. Itt csupán megemlítjük, hogy a levegőben pörögve repülő labda a fenti erőhatás miatt tér el oldalirányban, és a labdarúgók sorfalát kikerülve, a kapus meglepetésére bejuthat a kapuba.

Tetszőleges keresztmetszetű henger körüli áramlás

Feltesszük, hogy az áramló folyadék útjában olyan végtelen hosszú henger van, amelynek az *xy* síkkal való metszete tetszőleges alakú görbe. A kialakuló áramlási kép a komplex függvénytanból ismert konform leképezéssel meghatározható a körhenger körüli áramlásból. A módszer lényege a következő. Az *xy* síkot $z = x + iy$ komplex síknak tekintjük, a tetszőleges hengerkeresztmetszet határoló görbéjét *C*-vel, a *z* síknak *C*-n kívüli tartományát *D*-vel jelöljük. Gondoljunk el egy másik $\zeta = \xi + i\eta$ komplex síkot, amelynek kezdőpontja mint középpont köré *R* sugarú *K* kört rajzolunk. A ζ síknak *K*-n kívüli részét Δ-val jelöljük. Feltesszük, hogy ismerjük azt a $\zeta = h(z)$ függvényt, amely a *D* tartományt kölcsönösen és egyértelműen

leképezi a ζ sík Δ tartományára. A leképezés akkor lesz kölcsönösen egyértelmű, ha a $z=\infty$-nek a leképezésben a $\zeta=\infty$ felel meg, továbbá ha a végtelenben választott tetszőleges irány a leképezés során változatlan marad. Ennek megfelelően a $\zeta=h(z)$ leképező függvény ismeretében a *K* kör körüli áramlás képéből tetszőleges *C* görbe körül kialakuló áramlás meghatározható konform leképezéssel. A két áramlásnak az a közös vonása, hogy a végtelenben a két áramlás sebessége egy irányú.

A kör keresztmetszetű henger körüli ismert áramlás komplex potenciálját $F(\zeta)$-val jelölve, a (6.317) szerint

$$F(\zeta)=v_0\left(\zeta+\frac{R^2}{\zeta}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta.$$ (6.330. egyenlet)

Ennek az áramlásnak komplex sebessége

$$F'(\zeta)=v_0\left(1-\frac{R^2}{\zeta^2}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{\zeta}.$$ (6.331. egyenlet)

A $\zeta=h(z)$ függvényt behelyettesítve,

$$f(z)=F(\zeta)=F\left(h(z)\right).$$ (6.332. egyenlet)

Ez az *f*(*z*) lesz a *C* körüli áramlás komplex potenciálja. Ennek komplex sebessége

$$f'(z)=v_x-iv_y=\frac{dF}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz}.$$ (6.333. egyenlet)

A kölcsönösen egyértelmű leképezésnek az a feltétele, hogy a $z=\infty$-nek a $\zeta=\infty$ feleljen meg, továbbá $F'(\infty)=f'(\infty)$ teljesüljön. Ez a követelmény azt jelenti, hogy a $z=\infty$-ben legyen

$$\frac{d\zeta}{dz}=1.$$ (6.334. egyenlet)

E feltételeket teljesíti a

$$Z = \zeta + \frac{1}{\zeta}$$ (6.335. egyenlet)

függvény. Ennek inverze

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 4}\right).$$ (6.336. egyenlet)

A (6.335) transzformációval a ζ sík *K* körét a *z* sík különféle görbéinek sokaságába tudjuk leképezni. Pontosabban szólva, a *K*-n kívüli Δ tartományt a különféle *C*-n kívüli *D* tartományokra. Nézzünk erre néhány példát!

a) A (6.335) transzformáció a $\zeta = 0$ középpontú egységnyi sugarú $\zeta = e^{i\varphi}$ kört átviszi a

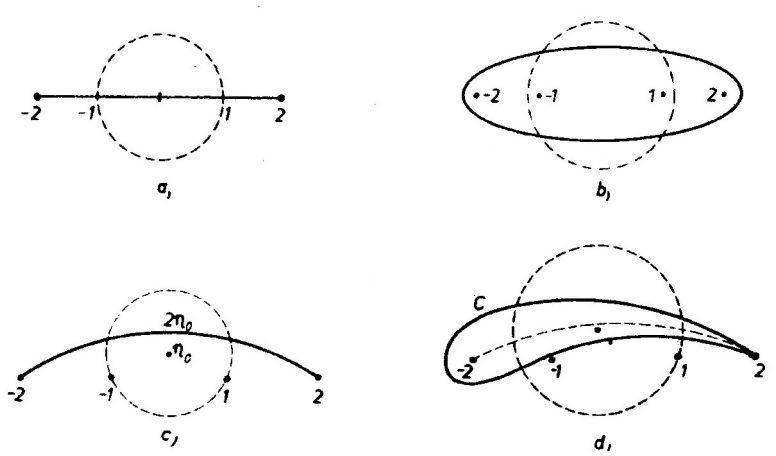
$$z = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi$$ (6.337. egyenlet)

görbébe. Ha a φ változik 0-tól 2π-ig, a ζ pont végigfut a ζ síkbeli egységnyi sugarú körön, a *z* pont pedig a valós tengelyen mozog a + 2-től -2-ig és vissza. A leképezés tehát az egységkört a (-2; 2) szakaszba viszi át *(83. a ábra).*

b) A $\zeta = Re^{i\varphi}$ egyenletű *R* sugarú kör ellipszisbe megy át. *(83. b ábra).* Ennek egyenlete

$$z = Re^{i\varphi} + \frac{1}{R}e^{-i\varphi} = \left(R + \frac{1}{R}\right)\cos\varphi + i\left(R - \frac{1}{R}\right)\sin\varphi$$ (6.338. egyenlet)

83. ábra -



c) Tekintsünk egy olyan kört, amely átmegy a ξ tengely -1 és +1 pontján, középpontja pedig az η tengelyen van η_0 magasságban. Ennek egyenlete

$\zeta = i\eta_0 + e^{i\varphi}\sqrt{1+\eta_0^2}$. (6.339. egyenlet)

Belátható, hogy a (6.335) transzformáció ezt a

$$z = i\left(\eta_0 - \frac{1}{\eta_0}\right) + \left(\eta_0 + \frac{1}{\eta_0}\right)e^{i\alpha}$$ (6.340. egyenlet)

egyenletbe viszi át. Ez olyan körívnek az egyenlete, amelynek a két végpontja -2 és +2 pontokban van, a magassága pedig $2\eta_0$ *(83. c ábra).*

d) Nézzük most azt a K_1 kört, amely a (6.339) egyenletű kört a +1 pontban kívülről érinti. Ezt a (6.335) leképezés olyan szárny alakú *C* görbébe viszi át, amelynek a +2 pontban csúcsa van, és itt érinti, másutt pedig közrefogja az előbbi körívet *(83. d ábra).*

Az *R* sugarú K_1 kör középpontja a ζ sík $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ pontjában van, ezért ennek egyenlete

$\zeta = \zeta_0 + Re^{i\varphi}$. (6.341. egyenlet)

Ebből a leképezendő, origó középpontú, *R* sugarú kör $\zeta = Re^{i\varphi}$ egyenlete a $\zeta \to \zeta + \zeta_0$ helyettesítéssel adódik. Ennélfogva a szárny alakú *C* görbét az origó körüli *R* sugarú körből a

$$z = \zeta + \zeta_0 + \frac{1}{\zeta + \zeta_0}$$ (6.342. egyenlet)

leképezéssel kapjuk. Az így adódó *C* zárt görbét nevezzük *Zsukovszkij-profilnak.* Ennek a repüléstechnikai alkalmazásokban van fontos szerepe.

Határozzuk meg a Zsukovszkij-profil körüli áramlás komplex potenciálját. Ezt a (6.332)-ből lehet kiszámítani a következőképpen. Vegyük a (6.342) transzformáció inverzét:

$$\zeta = -\zeta_0 + \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 4}\right).$$ (6.343. egyenlet)

Ezt beírjuk a körhenger körüli áramlás komplex potenciáljának (6.330) kifejezésébe, és így a Zsukovszkij-profil körüli áramlás komplex potenciálját kapjuk:

$$w(z) = f(z) = v_0\left(\frac{z}{2} - \zeta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - 4} + \frac{R^2}{\frac{z}{2} - \zeta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - 4}}\right) +$$
$$+ \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left(\frac{z}{2}\zeta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - 4}\right).$$ (6.344. egyenlet)

Ebből a szokásos módon számítható ki a sebességtér az

$$f'(z) = v_x - iv_y$$

képlet szerint. Ha a sebességkomponensek ismertek, akkor a Bernoulli-egyenlet alapján határozható meg a nyomáseloszlás, a Blasius—Csapligin-képletekből pedig a szárnyfelületre ható Kutta—Zsukovszkij-erő és az eredő forgatónyomaték. Ezek kiszámításától itt eltekintünk, és gyakorlásként az olvasóra bízzuk.

Ideális folyadék hullámmozgása. Felületi vízhullámok

Gondoljunk ideális, összenyomhatatlan homogén folyadékra, amelyre a nehézségi erő hat. Egyensúlyi állapotban a folyadék szabad felszíne a nehézségi erőtérre merőleges és közelítőleg síknak tekinthető. Koordináta-rendszerünket válasszuk úgy, hogy az *xy* sík legyen a nyugvó folyadék szabad felszíne, a *z* tengely pedig erre merőlegesen lefelé mutasson. Ha valamilyen külső hatásra az egyensúly egy helyen megbomlik (pl. követ

dobunk a vízbe), a folyadék mozgásba jön, és ez az állapotváltozás véges sebességgel terjed a folyadékban. A folyadék fizikai állapotának ezt a terjedését nevezzük hullámnak. A tévedések elkerülése végett megjegyezzük, hogy itt nem a folyadékrészek hullámszerű áramlásáról van szó, hanem a folyadék állapotának változása terjed hullámként véges sebességgel.

Feltesszük, hogy a folyadék *x* és *y* irányú mérete végtelen nagy, de a mélysége véges. Utóbbit *h*-val jelöljük, és mindenütt ugyanakkorának tekintjük. Legyen továbbá a folyadék mozgása örvénymentes. Ekkor a **v** sebesség a Φ sebességpotenciálból származtatható a

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi$$ (6.345. egyenlet)

összefüggés szerint. A kontinuitási egyenletből következik, hogy Φ a

$$\Delta \Phi = 0$$ (6.346. egyenlet)

Laplace-egyenletet elégíti ki.

Mivel a hullámmozgás nem stacionárius folyamat, a Φ sebességpotenciál az időtől is függ. Ezért most figyelembe vesszük a (6.101) Bernoulli-egyenletet is, de feltesszük, hogy a folyadékrészek sebessége olyan kicsi, hogy a sebesség négyzete elhagyható. Ez a feltevés azzal egyenértékű, hogy a hullám amplitúdója a hullámhosszhoz képest kicsi. A Bernoulli-egyenlet ebben az esetben a következő alakba írható:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U + \frac{p}{\varrho} = \text{áll.}$$ (6.347. egyenlet)

A nehézségi erőtér $U = -gz$ potenciálját ide beírva,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - gz + \frac{p}{\varrho} = \text{áll.}$$ (6.348. egyenlet)

A hullámmozgás következtében a folyadék felszíne nem marad sík, az attól való eltérést a

$$z = \zeta(x, y, t)$$ (6.349. egyenlet)

függvénnyel vesszük figyelembe. A (6.349) tehát a mozgásban levő szabad folyadékfelület egyenlete. A felület menti nyomást p_0-val jelölve, a (6.348)-ból adódik, hogy

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{z=\zeta} - g\zeta + \frac{p_0}{\varrho} = \text{áll.}$$ (6.350. egyenlet)

Differenciáljuk ezt az egyenletet az idő szerint parciálisan:

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)_{z=\zeta} - g + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0.$$ (6.351. egyenlet)

A feltevésünk szerint kis amplitúdójú („lapos") hullámokról van szó, ezért a $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ közelítőleg a felület normális irányú sebességének tekinthető. Utóbbi megegyezik az éppen ott levő folyadékrészecske sebességének *z* komponensével, amely $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$. A (6.351) egyenlet ennek alapján így írható:

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)_{z=\zeta} - g\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=\zeta} = 0.$$ (6.352. egyenlet)

A sebességpotenciált tehát a (6.346) és (6.352) egyenletek határozzák meg. Ezekhez járulnak a határfeltételek. Mivel a folyadék feltevésünk szerint az *x* és *y* irányban végtelen, csak az edény (meder) aljára kell határfeltételt megadnunk. Ha az edény alját szilárd felületnek tekintjük, akkor ott a sebesség normális irányú komponensének zérusnak kell lennie. Tehát

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=h} = 0.$$ (6.353. egyenlet)

A következőkben a fenti egyenleteknek periodikus síkhullám-megoldását tanulmányozzuk. A *z* irány kitüntetett szerepét figyelembe véve, a sebességpotenciált

$$\Phi(x, y, z) = \psi(x, y)\, \chi(z) e^{-i\omega t}$$ (6.354. egyenlet)

alakban vesszük fel, és megvizsgáljuk, hogy ez milyen feltételek mellett elégíti ki a (6.346) és (6.352) egyenleteket a (6.353) határfeltétellel. Írjuk be (6.354)-et a (6.346) Laplace-egyenletbe és követeljük meg, hogy legyen annak megoldása

$$\left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)\chi(z) + \psi \frac{d^2 \chi}{dz^2}\right] e^{-i\omega t} = 0.$$ (6.355. egyenlet)

Az egyenletet $\psi \chi e^{-i\omega t}$-vel elosztva,

$$\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)=-\frac{1}{\chi}\frac{d^2\chi}{dz^2}.$$ (6.356. egyenlet)

A bal oldal csak az *x*-től, *y*-tól, a jobb oldal csak a *z*-től függ. Az egyenlőség akkor áll fenn a független változók minden értékére, ha a két oldal ugyanazzal az állandóval egyenlő. Jelöljük ezt $-k^2$-tel. Így a ψ-t, illetve a χ-t meghatározó egyenleteket kapjuk:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+k^2\psi=0,$$ (6.357. egyenlet)

$$\frac{d^2\chi}{dz^2}-k^2\chi=0.$$ (6.358. egyenlet)

Foglalkozzunk először az utóbbi egyenlettel. Ennek általános megoldása

$$\chi(z)=C_1e^{kz}+C_2e^{-kz},$$ (6.359. egyenlet)

ahol a C_1 és C_2 tetszőleges állandók.

A ψ -re vonatkozó (6.357) egyenlet megoldásánál feltesszük, hogy a síkhullám a pozitív *x* tengely irányában terjed. Ebben az esetben a ψ csak az *x*-től függ. A megoldandó egyenlet tehát

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\psi=0.$$ (6.360. egyenlet)

Ennek két partikuláris megoldása van: az e^{ikx} és az e^{-ikx}. Ezek közül az első felel meg a pozitív *x* tengely irányában haladó síkhullámnak, ugyanis ekkor a Φ-ben az $e^{i(kx-\omega t)}$ tényező jelenik meg, és a korábbi tanulmányokból (30. pont) már ismerjük, hogy ez éppen az *x* irányban terjedő hullámot ír le. Az e^{-ikx} megoldás ellentétes irányban terjedő hullámot jelent. A Laplace-egyenletet kielégítő síkhullám sebességpotenciálja (6.354) szerint tehát

$$\Phi=\left(C_1e^{kz}+C_2e^{-kz}\right)e^{i(kx-\omega t)}.$$ (6.361. egyenlet)

Ebből a kifejezésből látszik, hogy a *k* állandó a hullámszámot jelenti, amely a λ hullámhosszal, az ω körfrekvenciával és a hullám *c* terjedési sebességével (5.183) és (5.186) szerint a

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$ (6.362. egyenlet)

kapcsolatban van.

Az integrálási állandókat a határfeltételekből határozzuk meg. Vegyük először az edény aljára vonatkozó (6.353) feltételt. Ebből adódik, hogy

$$C_1 e^{kh} = C_2 e^{-kh}.$$ (6.363. egyenlet)

Vezessük be az

$$\frac{1}{2}C = C_1 e^{kh} = C_2 e^{-kh}$$ (6.364. egyenlet)

jelölést, amiből

$$C_1 = \frac{1}{2}Ce^{-kh} \qquad \text{és} \qquad C_2 = \frac{1}{2}Ce^{kh}.$$ (6.365. egyenlet)

Ezeket a (6.361)-be behelyettesítve,

$$\Phi(x,z,t) = C\frac{e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}}{2}e^{i(kx-\omega t)} = C\,\mathrm{ch}\,k(h-z)e^{i(kx-\omega t)}.$$ (6.366. egyenlet)

Vegyük most figyelembe a folyadék szabad felszínére vonatkozó (6.352) egyenletet. Ez kapcsolatot teremt a *k* hullámszám és az ω körfrekvencia között:

$$-\omega^2 \mathrm{ch}\,k(h-\zeta) + gk\,\mathrm{sh}\,k(h-\zeta) = 0.$$ (6.367. egyenlet)

Mivel kis amplitúdójú hullámokról van szó, nem követünk el nagy hibát, ha ebben az egyenletben ζ helyére a nyugvó folyadékfelszín $\zeta = 0$ egyenletét írjuk. Tehát

$$-\omega^2 \mathrm{ch}\,kh + gk\,\mathrm{sh}\,kh = 0.$$ (6.368. egyenlet)

Ebből adódik a keresett összefüggés:

$\omega = \sqrt{gk \operatorname{th} kh}.$ (6.369. egyenlet)

A hullám *c* fázissebességét (6.362) alapján kapjuk:

$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th} kh}.$ (6.370. egyenlet)

Eszerint a fázissebesség függ a hullámhossztól, tehát az optikából ismert diszperzió jelensége lép fel. Másrészt *c* függ a folyadék mélységétől is. A (6.370) kifejezés különösen egyszerűsödik, ha a *h* mélység a hullámhosszhoz képest nagyon nagy vagy nagyon kicsi. Ugyanis nagyon mély folyadékban ($h \gg \lambda$)

$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}},$ (6.371. egyenlet)

ha viszont $h << \lambda$,akkor

$c = \sqrt{gh}.$ (6.372. egyenlet)

A sebességpotenciál ismeretében (6.350)-ből meghatározható a közvetlenül megfigyelhető szabad felület mozgása. A (6.350)-ben a p_0 / ϱ állandó a jobb oldallal együtt zérusnak vehető, ha Φ-nek csak a hullámmozgástól származó részét vizsgáljuk. Ugyanis a sebesség és a Φ közötti (6.345) kapcsolat csak egy állandó erejéig határozza meg a Φ-t, ezért ez az állandó a Φ-ből leválasztható. Ha csak a hullámmozgást vizsgáljuk, akkor ennek úgy sincs szerepe. Másrészt a Φ-t komplex alakban írtuk fel, ezért most annak valós része veendő. A felület egyenlete tehát

$\zeta = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \Phi.$ (6.373. egyenlet)

A (6.350) szerint itt Φ-ben a $z = \zeta$ értendő, de nem követünk el nagy hibát, ha $z = 0$-t helyettesítünk be, és így a szabad folyadékfelszínre közelítőleg kapjuk, hogy

$\zeta(x, t) = \frac{C\omega}{g} \operatorname{ch} kh \sin(kx - \omega t).$ (6.374. egyenlet)

A folyadék felületének az *xz* síkkal való metszete rögzített időpontban szinuszgörbe szerint változik az *x* koordinátával, és ez az állapot az *x* tengely pozitív irányában a (6.370) sebességgel terjed. A felület hullámzása tehát az alkalmazott közelítésben periodikus függvénnyel írható le.

Határozzuk meg ezután a hullámmozgással kapcsolatos folyadékáramlás áramvonalait, majd a folyadékrészecskék pályáját. Az áramvonalak egyenlete

$$\Psi(x, z) = \text{áll.},$$

ahol Ψ az áramlási függvény. Utóbbit a (6.225) Cauchy—Riemann-relációk alapján kiszámíthatjuk a Φ sebességpotenciál valós részéből. Az ottani *y* koordináta helyett most a *z*-t használtuk, ezért

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} \Phi \quad \text{(6.375. egyenlet)}$$

A (6.366) figyelembevételével ebből az állandó együttható elhagyásával adódik, hogy

$$\Psi(x, z) = \operatorname{sh} k(h - z) \sin(kx - \omega t) = \text{áll.} \quad \text{(6.376. egyenlet)}$$

Eszerint az áramvonalak képe is síkhullámként mozog az *x* irányban *c* sebességgel. Vegyük az áramvonalaknak rögzített időpontban, pl. *t* = 0-kor vett képét:

$$\Psi_0 = \operatorname{sh} k(h - z) \sin kx = \text{áll.} \quad \text{(6.377. egyenlet)}$$

A felület egyenlete ugyanebben az időpontban (6.374) szerint

$$\zeta_0 = \frac{C\omega}{g} \operatorname{ch} kh \sin kx. \quad \text{(6.378. egyenlet)}$$

A (6.377)-ből látszik, hogy *z*=*h*-nál $\Psi_0 = 0,$ tehát az edény alja áramvonal. A Ψ_0 és ζ_0 egyszerre zérus az $x = 0,\ \pm\lambda/2, \pm 2\lambda/2, \ldots$ helyeken. Az áramvonalkép $\lambda/2$ szélességű, téglalap alakú tartományokra osztható, amelyeken belül mennek az áramlási görbék úgy, hogy a $\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} = 0,$ vagyis a cos *kx*=0 helyeken vízszintes az érintőjük. A (6.378)-cal összehasonlítva, látszik, hogy ezek a helyek éppen ott vannak, ahol a felületen hullámhegy vagy hullámvölgy van.

Az egyes folyadékrészek pályái, az ún. pályavonalak nem azonosak az áramvonalakkal, mert az áramlás nem stacionárius. Most meghatározzuk a pályavonalak egyenletét. Gondoljunk el egy folyadékrészecskét, amelynek koordinátái *x* és *z*. Ezek a részecske mozgásával változnak az időben, ezért az idő függvényei: *x*(*t*), *z*(*t*). A részecske sebességének *x*, illetve *z* komponensét a sebességpotenciál valós részéből számíthatjuk ki:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re}\Phi = -Ck\operatorname{ch}k(h-z)\sin(kx-\omega t),$$ (6.379. egyenlet)

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial}{\partial z}\operatorname{Re}\Phi = -Ck\operatorname{sh}k(h-z)\cos(kx-\omega t).$$ (6.380. egyenlet)

Ezek idő szerinti integrálásával kapjuk meg a folyadékrészecske helykoordinátáit az idő függvényében, tehát a pálya paraméteres egyenletrendszerét. Az a matematikai probléma merül fel azonban, hogy a jobb oldalon szereplő *x* és *z* is függ az időtől, és emiatt az integrálást nem lehet egyszerűen elvégezni. Ezért a következő közelítést alkalmazzuk. Mivel kis amplitúdójú hullámmozgásra korlátozzuk vizsgálatainkat, az *x* és *z* változása nem nagy; és így nem követünk el jelentős hibát, ha a jobb oldalon az *x*-et és *z*-t az egyensúlyi helyzetnek megfelelő állandóknak tekintjük. Ezeket x_0-, illetve z_0-val jelölve, ebben a közelítésben a pálya paraméteres egyenletrendszerére (6.379)-ből és (6.380)-ból adódik, hogy

$$x(t) = x_0 - \frac{Ck}{\omega}\operatorname{ch}k(h-z_0)\cos(kx_0-\omega t) = -a\cos(kx_0-\omega t),$$ (6.381. egyenlet)

$$z(t) = z_0 + \frac{Ck}{\omega}\operatorname{sh}k(h-z_0)\sin(kx_0-\omega t) = b\sin(kx_0-\omega t),$$ (6.382. egyenlet)

ahol

$$a = \frac{Ck}{\omega}\operatorname{ch}k(h-z_0),$$ (6.383. egyenlet)

$$b = \frac{Ck}{\omega}\operatorname{sh}k(h-z_0).$$ (6.384. egyenlet)

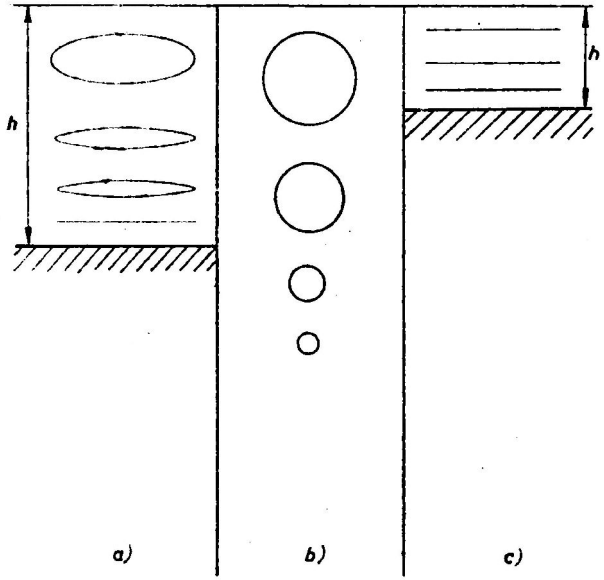
A *t* paramétert kiküszöbölve, a folyadék részecske pályájára az

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(z-z_0)^2}{b^2} = 1$$ (6.385. egyenlet)

egyenletet kapjuk. Ez egy *a,* illetve *b* féltengelyű ellipszisnek az egyenlete. A folyadékrészecskék a hullámmozgás során tehát ellipszispályán mozognak. Az ellipszis tengelyeinek aránya (6.383) és (6.384) alapján

$$\frac{b}{a} = \operatorname{th}k(h-z_0),$$ (6.386. egyenlet)

84. ábra -



A folyadékrészecskék pályái: a) mérsékelten mély vízben; b) végtelen mély vízben; c) sekély vízben]

Érdekes, hogy az ellipszis alakja függ a folyadék *h* mélységétől. A folyadék szabad felszínén $(z_0 = 0)\ b/a = \mathrm{th}(kh)$, míg az edény alján $(z_0 = h)\ b/a = 0.$ Nagyon mély folyadék esetén, tehát a $h \to \infty$ határesetben

$b/a = \mathrm{th}(kh) \to 1,$ (6.387. egyenlet)

vagyis az ellipszisek körök lesznek. Számítsuk ki a kör sugarát:

$$a = \frac{Ck}{\omega}\,\mathrm{ch}\,k(h - z_0) = \frac{k}{\omega}C_2 e^{-kh}\left(e^{k(h-z_0)} + e^{-k(h-z_0)}\right) =$$

$$= \frac{k}{\omega}C_2\left(e^{-kz_0} + e^{-k(2h-z_0)}\right) \to \frac{k}{\omega}C_2 e^{-kz_0} = R,$$ (6.388a. egyenlet)

$$b = \frac{Ck}{\omega}\operatorname{sh} k(h - z_0) = \frac{k}{\omega} C_2 e^{-kh}\left(e^{k(h-z_0)} - e^{-k(h-z_0)}\right) =$$
$$= \frac{k}{\omega} C_2 \left(e^{-kz_0} - e^{-k(2h-z_0)}\right) \to \frac{k}{\omega} C_2 e^{-kz_0} = R.$$

(6.388b. egyenlet)

Az R sugár a z_0 mélységgel exponenciálisan csökken. Igen nagy z_0 értékre a kör egy pontra zsugorodik össze.

A másik határesetben, amikor a folyadék nagyon sekély $(kh \to 0)$, az ellipszis vízszintes egyenesbe megy át.

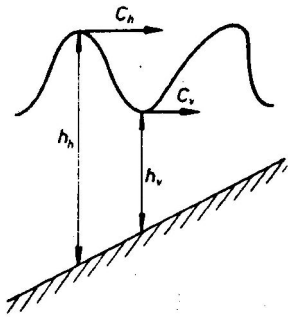
A fenti képletekből látszik, hogy tetszőleges h esetén, amidőn $z_0 \to h$, az ellipszis kistengelye zérushoz tart, tehát a hullámmozgás a szabad felület közelében jelentős. Ezért a nehézségi erő hatása alatt létrejövő folyadékhullámok lényegében felületi hullámok.

Térjünk vissza a sekély folyadékban $(h \ll \lambda)$ terjedő hullámok (6.372) fázissebességéhez. Bár az eredményeink arra az esetre vonatkoznak, amikor a folyadék h mélysége mindenütt ugyanaz, mégis megnézzük, hogy milyen kvalitatív következtetés adódik abból, ha a folyadék mélysége az edény széle fele csökken. Vízhullámokra gondolva, ez annak a valóságos helyzetnek felel meg, amikor a tó mélysége a part felé közeledve csökken. Tegyük fel, hogy a folyadék egy hullámhegynek megfelelő h_h mélysége nagyobb, mint az utána következő hullámvölgynek megfelelő h_v mélysége: $h_h > h_v$. A (6.372)-ből következik, hogy

$$\frac{c_h}{c_v} = \sqrt{\frac{h_h}{h_v}} > 1.$$

(6.389. egyenlet)

85. ábra -



Vagyis a hullámhegy nagyobb sebességgel halad, mint az előtte levő hullámvölgy. Ezáltal a hullám alakja úgy változik meg, hogy a hullámhegy a terjedés irányába előredől. A tapasztalatból jól ismert ez a jelenség, a part felé haladó vízhullámok a part közelében előrebuknak *(85. ábra).*

Eddig az alapegyenleteknek periodikus síkhullám megoldásával foglalkoztunk. Természetesen más alakú hullámok is kialakulnak folyadékokban a gerjesztés módjától függően. Pl. ha követ dobunk a tóba, vagy szabályos időközönként ütögetjük a víz felszínét, ún. körhullámok keletkeznek.

Ebben az esetben a sebességpotenciál helytől függő részét derékszögű koordináták helyett hengerkoordinátákkal fejezzük ki, és a $\psi(r, \varphi)$ függvény a körszimmetria miatt csak az *r* sugártól függ. Így a (6.357) egyenlet helyébe körhullámok esetén a

$$\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}+k^2\psi=0$$ (6.390. egyenlet)

egyenlet lép. Ennek megoldását az ún. Bessel-függvényekkel lehet felírni. Részletekbe itt azért nem bocsátkozhatunk, mert a szükséges matematikai ismeretekkel a hallgatóság ekkor még nem rendelkezik, ezért csak közöljük a megoldást:

$$\psi(r)=J_0(kr),$$ (6.391. egyenlet)

ahol $J_0(kr)$ az ún. nulladrendű Bessel-függvény. A sebességpotenciál valós részére adódik

$$\Phi(r,z,t)=C\,\mathrm{ch}\,k(h-z)J_0(kr)\cos\omega t.$$ (6.392. egyenlet)

Ebből a szabad folyadékfelszínre a (6.374) előtti gondolatmenettel a

$$\zeta=-KJ_0(kr)\sin\omega t.$$ (6.393. egyenlet)

egyenletet kapjuk, ahol *K* állandót jelent. Nagy *kr* értékekre a Bessel-függvény a

$$J_0(kr)=\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\cos(kr-\pi/4)$$ (6.394. egyenlet)

aszimptotikus kifejezéssel helyettesíthető (1. G. A. Kom—M. M. Korn: Matematikai kézikönyv műszakiaknak. Műszaki Könyvkiadó, 1975).

A (6.394)-et (6.393)-ba beírva, és figyelembe véve a $2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$ trigonometriai összefüggést, ζ két tag összegeként írható:

$$\zeta=\frac{K}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\sin(kr-\omega t-\pi/4)-\frac{K}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\sin(kr+\omega t-\pi/4).$$ (6.395. egyenlet)

Az első tag a hullámforrásból (gerjesztő centrumból) sugárirányban kifelé, a második pedig befelé haladó körhullámot ír le. Ez a kifejezés a hullámforrástól távol (pl. $kr \equiv 2\pi r / \lambda > 5$) jó közelítést ad. A síkhullámokkal összehasonlítva, látszik, hogy most az amplitúdó nem állandó, hanem $1/\sqrt{r}$ szerint csökken a távolsággal.

A monokromatikus periodikus hullámok szuperpozíciójával bonyolultabb hullámok, hullámcsoportok is előállíthatók, miként azt a rugalmas hullámoknál a 33. pontban megmutattuk. Az így adódó hullámcsoport csoportsebessége (5.284), valamint (6.369) szerint

$$c_{cs} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2\sqrt{gk\,\mathrm{th}\,(kh)}}\left[g\,\mathrm{th}\,(kh) + \frac{gk}{\mathrm{ch}^2\,(kh)}\right].$$ (6.396. egyenlet)

A csoportsebesség tehát függ a hullámszámtól, vagyis a hullámhossztól. A nagyon mély folyadék határesetére $(h \to \infty)$

$$c_{cs} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$ (6.397. egyenlet)

adódik, kis *h*-ra viszont

$$c_{cs} = \sqrt{gh}.$$ (6.398. egyenlet)

A (6.371)-gyel, illetve a (6.372)-vel összevetve, látszik, hogy az előbbi esetben a fázissebesség felével, míg az utóbbiban magával a fázissebességgel megegyezik a hullám csoportsebessége.

Hullámok összenyomható folyadékban. Hanghullámok

Feltesszük, hogy a végtelen kiterjedésű ideális folyadék összenyomható, és külső erő nem hat rá. Megvizsgáljuk, hogy az egyensúlyi állapotot megzavaró kis behatás hogyan terjed tova a folyadékban. Mivel kis zavarról van szó, az áramlás sebessége is kicsi lesz, és így az Euler-egyenletben a (**v**, grad) **v** konvektív gyorsulás elhagyható a $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ helyi gyorsuláshoz képest. Feltételezzük továbbá azt is, hogy a folyadék mozgása örvénymentes, vagyis rot **v**=0, amiből következik, hogy $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\Phi.$

Az egyensúlyi állapothoz tartozó nyomást és sűrűséget p_0-val, illetve ϱ_0-val jelöljük. A zavar hatására a nyomás is és a sűrűség is megváltozik, eltér az egyensúlyi értékektől:

$$p = p_0 + p', \quad \varrho = \varrho_0 + \varrho'$$ (6.399. egyenlet)

A p' és ϱ' legyen kicsi a p_0 -, illetve ϱ_0 -hoz képest:

$$p' \ll p_0, \qquad \varrho' \ll \varrho_0.$$ (6.400. egyenlet)

A $p = p(\varrho)$ függvényt fejtsük sorba az egyensúlyi állapot környezetében:

$$p = p_0 + \left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_0 (\varrho - \varrho_0) + \dots \quad .$$ (6.401. egyenlet)

A magasabb rendű tagok a feltevésünk miatt elhagyhatók, ezért a (6.401)-ből (6.399) figyelembevételével adódik

$$p' = c^2 \varrho',$$ (6.402. egyenlet)

ahol

$$c^2 = \left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_0 .$$ (6.403. egyenlet)

Ha a nyomás és sűrűség (6.399) kifejezéseit az Euler-egyenletbe és a kontinuitási egyenletbe behelyettesítjük, a másodrendű kicsi tagokat elhagyva azt kapjuk, hogy

$$\varrho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} p' = 0,$$ (6.404. egyenlet)

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \varrho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$ (6.405. egyenlet)

Vegyük figyelembe a (6.402) összefüggést, és differenciáljuk (6.405)-öt az idő szerint. Így a (6.404)-, (6.405)-ből adódik

$$\varrho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + c^2 \operatorname{grad} \varrho' = 0,$$ (6.406. egyenlet)

$$\frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2} + \operatorname{div}\left(\varrho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right) = 0.$$ (6.407. egyenlet)

E két egyenlet egybevetéséből kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varrho'.$$ (6.408. egyenlet)

A (6.402) alapján ugyanilyen hullámegyenletet elégít ki a *p′* is:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = c^2 \Delta p'.$$ (6.409. egyenlet)

A (6.406)-ból és (6.405)-ből következik, hogy a **v** sebesség is a hullámegyenletnek tesz eleget:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{v}.$$ (6.410. egyenlet)

Ezeknek az egyenleteknek a megoldása *c* sebességgel terjedő hullám. Eszerint a nyomásnak és a sűrűségnek az egyensúlyi állapottól eltérő kis zavara az összenyomható ideális folyadékban hullámként terjed a

$$c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_0}$$ (6.411. egyenlet)

sebességgel. Ezek a folyadékban és gázban terjedő *hanghullámok.* Pontosabban szólva, *hangról* akkor beszélünk, ha a hullám frekvenciája a 20 és 20 000 Hz közötti intervallumba esik. A $\nu < 20$ Hz frekvenciájú rezgést *infrahangnak,* a 20 000 Hz felettit *ultrahangnak* nevezzük.

A hangsebesség kifejezhető a $\varkappa$ kompresszibilitással is. Ugyanis (5.67) szerint

$$\varkappa = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp} = \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dp},$$

amiből

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varkappa \varrho_0}}.$$ (6.412. egyenlet)

A kompresszibilitás értéke más aszerint, hogy izotermikus vagy adiabatikus folyamatról van szó. Azt, hogy (6.412)-ben melyik $\varkappa$ szerepel, a tapasztalat dönti el. Izotermikus folyamatoknál gázokban a nyomás és a sűrűség között kapcsolatot teremtő állapotegyenlet

$$\frac{p}{\varrho} = \text{áll.}, \qquad \text{amiből} \qquad \varkappa_{\text{iz}} = \frac{1}{p};$$

adiabatikus esetben pedig

$$\frac{p}{\varrho^{\gamma}} = \text{áll.}, \qquad \text{amiből} \qquad \varkappa_{\text{ad}} = \frac{1}{\gamma p},$$

ahol $\gamma = C_{\text{p}} / C_{\text{v}}$. Ennek megfelelően a hangsebességekre adódik

$$c_{\text{iz}} = \sqrt{\frac{p_0}{\varrho_0}}, \qquad c_{\text{ad}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\varrho_0}}. \quad \text{(6.413. egyenlet)}$$

A tapasztalat az adiabatikus folyamatnak megfelelő sebességgel egyezik meg. (Levegőben 20 °C-on $c = 343\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$). Ez tulajdonképpen azt jelenti, hogy a hanghullámokban a sűrűségváltozás (illetve nyomásváltozás) olyan gyorsan megy végbe, hogy jelentős hőcserére nincs lehetőség. Megjegyezzük, hogy a hangsebesség mérése egyszerű eljárást ad a $\gamma = C_{\text{p}} / C_{\text{v}}$ meghatározására.

Folyadékokban a $\varkappa_{\text{iz}}$ és $\varkappa_{\text{ad}}$ között nincs lényeges különbség.

Visszatérve a (6.404), (6.405) egyenletekhez, vegyük figyelembe, hogy $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi$. Így adódik

$$\operatorname{grad}\left(\varrho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p'\right) = \operatorname{grad}\left(\varrho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + c^2 \varrho'\right) = 0, \quad \text{(6.414. egyenlet)}$$

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \varrho_0 \Delta \Phi = 0. \quad \text{(6.415. egyenlet)}$$

A (6.414) egyenletet integrálva,

$$\varrho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p' = A(t).$$

Az $A(t)$ időfüggvényt beolvaszthatjuk a Φ sebességpotenciálba, ezért a grad mögötti zárójel zérusnak vehető:

$$\varrho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + c^2 \varrho' = 0.$$ (6.416. egyenlet)

Differenciáljuk ezt az egyenletet az idő szerint, és vegyük tekintetbe a (6.405)-öt.

Így azt kapjuk, hogy a sebességpotenciál is a hullámegyenletet elégíti ki:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi.$$ (6.417. egyenlet)

Ennek megoldásából a hanghullámban mozgó részek **v** sebességét, a *p′* nyomást és a ϱ' sűrűséget a

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi, \qquad p' = -\varrho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \qquad \varrho' = -\frac{\varrho_0}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$ (6.418. egyenlet)

képletek alapján lehet kiszámítani.

Vegyük a (6.417) hullámegyenletnek az **n** egységvektorral kijelölt irányban terjedő síkhullám megoldását. Ekkor

$$\Phi = \Phi(\mathbf{nr} \mp ct).$$ (6.419. egyenlet)

A közeg — folyadék vagy gáz — részecskéinek sebessége,

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi = \mathbf{n} \Phi',$$ (6.420. egyenlet)

ahol Φ' az egész argumentum szerinti differenciálhányadost jelenti. A folyadék, illetve gáz részecskéi tehát ugyanabban az irányban mozognak, mint amilyen irányban a hullám terjed. A hanghullámok folyadékban és gázban longitudinális hullámok. Ez megegyezik a végtelen szilárd közegben terjedő rugalmas hullámokra a 30. pontban kapott eredménnyel. Ugyanis ha ott a folyadékra és gázokra érvényes $\mu = 0$ értéket vesszük, transzverzális hullámokat nem kapunk, csak longitudinálisakat.

B) A súrlódó folyadékok mechanikája

A 38. pontban már megemlítettük, hogy a valódi folyadékok mozgása során a súrlódás következtében nyírófeszültségek is fellépnek a folyadékrétegek között. Erre mutat sok tapasztalat is, amely szerint az ideális folyadékok dinamikájának egyes eredményei ellentmondásban vannak a megfigyelésekkel. Különösen a szilárd testek körüli áramlásoknál találkozunk ilyen jelenségekkel. Ezért az ideális folyadékok előző

pontokban bemutatott és alkalmazott elméletét általánosítanunk kell a súrlódás figyelembevételével. A következőkben ennek az elméletnek az alapjait ismertetjük néhány egyszerűbb alkalmazással.

A súrlódási tenzor

Az ideális folyadékok elméletének továbbfejlesztése természetes módon adódik úgy, hogy a (6.16) feszültségtenzort kiegészítjük egy taggal, amely a súrlódási erőtől származó feszültségeket tartalmazza. Ennek megfelelően

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij},$$ (6.421. egyenlet)

ahol a σ'_{ij} az ún. súrlódási tenzor. A deformálható testekre általános érvényű impulzusnyomaték-tétel szerint a feszültségtenzornak szimmetrikusnak kell lennie, ezért σ'_{ij} is szimmetrikus. Mivel nyugvó folyadékokban súrlódás nem lép fel, σ'_{ij} a folyadék sebességterével van kapcsolatban oly módon, hogy nyugalmi állapotban eltűnik. Továbbá a folyadék transzlációs és forgó mozgásánál az egyes rétegek egymáshoz képest nem mozdulnak el, így nyírófeszültségek nem lépnek fel, ezért a súrlódási tenzor csak a deformációs sebességektől függ. A szilárd testek rugalmas alakváltozásainál követett gondolatmenethez hasonlóan a tapasztalattal jó egyezésben feltehető, hogy lineáris közelítésben izotrop folyadékokra a súrlódási tenzor arányos a V_{ij} deformációs sebességtenzorral:

$$\sigma'_{ij} = 2\eta V_{ij} + \eta' \delta_{ij} V_{ll}.$$ (6.422. egyenlet)

Az η és η' a belső súrlódásra jellemző anyagi együtthatók. Ezek a folyadék anyagi minőségétől és a hőmérséklettől függnek.

A kompressziómodulushoz hasonlóan definiáljuk a térfogati viszkozitást, amelyet ζ-val jelölünk. Ehhez képezzük a (6.422) egyenlet spurját:

$$\sigma'_{ll} = (2\eta + 3\eta')V_{ll}.$$ (6.423. egyenlet)

Másrészt legyen

$$\sigma'_{ll} = -3p'.$$ (6.424. egyenlet)

A *p'*-t *súrlódási nyomásnak* nevezzük. Az utóbbi két egyenlet egybevetéséből

$$p' = -\left(\frac{2}{3}\eta + \eta'\right)V_{ll} = -\zeta \operatorname{div} \mathbf{v},$$ (6.425. egyenlet)

ahol

$$\zeta = \frac{2}{3}\eta + \eta' \quad \text{(6.426. egyenlet)}$$

a térfogati viszkozitás. Összenyomhatatlan folyadékok esetén div **v**=0, és emiatt $p' = 0$. A súrlódási nyomás tapasztalat szerint nagyon sok esetben összenyomható folyadékokra is zérus. Ez azt jelenti, hogy ζ jó közelítéssel zérusnak vehető. Ebből viszont az következik, hogy a két súrlódási együttható ebben a közelítésben nem független egymástól, hanem

$$\eta' = -\frac{2}{3}\eta. \quad \text{(6.427. egyenlet)}$$

Ez az ún. Stokes-féle összefüggés azonban nem tekinthető teljesen bizonyítottnak, hanem a tapasztalat által több esetben megerősített hipotézisként kezelendő.

A σ'_{ij} súrlódási tenzor és a V_{ij} sebességtenzor közötti (6.422) összefüggés nemcsak valódi folyadékokra, hanem gázokra is érvényes.

A (6.422) kifejezést (6.421)-be helyettesítve, megkapjuk az izotrop súrlódó folyadékokra vonatkozó anyagi egyenleteket lineáris közelítésben:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta V_{ij} + \eta' \delta_{ij} V_{ll}, \quad \text{(6.428. egyenlet)}$$

amely a (6.427) figyelembevételével a következőképpen is írható:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta\left(V_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}V_{ll}\right). \quad \text{(6.429. egyenlet)}$$

A súrlódó folyadékok mozgásegyenletei. A Navier-Stokes-egyenletek

A súrlódó folyadékok dinamikájának alapegyenleteit a deformálható testek (4.62) általános mozgásegyenleteiből és a tömegmegmaradást kifejező kontinuitási egyenletből kapjuk. Írjuk be (4.62)-be a (6.428) anyagi egyenletet:

$$\varrho\frac{dv_i}{dt} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\eta'\frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \quad \text{(6.430. egyenlet)}$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\frac{dv_i}{dt} = \varrho \frac{dv_i}{dt} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Így adódik

$$\varrho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_l \frac{\partial v_i}{\partial x_l}\right) = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\eta' \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

(6.431. egyenlet)

Ezek az egyenletek a súrlódó folyadékok legáltalánosabb mozgásegyenletei. Az η és η' súrlódási együtthatók függhetnek a helytől is, de az esetek nagy részében állandóknak tekinthetők. Ekkor (6.431) egyszerűbb alakot vesz fel:

$$\varrho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_l \frac{\partial v_i}{\partial x_l}\right) = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \eta' \frac{\partial^2 v_l}{\partial x_i \partial x_l} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

(6.432. egyenlet)

Tovább egyszerűsödik az egyenlet a (6.427) Stokes-féle összefüggés figyelembevételével:

$$\varrho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_l \frac{\partial v_i}{\partial x_l}\right) = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_l \partial x_l} + \frac{1}{3}\eta \frac{\partial^2 v_l}{\partial x_i \partial x_l} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

(6.433. egyenlet)

Ezeket a mozgásegyenleteket nevezzük *Navier—Stokes-egyenleteknek.* E három egyenlet egyetlen vektoregyenletbe foglalható össze:

$$\varrho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \operatorname{grad})\,\mathbf{v}\right] = \mathbf{f} - \operatorname{grad} p + \eta\,\Delta\mathbf{v} + \frac{1}{3}\eta \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

(6.434. egyenlet)

Hasonlóképpen írható a (6.432) egyenlet is:

$$\varrho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial i} + (\mathbf{v}, \operatorname{grad})\,\mathbf{v}\right] = \mathbf{f} - \operatorname{grad} p + \eta\,\Delta\mathbf{v} + (\eta + \eta') \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

(6.435. egyenlet)

A Navier—Stokes-egyenletek az $\eta = \eta' = 0$ esetben átmennek az ideális folyadékok (6.19) illetve (6.20) Euler-egyenleteibe.

A (6.434), ill. (6.435) egyenletekhez járul még a

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0$$

(6.436. egyenlet)

kontinuitási egyenlet, valamint a *p* nyomás és a ϱ sűrűség kapcsolatát kifejező $p = p(\varrho)$ állapotegyenlet.

A súrlódó folyadékok mozgásgyenletei is parciális differenciálegyenletek, ezért az egyértelmű megoldáshoz a konkrét feladatnak megfelelő kezdeti és határfeltételek szükségesek. Kezdeti feltételként meg kell adnunk a **v**(**r**) sebességteret a $t = 0$ kezdeti időpontban. A stacionárius áramlásnál kezdeti feltételek természetesen nincsenek, mert a sebességtér időtől független.

A határfeltételek lényegesen mások lesznek most, mint ideális folyadéknál voltak. Ugyanis a súrlódás következtében a folyadék a szilárd falhoz odatapad, és emiatt a nyugvó szilárd test mentén a folyadék sebessége zérus. Tehát a nyugvó szilárd fal mentén

$\mathbf{v} = 0.$ (6.437. egyenlet)

Megjegyezzük, hogy ideális folyadéknál a sebességnek csak a normális komponense tűnik el a szilárd falnál, az érintőleges komponense tetszőleges lehet.

Ha a merev fal is mozog, akkor a súrlódó folyadék sebességének a fal minden pontjánál meg kell egyeznie a merev test sebességével.

Ha a folyadék felülete mentén megadott $\mathbf{P}_{(\mathbf{n})}$ erők hatnak, akkor a σ_{ij} feszültségtől származó felületi erőknek ezzel egyenlőeknek kell lenniük. Tehát

$\mathbf{P}_{(\mathbf{n})i} = \sigma_{ij} n_j = -p n_i + \sigma'_{ij} n_j,$ (6.438. egyenlet)

ahol n_j a felület normálisa irányába mutató egységvektor.

Két egymással nem keveredő folyadék (vagy folyadék és gáz) határfelületén a két folyadék sebességének meg kell egyeznie. Ugyanis, ha nem egyeznék meg, akkor a sebességnek a két folyadék érintkezésénél ugrása volna, ami (6.422) szerint végtelen nagy súrlódási erőt eredményezne.

Másrészt a kölcsönhatás törvénye miatt az elválasztó felület mentén ható felületi erők eredőjének zérusnak kell lennie. Ha $n_j^{(1)}$ jelenti az „1" közegből a másikba, $n_j^{(2)}$ a „2" közegből az „l"-be mutató egységvektort, $\sigma_{ij}^{(1)}$, illetve $\sigma_{ij}^{(2)}$ pedig a két közegre vonatkozó feszültségtenzort, akkor a mondottak szerint a két folyadék közös határán

$\sigma_{ij}^{(1)} n_j^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} n_j^{(2)} = 0.$ (6.439. egyenlet)

Mivel $n_j^{(1)} = -n_j^{(2)}$, ezért

$\sigma_{ij}^{(1)} n_j^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)} n_j^{(1)}.$ (6.439'. egyenlet)

A folyadék szabad felületén

$$\sigma_{ij}n_j = -pn_j + \sigma'_{ij}n_j = 0.$$ (6.440. egyenlet)

Ezek után összefoglaljuk a súrlódó folyadékok dinamikájának alapfeladatát. Megadott kezdeti és határfeltételek esetén keressük a Navier—Stokes-egyenletek megoldását, vagyis a $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ sebességteret. Mivel a mozgásegyenletek is meglehetősen bonyolultak, továbbá a határfeltételek sem egyszerűek, a súrlódó folyadékok dinamikai leírása nem könnyű matematikai feladat. Ez az oka annak, hogy a valódi folyadékokat sok esetben vagy összenyomhatatlannak (div **v**=0) tekintjük, vagy — ahol lehet— ideális folyadékként kezeljük. Az előbbi esetben a Navier—Stokes-egyenletek jelentősen egyszerűsödnek, ugyanis az utolsó tag eltűnik:

$$\varrho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v},\,\mathrm{grad})\,\mathbf{v}\right] = \mathbf{f} - \mathrm{grad}\,p + \eta\Delta\mathbf{v}.$$ (6.441. egyenlet)

Ez az egyenlet a

$$(\mathbf{v},\,\mathrm{grad})\,\mathbf{v} = \mathrm{grad}\frac{v^2}{2} - \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$$

és

$$\Delta\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$$

vektoranalitikai összefüggések felhasználásával a következő alakba írható:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\frac{v^2}{2} - \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \frac{\mathbf{f}}{\varrho} - \frac{1}{\varrho}\mathrm{grad}\,p - \frac{\eta}{\varrho}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}.$$ (6.442. egyenlet)

Ebből az egyenletből látszik, hogy ha a súrlódásnak szerepe van, akkor az áramlás nem lehet mindenütt örvénymentes (rot **v**=0), ugyanis ekkor az η *-t* tartalmazó tag nem tűnik el.

A (6.442) egyenletben szereplő $\eta/\varrho = \nu$ mennyiséget *kinematikai viszkozitási együtthatónak* nevezzük.

Az energia disszipációja

A deformálható testek általános mechanikájával foglalkozó IV. fejezetben az energiatétel tárgyalásakor megmutattuk, hogy ha súrlódás is fellép, akkor az energiatétel a következő alakban érvényes (4.119):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2+\Phi\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}+\left[\frac{1}{2}\varrho v^2 v_j-\left(\sigma_{ij}^{(0)}+\sigma_{ij}'\right)v_i\right]=-\sigma_{ij}'\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+v_i f_i,$$ (6.443. egyenlet)

ahol Φ az ún. rugalmas potenciál, $\sigma_{ij}^{(0)}$ a feszültségtenzor súrlódásmentes része, σ_{ij}' pedig a súrlódási tenzor.

Ezt az egyenletet súrlódó folyadékra alkalmazva, $\sigma_{ij}^{(0)}=-p\delta_{ij}$; Φ pedig a nyomásból származó potenciális energia sűrűsége, amelyet (6.36) alapján definiáltunk. Ezek behelyettesítése után (6.443) a következőképpen írható:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2+\Phi\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{1}{2}\varrho v^2+p\right)v_j-\sigma_{ij}'v_i\right]=-\sigma_{ij}'\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+v_i f_i.$$ (6.444. egyenlet)

Ebből látszik, hogy a σ_{ij}' súrlódási tenzor egyrészt hozzájárul az energiaáram-sűrűséghez (a szögletes zárójeles kifejezésben), másrészt az egyenlet jobb oldalán álló, nyelőként szereplő első tagban fordul elő. A

$$D=\sigma_{ij}'\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$ (6.445. egyenlet)

mennyiséget nevezzük *disszipációs függvénynek*.

Számítsuk ki a *D* disszipációs függvényt a σ_{ij}' (6.422) kifejezésének felhasználásával:

$$D=\sigma_{ij}'\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\eta' V_{il}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$ (6.446. egyenlet)

Vegyük figyelembe, hogy $\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=V_{il}$; másrészt az első; tagot alakítsuk át a következő bővítéssel:

$$D=\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)+\eta' V_{il}^2.$$ (6.447. egyenlet)

A második zárójel első tagjának az első zárójeles kifejezéssel való szorzatában az *i* összegező indexet *j*-re, a *j*-t *i*-re cserélve,

$$D = \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 + \eta' V_g^2 = 2\eta' V_{ij}^2 + \eta' V_g^2.$$ (6.448. egyenlet)

Ha a folyadék összenyomhatatlan, akkor $V_{ij} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$ és ebben az esetben

$$D = 2\eta V_{ij}^2.$$ (6.449. egyenlet)

Mivel $D > 0,$ az η belső súrlódási együttható pozitív mennyiség.

Összenyomhatatlan folyadékra (6.38) szerint a $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$ ezért a (6.444) energiátétel így egyszerűsödik:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + p\right)v_j - 2\eta V_{ij} v_i\right] = -2\eta V_{ij}^2 + v_i f_i.$$ (6.450. egyenlet)

Ennek az egyenletnek szemléletes jelentést adhatunk, ha integráljuk mindkét oldalát a folyadék *V* térfogatú rögzített tartományára:

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\varrho v^2 dV = \int_V v_i f_i dV - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + p\right)v_j - 2\eta V_{ij} v_i\right] dV - \int_V 2\eta V_{ij}^2 dV.$$ (6.451. egyenlet)

A jobb oldal második tagja Gauss-tétellel a tartományt határoló felületre vett integrállá alakítható. Tegyük fel, hogy a folyadék merev fallal van körülvéve és külső erők nem hatnak. A határfeltételek miatt itt a sebesség zérus, és ezért, ha a teljes folyadékra integrálunk, a felületi integrál eltűnik, az első tag pedig az $f_i = 0$ miatt lesz zérus. Marad

$$-\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\varrho v^2 dV = \int_V 2\eta V_{ij}^2 dV.$$ (6.452. egyenlet)

A folyadék teljes mozgási energiája tehát csökken még akkor is, ha külső hatás nem éri. Ez azért van, mert a súrlódás miatt a mozgási energia egy része hőenergiává alakul. A jobb oldali

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V 2\eta V_{ij}^2 dV$$ (6.453. egyenlet)

adja meg az időegység alatt keletkezett hőenergiát.

A (6.451) energiatétel szemléletes jelentése tehát a következő. A *V* térfogatú folyadékrész mozgási energiájának változása három okra vezethető vissza: 1. A külső térfogati erők munkát végeznek, és ezáltal növelik a folyadék mozgási energiáját. A jobb oldal első tagja e munka teljesítményét adja meg. 2. A második tag a felületen időegység alatt beáramló energiát jelenti. 3. Az utolsó tag pedig az ugyancsak egységnyi idő alatt keletkezett hőenergia. A (6.449) disszipációs függvény fizikai jelentése tehát a térfogategységben időegység alatt keletkezett hőenergia.

Ha a folyadék összenyomható, akkor (6.453) jobb oldalán (6.448)-nak megfelelően még egy tag szerepel, az $\eta' V_{\mathrm{II}}^2$ térfogati integrálja.

Az áramlások hasonlósági törvénye

A valódi (súrlódó) folyadékok áramlásának törvényei a gyakorlati alkalmazások szempontjából igen fontosak, mert elméleti alapját képezik mindazon műszaki feladatoknak, amelyek folyadékok és gázok áramlásával kapcsolatos berendezések, gépek tervezésére irányulnak. A hidrodinamika alapegyenletei a Navier—Stokes-mozgásegyenletek és a kontinuitási egyenlet. Ezeket egészítik ki a konkrét feladat jellegéből fakadó kezdeti és határfeltételek. Az 53. pontban már megemlítettük, hogy ezek megoldása általában nehéz matematikai feladat. Ezért az alkalmazásoknál modellkísérletekkel tanulmányozzák a folyadékok áramlását, és az így kapott eredményeket használják fel a valódi áramlási feladatnál. Ilyenkor természetes módon adódik az a követelmény, hogy a modellbeli és a valódi áramlás egymáshoz hasonló legyen. Nyilvánvaló, hogy az elrendezés geometriai hasonlósága nem elegendő a két áramlás mechanikai (vagy hidrodinamikai) hasonlóságához. Ehhez az is kell, hogy a modellbeli és a valóságos áramlás ugyanazokat az alapegyenleteket elégítse ki ugyanazokkal a feltételekkel. Az áramlások modellkísérletekkel történő tanulmányozásában tehát alapvető annak megállapítása, hogy két áramlás mikor hasonló mechanikai szempontból.

Gondoljunk el két geometriailag hasonló áramlást, amelyekre vonatkozó mennyiségeket az 1, illetve 2 indexszel látjuk el. A geometriai hasonlóság azt jelenti, hogy az „1" és a „2" áramlásra vonatkozó lineáris méretek egymással arányosak. Ha l_1-gyel jelöljük az „1" elrendezés valamilyen jellegzetes lineáris méfetét (pl. csőben történő áramlásnál annak átmérőjét), akkor a „2" elrendezés megfelelő mérete a mondottak értelmében

$$l_2 = l_0 l_1, \quad \text{(6.454. egyenlet)}$$

ahol l_0 dimenzió nélküli szám a két geometriailag hasonló elrendezés kicsinyítésének (vagy nagyításának) a mérőszáma.

Ha a két áramlás kinematikailag is hasonló, akkor

$$t_2 = t_0 t_1, \qquad \mathbf{v}_2 = v_0 \mathbf{v}_1. \quad \text{(6.455. egyenlet)}$$

Itt t_0 az időmérték dimenziótlan kicsinyítő (vagy nagyító) mérőszáma. A v_0 szám nem független, mert kifejezhető l_0-val és t_0-val. Ugyanis a t_1 időponthoz tartozó x_1, y_1, z_1 pontnak a másik áramlásban a t_2 időpontbeli $x_2 = l_0 x_1, y_2 = l_0 y_1, z_2 = l_0 z_1$ pont felel meg. Ezért

$$v_0 = \frac{l_0}{t_0}.$$ (6.456. egyenlet)

Feltételezzük továbbá, hogy a mozgásegyenletekben szereplő többi fizikai menyniyiség is arányos egymással a két áramlásban. Eszerint

$$\varrho_2 = \varrho_0\varrho_1, \qquad p_2 = p_0 p_1, \qquad \eta_2 = \eta_0\eta_1, \qquad \mathbf{f}_2 = f_0\mathbf{f}_1.$$ (6.457. egyenlet)

A $\varrho_0, p_0, \eta_0, f_0$ szintén dimenziótlan számok.

A teljes mechanikai hasonlóságnak az a feltétele, hogy a Navier—Stokes-féle mozgásegyenletek és a kontinuitási egyenlet mindkét áramlásra ugyanolyan alakban egyszerre teljesüljenek. Tehát

$$\varrho_1\left[\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t_1} + (\mathbf{v}_1, \operatorname{grad}_1)\mathbf{v}_1\right] = \mathbf{f}_1 - \operatorname{grad}_1 p_1 + \eta_1\left(\Delta_1\mathbf{v}_1 + \frac{1}{3}\operatorname{grad}_1\operatorname{div}_1\mathbf{v}_1\right),$$ (6.458. egyenlet)

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t_1} + \operatorname{div}_1(\varrho_1\mathbf{v}_1) = 0,$$ (6.459. egyenlet)

továbbá

$$\varrho_2\left[\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t_2} + (\mathbf{v}_2, \operatorname{grad}_2)\mathbf{v}_2\right] = \mathbf{f}_2 - \operatorname{grad}_2 p_2 + \eta_2\left(\Delta_2\mathbf{v}_2 + \frac{1}{3}\operatorname{grad}_2\operatorname{div}_2\mathbf{v}_2\right),$$ (6.460. egyenlet)

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial t_2} + \operatorname{div}_2(\varrho_2\mathbf{v}_2) = 0.$$ (6.461. egyenlet)

A grad és a div melletti 1, illetve 2 index azt jelenti, hogy a differenciálásokat a megfelelő koordináták szerint kell elvégezni. A (6.454)—(6.457) összefüggéseket (6.460)-ba és (6.461)-be behelyettesítve

$$\varrho_0\varrho_1 v_0\left[\frac{1}{t_0}\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t_1} + \frac{v_0}{l_0}(\mathbf{v}_1, \operatorname{grad}_1)\mathbf{v}_1\right] =$$
$$= f_0\mathbf{f}_1 - \frac{p_0}{l_0}\operatorname{grad}_1 p_1 + \frac{\eta_0 v_0}{l_0^2}\eta_1\left(\Delta_1\mathbf{v}_1 + \frac{1}{3}\operatorname{grad}_1\operatorname{div}_1\mathbf{v}_1\right),$$ (6.462. egyenlet)

$$\frac{\varrho_0}{t_0}\frac{\partial \varrho_1}{\partial t_1}+\frac{\varrho_0 v_0}{l_0}\operatorname{div}_1(\varrho_0 \mathbf{v}_1)=0.$$ (6.463. egyenlet)

Ezeknek, valamint a (6.458), (6.459) egyenleteknek egyszerre kell fennállniuk. Ez akkor teljesül, ha az egyes tagok szorzótényezői egyenlőek. Vagyis

$$\frac{1}{t_0}=\frac{v_0}{l_0},$$ (6.464. egyenlet)

$$\frac{\varrho_0 v_0}{t_0}=\frac{\varrho_0 v_0^2}{l_0}=f_0=\frac{p_0}{l_0}=\frac{\eta_0 v_0}{l_0^2}.$$ (6.465. egyenlet)

Átrendezve

$$\frac{\varrho_0 l_0 v_0}{\eta_0}=\frac{p_0}{\varrho_0 v_0^2}=\frac{f_0 l_0}{\varrho_0 v_0^2}=\frac{v_0 t_0}{l_0}=1.$$ (6.466. egyenlet)

Az $l_0, v_0, \ldots, f_0$ dimenziótlan számok (6.454)—(6.457)-beli jelentését figyelembe véve, (6.466)-ból következik, hogy

$$\frac{\varrho_1 l_1 v_1}{\eta_1}=\frac{\varrho_2 l_2 v_2}{\eta_2}, \qquad \frac{p_1}{\varrho_1 v_1^2}=\frac{p_2}{\varrho_2 v_2^2},$$ (6.467. egyenlet)

$$\frac{v_1^2 \varrho_1}{f_1 l_1}=\frac{v_2^2 \varrho_2}{f_2 l_2}, \qquad \frac{v_1 t_1}{l_1}=\frac{v_2 t_2}{l_2}.$$

A két áramlás tehát dinamikailag akkor hasonló, ha a (6.466), illetve (6.467) egyenlőségek teljesülnek.

A (6.467) első egyenlete azt jelenti, hogy a mechanikailag hasonló áramlásnál az

$$R=\frac{\varrho l v}{\eta}$$ (6.468. egyenlet)

dimenzió nélküli mennyiség, az ún. *Reynolds-szám* a két áramló folyadékra ugyanaz.

Hasonlóképpen fogalmazható meg a (6.467) másik három egyenlősége is egy-egy dimenziótlan szám bevezetésével. Ha a folyadék a nehézségi erő hatásának van kitéve, akkor $f=\varrho g,$ és ebben az esetben a harmadik egyenlőségben szereplő

$$Fr = \frac{v^2}{gl}$$ (6.469. egyenlet)

mennyiséget *Froude-számnak* hívjuk.

A $p / \varrho v^2$ helyett az

$$Eu = \frac{v}{\sqrt{2\frac{p}{\varrho}}}$$ (6.470. egyenlet)

mennyiséget használjuk, amit *Euler-számnak* nevezünk.

Az

$$St = \frac{v\tau}{l}$$ (6.471. egyenlet)

pedig az ún. *Strouhal-szám.* Ez stacionárius áramlásnál nem szerepel, ugyanis ilyenkor az. alapegyenletekben az idő szerinti derivált nem lép fel. A (6.47l)-beli τ alatt a folyamatra jellemző idő értendő. Ha pl. periodikus mozgásról van szó, akkor τ a rezgésidőt jelenti.

A hidrodinamikai hasonlóság feltétele ezek után szavakkal a következőképpen fogalmazható meg. Hasonló geometriai feltételek mellett a nehézségi erő hatása alatti két áramlás akkor hasonló mechanikai szempontból, ha a két áramlás Reynolds-, Froude-, Euler- és Strouhal-száma megegyezik.

Mivel ezekben a dimenziótlan számokban szereplő fizikai mennyiségek (sebesség, sűrűség, nyomás) a helynek függvényei, itt ezek középértéke értendő.

A súrlódó folyadékok áramlásának jellemzésénél a Reynolds-számnak van fontos szerepe, mert ez az a mennyiség, amely tartalmazza az η súrlódási együtthatót. Minél nagyobb a súrlódás, *R*annál kisebb. Ideális folyadékra $(\eta = 0)$ $R = \infty$.

Réteges (lamináris) áramlás kör keresztmetszetű csőben

Gondoljunk el egy *a* sugarú kör keresztmetszetű csövet, amelyben súrlódó folyadék áramlik. Tegyük fel, hogy a folyadékra külső erő nem hat. (Vízszintes csöveknél a nehézségi erőtől nyugodtan eltekinthetünk, mert az a keresztmetszet mentén gyakorlatilag állandónak vehető.) Az áramlási kép egy bizonyos kritikus sebesség alatt olyan, hogy az áramvonalak a cső tengelyével párhuzamosak, és a sebesség nagysága a cső tengelyétől

számított távolságtól függ. Az áramlási tér különböző sebességű, koaxiális rétegekre osztható. Ezért nevezzük az ilyen áramlást *rétegesnek* vagy *lamínárisnak*. A sebesség növekedésével, egy kritikus értéknél a réteges áramlás instabillá válik, az áramlási kép rendkívül bonyolult lesz, az áramvonalak egymásba fonódnak, összekeverednek. Azt mondjuk, hogy az áramlás *turbulens*. Mi most a réteges áramlással foglalkozunk, ezért feltesszük, hogy a sebesség az említett határ alatt van, és a cső keresztmetszete sem nagy.

Válasszuk a koordináta-rendszer *z* tengelyét a cső tengelyével egybeesőnek, a cső hosszát l-nek, és az egyik vége legyen a $z = 0$-nál, ahol a nyomás p_1 a másik végén, $z = l$-nél p_2, és feltesszük, hogy $p_2 < p_1$. Feltételezzük továbbá, hogy az áramlás stacionárius és a folyadék összenyomhatatlan.

Feladatul kitűzzük az áramlási tér meghatározását. Ehhez a Navier—Stokes-egyenleteket és a kontinuitási egyenletet kell megoldanunk.

A feltevések miatt $v_x = v_y = 0,\ v_z \neq 0.$ Tehát csak a v_z-t kell kiszámítanunk a hely függvényében. A kontinuitási egyenlet most a

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

alakot veszi fel. Ebből következik, hogy

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$ (6.472. egyenlet)

Ez azt jelenti, hogy v_z nem függ a *z*-től.

A (6.441) mozgásegyenletek komponensekben a következők lesznek:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}\right).$$ (6.473. egyenlet)

Az első két egyenlet szerint a nyomás nem függ sem az *x*-től, sem az *y*-tól, tehát $p = p(z)$. A v_z *a* hengerszimmetria, valamint (6.472) miatt az $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ rádiuszvektortól függ. Ezt figyelembe véve, a (6.473) harmadik egyenlete így írható:

$$\frac{dp}{dz} = \eta \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right).$$ (6.474. egyenlet)

Az egyenlet bal oldala csak a *z*-től, a jobb oldala csak az *r*-től függ, ezért az egyenlet a változók minden értékére csak úgy állhat fenn, ha mindkét oldal egy állandóval egyenlő. Jelöljük ezt $-C$-vel. Eszerint

$$\frac{dp}{dz} = -C,$$ (6.475. egyenlet)

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dz}\right) = -\frac{C}{\eta}r.$$ (6.476. egyenlet)

A (6.474)-ből adódik

$$p = -Cz + p_0.$$ (6.477. egyenlet)

A C és p_0 állandókat a határfeltételekből határozzuk meg. Mivel *z*=0-nál a nyomás p_1, ezért $p_0 = p_1$. A cső másik végén a nyomás p_2, így *C*-re kapjuk, hogy

$$C = \frac{p_1 - p_2}{l}.$$ (6.478. egyenlet)

A (6.476) egyenlet megoldása

$$v_0 = -\frac{C}{4\eta}r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$ (6.479. egyenlet)

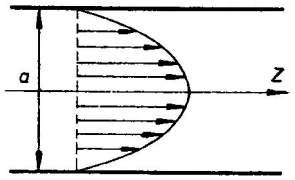
A C_1 állandónak zérusnak kell lennie, mert különben a v_z sebesség az *r*=0-nál végtelenné válnék. A C_2 állandót a sebességre vonatkozó határfeltételből számítjuk ki. A sebesség a cső falánál a súrlódás miatt zérus. Így C_2-re adódik

$$C_2 = \frac{Ca^2}{4\eta}.$$ (6.480. egyenlet)

Ezeket (6.470)-be helyettesítve, megkapjuk a keresett sebességet a hely függvényében:

$$v_z = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}\left(a^2 - r^2\right).$$ (6.481. egyenlet)

86. ábra -



Ez a cső tengelye körüli forgási paraboloidnak az egyenlete. Az áramlási képet a cső *xz* síkmetszetében a *86. ábra* szemlélteti.

Számítsuk ki a cső keresztmetszetén időegység alatt kiáramló folyadék mennyiségét. Ezt úgy kapjuk meg, hogy v_z-t ϱ-val megszorozzuk és utána integráljuk a cső keresztmetszetére:

$$Q = \int v_z \varrho \, df = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} \varrho \int_0^a \left(a^2 - r^2\right) 2\pi r \, dr = \frac{\pi a^4 \varrho}{8\eta l} \left(p_1 - p_2\right). \quad \text{(6.482. egyenlet)}$$

Ez a *Hagen—Poiseuille-törvény,* amelyet először (1839—40-ben) kísérleti úton ismertek fel. A cső végén kiáramló folyadékmennyiség, valamint a nyomáskülönbség megmérésével (6.482)-ből az η belső súrlódási együttható kiszámítható. A súrlódási együttható mérésének ez az egyik használt módszere.

Írjuk fel a (6.482) Hagen—Poiseuille-törvényt

$$p_1 - p_2 = \frac{8\eta l}{\pi a^4 \varrho} Q \quad \text{(6.483. egyenlet)}$$

alakba. A *Q* tulajdonképpen a csövön átfolyó folyadékáram erőssége, ezért a (6.483) képlet nagyon emlékeztet az elektromos áramra vonatkozó $\Phi_1 - \Phi_2 = RI$ Ohm-törvényre. Emiatt a *Q* szorzótényezőjét a cső ellenállásának is szokták nevezni.

A Hagen—Poiseuille-törvény a mérések tanúsága szerint egy bizonyos kritikus áramlási sebesség fölött nem egyezik a megfigyelésekkel. Ugyanis ekkor az áramlás megszűnik réteges lenni, egészen bonyolult gomolygó áramlás, turbulencia jön létre. A réteges áramlásnak turbulensbe történő átmenetét kísérletileg részletesen tanulmányozták, és arra a következtetésre jutottak, hogy ez az átmenet nemcsak a sebességnövelésével, hanem többféleképpen előidézhető, pl. a belső súrlódási együttható vagy a cső méretének megváltoztatásával is. Ezekből a vizsgálatokból Reynolds arra a megállapításra jutott, hogy a Reynolds-szám szabja meg a réteges áramlásból a turbulensbe való átmenetet. A turbulens áramlás akkor következik be, ha a Reynolds-szám egy kritikus értéket túllép, vagyis ha

$$R = \frac{\varrho v l}{\eta} > R_{\text{kr}}.$$

Az R_{kr} értéke érzékenyen függ a geometriai méretektől, továbbá a folyadék csőbe való beáramlásától. Ennek megfelelően R_{kr} igen széles határok között változhat.

A Hagen—Poiseuille-törvény levezetése a hidrodinamika mozgásegyenleteinek egzakt megoldásával adódott, annak bármilyen sebességnél és csőméretnél érvényesnek kellene lennie. Meglepő, hogy a tapasztalat mégis azt mutatja, hogy az $R > R_{\text{kr}}$ feltételek mellett ez nem így van. A turbulens áramlás keletkezése és annak dinamikai leírása a hidrodinamika legnehezebb problémája. Igen sok vizsgálatot végeztek ezzel kapcsolatban, de még ma sem sikerült kielégítő választ találni a turbulens áramlásokra vonatkozó kérdésekre. A probléma kvalitatív elemzésére az 59. pontban visszatérünk.

Folyadék mozgása egyenletesen forgó hengerek között

Gondoljunk el végtelen hosszú, r_1, illetve r_2 sugarú, koaxiális két hengert, közöttük összenyomhatatlan súrlódó folyadékkal. Legyen $r_2 > r_1$. Tegyük fel, hogy a hengerek állandó ω_1, illetve ω_2 szögsebességgel forognak a közös tengely körül. A súrlódás miatt a folyadék is mozog, és ha nem nagy a szögsebesség, akkor az áramlás stacionárius. Meghatározzuk az áramló folyadék sebességterét.

Hengerkoordinátákat használunk és a *z* tengelyt a hengerek közös tengelyével egybeesőnek választjuk. Szimmetria megfontolásokból következik, hogy

$$v_r = v_z = 0, \qquad v_\varphi = v(r). \qquad p = p(r).$$ (6.484. egyenlet)

Most is feltesszük, hogy külső erő nem hat.

Mivel összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlásáról van szó, a (6.441) Navier—Stokes-egyenlet a

$$\varrho(\mathbf{v}, \operatorname{grad})\mathbf{v} = -\operatorname{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v}$$ (6.485. egyenlet)

alakra egyszerűsödik. Szorozzuk meg ezt az egyenletet skalárisan **v**-vel:

$$\varrho \mathbf{v}(\mathbf{v}, \operatorname{grad})\mathbf{v} = -(\mathbf{v}, \operatorname{grad}) p + \eta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v}.$$ (6.486. egyenlet)

A grad *p* sugárirányú vektor, és merőleges **v**-re, ezért a jobb oldal első tagja zérus.

Könnyen belátható, hogy a bal oldal is zérus. Ehhez a **v**(**v**, grad)**v** kifejezést átalakítjuk a következőképpen:

$$\mathbf{v}(\mathbf{v},\,\mathrm{grad})\,\mathbf{v}=\frac{1}{2}(\mathbf{v},\,\mathrm{grad})\,v^2=\frac{1}{2}(\mathbf{v},\,\mathrm{grad})\,v_\varphi^2.$$

Mivel v_φ a mozgás irányában nem változik, a jobb oldal zérus. A (6.486) tehát a

$\mathbf{v}\Delta\mathbf{v}=0$ (6.487. egyenlet)

egyenletre egyszerűsödik.

Ha az *x* és *y* irányba mutató állandó egységvektorokat $\mathbf{e}_x$-szel, illetve $\mathbf{e}_y$-nal jelöljük, akkor

$$\mathbf{v}=\mathbf{e}_y v_\varphi\cos\varphi-\mathbf{e}_x v_\varphi\sin\varphi.$$

Ezt (6.487)-be helyettesítve, adódik, hogy

$\cos\varphi\Delta\left(v_\varphi\cos\varphi\right)+\sin\varphi\Delta\left(v_\varphi\sin\varphi\right)=0.$ (6.488. egyenlet)

Vegyük figyelembe a Laplace-operátor hengerkoordinátákban érvényes

$$\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

alakját (Függelék 7.1 pontja). így (6.488)-ból kapjuk, hogy

$\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}-\frac{v}{r^2}=0.$ (6.489. egyenlet)

A matematikából ismeretes, hogy az ilyen típusú egyenletek megoldása r^k alakú. Ennek megfelelően feltesszük, hogy $v=r^k$, és megnézzük, hogy milyen *k* értékekre elégíti ez ki a (6.489) egyenletet. Egyszerű számolással adódik, hogy $v=r^k$ akkor megoldása (6.489)-nek, ha $k=\pm 1$. A két lehetséges megoldás tehát

$$v_1=r\qquad\text{és}\qquad v_2=\frac{1}{r}.$$

Az általános megoldást úgy kapjuk, hogy ezeket egy-egy tetszőleges állandóval megszorozzuk és összeadjuk:

$$v = C_1 r + \frac{C_2}{r}.$$ (6.490. egyenlet)

A C_1, C_2 integrálási állandókat abból a határfeltételből határozzuk meg, hogy a folyadék sebességének a hengerek mentén meg kell egyeznie a hengerek kerületi sebességével:

$$v(r_1) = \omega_1 r_1, \quad v(r_2) = \omega_2 r_2.$$ (6.491. egyenlet)

Ennek alapján egyszerűen adódik, hogy

$$C_1 = \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2},$$ (6.492. egyenlet)

$$C_2 = \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$ (6.493. egyenlet)

Ezeket (6.490)-be helyettesítve, megkapjuk a hengerek között áramló folyadék sebességeloszlását:

$$v_\varphi = v(r) = \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r}.$$ (6.494. egyenlet)

Ha $\omega_1 = \omega_2 = \omega,$ akkor $v = \omega r.$ Ez azt jelenti, hogy a folyadék mint merev test együtt forog a hengerekkel. A másik speciális eset az, amikor külső henger nincs, vagyis amikor $r_2 = \infty, \omega_2 = 0.$ Ebben az esetben

$$v = \frac{\omega_1 r_1^2}{r}.$$ (6.495. egyenlet)

A hengerek felületére érintő irányú súrlódási erő hat, és ez forgatónyomatékot fejt ki rájuk. Számítsuk ki ezt a forgatónyomatékot.

Az r_1 sugarú henger egységnyi felületére ható súrlódási erőt a súrlódási tenzor $\sigma'_{r\varphi}$ eleme adja meg. A Függelék 8. pontja szerint ez a következő lesz a mi esetünkben:

$$\left(\sigma'_{r\varphi}\right)_{r=r_1} = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)_{r=r_1} = -2\eta\frac{(\omega_1-\omega_2)r_2^2}{r_2^2-r_1^2}.$$ (6.496. egyenlet)

A henger egységnyi hosszúságú palástjára ható erőt ebből a $2\pi r_1$-gyel való szorzással kapjuk meg, mert a (6.496) feszültség a felület minden pontjában ugyanakkora.

A keresett forgatónyomaték ennek az erőnek r_1-szerese (ugyanis r_1 az erő karja):

$$M_1 = -\frac{4\pi\eta(\omega_1-\omega_2)r_1^2r_2^2}{r_2^2-r_1^2}.$$ (6.497. egyenlet)

Az r_2 sugarú hengerre ható M_2 forgatónyomaték M_1-nek -1-szerese: $M_2 = -M_1$.

Nyilvánvaló, hogy abban az esetben, amikor a folyadék együtt forog a hengerekkel, nincs forgatónyomaték. Ez a (6.497)-ből világosan kitűnik, mert az az $\omega_1 = \omega_2$ esetben zérus. A másik speciális esetben, amikor $\omega_2 = 0,\ r_2 = \infty,$

$$M_1 = -4\pi\eta\omega_1 r_1^2.$$ (6.498. egyenlet)

A kapott eredmények kísérleti lehetőséget adnak a súrlódási együttható meghatározására, másrészt a gyakorlati alkalmazásokban van szerepük, különösen a gépek forgó alkatrészeinek kenésével kapcsolatos vizsgálatokban.

Gömb mozgása súrlódó folyadékban

Nyugvó súrlódó folyadékban mozogjon nem nagy $\mathbf{v}_0$ sebességgel egy *a* sugarú gömb. A folyadék a súrlódás révén fékezi a gömb mozgását. Feladatul tűzzük a fékezőerőnek a meghatározását. Mivel a súrlódási erőre vagyunk kíváncsiak, feltesszük, hogy külső térfogati erők nem hatnak. Nyilvánvaló, hogy e feladattal egyenértékű az, ha a gömböt nyugvónak gondoljuk és a folyadék áramlik körülötte. A folyadék sebessége a gömbtől elég távol (elméletileg a végtelenben) $-\mathbf{v}_0$, de a gömb közelében megváltozik. Először az áramló folyadék sebességterét számítjuk ki. Ezt a Navier—Stokes-egyenletekből és a kontinuitási egyenletből kapjuk meg. Előbbiek összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlására a következők:

$$\varrho(\mathbf{v}, \operatorname{grad})\mathbf{v} = -\operatorname{grad} p + \eta\,\Delta\mathbf{v}.$$ (6.499. egyenlet)

Ezt a vektoregyenletet a bal oldali nem lineáris tag miatt nem lehet egzaktul megoldani, ezért közelítésre kényszerülünk. Ha a súrlódási erő elég nagy és a **v** sebesség kicsi, akkor a bal oldal elhanyagolható a többi tag mellett. Így a következő viszonylag egyszerű egyenlethez jutunk:

$\operatorname{grad} p = \eta \Delta \mathbf{v}.$ (6.500. egyenlet)

A **v** sebességteret felbontjuk két részre, egy örvénymentes $\mathbf{v}_1$ vektortérre és az örvényeket tartalmazó $\mathbf{v}_2$-re:

$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$ (6.501. egyenlet)

Az örvénymentes $\mathbf{v}_1$ a sebességpotenciálból származtatható a

$\mathbf{v}_1 = \operatorname{grad} \Phi$ (6.502. egyenlet)

képlet szerint.

A kontinuitási egyenlet most a div **v**=0 alakot veszi fel, mert összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlásáról van szó. A fentiek alapján ebből adódik, hogy

$\Delta \Phi + \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0.$ (6.503. egyenlet)

A (6.500) egyenletet kielégíthetjük úgy, hogy *p*-re a

$p = \eta \Delta \Phi + p_0$ (6.504. egyenlet)

kifejezést vesszük, és $\mathbf{v}_2$-től megköveteljük a

$\Delta \mathbf{v}_2 = 0$ (6.505. egyenlet)

egyenlet teljesülését.

Ezeket a parciális differenciálegyenleteket még ki kell egészítenünk azokkal a határfeltételekkel, amelyeket a sebességtérnek ki kell elégítenie a végtelenben és a gömb felületén. Nevezetesen

$r = \infty$ -nél $\quad \mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi + \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_0,$ (6.506a. egyenlet)

$r = a$ -nál $\quad \mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi + \mathbf{v}_2 = 0.$ (6.506b. egyenlet)

Először a (6.505) egyenletet oldjuk meg. Könnyű belátni, hogy ezt kielégíti a

$$\mathbf{v}_2 = A\frac{\mathbf{v}_0}{r}$$ (6.507. egyenlet)

függvény, amelyben *A* egy állandót jelent. Vegyük $\mathbf{v}_2$ divergenciáját, és írjuk be a (6.503)-ba:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_2 = A\left(\mathbf{v}_0, \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) = -A\frac{(\mathbf{v}_0, \mathbf{r})}{r^3}.$$ (6.508. egyenlet)

$$\Delta\Phi = A\frac{(\mathbf{v}_0, \mathbf{r})}{r^3} = A\frac{(\mathbf{v}_0, \mathbf{r}^0)}{r^2},$$ (6.509. egyenlet)

ahol $\mathbf{r}^0 = \frac{\mathbf{r}}{r}$ az **r** irányú egységvektort jelöli. Ebből az egyenletből lehet a Φ sebességpotenciált kiszámítani.

Tegyük fel, hogy

$$\Phi = (\mathbf{v}_0, \mathbf{r})f(r).$$ (6.510. egyenlet)

Ebből

$$\operatorname{grad}\Phi = \mathbf{v}_0 f + (\mathbf{v}_0, \mathbf{r})\frac{df}{dr}\operatorname{grad} r = \mathbf{v}_0 f + (\mathbf{v}_0, \mathbf{r})\frac{df}{dr}\mathbf{r}^0.$$ (6.511. egyenlet)

Mivel $\mathbf{v}_2$ (6.507) szerint az $r = \infty$-ben zérus, (6.506a)-ból következik, hogy

$$\lim_{r\to\infty} f = -1, \qquad \lim_{r\to\infty} r\frac{df}{dr} = 0.$$ (6.512. egyenlet)

A gömb felületére vonatkozó (6.506b)-ből pedig

$$f(a) = -\frac{A}{a} \qquad \text{és} \qquad \left(\frac{df}{dr}\right)_{r=a} = 0.$$ (6.513. egyenlet)

Ha a (6.511) kifejezést (6.509)-be behelyettesítjük, ($\Delta\Phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi$ figyelembevételével) adódik, hogy

$$\left(\mathbf{v}_0, \mathbf{r}^0\right) r\frac{d^2 f}{dr^2} + 4\left(\mathbf{v}_0, \mathbf{r}^0\right)\frac{df}{dr} - A\frac{\left(\mathbf{v}_0, \mathbf{r}^0\right)}{r^2} = 0.$$ (6.514. egyenlet)

A $\left(\mathbf{v}_0, \mathbf{r}^0\right)$-val egyszerűsítve, az *f*-et meghatározó

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{4}{r}\frac{df}{dr} - \frac{A}{r^3} = 0$$ (6.505. egyenlet)

differenciálegyenletet kapjuk.

Ennek általános megoldása:

$$f(r) = B - \frac{A}{2r} - \frac{C}{3r^3}.$$ (6.516. egyenlet)

A (6.512) határfeltételből adódik, hogy $B = -1.$ A (6.513) határfeltételek pedig a másik két integrálási állandót határozzák meg. Nevezetesen

$$1 + \frac{A}{2a} + \frac{C}{3a^3} = \frac{A}{a},$$
$$\left(\frac{df}{dr}\right)_{r=a} = \frac{A}{2a^2} + \frac{C}{a^4} = 0,$$

amelyekből

$$A = \frac{3a}{2} \quad \text{és} \quad C = -\frac{3a^3}{4}.$$ (6.517. egyenlet)

Ezeket (6.516)-ba behelyettesítve,

$$f(r) = \frac{a^3}{4r^3} - \frac{3a}{4r} - 1,$$ (6.518. egyenlet)

és (6.510)-ből

$$\Phi = \left(\mathbf{v}_0, \mathbf{r}^0\right)\left(\frac{a^3}{4r^3} - \frac{3a}{4r} - 1\right).$$ (6.519. egyenlet)

Végül a (6.501), (6.502) és (6.507) alapján adódik a gömb körül áramló folyadék sebességtere:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0\left(\frac{a^3}{4r^3} - \frac{3a}{4r} - 1\right) + \frac{3a}{4r}\mathbf{r}^0\left(\mathbf{v}_0, \mathbf{r}^0\right)\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right).$$ (6.520. egyenlet)

A nyomáseloszlást a (6.500) egyenletből számíthatjuk ki. A (6.501), (6.502) és (6.505) figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\operatorname{grad} p = \eta \operatorname{grad} \Delta\Phi,$$

amiből

$$p = p_0 + \eta\,\Delta\Phi.$$ (6.521. egyenlet)

A p_0 később meghatározandó állandó. A $\Delta\Phi$ helyére a (6.509) kifejezést helyettesítve, a (6.517) alapján végül adódik

$$p = p_0 + \frac{3}{2}\frac{a\eta}{r^2}\left(\mathbf{v}_0, \mathbf{r}^0\right).$$ (6.522. egyenlet)

Ebből látszik, hogy p_0 a nyomás értékét jelenti a végtelenben.

A sebességtér és nyomáseloszlás ismeretében kiszámítható az a súrlódási erő, amelyet a folyadék fejt ki a gömbre.

Vezessünk be polárkoordinátákat úgy, hogy a polártengely a $\mathbf{v}_0$ irányába mutasson. Számítsuk ki először a feszültségtenzor komponenseit polárkoordinátákban a gömb felületén. A Függelék 8. pontja szerint

$$\left(\sigma_{rr}\right)_{r=a} = \left[-p + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}\right]_{r=a},$$

$$\left(\sigma_{r\vartheta}\right)_{r=a} = \eta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - \frac{v_\vartheta}{r}\right]_{r=a}.$$ (6.523. egyenlet)

$\sigma_{r\vartheta} \equiv 0.$

A sebességvektor polárkomponensei

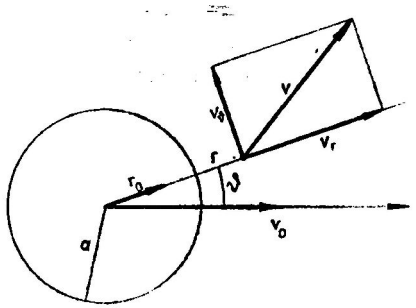
$$v_r = -v_0 \cos\vartheta\left(1-\frac{3a}{2r}+\frac{a^3}{2r^3}\right),$$

$$v_\vartheta = v_0 \sin\vartheta\left(1-\frac{3a}{4r}+\frac{a^3}{4r^3}\right), \quad \text{(6.524. egyenlet)}$$

$$v_\varphi = 0.$$

ϑ a $\mathbf{v}_0$ és az $\mathbf{r}_0$ vektorok által bezárt szöget jelenti *(87. ábra).*

87. ábra -



A (6.524) figyelembevételével a feszültségtenzor komponenseire adódik:

$$\left(\sigma_{rr}\right)_{r=a} = -p_0 - \frac{3\eta v_0}{2a}\cos\vartheta,$$

$$\left(\sigma_{r\varphi}\right)_{r=a} = \frac{3\eta v_0}{2a}\sin\vartheta, \quad \text{(6.525. egyenlet)}$$

$$\sigma_{r\varphi} = 0.$$

A gömbre ható súrlódási erő iránya megegyezik $-\mathbf{v}_0$ irányával, a nagysága pedig

$$F = \int P_n df = \int \left(\sigma_{rr}\cos\vartheta - \sigma_{r\vartheta}\sin\vartheta\right)_{r=a} df =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\sigma_{rr}\cos\vartheta - \sigma_{r\vartheta}\sin\vartheta\right)_{r=a} a^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

A feszültségkomponensek (6.525) értékeit behelyettesítve, egyszerű számítással adódik, hogy

$$F = 6\pi\eta a v_0. \quad \text{(6.526. egyenlet)}$$

Vektoriális alakban

$$\mathbf{F} = -6\pi\eta a \mathbf{v}_0. \quad \text{(6.526'. egyenlet)}$$

A súrlódó folyadékban állandó $\mathbf{v}_0$ sebességgel mozgó testre a mozgással ellentétes irányú (6.526') súrlódási erő hat. Ezt a kifejezést az itt használt közelítésben először Stokes vezette le (1845-ben), ezért a (6.526) képletet *Stokes-féle súrlódási törvénynek* nevezzük. Látható, hogy a súrlódási erő arányos a folyadék súrlódási együtthatójával, a gömb sugarával és sebességével.

A Stokes-féle súrlódási erőtörvény a fizika sok területén nyer alkalmazást, és a tapasztalattal jó egyezésben van, bár — mint a levezetésből kitűnik —csak közelítő jellegű. Megemlítjük, hogy az elemi töltést meghatározó Millikan-kísérletben is ezt a képletet használjuk.

Érdekes, hogv gömb esetében milyen jó eredményt ad ez a közelítés, amely során a Navier—Stokes-egyenlet nemlineáris tagját elhagytuk. Már Stokes rámutatott arra, hogy henger esetében hasonló számítás egészen rossz eredményre vezet. Könnyű belátni, hogy a $\varrho(\mathbf{v}, \operatorname{grad})\mathbf{v}$ tagnak az elhagyása a gömbtől nagy távolságra már nem jogosult. Becsüljük meg ennek a nagyságrendjét nagy *r*-eknél. Ebben a tartományban $\mathbf{v} \approx -\mathbf{v}_0$, a grad *v* pedig $\approx \frac{v_0 a}{r^2}$. Az elhagyott tag tehát $\varrho v_0^2 a / r^2$ nagyságrendű. A grad *p* tag viszont $v_0 a\eta / r^3$ szerint viselkedik nagy *r*-eknél. A használt közelítés tehát akkor engedhető meg, ha

$$\varrho \frac{v_0^2 a}{r^2} \ll \frac{v_0 a\eta}{r^3},$$

ami azt jelenti, hogy

$$r \ll \frac{\eta}{\varrho v_0}.$$ (6.527. egyenlet)

Minél nagyobb a súrlódási együttható és minél kisebb a v_0 sebesség, annál nagyobb távolságig érvényes a fenti közelítés. Az $R = \varrho v_0 a / \eta$ Reynolds-számmal kifejezve azt mondhatjuk, hogy kis Reynolds-szám esetén ad a (6.526) jó közelítést.

Végeztek pontosabb számításokat is, amelyek során figyelembe vették a $\varrho(\mathbf{v}, \mathrm{grad})\mathbf{v}$ tagot kissé módosított formában. Oseen a $\varrho(\mathbf{v}, \mathrm{grad})\mathbf{v}$ helyett a $\varrho(\mathbf{v}_0, \mathrm{grad})\mathbf{v}$-t tekintette. Ez nagy távolságokon csak kissé tér el a valódi kifejezéstől, de lineáris marad, és emiatt az alapegyenletek megoldhatók. Eredményül azt kapta, hogy a súrlódási erő

$$\mathbf{F} = -6\pi\eta a\mathbf{v}_0\left(1+\frac{3}{8}R\right).$$ (6.528. egyenlet)

Ez a képlet megerősíti korábbi következtetésünket, miszerint a Stokes-féle erőtörvény kis Reynolds-számok esetén ad jó eredményt. Meg kell azonban említeni, hogy amikor a gömb sugara kisebb, mint a folyadék (vagy gáz) molekuláinak λ szabad úthossza, akkor — bár a Reynolds-szám kicsi — az eredményünk mégsem használható, ugyanis ebben az esetben az anyag folytonossági elmélete már nem alkalmazható. Ilyenkor az anyag molekuláris szerkezetét figyelembe vevő elméletet, az ún. statisztikus mechanikát kell használnunk. Cunningham statisztikus fizikai módszerekkel a gömbre ható erőre az

$$F = 6\pi\eta v_0 a\left(1+0,86\frac{\lambda}{a}\right)^{-1}$$

kifejezést kapta.

A turbulens áramlás

Az 56. pontban már megemlítettük, hogy ha a Reynolds-szám egy kritikus értéket túllép, a réteges áramlás turbulensbe megy át. Az ilyen áramlásnál az áramvonalak igen bonyolult képet mutatnak. A sebesség a tér adott pontjában rendszertelenül ingadozik valamilyen középérték körül, továbbá térbelileg is teljesen szabálytalanul változik. A csőbeli réteges áramlásnál a Navier—Stokes-egyenleteknek egzakt megoldását kaptuk, amelynek a Reynolds-szám minden értékére érvényesnek kellene lennie. Hogy a turbulencia egy bizonyos R_{kr} értéknél mégis bekövetkezik, azzal függ

össze, hogy ekkor a mozgásegyenletek megoldása instabillá válik. A turbulencia bekövetkezésénél tehát először azt kell megvizsgálnunk, hogy az alapegyenletek megoldása mikor lesz instabil.

Feltételezzük, hogy ismerjük a mozgásegyenleteknek egy stacionárius megoldását: $\mathbf{v}_0(x, y, z)$. Valamilyen külső hatással ezt megzavarjuk, aminek eredményeként a sebességtér megváltozik:

$$\mathbf{v}(x, y, z; t) = \mathbf{v}_0(x, y, z) + \mathbf{v}_1(x, y, z; t). \quad \text{(6.529. egyenlet)}$$

Az időtől függő $\mathbf{v}_1$ zavarról (perturbációról) feltesszük, hogy kicsi. Az eredő sebességtérnek a nem stacionárius áramlás Navier—Stokes-egyenleteit kell kielégítenie:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \operatorname{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\varrho}\Delta\mathbf{v}. \quad \text{(6.530. egyenlet)}$$

Ha a folyadék összenyomhatatlan, akkor még teljesülnie kell a

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \quad \text{(6.531. egyenlet)}$$

egyenletnek is. A nyomáseloszlást is felbontjuk két részre; a stacionárius áramlásnak megfelelő p_0-ra és a perturbációból származó p_1:

$$p = p_0 + p_1. \quad \text{(6.532. egyenlet)}$$

A stacionárius áramlásra vonatkozó ún. perturbálatlan mennyiségek

$$(\mathbf{v}_0, \operatorname{grad})\mathbf{v}_0 = -\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p_0 + \frac{\eta}{\varrho}\Delta\mathbf{v}_0,$$
$$\operatorname{div}\mathbf{v}_0 = 0 \quad \text{(6.533. egyenlet)}$$

egyenleteket elégítik ki.

Ha a (6.529) és (6.532) felbontást a (6.530)-ba és (6.531)-be behelyettesítjük, és tekintetbe vesszük a (6.533) egyenleteket, megkapjuk a zavart leíró $\mathbf{v}_1$ és p_1 mennyiségeket meghatározó differenciálegyenleteket. Mivel feltevésünk szerint kis zavarról van szó, a $\mathbf{v}_1$-ben magasabb rendű tagokat elhagyjuk a lineárisakhoz képest. Így a következő egyenletek adódnak:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t}+(\mathbf{v}_0,\,\mathrm{grad})\,\mathbf{v}_1+(\mathbf{v}_1,\,\mathrm{grad})\,\mathbf{v}_0=-\frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p_1+\frac{\eta}{\varrho}\,\Delta\mathbf{v}_1,$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}_1=0. \qquad \text{(6.534. egyenlet)}$$

Ez $\mathbf{v}_1$-re lineáris egyenletrendszer, amelynek együtthatói csak a helykoordináták függvényei. Az egyenletrendszer általános megoldása a határfeltételeket is kielégítő partikuláris megoldások szuperpozíciójaként állítható elő. Az *n*-edik partikuláris megoldás az időfüggést $e^{-i\omega_n t}$ alakban tartalmazza. Az ω_n mennyiség általában komplex:

$$\omega_n=\alpha_n+i\beta_n. \qquad \text{(6.535. egyenlet)}$$

A (6.534) egyenletek megoldása tehát

$$\mathbf{v}_1(x,\,y,\,z;\,t)=\sum_n a_n(t)\mathbf{w}_n(x,\,y,\,z) \qquad \text{(6.536. egyenlet)}$$

alakú, ahol

$$a_n(t)=A_n e^{\beta_n t}e^{-i\alpha_n t}, \qquad \text{(6.537. egyenlet)}$$

A_n pedig egy állandó.*[3]

Ha az ω_n „frekvencia" β_n képzetes része pozitív, akkor a $\mathbf{v}_{1n}$ zavar az időben exponenciálisan nő; ha pedig $\beta_n<0,$ akkor exponenciálisan csökken. A stabil megoldáshoz az kell, hogy valamennyi β_n negatív legyen.

Az áramlás stabilitásának a meghatározása konkrét feladatok esetén meglehetősen bonyolult. A tapasztalatok alapján azonban megállapítható, hogy a Reynolds-szám növelésével elérkezünk egy olyan R_{kr} kritikus értékhez, amelytől kezdve az áramlás egészen kis zavarokkal szemben instabillá válik. A fenti megoldás alapján ez úgy értelmezhető, hogy az $R=R_{kr}$-nál valamelyik módus frekvenciájának képzetes része pozitív lesz, és emiatt (6.537) szerint a megfelelő $\mathbf{v}_{1n}$ zavar exponenciálisan felerősödik az időben.

[3]* A (6.536) lényegében egy Fourier-sor. Ha a lehetséges ω_n frekvenciák összessége nem diszkrét sorozatot alkot, hanem folytonos, akkor a Fourier-sor helyett Fourier-integrál használandó.

A (6.536)—(6.537) megoldásból nyilvánvaló, hogy a Renyolds-számnak sok olyan kritikus értéke lehet, amelynél valamelyik β_n pozitívvá válik. Ezeket átlépve, a megfelelő módusok instabilak lesznek, és az áramlási képben minőségi változás következik be.

Megjegyezzük, hogy a (6.537) előállítás $\beta_n > 0$ esetben csak a zavar kezdetétől számított rövid ideig érvényes, mert az $e^{\beta_n t}$ tényező miatt igen hamar naggyá válik; a (6.534) egyenlethez viszont azzal a feltevéssel jutottunk, hogy $\mathbf{v}_1$ elsőrendűen kicsi. A valóságban az $|a_n(t)|$ nem nő minden határon túl, hanem egy véges határértéke van, amely a Reynolds-szám $R_{\text{kr}}^{(n)}$ kritikus értéke közelében még elég kicsi, és így a (6.537) megoldás használható. Ebből arra következtethetünk, hogy a turbulencia az áramlás instabillá válása miatt jelenik meg.

A kialakult turbulens áramlást — mint már említettük — az jellemzi, hogy a sebesség teljesen rendszertelenül változik. Ha a kialakulástól elég hosszú ideig várunk, akkor a kezdeti feltételek teljesen figyelmen kívül hagyhatók, és az áramlás leírására a statisztikus módszerek használandók. Az áramlási teret a sebesség középértékével jellemezzük, amelyet Reynolds nyomán a

$$\bar{\mathbf{v}}(x, y, z; t) = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} \mathbf{v}(x, y, z; \tau)\, d\tau \qquad \text{(6.538. egyenlet)}$$

képlettel definiálunk. A $\bar{\mathbf{v}}$ átlagsebesség az idővel lassan változó függvény, szemben a $\mathbf{v}(x, y, z; t)$-vel, amely rendszertelenül és gyorsan változik. A turbulencia elméleti leírásánál megelégszünk az átlagos mennyiségek (a sebesség és a nyomás középértékének) meghatározásával. Az ezekre vonatkozó alapegyenletek levezetése előtt az átlagolásra vonatkozó néhány fontosabb összefüggést határozunk meg.

Legyen *f* valamilyen hidrodinamikai mennyiség (pl. a nyomás vagy a sebesség valamelyik komponense). A (6.538) szerint értelmezett időbeli középértékét $\bar{f}$-sal, a középértéknek a valódi értéktől való eltérését f'-vel jelölve

$$f - \bar{f} = f'. \qquad \text{(6.539. egyenlet)}$$

Belátható, hogy fennállnak a következő összefüggések:

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}, \qquad \overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}, \qquad \overline{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}, \qquad \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}, \qquad \text{(6.540a. egyenlet)}$$

$$\overline{f_1 + f_2} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2, \qquad \text{(6.540b. egyenlet)}$$

$$\bar{\bar{f}}_1 = \bar{f}_1, \qquad \overline{\bar{f}_1 f_2'} = 0, \qquad \overline{\bar{f}_1 \bar{f}_2} = \bar{f}_1 \bar{f}_2. \qquad \text{(6.540c. egyenlet)}$$

A (6.540c) összefüggések csak közelítő érvényűek. Nézzük pl. az elsőt. Legyen *f(x)* egyváltozós függvény, amely felbontható egy lassan változó *g(x)* és egy rendszertelenül gyorsan változó *h(x)* függvény összegére:

$$f(x) = g(x) + h(x).$$

A $h(x)$ fejezi ki a turbulens áramlásban megnyilvánuló rendszertelen gyors változást, vagyis a *g(x)* körüli ingadozást. Ennek megfelelően a *h(x)* értéke gyakran válik zérussá. A (6.540b) szerint

$$\overline{f} = \overline{g} + \overline{h}.$$

A lassan változó *g*(*x*)-re nem túl nagy *l* intervallum esetén írható, hogy

$$\overline{g}(x) = \frac{1}{l}\int_{x-l/2}^{x+l/2} g(\xi)\,d\xi = \frac{1}{l}\int_{-l/2}^{l/2} g(x-\xi)\,d\xi \approx \frac{1}{l}\int_{-l/2}^{l/2} g(x)\,d\xi = g(x).$$

Legyen azonban az *l* olyan nagy, hogy ezen belül a *h(x)* sokszor felveszi a zérus értéket. Ekkor

$$\overline{h}(x) = \frac{1}{l}\int_{x-l/2}^{x+l/2} h(\xi)\,d\xi \approx 0.$$

Így adódik

$$\overline{f} = g(x).$$

Mégegyszer átlagolva,

$$\overline{\overline{f}} = \overline{g}(x) = g(x) = \overline{f}.$$

Hasonlóan látható be a többi összefüggés is.

Összenyomhatatlan folyadékot feltételezve, div **v** = 0. Vegyük ennek középértékét:

$$\overline{\mathrm{div}\,\mathbf{v}} = \frac{\overline{\partial v_x}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial v_y}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial v_z}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}_z}{\partial z} = 0.$$

A Navier—Stokes-egyenlet *x* komponensének középértéke

$$\varrho\left(\overline{\frac{\partial v_x}{\partial t}}+\overline{v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}}+\overline{v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}}+\overline{v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}}\right)=f_x-\overline{\frac{\partial p}{\partial x}}+\overline{\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x}}+\overline{\frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y}}+\overline{\frac{\partial \sigma'_{xz}}{\partial z}}. \qquad \text{(6.541. egyenlet)}$$

Hasonló szerkezetűek a másik két komponensre vonatkozó egyenletek is. Az átlagolásra vonatkozó (6.540a—c) összefüggések alapján érvényes a következő átalakítás:

$$\overline{v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}}+\overline{v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}}+\overline{v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}}=\overline{v}_x\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x}+\overline{v}_y\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial y}+\overline{v}_z\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial z}+\overline{v'_x\frac{\partial v'_x}{\partial x}}+\overline{v'_y\frac{\partial v'_x}{\partial y}}+\overline{v'_z\frac{\partial v'_x}{\partial z}},$$

ahol $v'_x=v_x-\overline{v}_x,\ v'_y=v_y-\overline{v}_y,\ v'_z=v_z-\overline{v}_z.$

Másrészt

$$v'_x\frac{\partial v'_x}{\partial x}+v'_y\frac{\partial v'_x}{\partial y}+v'_z\frac{\partial v'_x}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}v'^2_x+\frac{\partial}{\partial y}v'_xv'_y+\frac{\partial}{\partial z}v'_xv'_z-v'_x\left(\frac{\partial v'_x}{\partial x}+\frac{\partial v'_y}{\partial y}+\frac{\partial v'_z}{\partial z}\right).$$

A $\overline{\mathrm{div}\,\mathbf{v}}=0$ egyenletből következik, hogy

$$\overline{\frac{\partial v'_x}{\partial x}+\frac{\partial v'_y}{\partial y}+\frac{\partial v'_z}{\partial z}}=0.$$

Ezeket az átalakításokat (6.541)-be behelyettesítve, az első Navier—Stokes-egyenletből adódik, hogy

$$\left(\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial t}+\overline{v}_x\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x}+\overline{v}_y\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial y}+\overline{v}_z\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial z}\right)=f_x-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\sigma'_{xx}}-\varrho\overline{v'^2_x}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\sigma'_{xy}}-\varrho\overline{v'_xv'_y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\sigma'_{xz}}-\varrho\overline{v'_xv'_z}\right). \qquad \text{(6.542. egyenlet)}$$

Hasonló szerkezetű a másik két egyenlet. A szokásos jelöléssel

$$\varrho\left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_k}\right)=f_i-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{\sigma'_{ik}}+P_{ik}\right)\quad (i=x,y,z), \qquad \text{(6.543. egyenlet)}$$

ahol

$P_{ik} = -\varrho \overline{v_i' v_k'}$ (6.544. egyenlet)

A középértékekre vonatkozó (6.543) egyenleteket a turbulens áramlás Reynolds-féle alapegyenleteinek nevezzük. Az átlagos sebességre és nyomásra ugyanolyan alakú egyenletek érvényesek, mint a Navier—Stokes-egyenletek, csupán a feszültségtenzor módosul. A súrlódási tenzor középértékéhez hozzáadódik a (6.544) járulékos feszültségtenzor, amelynek elemei — mint látható — a sebességingadozások szorzatainak időbeli középértékével fejezhetők ki.

A Reynolds-egyenletek megoldásánál az okozza a nagy problémát, hogy a járulékos feszültségtenzor elemei a sebességingadozások szorzatainak középértékeivel vannak kapcsolatban, és ezeket nem ismerjük. Prandtl és a magyar származású Kármán Tódor (1881—1963) a P_{ik} járulékos feszültségtenzort további feltevésekkel kifejezték a turbulens áramlás sebességkomponenseinek középértékeivel. Így az alapegyenletekben csak a sebesség és nyomás középértékei szerepelnek, a sebességingadozásoké nem. Ennek alapján sikerült a Reynolds-egvenleteket néhány egyszerű esetre megoldani. Pl. sík fal mentén és csőben kialakuló turbulens áramlásra. Az utóbbira vonatkozó, Kármán által meghatározott sebességeloszlást a kísérletek a cső teljes keresztmetszetére igazolták.

A Prandtl-féle határréteg-elmélet

Sok tapasztalat mutatja, hogy kis belső súrlódású folyadékok áramlása jó közelítéssel leírható úgy, mintha a folyadék ideális volna. Jelentősebb eltérés a szilárd falak vagy testek közelében érzékelhető. Erről könnyen meggyőződhetünk az ideális és a súrlódó folyadékok alapegyenleteinek az összevetéséből. Ugyanis ha az η súrlódási együttható olyan kicsi, hogy a Navier—Stokes-egyenletben szereplő $\eta \Delta \mathbf{v}$ tag járuléka a többihez képest elhanyagolható, akkor az ideális folyadék Euler-egyenleteit kapjuk. Az előbbiek a sebességre másodrendűek, míg az utóbbiak elsőrendűek. Ennek megfelelően mások a határfeltételek az ideális és a súrlódó folyadékokra. A súrlódó folyadék sebessége a szilárd fal mentén zérus, az ideális folyadék sebességének viszont csak a normális irányú komponense tűnik el, az érintőleges komponens tetszőleges lehet. Ebből arra következtethetünk, hogy a szilárd fal és az ideális folyadék érvényességi tartománya között van egy vékony réteg, amelyben a sebesség érintőleges komponense gyorsan zérussá válik. A súrlódási erő ebben a rétegben hatásos. A réteg vastagsága függ az η súrlódási tényezőtől. Természetesen a valóságban nincs éles határvonal e réteg és az ideális folyadék áramlási tere között. A *Prandtl-féle* ún. *határréteg-elmélet* feltételezi, hogy a szilárd falat vagy testeket körülveszi egy a falhoz tapadó keskeny határréteg, amelyben a folyadék áramlását a súrlódás erősen befolyásolja. Ebben a rétegben keletkeznek az örvények. Ehhez a réteghez csatlakozik egy olyan tartomány, amelyben a folyadék már ideálisnak tekinthető, de az áramlás örvényes. A faltól távolabb az áramlás örvénymentes potenciáláramlás. A súrlódó folyadékok Navier—Stokes-egyenleteit csak a határrétegben kell alkalmazni, de itt is jelentős egyszerűsítések tehetők.

Feltételezzük, hogy a szilárd fal a vizsgált tartományban sík felület. A koordinátarendszert úgy választjuk, hogy annak *xz* síkja essék egybe a fal felületével, az *y* tengely pedig a folyadék belsejébe mutasson. Feltesszük továbbá, hogy az áramlás síkbeli, a *z* koordinátától nem függ semmi.

A térfogati erőket figyelmen kívül hagyva, a Navier—Stokes-egyenletek a következők lesznek:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right),$$ (6.545. egyenlet)

Az összenyomhatatlan folyadékra vonatkozó kontinuitási egyenlet

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0.$$ (6.546. egyenlet)

A $\nu=\eta/\varrho$ a kinematikai viszkozitást jelenti.

Ezekhez az alapegyenletekhez járulnak a határfeltételek a határréteg két felületén:

$$v_x=v_y=0 \qquad \text{az} \qquad y=0-\text{nál} \qquad (\text{a szilárd fal mentén}),$$ (6.547. egyenlet)

$$v_x=v_{0x} \qquad \text{az} \qquad y=d-\text{nél},$$ (6.548. egyenlet)

ha *d*-vel jelöljük a határréteg vastagságát. $\mathbf{v}_0$ az örvénymentesen áramló ideális folyadék sebessége. A (6.548) határfeltételben a $\mathbf{v}_0$-nak csak az érintőleges komponense szerepel, mert ideális folyadék esetén ennek meg kell egyeznie a határrétegbeli áramlás sebességének *x* komponensével.

Azért, hogy a (6.545)—(6.546) egyenletekben jelentős egyszerűsítéseket tehessünk, megbecsüljük az egyes tagok nagyságrendjét. Megállapodunk abban, hogy ezeket a nagyságrendeket v_{0x}-re vonatkoztatjuk és a következő megfontolásokban a dimenziókat figyelmen kívül hagyjuk. A határréteg vastagságáról feltesszük, hogy nagyon kicsi. A mondottak szerint $v_{0x}\approx 1.$ Mivel v_x a határrétegben 0-ról v_{0x}-re nő ezért annak nagyságrendje legfeljebb 1, vagyis $v_x\approx 1.$ Másrészt v_x az *x* irányban lassan változik, emiatt a $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$, valamint a (6.516) alapján a $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ is ugyanilyen nagyságrendű. Ugyanez érvényes az $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$-re és a $\frac{\partial v_x}{\partial t}$-re is, mert *p* sem változik erősen az áramlás mentén, továbbá v_x-nek az idővel való változása is lassú. Tehát

$$v_x\approx\frac{\partial v_x}{\partial x}\approx\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\approx\frac{\partial v_x}{\partial t}\approx\frac{\partial v_y}{\partial y}\approx\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\approx 1.$$ (6.549. egyenlet)

A határfeltételek miatt a v_x az *y* irányban erősen változik, ugyanis a *d*szakaszon 0-ról v_{0x}-re növekszik. Ennélfogva $\frac{\partial v_x}{\partial y} \approx \frac{v_{0x}}{d} \approx \frac{1}{d}; \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \approx \frac{1}{d^2}$. Másrészt a $\frac{\partial v_y}{\partial y} \approx 1$ -ből következik, hogy $v_y \approx d$ és ennek megfelelően $\frac{\partial v_y}{\partial x} \approx \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \approx \frac{\partial v_y}{\partial t} \approx d$, továbbá $\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \approx \frac{1}{d}$.

Ezeket összefoglalva,

$$v_y \approx \frac{\partial v_y}{\partial x} \approx \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \approx \frac{\partial v_y}{\partial t} \approx d,$$
$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \approx \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \approx \frac{1}{d}, \qquad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \approx \frac{1}{d^2}.$$ (6.550. egyenlet)

A (6.549), (6.550) nagyságrendeket figyelembe véve, a (6.545) első egyenletében a $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ a $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ mellett elhagyható, és így abból a $\nu / d^2 \approx 1$ adódik. Ez azt jelenti, hogy a határréteg vastagsága a ν négyzetgyökével arányos:

$$d \approx \sqrt{\nu} = \sqrt{\frac{\eta}{\varrho}},$$ (6.551. egyenlet)

illetve a (6.468) Reynolds-számmal kifejezve.

$$d \approx \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Eszerint minél nagyobb a súrlódási együttható (vagyis minél kisebb a Reynolds-szám), annál vastagabb a határréteg.

A (6.545) második egyenletéből a fenti nagyságrendek figyelembevételével adódik, hogy $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} \approx d \ll 1;$ ami azt jelenti, hogy a nyomás a határrétegen keresztül gyakorlatilag állandónak vehető, és értéke ugyanakkora, mint amit a határrétegen kívüli áramlási térben a potenciáláramlásra vonatkozó alaptörvények meghatároznak. A második egyenletet ezzel tulajdonképpen már figyelembe vettük, és ezért a v_x, v_y sebességkomponenseket a (6.545) első egyenletéből és a (6.546) kontinuitási egyenletből számíthatjuk ki. Így a határréteg áramlási terét meghatározó Prandtl-féle differenciálegyenletek a következők:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0.$$

(6.552. egyenlet)

Ezekhez járulnak a (6.547), (6.548) határfeltételek.

A (6.552) egyenletekből integrálás nélkül is fontos kvalitatív következtetések vonhatók le, amelyekkel számos tapasztalat érthetővé válik.

Mivel a szilárd fal mentén (6.547) szerint $v_x=v_y=0,$ stacionárius áramlás esetén érvényes a

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}=\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}$$

(6.553. egyenlet)

egyenlet. Ebből az egyenletből következtetni tudunk a rögzített *x*-nél értelmezett $v_x=v_x(y)$ függvény — az ún. sebességprofil — fal menti görbületére. Ugyanis — mint a matematikából ismeretes – az *f* (*x*) egyváltozós függvény *G* görbülete,

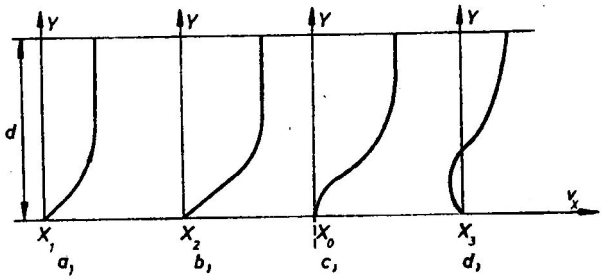
$$G=\pm\frac{f''}{\left(1+f'^2\right)^{3/2}}.$$

Ezt a képletet a sebességprofilra különböző *x* helyeken alkalmazva, a (6.553)-ból látszik, hogy annak görbületét a szilárd falnál a $\frac{\partial p}{\partial x}$ nyomásváltozás határozza meg. Ez pedig a faltól távoli potenciáláramlásból ismert. Ha a fal valamilyen x_1 helyén a $\frac{\partial p}{\partial x}<0,$ akkor a (6.553) szerint a görbület is az lesz *(88. a ábra).* Azon az x_2 helyen, ahol a $\frac{\partial p}{\partial x}=0,$ vagyis ahol a nyomás minimális, a görbület zérus. Ez azt jelenti, hogy ebben a pontban a $v_x=v_x(y)$ sebességprofil egyenesként hagyja el a falat *(88. b ábra).* Az x_2 után a nyomás növekszik az *x* koordinátával, tehát $\frac{\partial p}{\partial x}>0,$ és emiatt a sebességprofil görbülete előjelet vált *(88. c, d ábrák)*.

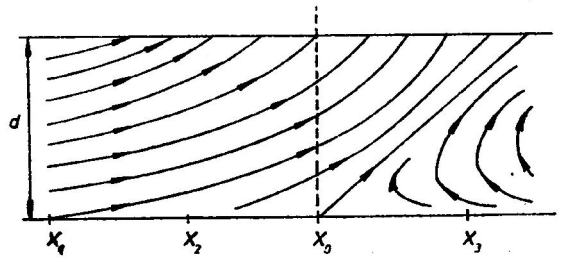
A Prandtl-féle egyenletek itt nem közölt vizsgálatából megállapítható, hogy az x_2 után van a falnak olyan x_0 pontja, ahol nemcsak a $v_x,$ hanem annak *y* szerinti deriváltja is zérus. Ebben a pontban a sebességprofil érintője tehát merőleges a falra. Az x_0 utáni $x>x_0$ helyeken a nyomás tovább

nő, és ezért a sebességprofil fal menti görbülete nagyobb lesz, v_x, a fal közelében ellenkező irányúvá válik. Az áramlás a fal közvetlen közelében az x_0 hely mindkét oldaláról az x_0 felé irányul. Az x_0 pontban a folyadékrészek leválnak a faltól, a folyadék belseje felé áramlanak, és magukkal viszik a keletkezett örvényeket. A fal x_0 pontját ezért *leválási* (vagy leszakadási) *pontnak* nevezzük. A fenti megfontolásokból az is következik, hogy ott fordulnak elő leválási helyek, ahol a folyadék növekvő nyomással szemben áramlik. A leválási, pont után a folyadék a fal közvetlen közelében ellentétes irányban áramlik, mint a faltól elég távol a potenciáláramlás terében. Ez energetikai meggondolásokkal könnyen belátható. Ugyanis a folyadék belsejében a folyadékrészek elég mozgási energiával rendelkeznek ahhoz, hogy a növekvő nyomásból származó fékezőerővel szemben is mozogjanak. Ezzel szemben a fal közvetlen közelében a súrlódás miatt annyira lelassulnak, hogy x_0-nál sebességük érintőleges komponense zérussá válik, így nincs annyi mozgási energiájuk, hogy a növekvő nyomással szemben mozogjanak, és ezért visszafordulnak a csökkenő nyomás irányába. Tehát a korábbival ellentétes irányban fognak mozogni. A sík fal menti határréteg áramlási terét szemlélteti a *89. ábra.*

88. ábra -



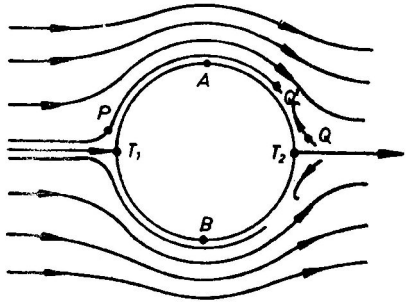
89. ábra -



Az itt követett gondolatmenet természetesen alkalmazható nemcsak sík fal, hanem görbült felület menti határrétegre is. Az örvények keletkezése és azok leválása még szemléletesebbé tehető pl. a kör keresztmetszetű henger körüli folyadékáramlással. Ezzel a síkbeli áramlással a súrlódás

figyelembevétele nélkül a 48. pontban már foglalkoztunk. Vizsgáljuk meg ezt most a súrlódás figyelembevételével a határréteg-elmélet alapján kvalitatívan. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a hengertől távoli áramlás az *x* tengellyel párhuzamos. A 48. pontban kapott áramlási képet a *90. ábrán* újra szemléltetjük. A sebesség a T_1 és T_2 torlódási pontokban zérus, maximális az *A* és *B* pontokban. A nyomás pedig legnagyobb a T_1 és T_2, legkisebb az *A* és *B* pontokban. A T_1 ponttól *A*-ig vagy *B-ig* a nyomás csökken, onnan T_2-ig nő. A sebességprofil görbülete *A-ig* negatív, *A*-ban zérus, és onnan továbbhaladva pozitív. A henger közvetlen közelében haladó áramvonalon a *P* pontból a vele szimmetrikus helyzetű *Q* pont felé mozgó folyadékrészecske nem ér el a *Q*-ig, mert a sebesség érintőleges komponense a súrlódás miatt a *Q'* leválási pontban zérus lesz. A *Q'* utáni szakaszon a folyadék visszafelé áramlik a nyomáscsökkenés irányában. De egyúttal forgásba is jön a henger felőli és a túlsó oldalára ható erők különbözősége miatt. Ugyanígy megy végbe az áramlás a henger alsó oldalán, de ellentétes értelemben. A folyadék forgó mozgása miatt a henger mögött két ellentétes forgásirányú örvény keletkezik, amelyek a határrétegről leválnak és az áramlásnak a hengertől távolabbi részeibe jutnak. Ez az örvényképződés és örvényleválás rendszeresen ismétlődik. Ennek megfelelően a henger mögött ún. *örvényút* keletkezik. Kármán vizsgálatai szerint az olyan örvényút lesz stabil, amelynél a felső és alsó örvények felváltva válnak le *(91. ábra)*. Az örvényút *h* szélességének és az örvénypontok *l* távolságának a *h/l* hányadosára Kármán elméleti számításai szerint 0,283 érték adódik. Mind ez az érték, mind az áramlási kép jól egyezik a kísérleti megfigyelésekkel.

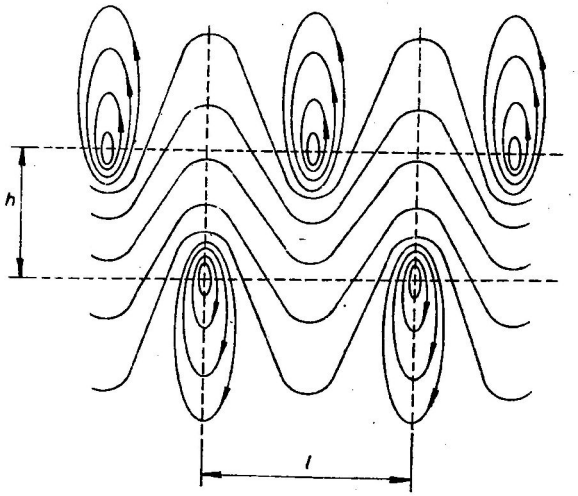
90. ábra -



Megemlítjük, hogy az áramló folyadékban levő test mögött keletkezett örvényekkel és azok leválásával van szoros kapcsolatban az ún. *közegellenállás*, azaz a folyadék mozgásirányában a testre ható erő. Ez könnyen belátható a következő megfontolással. Gondoljuk el, hogy nyugvó folyadékban egyenletesen mozgatjuk a hengert. A fizikai kép ugyanaz, mint az áramló folyadékban nyugvó henger esete. Most is örvények képződnek és leválnak a határrétegről. Az állandó örvénykeltéshez munka szükséges, ugyanis az örvények energiát és impulzust visznek magukkal. A test egyenletes mozgatásához tehát erőt kell kifejtenünk. Mivel a mozgás egyenletes, a testre az áramló folyadék ugyanilyen nagyságú, de ellentétes irányú erőt fejt ki. Ez a közegellenállás, amely a folyadék sűrűségével és a testhez viszonyított sebességének négyzetével arányos. A tapasztalat szerint ez sokszorosan felülmúlhatja a súrlódási együtthatóval arányos ún. *súrlódási ellenállást.* Lamináris áramlásoknál csak ez az utóbbi lép fel. Ezt számítottuk ki az 58. pontban gömbre, amelyet Stokes-féle súrlódási erőnek neveztünk. Az örvényképződéssel kapcsolatos ún.

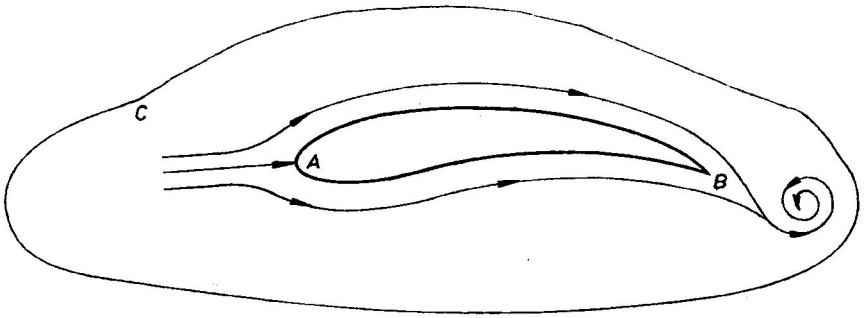
alakellenállás jelentősen csökkenthető a test alakjának alkalmas kiképzésével, pl. áramvonalas testek esetében. Ekkor ugyanis sokkal kisebb mértékű az örvényképződés.

91. ábra -



A 47.1 pontban megmutattuk, hogy ha az áramló folyadékban levő szilárd test körüli áramlás cirkulációs, akkor a testre a Kutta—Zsukovszkij-féle felhajtóerő hat. Ez az erő arányos a Γ cirkulációval. Megemlítettük, hogy a cirkuláció keletkezése a súrlódás következménye. Most röviden vázoljuk a cirkuláció keletkezésének mechanizmusát.

92. ábra -



Gondoljunk el egy szárnyfelületet, amely a levegőhöz viszonyítva mozogni kezd. Az elindulás kezdetén az áramlás örvény és cirkuláció nélküli potenciáláramlás. A súrlódás miatt a szárny körüli határrétegben a felület közelében lelassul az áramlás, és mivel a szárny felső oldala hosszabb, mint az alsó, a szárny hátsó végéhez alulról nagyobb sebességgel érkeznek a levegőrészek, mint felülről. Ennek hatására ott örvény keletkezik a *92. ábrán* feltüntetett forgásiránnyal. Ez az ún. *indulási örvény* leválik a határrétegről. Ez — mint könnyen belátható — azt eredményezi, hogy a szárny körül egy ellentétes forgásirányú cirkuláció keletkezik. Vegyük körül a szárnyat és az indulási örvényt olyan zárt *C* görbével, amely mentén az áramlás már súrlódásmentes potenciáláramlás. (A határréteg-elmélet szerint a faltól elég távol az áramlás ilyennek tekinthető.) A 44.3 pontban bemutatott Thomson-tétel szerint a *C*-re vett Γ cirkulációnak zérusnak kell lennie, mert az áramlás kezdete előtt az volt. Mivel az indulási örvény helyén $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \neq 0$, ezért ha csak az indulási örvény lenne, ellentmondásba kerülnénk a Thomson-tétellel. Γ csak úgy lehet zérus, ha a szárny körül az indulási örvény forgásirányával ellentétes cirkulációs áramlás keletkezik. Ez a szárny körüli cirkulációs áramlás megváltoztatja az áramlási teret, ugyanis ez hozzáadódik az eredeti potenciáláramláshoz. Ennek eredményeképpen a szárny felső oldalán növekszik, az alsón pedig csökken az áramlás sebessége olyan mértékben, hogy a felső és alsó határréteg sebessége a szárny hátsó *B* pontjában *(92. ábra)* megegyezzék. A keletkező cirkuláció nagyságát éppen ez a követelmény szabja meg. Ekkor ugyanis nem keletkezik újabb örvény, az indulási pedig levált, és az áramlással eltávolodik a szárny közeléből. A szárny körüli cirkulációs áramlás az eredeti potenciáláramlással együtt olyan sebességteret alakít ki, amelyben a nyomáseloszlás egy felfelé ható eredő erőt eredményez. Ez a 47.1 pontban már kiszámított Kutta— Zsukovszkij-féle felhajtóerő.

7. fejezet - A MECHANIKA ELVEI

A mechanika mozgástörvényének Newtontól származó megfogalmazása a differenciálszámítással együtt lehetővé tette, hogy pl. egy pontrendszer mechanikai állapotát a kezdeti állapotból a környezettel való kölcsönhatás ismeretében bármely későbbi időpontban előre meghatározzuk. A tapasztalat által megerősített elméleti mechanika hatása a tudományos gondolkodásra és a matematikán alapuló egzakt kutatási módszerek elterjedésére óriási volt. Mintegy két évszázadon keresztül sok kiváló matematikus érdeklődése irányult a mechanikai problémák felé, és tulajdonképpen ennek eredményeként alakult ki az ún. klasszikus mechanika, amely az elméleti fizikai tanulmányoknak ma is az alapját képezi. Ezek a matematikai jellegű kutatások nemcsak egy-egy fizikai probléma megoldásával járultak hozzá az elmélet teljes kiépítéséhez, hanem az alapegyenleteknek más alakban váló megfogalmazásait is adták. Így születtek a *mechanika elvei.* Ezek egyenértékűek a Newton-féle mozgásegyenletekkel, de sokszor előnyösebb a használatuk, mert különösen kényszermozgások esetén könnyebben kezelhetők, másrészt a mozgástörvény általánosabb érvényű megfogalmazását teszik lehetővé. Pl. a Hamilton-elv a koordináta-rendszertől független egyetlen egyenlet alakjában adja meg a mozgástörvényt.

Könyvünk felépítésénél választhattuk volna azt az eljárást is, hogy valamelyik elvet, pl. a leghatásosabbat, a Hamilton-elvet tekintjük kiindulási axiómának és ennek alapján tárgyaljuk a mechanika egyes fejezeteit. (A Landau—Lifsic: Elméleti fizika tankönyvsorozat ezt az utat választja.) Mi azért követtük a Newton-féle mozgásegyenletekre alapozott hagyományos tárgyalási módot, mert a középiskolai tanároknak ez adhat legtöbb segítséget a tanításhoz. Ugyanakkor a tanári munkához tudományos hátteret biztosító elméleti fizikai tanulmányok későbbi féléveiben kapcsolódunk a mechanika egy-egy elvéhez, ezért ebben az utolsó fejezetben a legfontosabb elveket ismertetjük néhány alkalmazással. A mechanika elvei nem bizonyítható axiómák, amelyek helyességéről és érvényességéről a tapasztalat útján győződünk meg.

61. A virtuális munka elve

Gondoljunk el egy N anyagi pontból álló mechanikai rendszert. Az i-edik tömegpont derékszögű koordinátáit x_i-, y_i-, z_i-vel a rá ható $\mathbf{F}_i$ erő komponenseit X_i-, Y_i-, Z_i-vel jelöljük. Legyen $\delta\mathbf{r}_i$ az i-edik anyagi pont olyan elgondolt lehetséges elmozdulása, amelyet a kényszerfeltételek megengednek. $\delta\mathbf{r}_i$-t *virtuális elmozdulásnak* nevezzük.[1] Azt kérdezzük, hogy a rendszer milyen feltételek mellett lesz egyensúlyban. A korábbi vizsgálatok eredményeit általánosítva, Jacob Bernoulli fogalmazta meg a mechanikai egyensúly legáltalánosabb elvét, amely szerint a rendszer akkor van egyensúlyban, ha a rá ható erők

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i$$

ún. *virtuális munkája* zérus, vagyis

[1] Megjegyezzük, hogy a $\delta\mathbf{r}_i$ időtartam nélküli ($\delta t=0$), csupán elgondolt elmozdulás.

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = 0.$$ (7.1. egyenlet)

Ha a rendszer teljesen szabadon mozoghat az erők hatása alatt, akkor a $\delta \mathbf{r}_i$ tetszőleges, és így a (7.1)-ből következik, hogy

$$\mathbf{F}_i = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$ (7.2. egyenlet)

Egyensúlyi állapotban tehát mindegyik tömegpontra ható erőnek zérusnak kell lennie.

Ha az anyagi pontok nem mozoghatnak szabadon, a $\delta \mathbf{r}_i$ lehetséges elmozdulások nem tetszőlegesek, hanem kényszerfeltételeknek vannak alávetve. Ilyenkor a (7.1) egyensúlyi feltételhez kiegészítő egyenletek járulnak, amelyeket a $\delta \mathbf{r}_i$-knek még ki kell elégíteniük. Egyelőre tegyük fel, hogy a kényszerfeltételek megadhatók

$$\varphi_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \ldots,\ \mathbf{r}_N) = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ s;\ s < 3N).$$ (7.3. egyenlet)

egyenletek alakjában. A kényszerfeltételek *s* számának azért kell kisebbnek lennie, mint az *N* anyagi pont 3*N* koordinátája, mert különben a koordináták a kényszerekkel teljesen meg volnának határozva, és így semmi lehetőség nem lenne a mozgásra. Gondoljuk el, hogy mindegyik tömegpont helyét megváltoztatjuk a virtuális elmozdulással $\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i + \delta \mathbf{r}_i$. A (7.3) kényszerfeltételeknek az $\mathbf{r}_i$–$\delta \mathbf{r}_i$ helyeken is teljesülniük kell:

$$\varphi_k(\mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 + \delta \mathbf{r}_2, \ldots,\ \mathbf{r}_N + \delta \mathbf{r}_N) = 0.$$ (7.4. egyenlet)

Fejtsük φ_k-t Taylor-sorba az $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$ helyek környezetében annak figyelembevételével, hogy a $\delta \mathbf{r}_i$ elmozdulások olyan kicsik, hogy az elsőrendűnél magasabbak járuléka elhagyható:

$$\varphi_k(\ldots \mathbf{r}_i + \delta \mathbf{r}_i, \ldots) = \varphi_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \ldots,\ \mathbf{r}_N) + \sum_{i=1}^{N} \mathrm{grad}_i\ \varphi_k \cdot\ \delta \mathbf{r}_i.$$ (7.5. egyenlet)

A grad_i-nél az index azt jelenti, hogy az *i*-edik tömegpont koordinátái szerint kell a differenciálásokat elvégezni.

A (7.3) kényszerfeltétellel tehát egyenértékű a

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{grad}_i \varphi_k \cdot\ \delta \mathbf{r}_i = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$ (7.6. egyenlet)

egyenletek megkövetelése.

Az egyensúly feltételét most is a (7.1) virtuális munka elve fejezi ki, de a $\delta\mathbf{r}_i$ elmozdulásoknak ki kell elégíteniük a (7.6) kényszerfeltételeket is. Utóbbiakat a Lagrange-módszerrel vesszük figyelembe. Nevezetesen a (7.6) feltételi egyenletek mindegyikét megszorozzuk egy-egy egyelőre ismeretlen λ_k állandóval, és azután hozzáadjuk őket a (7.1) főegyenlethez:

$$\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{F}_i+\sum_{k=1}^{s}\lambda_k\mathrm{grad}_i\varphi_k)\delta\mathbf{r}_i=0. \qquad \text{(7.7. egyenlet)}$$

A $\delta\mathbf{r}_i$ virtuális elmozdulások *3N* komponense közül most *f*=3*N*−*s* független, ezért csak *f* számú együttható lesz zérus. A λ_k Lagrange-féle multiplikátorokat viszont úgy választjuk meg, hogy a fennmaradó *s* számú együttható is eltűnjék. Formálisan tehát úgy tekinthetők a $\delta\mathbf{r}_i$-k, mintha valamennyien függetlenek lennének, és az együtthatóik ezért zérusok:

$$\mathbf{F}_i+\sum_{k=1}^{s}\lambda_k\mathrm{grad}_i\varphi_k=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N). \qquad \text{(7.8. egyenlet)}$$

Az itt szereplő

$$\sum_{k=1}^{s}\lambda_k\mathrm{grad}_i\varphi_k=\mathbf{F}_i' \qquad \text{(7.9. egyenlet)}$$

erő dimenziójú mennyiséget kényszererőnek tekintve, a (7.8) egyensúlyi feltétel így írható:

$$\mathbf{F}_i+\mathbf{F}_i'=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N). \qquad \text{(7.10. egyenlet)}$$

Eszerint egy pontrendszer mechanikai egyensúlyi állapotában az egyes anyagi pontokra ható $\mathbf{F}_i$ szabad és $\mathbf{F}_i'$ kényszererők eredőjének kell zérusnak lennie, ha a rendszer mozgása kényszerekkel korlátozva van.

A kényszererőnek (7.9) szerinti bevezetése itt természetes módon adódik anélkül, hogy valamilyen feltevést kellene rá tennünk. Könnyű belátni, hogy előírt felületen vagy görbén történő mozgásnál **F'** merőleges a felületre vagy a görbére. Tekintsünk egy tömegpontot, amely adott felületen kénytelen maradni. A felület egyenlete

$$\varphi(x,\ y,\ z)=0$$

A kényszererő

$$\mathbf{F}'=\lambda\ \mathrm{grad}\ \varphi.$$

Mivel grad φ a felület normálisa irányába mutató vektor, **F'** a felületre merőleges. Emlékezzünk vissza, a 6. pontban ezt külön fel kellett tételezni. Ez is azt mutatja, hogy a virtuális munka elve a mechanikai egyensúly feltételének legáltalánosabb megfogalmazása, és a kényszererő kifejezését is minden további feltevés nélkül szolgáltatja.

A későbbiek szempontjából célszerű más jelölésrendszert bevezetni, ezért már most áttérünk az új jelölésekre, és a virtuális munka elvét abban is felírjuk.

A tömegpontok x_i, y_i, z_i (derékszögű helykoordinátáira az x_i jelölést fogjuk használni a következő hozzárendeléssel:

$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_N, y_N, z_N \rightarrow x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_{3N}.$$ (7.11. egyenlet)

Hasonlóképpen az erőkomponenseket A X_i-vel jelöljük:

$$X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \ldots, X_N, Y_N, Z_N \rightarrow X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_{3N}.$$ (7.12. egyenlet)

Ebben a jelölésrendszerben a virtuális munka elve

$$\sum_{i=1}^{3N} X_i \delta x_i = 0.$$ (7.13. egyenlet)

A (7.6) kényszerfeltételek pedig

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \delta x_i = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots, s).$$ (7.14. egyenlet)

Ezeket a feltételeket a Lagrange-módszerrel figyelembe véve, a fentiekhez hasonló gondolatmenettel adódik a mechanikai egyensúly feltételére, hogy

$$X_i + X_i' = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 3N),$$ (7.15. egyenlet)

ahol

$$X_i' = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$ (7.16. egyenlet)

a kényszererő komponenseit jelenti.

61.1. A kényszerfeltételek osztályozása

A pontrendszer mozgását korlátozó kényszereket azok jellegétől függő feltételi egyenletekkel vesszük tekintetbe. Ezt tettük a (7.3) vagy a (7.14) alakban felírt egyenletekkel is. Mivel a kényszerek sokfélék lehetnek, ennek megfelelően a feltételi egyenletek is több alakban megfogalmazhatók. Legegyszerűbb példa erre a merev test, amelynél a kényszert a tömegpontok egymástól való távolságának az állandóságával fejezzük ki. Vagy egy másik példa a függőleges síkban lengő inga. Itt a fonál hossza állandó, és emiatt a tömegpont egy köríven kénytelen mozogni.

Az ilyen

$$\varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_{3N}) = 0 \quad \text{(7.17. egyenlet)}$$

alakban felírható kényszerfeltételeket (és magát a rendszert is) *holonomnak* nevezzük. A (7.17)-tel egyenértékű — mint előbb láttuk — a (7.14) alakban való felírás. A holonom kényszerfeltételek még további két csoportba sorolhatók aszerint, hogy a φ a koordinátákon kívül tartalmazza-e expliciten az időt vagy nem. Ha az időt nem tartalmazza — ahogy (7.17)-ben írtuk —, akkor *szkleronom;* és ha az időt is tartalmazza,

$$\varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_{3N}) = 0, \quad \text{(7.18. egyenlet)}$$

akkor *reonom.* Pontosabban: holonom-szkleronom és holonom-reonom kényszerfeltételek. Ez utóbbi esetben a (7.14) helyett a

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} dt = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ s) \quad \text{(7.19. egyenlet)}$$

feltételi egyenleteket használjuk. Itt dx_i az x_i koordinátának a dt időtartam alatti megváltozását jelenti *(dx_i* valódi, nem virtuális elmozduláskomponens.)

A (7.19)-nél általánosabb kényszerfeltételi egyenletek is megadhatók, nevezetesen:

$$\sum_{i=1}^{3N} a_{ki} dx_i + a_{k0}\ dt = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ s), \quad \text{(7.20. egyenlet)}$$

ahol az a_{ki}, a_{k0} együtthatók tetszőleges függvényei az x_i, t változóknak, de nem írhatók $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$, illetve $\frac{\partial \varphi_k}{\partial t}$ differenciálhányados alakjába. Másként kifejezve, a (7.20) egyenlet bal oldala nem teljes differenciál, szemben a (7.19)-cel. A (7.20) típusú kényszerfeltételeket *anholonomnak* nevezzük. Ezen belül is lehet még szkleronom vagy reonom, aszerint, hogy $a_{k0} = 0$, vagy $a_{k0} \neq 0$.

61.2 Néhány példa a virtuális munka elvére

a) A kétkarú emelő. Gondoljunk el egy *l* hosszúságú rudat, amely az O pontján átmenő, a rúdra merőleges tengely körül foroghat. A rúd egyik végén legyen egy teher, amely *Q* erőt fejt ki lefelé. Ezt a másik végén *P* erővel akarjuk egyensúlyban tartani. A rúd helyzetét egyetlen független adattal, a tengely körüli elfordulás szögével lehet egyértelműen megadni. A *Q* és a *P* erő támadáspontjainak virtuális elmozdulása δS_Q, illetve δS_P. A *93. ábra* szerint

$$\delta s_Q = -a\delta\varphi, \quad \text{ill.} \quad \delta s_P = b\delta\varphi, \quad \text{(7.21. egyenlet)}$$

ha a felfelé történő elmozdulást tekintjük pozitívnak. Egyensúly akkor van, ha a ható erők virtuális munkája zérus. Tehát

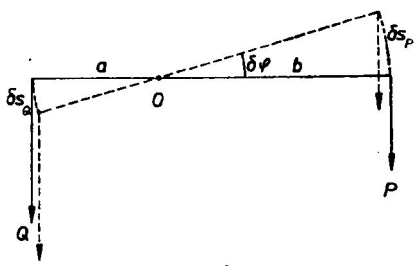
$$Q\delta s_Q + P\delta s_P = (Pb - Qa)\delta\varphi = 0.$$

amiből

$$Pb = Qa. \quad \text{(7.22. egyenlet)}$$

Ez azt jelenti, hogy az egyensúlynak az a feltétele, hogy a két erőnek az O forgástengelyre vonatkoztatott forgatónyomatéka egyezzék meg.

93. ábra -



b) *A merev test egyensúlyi állapota.* A III. fejezetben foglalkoztunk a merev testek mechanikájával. Megismertük, hogy a merev testnek a legáltalánosabb esetben hat szabadsági foka van (hat független adattal lehet a helyzetét egyértelműen megadni). Ennek megfelelően tulajdonképpen komolyabb indoklás nélkül írtuk fel a mozgásegyenleteket és az egyensúly feltételét. Most visszatérünk ehhez a problémához, és a virtuális munka elvéből levezetjük az egyensúlyi feltételeket.

A merev testet pontrendszernek tekintve, minden tömegpontjának elemi elmozdulása egy transzláció és valamilyen tengely körüli forgás összegére bontható:

$$\delta\mathbf{r}_i = \delta\mathbf{r}_0 + \delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}_i,$$ (7.23. egyenlet)

ahol $\delta\mathbf{r}_0$ a transzlációs elmozdulás, $\delta\boldsymbol{\varphi}$ az elemi elforgás szögvektora.

A virtuális munka elve szerint

$$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\delta\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i(\delta\mathbf{r}_0 + \delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}_i) = \delta\mathbf{r}_0\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i + \delta\boldsymbol{\varphi}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i = 0$$

Mivel a $\delta\mathbf{r}_0$ és a $\delta\boldsymbol{\varphi}$ vektorok tetszőlegesek lehetnek, az együtthatóiknak zérusnak kell lenniük:

$$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N}\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i = 0.$$ (7.24. egyenlet)

Az első egyenlet a merev testre ható erők eredőjének, a második pedig az erők eredő nyomatékának az eltűnését jelenti. Ezeknek a feltételeknek kell teljesülniük a merev test egyensúlyi állapotában. Az a) pontbeli példa a (7.24) második egyenletének a rögzített tengely körül forgó egy szabadsági fokú merev testre vonatkozó speciális esete.

c) *A mozgócsiga.* A *94. árán* rajzolt mozgócsigára akasztott teher súlya legyen *Q.* Ezt a kötél szabad végén kifejtett *P* húzóerővel mozgatjuk. Kérdés, hogy milyen *P* erőnél lesz a rendszer egyensúlyban? A kötél végének elmozdulása legyen δp*,* a teher emelkedése δq*.* A virtuális munka elve szerint egyensúly esetén

$$P\delta p - Q\delta q = 0.$$

A δp és δq nem függetlenek egymástól, hanem $\delta p = 2\delta q$*;* ezért

$$2(P-Q)\delta q = 0.$$

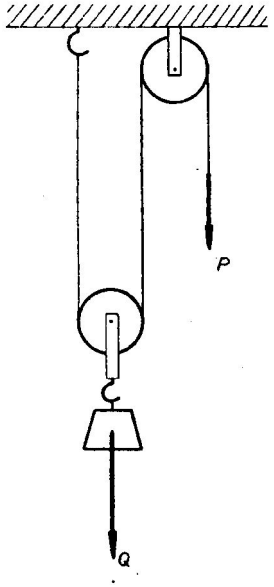
Ebből

$$P = \frac{Q}{2},$$

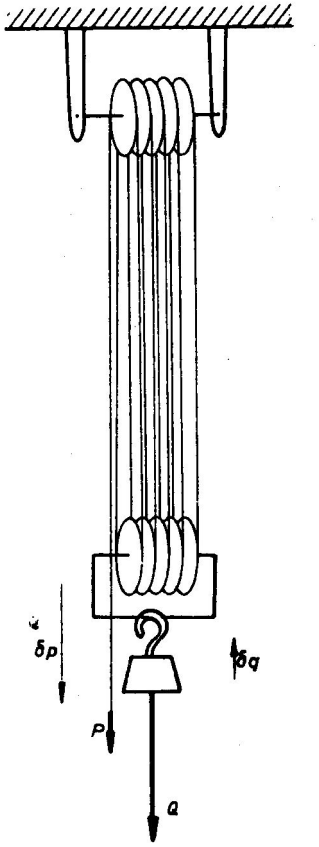
azaz a *Q* súlyú terhet feleakkora húzóerővel lehet egyensúlyban tartani.

A húzóerőt tovább lehet csökkenteni, ha mind a felső, mind a mozgócsiga helyére közös tengelyekre felfűzött *n* darab csigából álló rendszert teszünk és a felül rögzített kötelet előbb az alsó szélső, majd felváltva a felső és alsó csigákon átfektetjük. A kötél szabad végének δ*p* elmozdulása most 2*n*-szerese a teher δ*q* emelkedésének:

94. ábra -



95. ábra -



$\delta p = 2n\delta q$. Ennélfogva a virtuális munka elvéből következik, hogy az alsó mozgó csigafüzérre helyezett Q súlyú terhet

$$P = \frac{Q}{2n}$$

húzóerővel lehet egyensúlyban tartani.

62. A d'Alembert-elv

A mechanikai egyensúly általános feltételét kifejező virtuális munka elvéhez hasonló elvet talált d'Alembert a mozgástörvény egyetlen egyenlet alakjában történő megfogalmazására. Tulajdonképpen Jacob Bernoullinak az egyensúlyra vonatkozó munkásságát fejlesztette tovább, amikor az *N* anyagi pontból álló fizikai rendszer mozgástörvényét a

$$\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{F}_i-\dot{\mathbf{p}}_i)\delta\mathbf{r}_i=0 \qquad \text{(7.25. egyenlet)}$$

alakban írta fel. Itt $\mathbf{p}_i$ az *i*-edik tömegpont impulzusa, $\mathbf{F}_i$ a rá ható erők eredője, $\delta\mathbf{r}_i$ a virtuális elmozdulása. A (7.25) egyenletet nevezzük *d'Alembert-elvnek.* Eszerint a rendszer az erők hatására úgy mozog, hogy a $\delta\mathbf{r}_i$ virtuális elmozdulásokkal képezett fenti egyenlet mindig teljesül. A d'Alembert-elv egyaránt érvényes szabad és kényszermozgásokra. A kettő között mindössze az a különbség, hogy szabad mozgásnál a $\delta\mathbf{r}_i$-k tetszőlegesek, a kényszermozgásnál pedig a kényszerek által korlátozottak.

Vegyük először a szabad mozgásokat. Mivel most a $\delta\mathbf{r}_i$-k egymástól függetlenek, az egyenlet csak úgy teljesül tetszőleges $\delta\mathbf{r}_i$-kre, ha az együtthatók zérusok:

$$\dot{\mathbf{p}}_i=\mathbf{F}_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Ezek az egyenletek a pontrendszer Newton-féle mozgásegyenletei. A d'Alembert-elv tehát egyenértékű a Newton-féle mozgásegyenletekkel.

Tegyük most fel, hogy a rendszer nem mozoghat szabadon, mert kényszereknek van alárendelve. Legyenek a kényszerfeltételek holonom-szkleronomak. Ezek kifejezhetők a (7.6) alakban. Figyelembevételük a Lagrange-módszerrel történhet. Mindegyiket megszorozzuk egy-egy ismeretlen paraméterrel, és azután hozzáadjuk a (7.25) d'Alembert-elvhez:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{F}_i+\sum_{k=1}^{s}\operatorname{grad}_i\ \varphi_k-\dot{\mathbf{p}}_i\right)\delta\mathbf{r}_i=0.$$

Ebből a (7.7) utáni gondolatmenetet követve adódik, hogy

$$\dot{\mathbf{p}}_i=\mathbf{F}_i+\sum_{k=1}^{s}\lambda_k\ \operatorname{grad}_i\ \varphi_k \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N). \qquad \text{(7.26. egyenlet)}$$

Ha a tömeg nem változik az időben, akkor $\dot{\mathbf{p}}_i=m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$ és így

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \operatorname{grad}_i \varphi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$ (7.27. egyenlet)

Ezek a kényszermozgásokra vonatkozó *Lagrange-féle elsőfajú egyenletek.* Mivel ezek vektoregyenletek, valójában 3*N* egyenletet jelentenek az ismeretlen $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$ függvényekre. Ismeretlenek a λ_k Lagrange-féle multiplikátorok is. Így az ismeretlenek száma 3*N*+*s*, de ugyanennyi az egyenletek száma is, mert a (7.27) *3N* egyenlethez *s* darab kényszerfeltétel járul. A mozgásprobléma tehát elvileg egyértelműen megoldható.

A d'Alembert-elv — mint láttuk — egyenértékű a Newton-féle mozgásegyenletekkel, de ezen túlmenően az az előnye, hogy egyetlen egyenlet alakjában fogalmazza meg a mechanika mozgástörvényét, amely egyaránt érvényes szabad és kényszermozgásokra.

Mi az előzőekben holonom-szkleronom kényszerfeltételeket tekintettünk, és így jutottunk a d'Alembert-elvből a Lagrange-féle elsőfajú egyenletek (7.27) alakjához. Ha a kényszerfeltételek anholonomak, akkor a (7.6) helyett a (7.20) általánosabb alakot kell figyelembe venni. Ugyanolyan gondolatmenettel, mint előbb, most az

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \mathbf{a}_{ki} \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$ (7.28. egyenlet)

mozgásegyenleteket kapjuk.

Végül felírjuk a d'Alembert-elvet és a Lagrange-féle elsőfajú egyenleteket az előző pontban bevezetett új jelölésekkel is. A d'Alembert-elv:

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i\ddot{x}_i - X_i)\delta x_i = 0.$$ (7.29. egyenlet)

Megjegyezzük, hogy ebben három egymás után következő m_i megegyezik egymással. Pl. $m_1 = m_2 = m_3$, mivel ezek ugyanazon m_1 tömegpontra vonatkoznak, ugyanis $x_1 = x_1$, $x_2 = y_1$, $x_3 = z_1$. A Lagrange-féle elsőfajú egyenletek holonom kényszerekre:

$$m_i\ddot{x}_i = X_i + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 3N),$$ (7.30. egyenlet)

anholonomakra:

$$m_i\ddot{x}_i = X_i + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k a_{ki} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 3N)$$ (7.30´. egyenlet)

A kényszert — ugyanúgy, mint az egyensúlyi problémáknál — erővel helyettesíthetjük, és ekkor a kényszererőre ugyanazt a kifejezést kapjuk, mint az előző pontban:

$$X_i' = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \quad \text{(7.31. egyenlet)}$$

vagy anholonom kényszernél:

$$X_i' = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k a_{ki}. \quad \text{(7.31´. egyenlet)}$$

A d'Alembert-elv alkalmazásaként megmutatjuk, hogy a merev testek mozgás-egyenletei a tömegközéppont mozgástételét, valamint az impulzusnyomatéktételt kifejező egyenletek.

Kiindulunk a d'Alembert-elv (7.25) alakjából. A $\delta\mathbf{r}_i$ virtuális elmozdulás (7.23) kifejezését abba beírva,

$$\sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i)(\delta\mathbf{r}_0 + \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_i) = \delta\mathbf{r}_0 \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) + \delta\boldsymbol{\varphi} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) = 0.$$

Mivel $\delta\mathbf{r}_0$ és $\delta\boldsymbol{\varphi}$ egymástól függetlenek és tetszőlegesek, az egyenlet akkor teljesül, ha az együtthatóik zérusok:

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = \mathbf{F}, \quad \text{(7.32. egyenlet)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M} \quad \text{(7.33. egyenlet)}$$

A $\mathbf{p}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ összefüggés, valamint a tömegközéppont

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum m_i \ddot{\mathbf{r}}_i}{\sum m_i}$$

definíciójának alapján a (7.32)-ből adódik, hogy

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}, \quad \text{(7.34. egyenlet)}$$

ahol $m=\sum m_i$, **F** pedig a merev testre ható külső erők eredője. A (7.33)-ból pedig az impulzusnyomaték-tételt kapjuk:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i) = \mathbf{M}$$ (7.35. egyenlet)

Tehát a d'Alembert-elvből a lehető legegyszerűbben adódnak a merev test mozgás-egyenletei.

62.1 Az Atwood-féle ejtőgép

A födémhez rögzített állócsigán átfektetett kötél két végére m_1 illetve m_2 tömeget akasztunk. A lefelé irányuló földi nehézségi erő hat mindegyikre; a kötél és a csiga tömegétől, valamint a súrlódási erőtől eltekintünk. A két tömegből álló pontrendszer mozgását tanulmányozzuk. Válasszuk a koordináta-rendszer *z* tengelyét függőlegesen lefelé irányulónak. Az m_1 illetve m_2 tömegpont virtuális elmozdulása δz_1 illetve δz_2. A d'Alembert-elv szerint

$$(m_1 g - m_1 \ddot{z}_1)\delta z_1 + (m_2 g - m_2 \ddot{z}_2)\delta z_2 = 0.$$ (7.36. egyenlet)

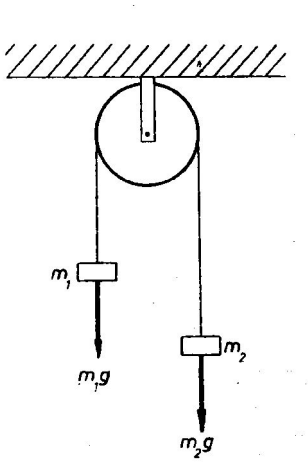
A két tömeg nem mozoghat egymástól függetlenül, mert az őket összekötő kötél hossza állandó. Ezért $\delta z_1 = -\delta z_2$, továbbá $\ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2$. Ezeket figyelembe véve, (7.36)-ból adódik, hogy

$$m_1(g - \ddot{z}_1) = m_2(g + \ddot{z}_1).$$ (7.37. egyenlet)

Ebből

$$\ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$ (7.38. egyenlet)

96. ábra -



Ha a két tömeg különböző, akkor egyenletes gyorsulással mozognak. Ha $m_1 > m_2$, akkor az m_1 lefelé, az m_2 fölfelé mozog. Az $m_1 < m_2$ esetben viszont fordítva mozognak: az m_1 fölfelé, az m_2 lefelé. Az m_1 tömegre ható kényszererőt az

$$m_1\ddot{z}_1 = m_1 g + Z_1' \quad \text{(7.39. egyenlet)}$$

Lagrange-féle elsőfajú egyenletből számíthatjuk ki. A (7.38) alapján ebből

$$Z_1' = -\frac{2m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g. \quad \text{(7.40. egyenlet)}$$

Hasonlóképpen a másik tömegre ható kényszerem $Z_2' = Z_1'$. Ezek reakcióereje feszíti meg a kötelet.

63. A Gauss-féle legkisebb kényszer elve

Gauss — a matematika fejedelme — is foglalkozott a mechanika alapkérdéseivel, és sikerült egy általános elvben megfogalmaznia a mechanika alaptörvényét, amelyet a legkisebb kényszer elvének nevezünk. Bevezetünk egy mennyiséget a *kényszer mértékére:*

$$Z=\sum_{i=1}^{3N} m_i\left(\ddot{x}_i-\frac{X_i}{m_i}\right)^2. \quad \text{(7.41. egyenlet)}$$

Ezzel egyenértékű a

$$Z=\sum_{i=1}^{3N}\frac{1}{m_i}\left(m_i\ddot{x}_i-X_i\right)^2. \quad \text{(7.41´. egyenlet)}$$

felírás. Ebből látszik, hogy *Z* valóban jellemző a kényszerre, hiszen a zárójelben az *i*-edik tömegpontnak a szabad mozgástól való eltérése szerepel.

Ezután megfogalmazzuk a legkisebb kényszer elvét: az *N* anyagi pontból álló rendszer adott erők és kényszerfeltételek mellett úgy mozog, hogy a kényszer (7.41) mértéke minden időpontban minimális legyen a gyorsulásnak a feltételek által megengedett valamennyi lehetséges változásával szemben.

Ez matematikai szempontból azt jelenti, hogy *Z* variációjának zérusnak kell lennie: δZ = 0. Mielőtt ezt a variációt kiszámítanánk, pontosan megfogalmazzuk, hogy mit variálunk és mely mennyiségeket tartunk változatlannak.

a) A rendszer mechanikai állapotát, tehát a tömegpontok helyét és sebességét nem változatjuk meg, vagyis

$$\delta x_i=0,\quad \delta\dot{x}_i=0.$$

b) Adottak a ható erők és a tömegek, tehát

$$\delta X_i=0,\ \delta m_i=0.$$

c) Egyedül a gyorsulás változhat, azaz

$$\delta\ddot{x}_i\neq 0.$$

A gyorsulás $\delta\ddot{x}_i$ variációi azonban nem tetszőlegesek, mert ki kell elégíteniük a kényszerfeltételeket. Egyelőre holonom-szkleronom kényszerekre korlátozódva (7.14) szerint

$$\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\delta\ddot{x}_i=0.$$

Differenciáljuk ezt az idő szerint, és vegyük figyelembe, hogy feltevésünk szerint $\delta x_i = \delta \dot{x}_i = 0$. Így adódik

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \delta \ddot{x}_i = 0. \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$
(7.42. egyenlet)

A kényszer mértékének (7.41') kifejezését a fenti előírások szerint variálva

$$\delta Z = 2 \sum_{i=1}^{3N} \left(m_i \ddot{x}_i - X_i \right) \delta \ddot{x}_i = 0.$$
(7.43. egyenlet)

A kényszerfeltételt a Lagrange-féle módszerrel vesszük figyelembe: (7.42)-t $-2\lambda_k$-val megszorozzuk, *k*-ra összegezzünk, és az összeget hozzáadjuk a (7.43) főegyenlethez. Így kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{3N} \left(m_i \ddot{x}_i - X_i - \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right) \delta \ddot{x}_i = 0.$$
(7.44. egyenlet)

A λ_k paramétereket úgy választjuk meg, hogy a $\delta \ddot{x}_i$ variációk közül *s*-nek az együtthatója legyen zérus. A fennmaradó $3N-s=f$ darab $\delta \ddot{x}_i$ pedig egymástól függetlenül tetszőlegesnek vehető, és emiatt az együtthatójuk zérus. Végeredményben tehát azt kapjuk, hogy valamennyi $\delta \ddot{x}_i$ együtthatója eltűnik:

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 3N).$$
(7.45. egyenlet)

Ezek a már korábban megismert Lagrange-féle elsőfajú egyenletek. Ezzel tulajdonképpen megmutattuk, hogy a Gauss-féle legkisebb kényszer elve a helyes mozgásegyenletekre vezet, tehát egyenértékű a Newton-féle megfogalmazással vagy a d'Alembert-elvvel.

A követett gondolatmenet természetesen ugyanígy alkalmazható akkor is, ha anholonom kényszerfeltételekről van szó, és így a Lagrange-féle elsőfajú egyenleteknek a (7.30') alakjához jutunk.

Befejezésül vegyük a lehető legáltalánosabb esetet. Legyen a kényszerfeltételek egy része holonom, másik része pedig anholonom, és mindegyik tartalmazza az időt is. A holonom-reonom feltételek:

$$\varphi_k(x_1,\ \ldots,\ x_{3N},\ t) = 0 (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$
(7.46. egyenlet)

és az anholonom-reonom feltételek:

$$\psi_l(x_1,\ \ldots,\ x_{3N}, \dot{x}_1,\ \ldots,\ \dot{x}_{3N},\ t) = 0 \qquad (l = 1,\ 2,\ \ldots, p).$$ (7.47. egyenlet)

Differenciáljuk a (7.46) egyenletet kétszer, majd a (7.47)-et egyszer az idő szerint:

$$\dot{\varphi}_k = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} = 0, \qquad \ddot{\varphi}_k = \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \ddot{x}_i + \ldots \right) = 0;$$

$$\dot{\psi}_l = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial \psi_l}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \psi_l}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i \right) + \frac{\partial \psi_l}{\partial t} = 0.$$

Most vegyük ezeknek a variációját a fenti a)—*c)* előírások szerint (csak a $\delta \ddot{x}_i \neq 0$):

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \delta \ddot{x}_i = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots, s);$$

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \psi_l}{\partial \dot{x}_i} \delta \ddot{x}_i = 0 \quad (l = 1,\ 2,\ \ldots, p).$$ (7.48. egyenlet)

A (7.48) mellékfeltételeket az előzőekhez hasonlóan vesszük figyelembe, végül a következő mozgásegyenleteket kapjuk:

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial \psi_l}{\partial \dot{x}_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots, 3N).$$ (7.49. egyenlet)

Ezek az egyenletek a Lagrange-féle elsőfajú egyenleteknek általánosításai a legáltalánosabb kényszerfeltételek esetére.

64. Az energiatétel kényszermozgások esetén

Az *N* anyagi pontból álló rendszer mozgásegyenletei kényszermozgások esetén a Lagrange-féle elsőfajú egyenletek. Ezek holonom kényszereknél

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots, 3N),$$ (7.50. egyenlet)

míg anholonom rendszerre vonatkozóan

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k a_{ki} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 3N)$$ (7.51. egyenlet)

alakúak. Ezekhez a mozgásegyenletekhez járulnak időtől független kényszerek esetén holonom esetben a

$$\varphi_k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_{3N}) = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$ (7.52. egyenlet)

illetve anholonom esetben a

$$\sum_{i=1}^{3N} a_{ki} dx_i = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$ (7.53. egyenlet)

kényszerfeltételek. Az utóbbi esetben — mint korábban láttuk — a (7.53) egyenlet bal oldala nem teljes differenciál.

Egyelőre ezekkel az időtől független (szkleronom) kényszerekkel foglalkozunk. Szorozzuk meg a (7.50) egyenlet mindkét oldalát dx_i-vel és összegezzünk minden változóra:

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i dx_i = \sum_{i=1}^{3N} X_i dx_i + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} dx_i.$$ (7.54. egyenlet)

Az egyenlet bal oldala

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i dx_i = \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \dot{x} dt = d\,\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 = dE_k.$$ (7.55. egyenlet)

Ez a pontrendszer E_k mozgási energiájának a megváltozása.

A (7.54) jobb oldalának első tagja a rendszerre ható erők által végzett δ*A* munka; az utolsó tag pedig zérus. Ugyanis

$$\sum_{k=1}^{s} \lambda_k \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} dx_i = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k d\varphi_k = 0.$$

mert $d\varphi_k$ = 0 a (7.52) feltétel miatt.

Ugyanezt az eredményt kapjuk az anholonom-szkleronom kényszerek esetén is, ugyanis a jobb oldal megfelelő utolsó tagja most a (7.53) miatt tűnik el, a másik tagok pedig megegyeznek a holonom kényszereknél kapott tagokkal.

Az időtől független kényszerek esetén tehát a Lagrange-féle elsőfajú mozgásegyenletekből következik a

$$dE_k = \delta A$$ (7.56. egyenlet)

munkatétel. Ha az erők konzervatívak, akkor $\delta A = -dV = -dE_p$ és ekkor igaz a mechanikai energia megmaradásának a tétele:

$$E_k + E_p = \text{áll.}$$ (7.57. egyenlet)

Most nézzük az időtől függő kényszereket. Először ismét a holonom esetet. Ekkor a φ_k-k a koordinátákon kívül az időt is tartalmazzák expliciten:

$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{3N}; t) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, s).$$ (7.58. egyenlet)

Vegyük a φ_k-nak a teljes differenciálját

$$d\varphi_k \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} dt = 0.$$

Ebből adódik, hogy

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} dx_i = -\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} dt.$$ (7.59. egyenlet)

Helyettesítsük be ezt a (7.54) egyenletbe, és vegyük tekintetbe a (7.55)-öt, valamint a $\sum_{i=1}^{3N} X_i dx_i = \delta A$ egyenlőséget:

$$dE_k = \delta A - \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} dt.$$ (7.60. egyenlet)

Hasonló megfontolással adódik az anholonom-reonom kényszerek esetén, hogy

$$dE_k = \delta A - \sum_{k=1}^{s} \lambda_k a_{k0} dt.$$ (7.61. egyenlet)

A (7.60) és a (7.61) egyenlet azt fejezi ki, hogy az időtől függő kényszerek is munkát végeznek a rendszeren és ezáltal megváltoztatják annak mozgási energiáját. Ha a rendszerre ható erő konzervatív, akkor

$$d(E_k + E_p) = -\sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} dt.$$ (7.62. egyenlet)

illetve

$$d(E_k + E_p) = -\sum_{k=1}^{s} \lambda_k a_{k0} dt.$$ (7.63. egyenlet)

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a munkatétel és a mechanikai energia megmaradásának a tétele kényszermozgásoknál csak időtől független kényszerek esetén érvényes.

Az időtől függő energiaviszonyok szemléltetésére gondoljunk a teniszjátékra. A nyugvó teniszütőről a labda energiaváltozás nélkül pattan vissza. Ha viszont mozgatjuk a teniszütőt a labdával szemben vagy tőle el, akkor a róla visszapattanó labda energiája már megváltozik. A mozgó teniszütő energiát ad át vagy vesz el a labdától.

65. Általános koordináták. Lagrange-féle másodfajú egyenletek

Az előző pontokban tárgyalt d'Alembert-elvnél, illetve a Gauss-féle legkisebb kényszer elvénél a kényszereket mellékfeltételekkel kell figyelembe vennünk, és így jutunk a mozgásegyenletek Lagrange-féle elsőfajú alakjához. Felmerül a gondolat, hogy nem lehet-e a mozgástörvényeket olyan alakban megfogalmazni, amely már eleve figyelembe veszi a kényszereket és így nem kell azokat kiegészítő mellékfeltételként kezelni.

Gondoljunk megint egy N anyagi pontból álló rendszerre, amelynek mozgása korlátozva van s darab kényszerfeltétellel. A rendszer szabadsági fokainak száma tehát $f=3N-s$. Ha sikerülne f olyan q_k új koordinátát bevezetni, amelyek eleve alkalmazkodnak a kényszerekhez, akkor megszabadulnánk a kiegészítő kényszerfeltételektől, és a δq_k virtuális elmozdulások egymástól függetlenek lennének. Ennek illusztrálására vegyük azt a kényszermozgást, amelynél a rendszer egy adott felületen kénytelen maradni. A derékszögű koordináták használatánál a felület egyenlete kényszerfeltételként szerepel. De ha a felületi koordinátákat használjuk a derékszögűek helyett, és ezekben írjuk fel a mozgásegyenleteket, akkor a kényszerfeltétel már eleve figyelembe van véve, és így nincs szükség kiegészítő mellékfeltételre. Ez az eljárás általánosan is megtehető.

Tegyük fel, hogy sikerül bevezetni f darab olyan q_k koordinátát, amely a kényszerekhez alkalmazkodik. Egyelőre holonom kényszerekről legyen szó. Az x_i derékszögű koordinátákról az újakra való áttérést az

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_f; t)$$ (7.64. egyenlet)

koordinátatranszformáció írja le. Az új q_k-kat *általános koordinátáknak* nevezzük. Ezek általában nem hosszúság dimenziójú mennyiségek. A későbbiekben szerepelnek a q_k általános koordináták idő szerinti deriváltjai is, amelyeket *általános sebességeknek* nevezünk.

Feladatul tűzzük a mozgásegyenletek meghatározását a q_k általános koordinátákban. Kiindulunk a derékszögű koordinátákban ismert

$$\sum_{i=1}^{3N}(m_i\ddot{x}_i - X_i)\delta x_i = 0 \quad \text{(7.65. egyenlet)}$$

d'Alembert-elvből. A (7.64) transzformációs képletből adódik, hogy

$$\dot{x}_i\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad \text{(7.66. egyenlet)}$$

$$\delta x_i\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k. \quad \text{(7.67. egyenlet)}$$

Ez az utóbbi kifejezés azért nem tartalmazza a δt variációt, mert virtuális elmozdulásnál csak a q_k koordináták változnak, az idő nem. (A virtuális elmozdulás definíciójánál fogva időtartam nélküli, elgondolt elmozdulás!)

Alakítsuk át először az erők virtuális munkáját:

$$\sum_{i=1}^{3N}X_i\delta x_i = \sum_{i=1}^{3N}\sum_{k=1}^{f}X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_{k=1}^{f}Q_k\delta q_k, \quad \text{(7.68. egyenlet)}$$

ahol

$$Q_k = \sum_{i=1}^{3N}X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad \text{(7.69. egyenlet)}$$

az ún. *általános erőkomponens,* amely általában nem erő dimenziójú mennyiség, viszont a $\sum_k Q_k\delta q_k$ mindenképpen munka dimenziójú.

Nézzük most a d'Alembert-elv másik tagját:

$$\sum_{i=1}^{3N}m_i\ddot{x}_i\delta x_i = \sum_{i=1}^{3N}\sum_{k=1}^{f}m_i\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k. \quad \text{(7.70. egyenlet)}$$

A jobb oldali *i*-re vonatkozó összeg átalakítható a következőképpen:

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_{k=1}^{f} \left[\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) - m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right].$$ (7.71. egyenlet)

Számítsuk ki az utolsó tagban szereplő idő szerinti deriváltat:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_k}.$$

A jobb oldal a (7.66) alapján $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$-val egyenlő. Másrészt ugyancsak a (7.66)-ból

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}.$$ (7.72. egyenlet)

Ezeket figyelembe véve, (7.71)-ből kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} \right] = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k},$$ (7.73. egyenlet)

ahol

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2$$ #[2]

a pontrendszer mozgási energiája.

Ezeket az átalakításokat (7.65)-be behelyettesítve, a d'Alembert-elvet végül is a következő alakba írhatjuk:

$$\sum_{k=1}^{f} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta q_k = 0.$$ (7.74. egyenlet)

[2] # Korábban a mozgási energiát E_k-val jelöltük. Az egyszerűbb írásmód kedvéért használjuk most a *K* betűt.

Mivel feltevésünk szerint holonom kényszerekről van szó, a q_k koordináták függetlenek egymástól, és emiatt a δq_k variácók tetszőlegesek.#[3] Ezért a (7.74) egyenlőség csak akkor teljesül, ha a δq_k-k együtthatói zérusok:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} = Q_k \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots, f).$$ (7.75. egyenlet)

Ezek az ún. *Lagrange-féle másodfajú egyenletek* a rendszer mozgásegyenletei a q_k általános koordinátákban.

Ha a ható erők konzervatívak, tehát

$$X_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i},$$ (7.76. egyenlet)

ahol $V = V(x_i)$ a rendszer potenciálja, akkor a Lagrange-egyenletek még egyszerűbb alakot vesznek fel. Ugyanis ekkor

$$Q_k = \sum_{i=1}^{3N} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}.$$ (7.76´. egyenlet)

Ezt (7.75)-be beírva,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (K-V)}{\partial q_k} = 0 \quad .$$

Mivel V csak a helykoordinátáktól függ, és független a $\dot{q}_k$ általános sebességektől, ezért minden további nélkül beírható az egyenlet első tagjában a $\dot{q}_k$ szerinti deriváltba. Így végül azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (K-V)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (K-V)}{\partial q_k} = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots, f).$$ (7.77. egyenlet)

A rendszer mozgási energiájának és a potenciálnak a K–V különbségét *Lagrange-függvénynek* nevezzük, és L-lel jelöljük:

$$L = K - V.$$ (7.78. egyenlet)

[3]# Ha a kényszerfeltételek holonomak, akkor azok csak a koordináták között teremtenek kapcsolatot, és így megtehető, hogy annyi független q_k koordinátát vezessünk be, amennyi a szabadsági fokok száma. Az anholonom feltételek nem integrálhatóak, ezért nem lehet őket olyan alakra hozni, amely csak a koordináták között ad összefüggést, és emiatt nem lehet kevesebb számú *független* koordinátát bevezetni.

A Lagrange-függvény a $q_k$koordinátáknak, a $\dot{q}_k$ sebességeknek és általában az időnek a függvénye: $L = L(q_1, q_2, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_f, t)$ .Ezt röviden így jelöljük: $L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$.

A Lagrange-féle másodfajú egyenletek holonom és konzervatív rendszerek esetén végül a következő alakba írhatók:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, f).$$ (7.79. egyenlet)

Ezek *f* darab másodrendű közönséges differenciálegyenletet jelentenek a q_k általános koordinátákra, amelyekből azok időfüggése meghatározható. A (7.79) Lagrange-egyenletek tulajdonképpen előírást adnak a mozgásegyenletek felírására.

Az eljárás menete a következő. A (7.64) és (7.66) transzformációs képletek segítségével felírjuk a *K* mozgási energiát a $\dot{q}_k$ sebességek, a *V* potenciált pedig a q_k koordináták függvényeként. Majd képezzük az *L=K–V* Lagrange-függvényt, és ebből (7.79) alapján egyszerűen felírjuk a mozgásegyenleteket. Végül azokat megoldjuk.

A mozgási energiára adódik:

$$K = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 = a + \sum_{k=1}^{f} a_k \dot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_{j,k}^{f} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k = K_0 + K_1 + K_2,$$ (7.80. egyenlet)

ahol

$$a = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2, \qquad a_k = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \qquad a_{jk} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}.$$ (7.81. egyenlet)

Ha a (7.64) transzformáció az időt expliciten nem tartalmazza (vagyis holonom-szkleronom kényszerfeltételről van szó), akkor a (7.80) első két tagja zérus, ekkor ugyanis $a = 0$, $a_k = 0$. A mozgási energia tehát

$$K = K_2 = \frac{1}{2}\sum_{j,k}^{f} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k.$$ (7.82. egyenlet)

A Lagrange-féle másodfajú egyenleteket a d'Alembert-elvből vezettük le. Utóbbiról megmutattuk, hogy egyenértékű a Newton-féle mozgásegyenletekkel. Következésképpen a Lagrange-egyenletek is egyenértékűek a Newton-félékkel. Ezt egy egy-szerű példán mutatjuk be. Vizsgáljuk egy *m* tömegű anyagi pont szabad mozgását konzervatív erőtérben. Derékszögű koordinátákat használva, $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$. A tömegpont Lagrange-függvénye

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z).$$

Ebből adódik, hogy

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z}.$$

Ezeket (7.79)-be helyettesítve, éppen a Newton-féle mozgásegyenleteket kapjuk:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

A Lagrange-féle másodfajú egyenletek valóban egyenértékűek a Newton-féle mozgásegyenletekkel.

Visszatérve a Lagrange-egyenletek (7.75) általános alakjához, megjegyezzük, hogy ha a Q_k általános erő felbontható egy Q_k^0 konzervatív és egy nem konzervatív Q_k^* részre:

$$Q_k = Q_k^0 + Q_k^*,$$

akkor (7.75) a következőképpen írható:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^* \quad (k = 1, 2, \ldots, f), \qquad \text{(7.83. egyenlet)}$$

ahol

$$L = K - V^0, \qquad \text{(7.84. egyenlet)}$$

$$Q_k^0 = -\frac{\partial V^0}{\partial q_k}.$$ (7.85. egyenlet)

Ilyen felbontás előfordulhat olyankor, amikor a rendszerben súrlódási erők is fellépnek.

Vegyük azt az egyszerű esetet, amikor a tömegpontra a konzervatív erőn kívül a sebességgel arányos, ellentétes irányú súrlódási erő is hat:

$$X_1^{(s)} = -k_1\dot{x}_1, \quad X_2^{(s)} = -k_2\dot{x}_2, \quad X_3^{(s)} = -k_3\dot{x}_3.$$ (7.86. egyenlet)

Ez a súrlódási erő a

$$D = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} k_j \dot{x}_j^2$$ (7.87. egyenlet)

disszipációs függvényből a sebességek szerint képezett negatív gradienssel adódik. Ugyanis

$$X_i^{(s)} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i}.$$ (7.88. egyenlet)

A Q^* általános erőkomponens

$$Q_k^* = \sum_{i=1}^{3} X_1^{(s)} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}.$$

A (7.72) összefüggés figyelembevételével

$$Q_k^* = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k}.$$ (7.89. egyenlet)

Ezt (7.83)-ba helyettesítve,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k}.$$ (7.90. egyenlet)

Nyilvánvaló, hogy ez az egyenlet érvényes akkor is, ha nem egy anyagi pontról, hanem pontrendszerekről van szó. Ekkor a disszipációs függvény

$$D=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3N}k_j\dot{x}_j^2.$$ (7.91. egyenlet)

Ahhoz, hogy a (7.90) Lagrange-egyenletekből a rendszer mozgásegyenleteit megkapjuk, a Lagrange-függvényen kívül ismernünk kell a *D* disszipációs függvényt is.

Vannak olyan speciális esetek, amikor a rendszer ugyan nem konzervatív, a mozgásegyenletek mégis felírhatok a Lagrange-féle másodfajú egyenletek (7.79) alakjában. Ez akkor lehetséges, ha a Q_k általános erőkomponens a

$$Q_k=-\frac{\partial U}{\partial q_k}+\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}$$ (7.92. egyenlet)

alakba írható. Az $U=U(q_k,\dot{q}_k)$ függvényt *általános potenciálnak* nevezzük. A Lagrange-függvénv ekkor

$$L=K-U.$$ (7.93. egyenlet)

A pontszerű elektromos töltés mozgását elektromágneses térben ilyen általános potenciállal írhatjuk le. Nézzük ezt kicsit részletesebben. Az elektrodinamikából ismeretes, hogy a ható erő ebben az esetben az ún. Lorentz-erő:

$$\mathbf{F}=e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right),$$ (7.94. egyenlet)

ahol *e* az elektromos töltést, **E** az elektromos, **H** a mágneses térerősséget jelenti, **v** a töltés sebessége, *c* a vákuumbeli fénysebesség.

Az elektromos és a mágneses térerősség az ún. elektromágneses potenciálokból származtatható az

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},$$
$$\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$$ (7.95. egyenlet)

összefüggések alapján.#[4] Az *U* általános potenciál

$$U=e\Phi-\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}.$$ (7.96. egyenlet)

[4]# L. Nagy Károly: Elektrodinamika, 3. kiad. 156. o. (Tankönyvkiadó, Bp. 1979)

A Lagrange-függvény ennek megfelelően

$$L = K - U = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2, \dot{y}^2, \dot{z}^2) - e\Phi + \frac{e}{c}(A_x \dot{x} + A_y \dot{y} + A_z \dot{z}).$$ (7.97. egyenlet)

Megmutatjuk, hogy a Lagrange-féle másodfajú egyenletek a ponttöltés ismert mozgásegyenleteit adják a (7.97) Lagrange-függvénnyel. Vegyük először a mozgásegyenlet *x* komponensét. Az erre vonatkozó Lagrange-egyenlet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$ (7.98. egyenlet)

Képezzük az itt előforduló deriváltakat:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -e\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{e}{c}\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{e}{c}A_x,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + \frac{e}{c}\frac{dA_x}{dt} = m\ddot{x} + \frac{e}{c}\left(\frac{dA_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}\right).$$

Helyettesítsük be ezeket (7.98)-ba:

$$m\ddot{x} + \frac{e}{c}\frac{dA_x}{\partial t} + \frac{e}{c}\left[\dot{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right) + \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right] + e\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0.$$

Ebből (7.95) figyelembevételével adódik, hogy

$$m\ddot{x} = e\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}\right) + \frac{e}{c}\left[\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right] = eE_x + \frac{e}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{H})_x.$$

Hasonlóképpen kapjuk a másik két komponensre

$$m\ddot{y} = eE_y + \frac{e}{c}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)_y,$$

$$m\ddot{z} = eE_z + \frac{e}{c}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)_z.$$

Ezek a jól ismert Newton-féle mozgásegyenletek. A (7.97) tehát az elektromágneses térben mozgó ponttöltés Lagrange-függvénye.

66. A fizikai inga

A Lagrange-egyenletek alkalmazásaként a fizikai inga mozgását vizsgáljuk. Fizikai ingán egy rögzített vízszintes tengely körül a nehézségi erő hatására ingamozgást végző merev testet értünk. A rendszer helyzetét egyetlen adattal, a nyugalmi helyzettől való kitérés szögével meg lehet határozni. A szabadsági fokok száma tehát egy, ezért egy mozgásegyenlet írja le a rendszer mozgását. Ennek felírásához először a Lagrange-függvényt kell meghatároznunk. Az ingát pontrendszernek tekintve, az *i*-edik tömegpont sebessége

$\mathbf{v}_i = r_i\dot{\boldsymbol{\vartheta}} = r_i\boldsymbol{\omega},$ (7.99. egyenlet)

ahol $\dot{\boldsymbol{\vartheta}} = \boldsymbol{\omega}$ a forgástengely irányába mutató szögsebességvektor, r_i pedig a tömegpontnak a forgástengelytől mért távolsága. A rendszer mozgási energiája

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}\sum_i \dot{\vartheta}^2 m_i r_i^2.$$

A jobb oldali összeg az ingának a forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \sum_i m_i r_i^2.$$

Ezért

$$K = \frac{1}{2}\Theta\dot{\vartheta}^2.$$ (7.100. egyenlet)

Most meghatározzuk a potenciális energiát. A *z* tengelyt függőlegesen lefelé irányítva, az *i*-edik tömegpontra ható nehézségi erő komponensei

$$F_{ix} = 0, \quad F_{iy} = 0, \quad F_{iz} = m_i g.$$

Ez az erő a

$$V = -\sum_i m_i g z_i$$ (7.101. egyenlet)

potenciálnak az *i*-edik tömegpont koordinátái szerint vett negatív gradiense. Vezessük be a rendszer tömegközéppontjának z_0 koordinátáját. Definíció szerint

$$z_0 = \frac{1}{m}\sum_i m_i z_i,$$

ahol $m = \sum_i m_i$ az inga teljes tömege. Ezt (7.101)-be beírva,

$$V = -mgz_0.$$ (7.102. egyenlet)

Fejezzük ki z_0-t a ϑ szöggel. A *97. ábra* szerint

$$z_0 = s\cos\vartheta.$$

ahol *s* az inga tömegközéppontjának a forgástengelytől mért távolsága. Így a potenciál

$$V = -mgs\cos\vartheta.$$ (7.103. egyenlet)

A fizikai inga Lagrange-függvénye

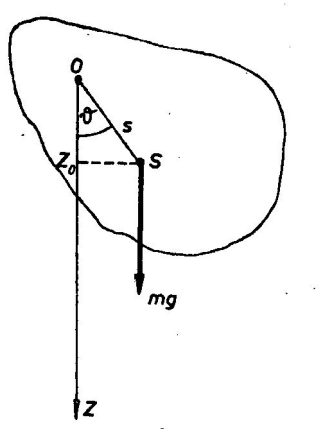
$$L\left(\vartheta,\dot{\vartheta}\right) = K - V = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2\Theta + mgs\cos\vartheta.$$ (7.104. egyenlet)

Ebből

$$\frac{\partial L}{\partial\vartheta} = -mgs\sin\vartheta,$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} = \Theta\dot{\vartheta}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} = \Theta\ddot{\vartheta}.$$

97. ábra -



A mozgásegyenlet tehát

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \Theta\ddot{\vartheta} + mgs \sin \vartheta = 0.$$ (7.105. egyenlet)

Rendezve

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{mgs}{\Theta} \sin \vartheta.$$ (7.106. egyenlet)

Ez a mozgásegyenlet teljesen olyan alakú, mint a függőleges síkban lengő fonálinga

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta.$$

mozgásegyenlete. Mindössze az a különbség, hogy a *g/l* helyén most az *mgs/Θ* mennyiség áll. Ez azt jelenti, hogy a fizikai inga úgy mozog, mint az

$$l = \frac{\Theta}{ms}$$ (7.107. egyenlet)

hosszúságú fonálinga. Ezért a fonálingára a 6.1 pontban kapott eredmények átvehetők a fizikai ingára a (7.107) egyenlőség behelyettesítésével. Ennélfogva a kis kitérésekkel lengő fizikai inga lengésideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}.$$ (7.108. egyenlet)

Az *l*-et a fizikai inga *redukált hosszának* nevezzük.

Mérjük fel az *O* forgástengelytől az *S* tömegközépponthoz húzott egyenesre az *l*-et. Az így adódó *O'* pontot *lengési középpontnak* hívjuk. A Steiner-tétel alapján belátható, hogy a lengési középponton átmenő, az eredeti forgástengellyel párhuzamos tengely körül lengő fizikai inga lengésideje ugyanaz, mint az eredeti lengésidő.

Ez a felismerés egyszerű eljárást ad a *g* nehézségi gyorsulásnak fizikai ingával történő meghatározására. Meg kell keresni az $\overline{OS}$ egyenesen azt az *O'* pontot, amely körül lengetve az ingát, a lengésidő ugyanaz lesz, mint az *O*-n átmenő tengely körüli lengetésnél. Az $\overline{OO'}$ távolság lesz az *l* redukált ingahossz. Így a nehézségi gyorsulás a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

képlet alapján a *T* és az *l* megmérésével kiszámítható.

Ehhez még be kell látnunk, hogy a két lengésidő valóban megegyezik. A Steiner-tétel szerint

$$l = \frac{\Theta}{ms} = \frac{\Theta_s + ms^2}{ms} = s + \frac{\Theta_s}{ms},$$ (7.109. egyenlet)

ahol Θ_s a tömegközépponton átmenő, az eredetivel párhuzamos tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték. Az *O'* körül lengő inga *l'* redukált hossza

$$l' = \frac{\Theta'}{m\overline{O'S}}.$$ (7.110. egyenlet)

Θ' az O'-n átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték. Mivel $\Theta' = \Theta_s + m\left(\overline{O'S}\right)^2$, másrészt $\overline{O'S} = \Theta_s / ms$,

$$l' = \frac{\Theta_s + \Theta_s^2 / ms^2}{\Theta_s / s} = s + \frac{\Theta_s}{ms} = l.$$ (7.111. egyenlet)

Ez viszont éppen azt jelenti, hogy a két lengésidő megegyezik.

67. Pontrendszer rezgései az egyensúlyi helyzet közelében

Gondoljunk egy *f* szabadsági fokú pontrendszerre, amelyre konzervatív erők hatnak és a rendszer holonom-szkleronom kényszereknek van alávetve. Mint korábban láttuk, ilyenkor a kényszerfeltételek kiküszöbölhetők *f* darab független általános koordináta bevezetésével. A rendszer mozgási energiája (7.82) szerint az általános sebességek homogén kvadratikus kifejezése:

$$K = \frac{1}{2}\sum_{j,k}^{f} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k. \qquad \text{(7.112. egyenlet)}$$

Az a_{jk} együtthatók a q_k koordináták ismert függvényei. A potenciális energia egyedül a q_k általános koordináták függvénye: $V = V(q_k)$.

Az egyensúlyi állapotot a virtuális munka elve szerint az jellemzi, hogy az általános erőkomponensek zérusok:

$$Q_k = 0. \qquad \text{(7.113. egyenlet)}$$

A (7.76') szerint ez azt jelenti, hogy

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots, f). \qquad \text{(7.114. egyenlet)}$$

Ebből az *f* darab egyenletből határozhatók meg az egyensúlyi helyzet q_k^0 koordinátái. Nem jelent semmilyen megszorítást, ha mi ezeket a továbbiakban zérusnak vesszük. A q_k általános koordináták tehát az egyensúlyi helyzettől való eltérést jelentik.

A pontrendszer olyan mozgását vizsgáljuk, amelynél a q_k koordináták csak kicsit térnek el az egyensúlyi helyzettől. A $V(q_k)$ potenciális energiát Taylor-sorba fejtjük az egyensúlyi helyzet közelében:

$$V(q_k) = V_0 + \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)_0 q_k + \frac{1}{2}\sum_{j,k}^{f}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}\right)_0 q_j q_k + \ldots \qquad \text{(7.115. egyenlet)}$$

Mivel a potenciál értéke mindig egy additív állandó erejéig van meghatározva, a potenciál zéruspontját önkényesen választhatjuk. Ennek megfelelően V_0-t zérusnak vesszük. A második tagban előforduló együtthatók a (7.114) egyensúlyi feltételek miatt zérusok. A ki nem írt tagok a koordinátákban harmad- és ennél magasabb fokúak. Ha az egyensúlyi helyzet környezetére szorítkozunk, akkor ezek figyelmen kívül hagyhatók. Marad tehát

$$V(q_k) = \frac{1}{2}\sum_{j,k}^{f}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}\right)_0 q_j q_k = \frac{1}{2}\sum_{j,k}^{f} b_{jk} q_j q_k, \qquad \text{(7.116. egyenlet)}$$

ahol

$$b_{jk} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}\right)_0. \qquad \text{(7.117. egyenlet)}$$

A rendszer Lagrange-függvénye

$$L(q_k, \dot{q}_k) = K - V = \frac{1}{2}\sum_{j,k}^{f}\left(a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k - b_{jk}q_j q_k\right). \qquad \text{(7.118. egyenlet)}$$

Az a_{jk} együtthatók is állandóknak vehetők az egyensúlyi hely környezetében, mert a hellyel való változásuk harmad- és ennél magasabb fokú járulékot eredményezne, ettől pedig azok kicsinysége miatt eltekintünk. A mozgásegyenletek az ezzel felírt Lagrange-féle másodfajú egyenletek:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ f).$$

A differenciálásokat elvégezve,

$$\sum_{k=1}^{f}\left(a_{jk}\ddot{q}_k + b_{jk}q_k\right) = 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ f). \qquad \text{(7.119. egyenlet)}$$

Ennek a másodrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszernek a megoldását

$$q_j = u_j \cos\left(\omega t + \alpha\right) \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ f). \qquad \text{(7.120. egyenlet)}$$

alakban keressük. Ezt a harmonikus rezgőmozgást leíró kifejezést (7.119)-be helyettesítve, u_j az amplitúdókra a következő lineáris algebrai egyenletrendszert kapjuk:

$$\sum_{k=1}^{f}\left(b_{jk}-\omega^2 a_{jk}\right)u_k=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ f).$$ (7.121. egyenlet)

Ennek a triviálistól különböző megoldása akkor van, ha az u_k együtthatóinak determinánsa eltűnik:

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\omega^2 a_{11} & b_{12}-\omega^2 a_{12} & \cdots & b_{1f}-\omega^2 a_{1f} \\ b_{21}-\omega^2 a_{21} & b_{22}-\omega^2 a_{22} & \cdots & b_{2f}-\omega^2 a_{2f} \\ \cdots & & & \\ b_{f1}-\omega^2 a_{f1} & b_{f2}-\omega^2 a_{f2} & \cdots & b_{ff}-\omega^2 a_{ff} \end{vmatrix}=0.$$ (7.122. egyenlet)

Ha a determinánst kifejtjük, ω^2-re *f*-edfokú algebrai egyenletet kapunk. Az egyenlet gyökei adják azokat a frekvenciákat, amelyekkel képezett (7.120) függvények megoldásai a (7.119) egyenletrendszernek. A megfelelő u_j amplitúdókat a (7.121) egyenletrendszerből lehet kiszámítani. (Pontosabban, ezek arányát lehet így meghatározni.)

67.1 Normálkoordináták. A rendszer sajátrezgései

A (7.119) egyenletrendszer megoldását az itt vázolt eljárásnál sokkal egyszerűbben megkaphatjuk az ún. *normálkoordináták* bevezetésével. Ugyanis, ha sikerülne olyan koordináta transzformációt találni, amely a (7.119) csatolt egyenletrendszert $\ddot{\eta}_j+\lambda_j\eta_j=0$ alakba vinné át, akkor az így adódó egyenletek megoldása rendkívül könnyű lenne, mert ezek az egyszerű harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenletei, és azok megoldása azonnal felírható. Ilyen transzformáció viszont egy algebrai tétel alapján található. Ez a tétel a következőképpen szól.

Ha az

$$A=\sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{f}a_{jk}x_j x_k \qquad (a_{jk}=a_{kj})$$
$$B=\sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{f}b_{jk}x_j x_k \qquad (b_{jk}=b_{kj})$$ (7.123. egyenlet)

két valós kvadratikus kifejezés közül az *A* pozitív definit, akkor mindig található olyan

$$x_i=\sum_{j=1}^{f}C_{ij}x'_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,f)$$
$$\det\left(C_{ij}\right)\neq 0$$ (7.124. egyenlet)

valós homogén lineáris transzformáció, amely az *A-t* és a *B-t* a következő kifejezésbe viszi át:

$$A = x_1'^2 + x_2'^2 + \ldots + x_f'^2,$$ (7.125. egyenlet)

$$B = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_f x_f'^2,$$ (7.126. egyenlet)

A $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_f$ mennyiségek az

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda - b_{11} & a_{12}\lambda - b_{12} & \ldots & a_{1f}\lambda - b_{1f} \\ \ldots & & & \\ a_{f1}\lambda - b_{f1} & a_{f2}\lambda - b_{f2} & \ldots & a_{ff}\lambda - b_{ff} \end{vmatrix} = 0$$ (7.127. egyenlet)

szekuláris egyenletnek a gyökei, amelyek mind valósak; és ha *B* is pozitív definit, akkor pozitívak is.

E tétel szerint a q_k általános koordináták helyett bevezethetünk olyan η_k koordinátákat a

$$q_j = \sum_{k=1}^{f} u_{jk}\eta_k \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ f)$$ (7.128. egyenlet)

transzformációval, amelyekkel a mozgási és potenciális energia a

$$K = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f} \dot{\eta}_k^2,$$ (7.129a. egyenlet)

$$V = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f} \lambda_k \eta_k^2$$ (7.129b. egyenlet)

alakot veszi fel. Az új η_k mennyiségeket *normálkoordinátáknak* vagy *Rayleigh-féle koordinátáknak* nevezzük. $\dot{\eta}_k$ az η_k-nak idő szerinti deriváltját jelenti. Az új koordinátákkal és sebességekkel kifejezett Lagrange-függvény

$$L(\eta_k,\ \dot{\eta}_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f} \left(\dot{\eta}_k^2 - \lambda_k \eta_k^2\right).$$ (7.130. egyenlet)

A $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$ Lagrange-egyenletekből az

$$\ddot{\eta}_k + \lambda_k \eta_k = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ f)$$ (7.131. egyenlet)

mozgásegyenletek adódnak a normálkoordinátákban.

Ezeknek az egyenleteknek három különféle megoldása lehet, aszerint, hogy a $\lambda_k \gtreqless 0$. Nevezetesen

$$\begin{aligned}
&\eta_k = C_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k}t + \delta_k\right), \quad ha \quad \lambda_k > 0,\\
&\eta_k = C_k t + D_k, \qquad\qquad ha \quad \lambda_k = 0,\\
&\eta_k = C_k e^{\sqrt{-\lambda_k}t} + D_k e^{-\sqrt{-\lambda_k}t}, \quad ha \quad \lambda_k < 0.
\end{aligned}$$ (7.132. egyenlet)

A C_k, D_k és δ_k mennyiségek tetszőleges integrálási állandók, amelyek a kezdeti feltételekből határozhatók meg.

A normálkoordinátákra kapott (7.132) megoldást a (7.128)-ba helyettesítve, megkapjuk az eredeti általános koordinátákat az idő függvényében. A $\lambda_k = \omega_k^2 > 0$esetben

$$q_j = \sum_{k=1}^{f} C_k u_{jk} \cos\left(\omega_k t + \delta_k\right) \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ f).$$ (7.133. egyenlet)

A rendszereknek azt az állapotát, amelyben az *i*-edik kivételével valamennyi C_k együttható zérus ($C_k = 0$, $k \neq i$), a rendszer *i*-edik *normálrezgésének* hívjuk. A normálkoordinátákban ez a rezgésállapot úgy jelenik meg, hogy valamennyi $\eta_k = 0$, kivéve a $\eta_i = C_i \cos\left(\omega_i t + \delta_i\right)$ rezgést. A régi koordináták viszont valamennyien ugyanazzal az ω_i frekvenciával és δ_i fázissal rezegnek. Ugyanis (7.133)-ból ebben az esetben adódik

$$q_j = C_i u_{ji} \cos\left(\omega_i t + \delta_i\right) \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots, f).$$ (7.134. egyenlet)

Mivel a $\lambda_i = \omega_i^2$ a (7.127) típusú szekuláris egyenletnek a gyökei, általában *f* darab független normálrezgés lehetséges. Az így adódó $\nu_i = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\lambda_i}$ mennyiségeket a rendszer *sajátfrekvenciáinak* nevezzük.

Előfordulhat, hogy a gyökök között vannak többszörös gyökök is. Pl. valamelyik gyök *p*-szeres. Ekkor ugyanazon frekvenciához *p* darab normálkoordináta tartozik. Az ilyen rezgésállapotot *p*-szeresen elfajultnak hívjuk.

Ha nem normálkoordinátákat használunk, akkor a rendszer rezgései (7.133) szerint a normálrezgések szuperpozíciójaként jelennek meg.

Ezek a megállapításaink arra az esetre vonatkoznak, amikor minden $\lambda_k = \omega_k^2 > 0$. A fenti algebrai tétel szerint ez akkor áll fenn, ha a *V* potenciális energia kvadratikus kifejezése pozitív definit. Ez a (7.129b) kifejezésből közvetlenül is látszik. Ebben az esetben a potenciálnak az egyensúlyi állapotban minimuma van. Ez a minimum éppen zérus. Ugyanis a koordinátákat az egyensúlyi állapottól számítottuk, és (7.129b) szerint *V*=0 az $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \ldots = \eta_f = 0$ helyen.

Ha a *V* potenciál nem pozitív definit, akkor a λ_k gyökök között lehetnek zérusok és negatív értékűek is. Ilyenkor a megfelelő normálkoordináták a (7.132) szerint az időben exponenciálisan nőnek. Ebben az esetben az alapfeltevésünkkel kerülünk ellentétbe, mert a koordináták nem lesznek kicsik. Az ilyen egyensúlyi állapot a külső zavarral szemben instabil. A potenciálnak ekkor az egyensúlyi állapotban maximuma vagy nyeregpontja van. Az egyensúlyi hely környezetében tehát csak akkor alakulnak ki rezgések külső zavar hatására, ha az egyensúlyi állapot stabil, vagyis ott a potenciálnak minimuma van.

67.2 Kényszerrezgések

Feltételezzük, hogy a pontrendszerre a konzervatív erőkön kívül olyan erő is hat, amely egyedül az időnek a függvénye. Ennek az erőnek általános komponenseit Q_k^*-gal jelöljük. Ezek is csak az időnek a függvényei: $Q_k^* = Q_k^*(t)\,(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ f)$.

A (7.128) transzformációval áttérünk az η_k normálkoordinátákra, és keressük a rendszer mozgásegyenleteit ezekben a koordinátákban. Először meg kell határoznunk a Q_k^* erők komponenseit az új koordinátákban. Ehhez abból a meggondolásból jutunk, hogy a virtuális munkának a két koordináta-rendszerben meg kell egyeznie. Jelöljük az η_k normálkoordinátáknak megfelelő erőkomponenseket Θ_k^*-gal. A mondottak értelmében

$$\sum_{i=1}^{f} Q_i^* \delta q_i = \sum_{j=1}^{f} \Theta_j^* \delta \eta_j. \qquad \text{(7.135. egyenlet)}$$

A (7.128) transzformáció következtében

$$\delta q_i = \sum_{j=1}^{f} u_{ij} \delta \eta_j. \qquad \text{(7.136. egyenlet)}$$

Ezt (7.135)-be helyettesítve,

$$\sum_{j=1}^{f} \left(\sum_{i=1}^{f} u_{ij} Q_i^* \right) \delta \eta_j = \sum_{j=1}^{f} \Theta_j^* \delta \eta_j. \qquad \text{(7.137. egyenlet)}$$

Mivel a $\delta\eta_j$ virtuális elmozdulások tetszőlegesek, a megfelelő együtthatóknak az egyenlet két oldalán meg kell egyezniük. Tehát

$$\Theta_j^* = \sum_{i=1}^{f} u_{ij} Q_i^*.$$ (7.138. egyenlet)

Ez éppen a keresett transzformáció.

Ezek után felírhatjuk a Lagrange-egyenleteket a normálkoordinátákban:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = \Theta_k^* \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots, f).$$ (7.139. egyenlet)

A Lagrange-függvény (7.130) kifejezését alapul véve, az

$$\ddot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = \Theta_k^*(t) \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots, f)$$ (7.140. egyenlet)

mozgásegyenleteket kapjuk. Ezek inhomogén, állandó együtthatós közönséges differenciálegyenletek. A partikuláris megoldást η_k^*-gal jelölve, a (7.140) egyenletek általános megoldása

$$\eta_k = C_k \cos\left(\omega_k t + \delta_k\right) + \eta_k^* \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots, f).$$ (7.141. egyenlet)

Legyen a Θ_k^* *(t)* erő időben periodikus:

$$\Theta_k^*(t) = A_k \cos\ \Omega t.$$ (7.142. egyenlet)

Könnyű belátni, hogy ekkor

$$\eta_k^* = \frac{A_k}{\omega_k^2 - \Omega^2} \cos\ \Omega t,$$ (7.143. egyenlet)

amely Ω frekvenciájú kényszerrezgést ír le.

A valóságban a fenti erőkön kívül súrlódási erők is fellépnek, amelyeket az esetek nagy részében a tömegpontok sebességével arányosnak vehetünk. A tömegpontra ható súrlódási erő derékszögű komponensei

$$X_i^{(s)} = -k_i \dot{x}_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 3N).$$ (7.144. egyenlet)

Általános koordinátákra áttérve, a megfelelő erőkomponens (7.89) szerint

$$Q_k^{(s)} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots, f),$$ (7.145. egyenlet)

ahol

$$D = \frac{1}{2}\sum_{j,\,k}^{f} D_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k, \quad D_{jk} = \sum_{i=1}^{3N} k_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$ (7.146. egyenlet)

a disszipációs függvény. A D_{jk} együttható a j és k indexekben szimmetrikus: $D_{jk} = D_{kj}$.

A Lagrange-egyenletek (7.90) szerint

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = Q_k^* \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots, f).$$ (7.147. egyenlet)

Q_i^* a csak az időtől függő erő komponense.

Ha most az η_k normálkoordinátákra térünk át a (7.128) transzformációval, a mozgási energia és a V potenciál a (7.129a), illetve a (7.129b) alakot veszi fel, de a D disszipációs függvény általában nem lesz főtengely alakú. Ugyanis három kvadratikus kifejezést általában nem lehet egyidejűleg főtengelyre transzformálni. Azonban azokban a speciális esetekben, amikor a D disszipációs függvény arányos a K mozgási energiával, a főtengely-transzformáció egyszerre sikerül. Ez fordul elő pl. akkor, ha a k_i súrlódási együttható arányos a tömegpontok tömegével. Ilyenkor a disszipációs függvény

$$D = \sum_{k=1}^{f} \varkappa_k \dot{\eta}_k^2$$ (7.148. egyenlet)

alakú. A Lagrange-egyenletek ebben az esetben az

$$\ddot{\eta}_k + 2\varkappa_k\dot{\eta}_k + \omega_k^2\eta_k = \Theta_k^* \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots, f)$$ (7.149. egyenlet)

mozgásegyenletekre vezetnek. Θ_k^* helyére a (7.142) kifejezést írva, a kényszerrezgések

$$\ddot{\eta}_k + 2\varkappa_k\dot{\eta}_k + \omega_k^2\eta_k = A_k \cos\ \Omega t \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots, f)$$ (7.150. egyenlet)

mozgásegyenleteit kapjuk. Ennek egy partikuláris megoldása

$$\eta_k^* = \frac{A_k \cos\left(\Omega t - \delta_k\right)}{\sqrt{\left(\omega_k^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\varkappa_k^2 \Omega^2}} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots, f),$$

(7.151. egyenlet)

ahol

$$\operatorname{tg} \delta_k = \frac{2\varkappa_k \Omega}{\omega_k^2 - \Omega^2}.$$

(7.152. egyenlet)

A rezgések amplitúdói az ω_k sajátfrekvenciák közelében felerősödnek. Ez a korábbról már jól ismert rezonancia jelensége.

68. A Hamilton-féle variációs elv

A mechanika mozgásegyenleteit eddig differenciálegyenletek alakjában adtuk meg. Gondoljunk a leginkább elterjedt Newton-féle tárgyalásmódra vagy az előző pontokban bemutatott Euler—Lagrange-egyenletekre. Az anyagi pont vagy pontrendszerek mechanikájában ezek másodrendű közönséges differenciálegyenletek az $\mathbf{r}_i(t)$ helyvektor koordinátáira vonatkozóan. Ezek megoldásával a kezdeti feltételek figyelembevételével egyértelműen meghatározható a rendszer mechanikai állapotának — a tömegpontok helyének és sebességének — az időbeli változása. Többször hangsúlyoztuk, hogy ez az elméleti mechanika alapfeladata, nevezetesen annak egyértelmű megadása, hogyan változik a fizikai rendszer mechanikai állapota az időben ismert külső hatásra. Az anyag folytonossági elméletében ugyanezt a programot követtük. Csupán az volt a különbség, hogy az alkalmazott modell természetéből következően az alapegyenletek parciális differenciálegyenletek voltak, amelyeknek az egyértelmű megoldásához a kezdeti feltételeken kívül határfeltételek megadása is szükséges.

A következőkben a mechanika mozgástörvényének olyan általános megfogalmazását mutatjuk meg, amely egyenértékű a Newton-félével, de már túlmutat a mechanikán. A fizika más fejezeteinek (elektrodinamikának, kvantummechanikának, kvantumtérelméletnek) az alaptörvényei is felírhatók ugyanolyan alakban, mint a klasszikus mechanikáé. A mozgástörvényeknek ilyen értelemben univerzális alakját, korábbi törekvések általánosításaként, a mechanikában Hamilton adta meg két dolgozatban 1834-ben és 1835-ben. Ezért ezt a szakirodalom *Hamilton-elvnek* nevezi. Az elvet először konzervatív mechanikai rendszerre korlátozódva fogalmazzuk meg: *A rendszer mechanikai állapota két rögzített t_1 és t_2 időpont között úgy változik az időben, hogy a Lagrange-függvénynek a (t_1, t_2) intervallumra vett idő szerinti integrálja szélsőérték:*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \text{extr}.$$

(7.153. egyenlet)

Ezen az értendő, hogy a kényszerek által megengedett lehetséges (elgondolt) állapotváltozásokhoz képest a valóságban bekövetkező mozgásállapot-változás a fenti integrált szélsőértékké teszi. Mivel a Lagrange-függvény a t időn kívül a q_k általános koordinátáknak és a $\dot{q}_k$ általános

sebességeknek a függvénye, a (7.153) ún. *hatásintegrálnak#*[5] ez a különleges tulajdonsága módot ad arra, hogy megkeressük a valódi mozgást leíró $q_k(t)$ függvényeket. A mechanika alapfeladatának a megoldása a Hamilton-elv alapján a (7.153) határozott integrált szélsőértékké tevő $q_k(t)$ függvények meghatározásából áll. Ezzel a matematikai feladattal a variációszámítás foglalkozik.

69. A variációszámítás alapfeladata

Keressük azt az $y(x)$ egyváltozós függvényt az (x_1,x_2) intervallumban, amellyel az

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x), y'(x); x\right] dx$$ (7.154. egyenlet)

határozott integrál szélsőértéket vesz fel. Itt $y' \equiv \frac{dy}{dx}$. A $f\left[y(x), y'(x); x\right]$ mennyiséget, amely az $y(x)$ függő változónak függvénye, *funkcionálnak* nevezzük. Szélsőértéken azt értjük, hogy kicsit megváltoztatva az $y(x)$ függvényt, az integrál elsőrendben nem változik. Az eljárás a következőképpen történik. Minden lehetséges y-t egy folytonosan változó α paraméter függvényeként állítunk elő úgy, hogy az α = 0-ra $y(0, x) = y(x)$ a szélsőértékre vezető függvény legyen:

$$y(\alpha, x)=y(x)+\alpha\eta(x),$$ (7.155. egyenlet)

ahol $\eta(x)$ tetszőleges függvénye az x független változónak és az $\eta'(x)$ deriváltja is folytonos. Mivel az y-t csak az intervallum belsejében változtatjuk meg, a végpontokon, nem, ezért $y(\alpha, x)$-nek az x_1 és x_2 helyeken meg kell egyeznie $y(x)$-szel. Ez az $\eta(x)$ függvényre azt a megszorítást jelenti, hogy $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. A *98. ábra* szemlélteti a lehetséges $y(\alpha, x)$ függvényeket. A (7.155) előállítás az $y(x) = y(0, x)$ görbe minden egyes pontjához hozzárendeli az $y(\alpha, x)$ görbék azon pontjait, amelyek x koordinátája megegyezik. A variációszámítás nyelvén ezt úgy fejezzük ki, hogy az $y(x)$függvényeket, valamint azok $y'(x)$ deriváltjait a (7.155)-nek megfelelően variáljuk, de az x független változót nem. A variációk jelölésére a δ szimbólumot használjuk. Az y variációján a

$$\delta y=\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha$$ (7.156. egyenlet)

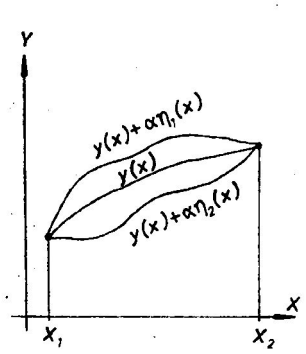
mennyiséget értjük. Mivel δ = 0,

$$\delta y'=\delta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{d}{dx}\delta y.$$ (7.157. egyenlet)

[5]# Az elnevezés onnan ered, hogy az integrál energia × idő=hatás dimenziójú.

Ha a (7.155) függvényeket (7.154)-be helyettesítjük, akkor az *I* integrál az α paraméter függvénye lesz:

98. ábra -



$$I(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2} f\left[y(\alpha,x),\, y'(\alpha,x);\, x\right] dx. \qquad \text{(7.158. egyenlet)}$$

A (7.154) határozott integrál szélsőérték-feladatát visszavezettük az *I* (α) függvény szélsőértékének a meghatározására. A matematikai analízisből tudjuk, hogy *I* (α)-nak akkor van szélsőértéke az α=0 helyen, ha

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0. \qquad \text{(7.159. egyenlet)}$$

Képezzük most az *I* (α) α a szerinti deriváltját. Mivel az integrálási tartomány végpontjai rögzítettek (a határokat nem variáljuk!), csak az integranduszt kell differenciálni:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial \alpha} f\left[y,y';\, x\right] dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}+\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right) dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}+\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial x}\right) dx. \qquad \text{(7.160. egyenlet)}$$

A második tagban a parciális integrálás szabályát alkalmazva,

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) dx=\left[\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha} dx. \qquad \text{(7.161. egyenlet)}$$

A (7.155)-ből $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x)$, és így az integrált részre adódik:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]_{x_1}^{x_2} = \left[\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\right]_{x_1}^{x_2} = 0.$$ (7.162. egyenlet)

Ugyanis $\eta(x)$ a határokon zérus. Ezért

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_{\alpha=0} n(x)dx.$$ (7.163. egyenlet)

A szélsőérték (7.159) feltétele szerint ennek zérusnak kell lennie. Mivel az $\eta(x)$ függvény tetszőleges, ez csak akkor teljesül, ha annak szorzótényezője eltűnik. Tehát

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_{\alpha=0} = 0.$$

Ha az *f*-be az eredeti $y(x) = y(0, x)$ függvényt írjuk, akkor az $\alpha = 0$ index elhagyható, és az integrál szélsőértékének feltételére adódik:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$ (7.164. egyenlet)

Ezt az egyenletet a határozott integrálok szélsőértékének vizsgálata során először Euler vezette le 1744-ben, ezért *Euler-egyenletnek* nevezzük.#[6]

Összefoglalásul tehát azt mondhatjuk, hogy az az *y(x)* függvény teszi a (7.154) határozott integrált szélsőértékké, amely kielégíti a (7.164) Euler-egyenletet.

A variációszámítás alapfeladatát az előbb bevezetett δ szimbólummal másképpen is kifejezhetjük. Az *I* integrál variációján a (7.156) mintájára a

$$\delta I = \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha$$ (7.165. egyenlet)

kifejezést értjük. A fentiek alapján az integrál szélsőértékének feltétele így is megfogalmazható. Legyen a

[6]# Amikor a variációs feladatot mechanikai (vagy általában fizikai) rendszerekre alkalmazzuk, az *f* funkcionál helyén az *L* Lagrange-függvény áll, és mint látjuk, az egyenlet megegyezik a Lagrange-féle másodfajú egyenlettel. Ezért a fizikában a (7.164) egyenletet Euler—Lagrange-egyenletnek hívjuk.

$$\delta I = \delta \int_{x_1}^{x_2} f\left[y,\, y';\; x\right] dx = 0.$$

(7.166. egyenlet)

Mivel a határokat nem variáljuk, a variációt az integráljel mögött elvégezhetjük:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \delta f \qquad dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \partial y' \right) dx.$$

A (7.157) figyelembevételével

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y \right) dx.$$

A második tagban parciális integrálást végezve,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y \qquad dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right]_{x_1}^{x_2}.$$

A δ*y* a határokon eltűnik, ezért az integrált rész zérus. Az intervallum belsejében viszont a δ*y* variációk tetszőlegesek, és emiatt a δ*I* csak akkor lesz zérus, ha a

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Euler-egyenlet teljesül. Tehát ugyanarra az eredményre jutottunk. A fizikai alkalmazásokban a δ szimbólum használata az elterjedtebb. A (7.156)-ból, illetve (7.165)-ből nyilvánvaló, hogy ez az α paraméteres fenti eljárásnak rövidebb, formális megfogalmazása.

Az eljárás minden további nélkül általánosítható arra az esetre is, ha az *f* funkcionál több függvényt tartalmaz:

$$f = f\left[y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x), \ldots, y_n(x), y_n'(x);\; x\right].$$

(7.167. egyenlet)

A fenti gondolatmenettel adódik, hogy

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial y_i'} \partial y_i' \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial y_i'} \frac{d}{dx} \partial y_i \right) dx = 0.$$

A parciális integrálásnál az integrált rész a $\delta y_i(x_1) = \delta y_i(x_2) = 0$ miatt eltűnik, ezért

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \delta y_i dx = 0$$

Mivel a, δy_i variációk tetszőlegesek, a δI variáció eltűnésének feltétele a

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad \text{(7.168. egyenlet)}$$

Euler-egyenletek teljesülése.

Megjegyezzük, hogy a variációszámítást lehet általánosítani arra az esetre is, amikor az $y_i(x)$ függvényeknek magasabb rendű deriváltjai is előfordulnak az integranduszban. Ekkor nem a (7.168) Euler-egyenletek adják az integrál szélsőértékének a feltételét. Mivel a fizikában a Lagrange-függvény ilyen magasabb deriváltakat általában nem tartalmaz, ezzel a kérdéssel nem foglalkozunk.

69.1 Két példa a variációszámításra

1. Határozzuk meg a sík két adott P_1 és P_2 pontját összekötő görbék közül a legrövidebbet. A két szomszédos pontot összekötő *ds* vonalelem

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx. \qquad \text{(7.169. egyenlet)}$$

A P_1-től P_2-ig terjedő vonal hossza

$$I = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx. \qquad \text{(7.170. egyenlet)}$$

A legrövidebb vonalra az jellemző, hogy az *I* integrál minimális értéket vesz fel, ha (7.170)-be e vonal $y = y(x)$ egyenletét helyettesítjük be. A keresett görbe $y = y(x)$ egyenletét úgy kapjuk meg, hogy az integrál δI variációját zérusnak vesszük, és meghatározzuk azt az $y = y(x)$ függvényt, amely ennek a követelménynek eleget tesz. Az előző pont szerint $y = y(x)$-nek ki kell elégítenie a (7.164) Euler-egyenletet. Az *f* funkcionál most

$$f = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Ebből

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Ezeket (7. l64)-be helyettesítve,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0.$$

Integrálva az *x* szerint,

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C,$$

ahol *C* tetszőleges állandó. Ez az egyenlet csak akkor teljesül, ha

$y' = A.$ (7.171. egyenlet)

Az *A* állandó a *C*-vel kifejezhető:

$$A = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}}.$$

A (7.171) enyenlet megoldása:

$y = Ax + B,$ (7.172. egyenlet)

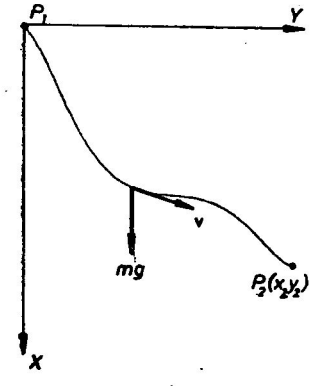
ahol a *B* egy másik integrálási állandó. Ez egy egyenesnek az egyenlete. Következésképpen a sík bármely két pontját összekötő vonalak közül a legrövidebb az egyenes. Pontosabban szólva, mi csak azt bizonyítottuk be, hogy az egyenes extremális vonal, de az adott esetben nyilvánvaló, hogy az *I* integrál szélsőértéke egyben a minimumnak felel meg. Az *A* és *B* integrálási állandókat abból a feltételből számíthatjuk ki, hogy a (7.172) egyenes átmegy a $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ pontokon. Egyszerű számítással adódik, hogy

$$A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{és} \quad B = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$ (7.172. egyenlet)

Hasonlóképpen lehet meghatározni a gömbfelület két pontját összekötő legrövidebb felületi vonalat. Az ívelemet gömbfelületi koordinátákkal kell kifejezni és megoldani az Euler-egyenleteket. Az így adódó legrövidebb vonalat a gömbfelület *geodetikus vonalának* nevezzük.

2. A másik példa legyen az ún. brachistochron-probléma. Gondoljunk el egy anyagi pontot, amely a függőleges síkban mozog úgy, hogy e sík $P_1(x_1, y_1)$ pontjából a nehézségi erő hatására kezdősebesség nélkül eljut ugyanezen sík $P_2(x_2, y_2)$ pontjába. Kérdés, hogy milyen pályán haladva érkezik el P_1-ből P_2-be a legrövidebb idő alatt. Jelöljük v-vel a mozgás görbe menti sebességét. A ds ívhossz megtételéhez szükséges idő: ds/v. Ennek megfelelően a P_1-től P_2-ig történő mozgás ideje

99. ábra -



$$t_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v}.$$ (7.173. egyenlet)

A koordináta-rendszer y tengelye legyen vízszintes, az x tengely pedig függőlegesen a nehézségi erő irányába mutasson. A P_1 pontot válasszuk origónak. Az energiamegmaradás tételéből következik, hogy

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgx,$$

amiből

$$v = \sqrt{2gx}.$$ (7.174. egyenlet)

Ezt (7.173)-ba helyettesítve

$$t_{12} = \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}\,dx.$$ (7.175. egyenlet)

Az $f[y, y'; x]$ funkcionál most a következő:

$$f[y, y'; x] = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}.$$ (7.176. egyenlet)

A (7.175) integrált az az *y*=*y*(*x*) függvény teszi minimálissá, amely kielégíti a (7.164) Euler-egyenletet. A (7.176) alapján adódik, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gx\left(1+y'^2\right)}}.$$

Ezeket a (7.164) Euler-egyenletbe helyettesítve,

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{2gx\left(1+y'^2\right)}} = 0.$$

amiből

$$\frac{y'}{\sqrt{2gx\left(1+y'^2\right)}} = \text{áll.}$$

Az integrálási állandót írjuk $\frac{1}{2\sqrt{ga}}$ alakba:

$$\frac{y'}{\sqrt{2gx\left(1+y'^2\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{ga}}.$$

Ebből négyzetre emeléssel kapjuk, hogy

$$\frac{y'^2}{x\left(1+y'^2\right)} = \frac{1}{2a}.$$

A változók szétválasztásának módszerével

$$y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$ (7.177. egyenlet)

Vezessünk be x helyett új változót az

$$x = a(1 - \cos\varphi)$$ (7.178. egyenlet)

helyettesítéssel. Így a (7.177) integrál a következő alakba írható:

$$y = \int a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi.$$

Ebből

$$y = a(1 - \sin\varphi) + \text{áll.}$$ (7.179. egyenlet)

Az állandó értéke zérusnak adódik, ha megköveteljük, hogy a görbe a feltevésünknek megfelelően átmenjen az origónak választott P_1 ponton. Így a (7.175) integrál szélsőértékének megfelelő vonal paraméteres egyenletrendszerére (7.178)-ból és (7.179)-ből kapjuk, hogy

$$x = a(1 - \cos\varphi),$$
$$y = a(\varphi - \sin\varphi).$$ (7.180. egyenlet)

A matematikából ismeretes, hogy ez az origón átmenő *ciklois* paraméteres egyenletrendszere. Tehát a nehézségi erő hatására, kezdősebesség nélkül mozgó anyagi pont cikloison jut el az origóból a függőleges síkban levő adott $P_2(x_2, y_2)$ pontba a legrövidebb idő alatt. Az a integrálási állandó abból a feltételből számítható ki, hogy a pályának át kell mennie az x_2, y_2 koordinátájú P_2 ponton.

Megjegyezzük, hogy a brachistochron-problémát először Johann Bernoulli oldotta meg 1696-ban. Tulajdonképpen ez volt a kiindulópontja az egész variációszámításnak.

70. A Hamilton-elv és a Lagrange-féle másodfajú egyenletek

A variációszámítás alapjainak megismerése után most visszatérünk a Hamilton-elvhez, amely szerint egy mechanikai rendszer úgy mozog, hogy a (7.153) hatásintegrál szélsőértéket vesz fel a kényszerek által megengedett lehetséges mozgásokhoz képest. Az S szélsőértékének az előző

pont szerint az a feltétele, hogy a δ*S* variáció legyen zérus. Az *f* funkcionál szerepét most a Lagrange-függvény veszi át, amely a $q_k(t)$ általános koordinátáktól és a $\dot{q}_k(t)$ általános sebességektől függ. Az *x* független változó helyére a *t* idő lép, amely a variáció során változatlan paraméter szerepét játssza. Ugyanis az *S* megváltozásának (variációjának) vizsgálata során a *t*-t nem variáljuk: δ*t*=0. Variáljuk viszont a q_k általános koordinátákat és a $\dot{q}_k$ sebességeket a következő feltételek szerint:

$$\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0,$$ (7.181. egyenlet)

$$\frac{d}{dt}\delta q_k = \delta\frac{dq_k}{dt} = \delta\dot{q}_k.$$ (7.182. egyenlet)

Az előző pont végeredményét felhasználva, azt kapjuk, hogy a hatásintegrál akkor lesz szélsőérték, ha teljesülnek a

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots, f)$$ (7.183. egyenlet)

Euler-egyenletek, amelyeket most mechanikai rendszerekre alkalmazva, Euler—Lagrange-egyenleteknek nevezünk. Ezek megegyeznek a d'Alembert-elvből a 65. pontban levezetett Lagrange-féle másodfajú egyenletekkel, amelyekről viszont megmutattuk, hogy egyenértékűek a Newton-féle mozgásegyenletekkel. A Hamilton-elvből kiindulva tehát a helyes mozgásegyenletekhez jutunk. A klasszikus mechanika megalapozásánál választhatjuk azt az utat is, hogy a Newton-axiómák helyett a Hamilton-elvet tekintjük axiómának. Ennek az az előnye van valamennyi tárgyalásmóddal szemben, hogy a mozgástörvénynek a koordináta-rendszertől független ún. invariáns megfogalmazását teszi lehetővé. Másrészt — miként erre már utaltunk —, a fizika más fejezeteinek alaptörvényei is felírhatok a Hamilton-féle variációs elv alakjában. Így ez a tárgyalásmód az egész fizikán végigvonuló univerzális jellegű. Itt csupán megemlítjük, hogy a variációs elvnek a relativitáselmélet követelményeit is kielégítő invariáns megfogalmazása nemcsak a helyes mozgástörvényekre vezet, hanem a rendszer dinamikai mennyiségeit magába foglaló energiaimpulzus-tenzort is megadja. Tulajdonképpen ebben van a variációs elvnek semmilyen más módszerrel össze nem hasonlítható heurisztikus ereje.

A vizsgált fizikai rendszert a Lagrange-függvénnyel jellemezzük, és ezt tekintjük a variációs elv funkcionáljának. Konzervatív mechanikai rendszerek esetén ez a mozgási és a potenciális energia különbségével egyezik meg.

A Hamilton-elv — bizonyos értelemben formálisan — általánosítható nem konzervatív rendszerekre is. Nevezetesen azt követeljük meg, hogy az

$$\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} (K + A)\, dt$$ (7.184. egyenlet)

integrál legyen szélsőérték. Ezzel egyenértékű a

$$\delta\bar{S} = \delta\int_{t_1}^{t_2} (K + A)\, dt = 0,$$
(7.185. egyenlet)

ahol

$$A = \sum_{i=1}^{3N} X_i x_i.$$
(7.186. egyenlet)

Mivel az integrálási tartomány határai rögzítettek, a variálás műveletével bemehetünk az integráljel mögé:

$$\delta\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} (\delta K + \delta A)\, dt = 0.$$
(7.187. egyenlet)

A második tagként szereplő

$$A = \sum_{i=1}^{3N} X_i \delta x_i.$$
(7.188. egyenlet)

kifejezésben a δx_i variációk felfoghatók úgy, mint a kényszerek által megengedett virtuális elmozdulások komponensei, hiszen mindkettőnél a δt=0. Ezért a δA variáció tulajdonképpen a ható erők virtuális munkájával egyezik meg. Az x_i derékszögű koordináták helyett a q_k általános koordinátákra áttérve,

$$\delta A = \sum_{k=1}^{f} Q_k \delta q_k,$$
(7.189. egyenlet)

ahol a Q_k általános erőkomponens (7.69) szerint

$$Q_k = \sum_{i=1}^{3N} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}.$$
(7.190. egyenlet)

Ezeket figyelembe véve

$$\delta\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta K + \sum_{k=1}^{f} Q_k \delta q_k \right) dt = 0.$$
(7.191. egyenlet)

A K mozgási energia a q_k általános koordinátáknak és a $\dot{q}_k$ általános sebességeknek a függvénye: $K= K(q_k,\dot{q}_k)$. Ezért

$$\delta K=\sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\delta K}{\delta q_k}\delta q_k+\frac{\delta K}{\delta \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k\right)=\sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\delta K}{\delta q_k}\delta q_k+\frac{\delta K}{\delta \dot{q}_k}\frac{d}{dt}\left(\delta q_k\right)\right).$$

(7.192. egyenlet)

Ezt a (7.191)-be behelyettesítve, parciális integrálás után a $\delta q_k(t_1)=\delta q_k(t_2)=0$ figyelembevételével adódik, hogy

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\delta K}{\delta q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\delta K}{\delta \dot{q}_k}+Q_k\right)\delta q_k dt=0.$$

(7.193. egyenlet)

Holonom kényszerek esetén a δq_k variációk egymástól függetlenek és tetszőlegesek, ezért a zárójelben álló együtthatóknak zérusnak kell lenniük:

$$\frac{\delta K}{\delta q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\delta K}{\delta \dot{q}_k}+Q_k=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,f).$$

(7.194. egyenlet)

A $\overline{S}$ integrál tehát akkor lesz szélsőérték, ha ezek az egyenletek teljesülnek. Utóbbiak a nem konzervatív rendszerekre vonatkozó (7.75) Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek. Ezzel megmutattuk, hogy a Hamilton-elvnek (7.185) általánosítása a nem konzervatív rendszerek helyes mozgásegyenleteire vezet. Ha a rendszer konzervatív, akkor a (7.185) az eredeti alakot adja, ugyanis ebben az esetben

$$\delta A=-\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial V}{\partial q_k}\delta q_k.$$

Térjünk vissza a konzervatív rendszerekre. Eddig azzal az esettel foglalkoztunk, amikor a kényszerek holonomak és a q_k általános koordináták bevezethetők úgy, hogy a kényszerfeltételeket ezekkel már figyelembe vettük. Ebben az esetben a δq_k variációk tetszőlegesek, és emiatt a hatásintegrál variációjában ezek együtthatóinak zérusnak kell lenniük. Így adódtak a Lagrange-féle másodfajú egyenletek.

Lehetséges olyan eset is, hogy a q_k általános koordinátákkal nem lehet valamennyi kényszerfeltételt kiküszöbölni. Például akkor, ha a kényszerfeltételek egy része (vagy valamennyi) anholonom. A Hamilton-elv most is a

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}L\left(q_k,\dot{q}_k\right)dt=0$$

(7.195. egyenlet)

alakban érvényes, de a δq_k variációk most nem tetszőlegesek, hanem a kényszerfeltételeket ki kell elégíteniük. Anholonom kényszerek esetén a kényszerfeltételek a

$$\sum_{k=1}^{f} a_{lk} dq_k + a_{l0} dt = 0 \qquad (l = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$
(7.196. egyenlet)

általános alakba írhatók. Mivel a Hamilton-féle variációs elvnél az időt nem variáljuk (δt=0), a δq_k variációknak a

$$\sum_{k=1}^{f} a_{lk} \delta q_k = 0 \qquad (l = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$
(7.197. egyenlet)

anholonom feltételi egyenleteket kell kielégíteniük. Végezzük el a variálást a (7.195) egyenletben. Az előzőekhez hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = 0$$
(7.198. egyenlet)

Az itt szereplő δq_k-k most nem tetszőlegesek, mert a (7.197) kényszerfeltételeket is ki kell elégíteniük. Utóbbiakat a Lagrange-féle módszerrel vesszük figyelembe. A (7.197) mindegyik egyenletét megszorozzuk egy-egy határozatlan λ_i paraméterrel, és hozzáadjuk a (7.198) főegyenlet integranduszához. Így adódik, hogy

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^{s} \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k dt = 0.$$
(7.199. egyenlet)

A δq_k variációk közül $f-s$ darab független egymástól, ezért ezek együtthatói zérusok, a λ_i paramétereket pedig úgy határozzuk meg, hogy a fennmaradó s együttható tűnjék el. Ez formálisan azt jelenti, hogy a kényszerfeltételek fenti figyelembevételével a (7.199)-ben szereplő minden δq_k tetszőlegesnek tekinthető. A (7.199) egyenlet ennek alapján akkor teljesül, ha a

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^{s} \lambda_l a_{lk} = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots, f)$$
(7.200. egyenlet)

általánosított Lagrange-egyenletek kielégülnek. Ezek az anholonom kényszereknek alávetett konzervatív mechanikai rendszer mozgásegyenletei. A mozgásfeladat megoldásához azonban ezek nem elegendőek, mert az f darab differenciálegyenletben $f+s$ ismeretlen függvény szerepel. Nevezetesen, az f számú q_k általános koordináta és az s darab $\lambda_i(t)$ paraméter. Ezért a (7.200)-hoz hozzá kell venni a kényszerfeltételeket, amelyeket most differenciálegyenlet alakjában írunk fel:

$$\sum_{k=1}^{f} a_{lk} \dot{q}_k + a_{l0} = 0 \quad (l = 1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$
(7.201. egyenlet)

Így az egyenletrendszer éppen annyi egyenletet tartalmaz, mint az ismeretlen függvények száma. Belőlük meghatározhatók az általános koordináták és a λ_i paraméterek az idő függvényében.

71. A kanonikus egyenletek

Az *f* szabadsági fokú mechanikai rendszer mozgásának Lagrange-egyenletekkel történő leírásánál (hasonlóan a Newton-félékhez) a mozgásegyenletek másodrendű közönséges differenciálegyenletek. Számuk megegyezik a rendszer szabadsági fokainak számával. Mindegyik egyenlet megoldása két integrálási állandót tartalmaz, amelyek meghatározásához meg kell adnunk a q_k és $\dot{q}_k$ kezdeti értékeit. Ez 2*f* független adatot jelent. A rendszer mozgásállapotát tehát 2*f* adattal lehet egyértelműen jellemezni. A q_k koordináták és $\dot{q}_k$ sebességek ebben az értelemben 2*f* független változót jelentenek. A rendszerre jellemző Lagrange-függvényt ennek megfelelően ezekkel adjuk meg, $L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$. Matematikai szempontból a $\dot{q}_k$ mégsem független a q_k-tól, mert előbbi az utóbbinak az idő szerinti deriváltja. Tulajdonképpen ez az oka annak, hogy nem 2*f*, hanem csak *f* darab mozgásegyenletünk van, bár a mozgásállapot egyértelmű megadásához kétszer ennyi adatra van szükségünk. A következőkben a mozgásprobléma tárgyalására bemutatunk egy az eddigiekkel teljesen egyenértékű módszert, amely végig 2*f* független változót használ, és ennek megfelelően a mozgásegyenletek száma is 2*f* lesz, de ezek az egyenletek elsőrendűek.

Minden q_k koordinátához hozzárendelünk egy mennyiséget a

$$p_k = \frac{\partial L(q_k, \dot{q}_k, t)}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{(7.202. egyenlet)}$$

definícióval. A p_k-t a q_k-hoz *kanonikuson konjugált impulzusnak,* vagy röviden *általános impulzusnak* nevezzük. A p_k általában nem impulzus dimenziójú mennyiség, az elnevezés onnan ered, hogy ha derékszögű koordinátákat használunk a q_k-k helyett, akkor az x_i-hez a (7.202) alapján hozzárendelt p_{xi} mennyiség megegyezik a $p_{x_i} = m_i \dot{x}_i$, közönséges impulzuskomponenssel. Az így értelmezett p_k általános impulzusokat a q_k koordinátákkal együtt független változóknak tekintjük. A mechanikai rendszer fizikai állapotát a q_k, p_k, 2*f* számú független változóval adjuk meg.

Ebben a tárgyalásmódban a rendszert nem a Lagrange-függvénnyel, hanem a

$$H = \sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t) \quad \text{(7.203. egyenlet)}$$

képlettel értelmezett *Hamilton-függvénnyel* jellemezzük. A *H*-t a q_k-k és p_k-k függvényének tekintjük. Ezt úgy érjük el, hogy a (7.203) kifejezésben a $\dot{q}_k$ általános sebességeket kifejezzük a p_k impulzusokkal a (7.202) képlet segítségével.

A rendszer állapotának a változását a q_k és p_k független változók időfüggését meghatározó egyenletek írják le. Ezekhez az egyenletekhez a következő gondolatmenettel jutunk. Felírjuk a $H=H(q_k, p_k, t)$ Hamilton-függvény teljes differenciálját:

$$dH = \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}dp_k\right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt.$$ (7.204. egyenlet)

A *dH* kepezhető a (7.203) definíciós képlet alapján is. Ebből

$$dH = \sum_{k=1}^{f}\left(\dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k}dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}d\dot{q}_k\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt.$$ (7.205. egyenlet)

A (7.202), valamint az Euler—Lagrange-egyenletek figyelembevételével

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}.$$ (7.206. egyenlet)

Ezt, továbbá a (7.202)-t (7.205)-be beírva, kapjuk, hogy

$$dH = \sum_{k=1}^{f}\left(\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt.$$ (7.207. egyenlet)

Mivel ennek meg kell egyeznie (7.204)-gyel, a dq_k, illetve dp_k együtthatóinak a két kifejezésben egyenlőeknek kell lenniük egymással. Az összehasonlításból adódik:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots, f)$$ (7.208. egyenlet)

és

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$ (7.209. egyenlet)

A (7.208) elsőrendű differenciálegyenleteket nevezzük *Hamilton-féle kanonikus egyenleteknek.* Ebben a tárgyalásmódban ezek a rendszer mozgásegyenletei. Könnyű belátni, hogy egyenértékűek a Lagrange-egyenletekkel és a Newton-féle mozgás-egyenletekkel. Összehasonlítva a Lagrange-egyenleteket használó módszerrel, megállapíthatjuk, hogy egyikben a Lagrange-függvény, másikban a Hamilton-függvény jellemzi a rendszert. Előbbi az általános koordinátáknak és általános sebességeknek, valamint az időnek, az utóbbi pedig a koordináták mellett a kanonikus impulzusoknak és az időnek a függvénye. A Lagrange-féle tárgyalásmódban a mozgásegyenletek másodrendű differenciálegyenletek, a Hamilton-

félében elsőrendűek, de számuk kétszerese az előbbiének. Ugyanakkor azt is meg kell jegyeznünk, hogy a kanonikus egyenleteken alapuló tárgyalásban is a Lagrange-függvényből indulunk ki, mert ezzel értelmezzük (7.202) alapján az általános impulzusokat és (7.203) szerint a Hamilton-függvényt. Éppen emiatt sok esetben hamarabb jutunk a mozgásfeladat megoldásához a Lagrange-egyenletek alapján. Gyakorlati szempontból az szól a kanonikus egyenletek mellett, hogy (bár számuk kétszeresé az előbbieknek) ezek elsőrendű differenciálegyenletek és ezért könnyebben megoldhatók. Másrészt a kvantummechanika megalapozásánál jut fontos szerep a Hamilton-féle tárgyalásmódnak. Ott ugyanis a kanonikus változópárokkal fogalmazhatók meg az elmélet axiómái, továbbá a rendszer kvantumfizikai állapotának az időbeli változását olyan mozgástörvény írja le, amelyben a Hamilton-függvényből képezett ún. *Hamilton-operátor* szerepel.

A (7.203) képlettel definiált Hamilton-függvény fizikai jelentésének kiderítéséhez tegyük fel, hogy a vizsgált mechanikai rendszer konzervatív (a V potenciális energia nem függ a $\dot{q}_k$ általános sebességektől), továbbá hogy a derékszögű x_i koordinátákról a q_k általános koordinátákra való áttérést leíró (7.64) transzformáció nem tartalmazza expliciten az időt. Az utóbbi esetben a K mozgási energia (7.80) szerint a $\dot{q}_k$ sebességkomponenseknek homogén másodfokú függvénye. Ekkor a homogén függvényekre vonatkozó Euler-tétel szerint

$$\sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} = 2K. \qquad \text{(7.210. egyenlet)}$$

Ugyanis, ha $f(x_i)$ az x_i független változóknak n-ed fokú homogén függvénye, akkor az Euler-tétel a következőt mondja ki:

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf.$$

Másrészt mivel V feltevésünk szerint nem függ $\dot{q}_k$-tól,

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k. \qquad \text{(7.211. egyenlet)}$$

Ezeket a Hamilton-függvény (7.203) kifejezésébe helyettesítve,

$$H = \sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - L = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - (K - V) = 2K - (K - V) = K + V = E. \qquad \text{(7.212. egyenlet)}$$

A Hamilton-függvény tehát megegyezik a rendszer teljes mechanikai energiájával, ha a fenti két feltétel teljesül.

Nézzük meg ezek után, hogyan változik a Hamilton-függvény az időben. Számítsuk ki e célból H-nak az idő szerinti teljes deriváltját:

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial H}{\partial p_k}\dot{p}_k\right)+\frac{\partial H}{\partial t}.$$ (7.213. egyenlet)

A $\dot{q}_k$ és $\dot{p}_k$ helyére a (7.208) kanonikus egyenleteket behelyettesítve,

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}.$$ (7.214. egyenlet)

Eszerint, ha a Hamilton-függvény nem tartalmazza expliciten az időt, akkor az az időben állandó. Ez az eredmény a mozgásegyenletek következménye, ezért azt mondjuk, hogy a Hamilton-függvény ebben az esetben mozgásállandó. Ha a rendszer konzervatív, valamint a (7.64) transzformációban nem szerepel az idő expliciten, akkor az előbbiek értelmében *H=K+V,* amely most állandó. A mechanikai energia megmaradása tehát a Hamilton-féle tárgyalásmódban is a mozgásegyenletek következménye. Később azt is megmutatjuk, hogy a megmaradási tételek kapcsolatban vannak a tér és idő szimmetriáival. Nem szabad azonban figyelmen kívül hagyni, hogy általános koordinátákat használva, az energia állandósága és a *H=E* egyenlőség nem teljesül mindig egyszerre. Ugyanis lehetnek olyan esetek, amikor a Hamilton-függvény nem egyenlő a teljes mechanikai energiával, azonban az energia állandó. Gondoljunk konzervatív rendszerre, amelyet olyan általános koordinátákkal írunk le, amelyek mozognak az eredeti derékszögű koordináta-rendszerhez képest (pl. egyenletesen forgó koordináta-rendszer). Ilyenkor a (7.64) transzformáció expliciten tartalmazza az időt, és emiatt a mozgási energia nem homogén másodfokú függvénye az általános sebességeknek, hanem a (7.80) szerint tartalmaz nullád- és elsőfokú tagokat is. Nevezetesen

$$K=K_0+K_1+K_2.$$

Nyilvánvaló, hogy a matematikailag alkalmas koordináták választása nem befolyásolja azt a fizikai tényt, hogy az energia konzervatív rendszerekre megmarad, a Hamilton-függvény azonban ebben az esetben nem egyenlő a teljes energiával. Ugyanis

$$\begin{aligned}H&=\sum_{k=1}^{f}\dot{q}_k p_k-L=\sum_{k=1}^{f}\dot{q}_k\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}-(K-V)=\\&=\sum_{k=1}^{f}\dot{q}_k\left(\frac{\partial K_0}{\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial K_0}{\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial K_0}{\partial \dot{q}_k}\right)-K+V=\\&=K_1+2K_2-(K_0+K_1+K_2)+V=K_2-K_0+V\neq K+V.\end{aligned}$$ (7.215. egyenlet)

Természetesen, ha *H* nem függ expliciten az időtől, akkor az is állandó, de nem egyezik meg az energiaállandóval.

A későbbiek szempontjából fontos az a tény, hogy a kanonikus egyenletek variációs elvből is levezethetők. Megmutatjuk, hogy a (7.203)-ból vett Lagrange-függvénnyel képezett hatásintegrál akkor lesz szélsőérték, ha teljesülnek a kanonikus egyenletek. A Hamilton-féle tárgyalásmódnak megfelelően a q_k-kat és a q_k-kat független változóknak tekintjük és ennek megfelelően egymástól függetlenül variáljuk, amikor a

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H\left(\dot{q}_k,\, p_k,\, t\right) \right] dt = 0 \qquad \text{(7.216. egyenlet)}$$

variációs elvet képezzük. A variálás szabályai ugyanazok, mint a Hamilton-elvnél.

Nevezetesen az időt nem variáljuk: $\delta t=0$, továbbá a határokon a δq_k variációkat zérusnak vesszük:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{f} \left(\dot{q}_k \delta p_k + p_k \delta \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) dt = 0. \qquad \text{(7.217. egyenlet)}$$

Mivel az időt nem variáljuk,

$$\delta \dot{q}_k = \frac{d}{dt} \delta q_k. \qquad \text{(7.218. egyenlet)}$$

Ezt (7.217)-be beírva, a második tag parciális integrálással átalakítható:

$$\int_{t_1}^{t_2} p_k \frac{d}{dt} \delta q_k dt = \left[p_k \delta q_k \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_k \delta q_k dt.$$

Az integrált rész a $\delta q_k\,(t_1)=\delta q_k(t_2)=0$ miatt eltűnik, ezért a (7.217) a következőképpen alakul:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{f} \left[\left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k - \left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right] dt = 0. \qquad \text{(7.219. egyenlet)}$$

Mivel a δq_k és δp_k variációk tetszőlegesek, az együtthatóiknak zérusnak kell lenniük:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots, f).$$

$$\dot{p}_k - \frac{\partial H}{\partial q_k},$$

Ezek éppen a kanonikus egyenletek. Ezzel megmutattuk, hogy a kanonikus egyenletek a (7.216) variációs elvből is levezethetők.

Mind a két levezetésnél kihasználtuk azt, hogy a q_k-*k* és a p_k-k, illetve a δq_k és δp_k variációk egymástól függetlenek. Utaltunk már rá, hogy ez a lényeges különbség a Lagrange- és a Hamilton-féle tárgyalásmód között. Az előbbiben a q_k általános koordinátákkal és $\dot{q}_k$ általános sebességekkel, míg az utóbbiban a q_k-kal és a p_k általános impulzusokkal jellemezzük a rendszer mechanikai állapotát. Azonban a $\dot{q}_k$ sebességek nem függetlenek a q_k-tól hiszen azok az utóbbiak idő szerinti deriváltjai. Ezért a Lagrange-egyenletek levezetésénél a $\delta\dot{q}_k$-ot kifejeztük a δq_k-val, és így jutottunk parciális integrálással a $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ taghoz a mozgásegyenletekben, és emiatt lettek azok másodrendű differenciálegyenletek. A kanonikus egyenletek levezetésénél a $\delta\dot{q}_k$-ok helyett a δq_k-k szerepelnek, és ezeket a δq_k-któl függetleneknek tekintettük. Ez azt jelenti, hogy a p_k általános impulzusok ugyanúgy független változók, mint a q_k általános koordináták. Igaz ez?

Gondoljuk meg, hogy ha ismerjük minden q_k koordinátának az időfüggését, vagyis a mozgásfeladatot már megoldottuk, akkor a sebességek a

$$\dot{q}(t) = \frac{d}{dt} q_k(t),$$

az impulzusok pedig a

$$p_k(t) = \frac{\partial L\left(q_k(t),\ \dot{q}_k(t),\ t\right)}{\partial \dot{q}_k}$$

alapján számíthatók ki. Úgy tűnik, hogy a p_k-k is meghatározhatók, ha a q_k-k már ismertek. A lényeges különbség azonban az, hogy a $\dot{q}_k$ a q_k-ból egyszerűen idő szerinti deriválással adódik, függetlenül attól, hogyan változik a rendszer állapota, míg a p_k és q_k között csak a mozgásegyenlet teremt kapcsolatot. Ezért ha a p_k-kat ki akarnánk fejezni a q_k-kal, meg kellene előbb oldani a mozgásegyenleteket. A q_k esetében viszont ezektől független a $\dot{q}_k$ és q_k kapcsolata. A δp_k tehát függetlennek tekinthető a δq_k-tól, amíg a mozgásegyenletek megtalálása a cél. A valóságban bekövetkező mozgást éppen az tünteti ki az elképzelt (variált) lehetséges állapotváltozástól, hogy a p_k a mozgásegyenletek szerint kapcsolódik a q_k-hoz, míg a többinél függetlenül változhat.

71.1 Néhány példa a Hamilton-módszer bemutatására

I. *Centrális erőtérben mozgó tömegpont.* Gondoljuk el, hogy egy *m* tömegű anyagi pontra időtől független centrális erő hat. Ennek potenciálja csak az *r* rádiuszvektortól függ: $V=V(r)$. A koordináta-rendszer választásától független vektoriális tárgyalásból tudjuk, hogy a mozgás síkmozgás. A probléma természetéből fakad, hogy cél-szerű polárkoordinátákat használni. Mivel a rendszer konzervatív, a Lagrange-függvény

$$L = K - V = \frac{1}{2}mv^2 - V(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2\right) - V(r).$$ (7.220. egyenlet)

Az *r*, *ϑ* koordinátákhoz kanonikusan konjugált impulzusok a (7.202) alapján adódnak:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},$$
$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta}.$$ (7.221. egyenlet)

A Hamilton-függvény:

$$H = \dot{r}p_r + \dot{\vartheta}p_\vartheta - L\left(r,\ \vartheta,\ \dot{r},\ \dot{\vartheta}\right) = \dot{r}p_r + \dot{\vartheta}p_\vartheta - \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2\right) + V(r).\mu$$

Mivel a Hamilton-függvényt a koordináták és impulzusok függvényének tekintjük, a polárkoordináták idő szerinti deriváltjait a (7.221) felhasználásával kifejezzük az általános impulzusokkal. Így kapjuk, hogy

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2}\right) + V(r).$$ (7.222. egyenlet)

A kanonikus egyenletek:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_r}{m}, \qquad \dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mr^2};$$ (7.223a. egyenlet)

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\vartheta^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}, \qquad \dot{p}_\vartheta = \frac{\partial H}{\partial \vartheta} = 0.$$ (7.223b. egyenlet)

A (7.223a) két egyenlete megegyezik a (7.221)-gyel, és emiatt nem ad új információt. A (7.223b) második egyenletéből viszont következik, hogy

$p_\vartheta = \text{áll.}$ (7.224. egyenlet)

A (7.223a) második egyenlete alapján ebből adódik, hogy

$mr^2\dot{\vartheta} = \text{áll.}$ (7.225. egyenlet)

ami az impulzusnyomaték állandóságát jelenti. Ugyanis a bal oldal az impulzusnyomaték nagysága. Ezt *l*-lel jelölve, a (7.223a)-ból és (7.223b)-ből következik, hogy

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}.$$ (7.226. egyenlet)

Ez a két egyenlet szolgál az *r* és *ϑ* polárkoordináták időfüggésének a meghatározására.

Ha a pálya *r*=*r*(*ϑ*) egyenletére vagyunk kíváncsiak, akkor a 4.1 pontban bemutatott eljárást alkalmazhatjuk. Mi most ezek helyett másik utat választunk. A Hamilton-függvény a fentiek értelmében megegyezik az anyagi pont teljes mechanikai energiájával, másrészt *H* nem függ az időtől expliciten, ezért a *H*=*E*=áll. Így a (7.222)-ből adódik, hogy

$$\frac{1}{2}\left(m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{mr^2}\right) = E - V(r).$$ (7.227. egyenlet)

Ebből

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}.$$ (7.228. egyenlet)

A változók szétválasztásával

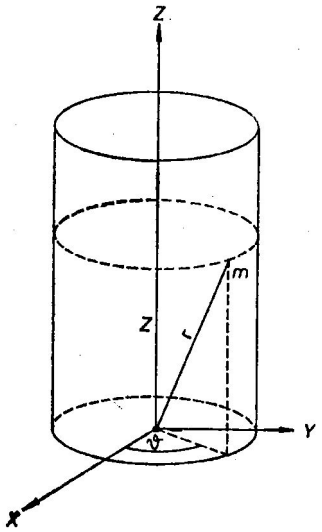
$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}.$$ (7.229. egyenlet)

Legyen a rádiuszvektor értéke *t*=0-kor r_0. Ekkor (7.229)-ből

$$t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}.$$ (7.230. egyenlet)

Ez az integrál megadja a *t* időt az *r* függvényeként. Benne három integrálási állandó szerepel: *E, l* és r_0. Ha a centrális erőtér konkrétan adott, akkor a *V*(*r*) ismert függvény, és a (7.230) integrál elvben kiszámítható. Ebből meghatározható az *r*=*r*(*t*) függvény. Ezután megoldjuk a (7.225) egyenletet:

100. ábra -



$$\vartheta t = l\int_0^t \frac{dt}{mr^2(t)} + \vartheta_0,$$ (7.231. egyenlet)

ahol ϑ_0 a ϑ polárszög értéke a kezdeti t=0 időben.

A (7.230) és (7.231) integrálok állítják elő a centrális erőtérben mozgó anyagi pont mozgásfeladatának az általános megoldását. Ez az E, l, r_0 és ϑ_0 négy integrálási állandót tartalmazza. Természetesen az E és l kifejezhető az $\dot{r}_0$ és $\dot{\vartheta}_0$ kezdeti értékekkel, és ekkor az integrálási állandók a koordináták és azok idő szerinti deriváltjainak a kezdeti értékei lesznek.

2. *Kényszermozgás az* **F=–kr erő hatására.** Az m tömegű anyagi pont R sugarú hengerfelületen mozoghat. Tegyük fel, hogy **F=–kr** erő hat rá. A mozgás tanulmányozásához a henger koordináták használata látszik célszerűnek. A tömegpont mozgási energiája

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2\right).$$

Mivel r=R állandó, a

$$K = \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2 \right).$$ (7.232. egyenlet)

A potenciális energia

$$V = \frac{1}{2} k \left(R^2 + \dot{z}^2 \right).$$ (7.233. egyenlet)

A Lagrange-függvény

$$L = K - V = \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2 \right) - \frac{1}{2} k \left(R^2 + z^2 \right).$$ (7.234. egyenlet)

A ϑ és z általános koordinátákhoz kanonikusan konjugált impulzusok

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m R^2 \dot{\vartheta},$$ (7.235a. egyenlet)

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z}.$$ (7.235b. egyenlet)

Mivel a rendszer konzervatív, továbbá a derékszögű és hengerkoordináták közötti transzformáció nem tartalmazza az időt expliciten, a Hamilton-függvény megegyezik a teljes mechanikai energiával:

$$H = K + V = \frac{p_\vartheta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2} k \left(R^2 + z^2 \right).$$ (7.236. egyenlet)

A kanonikus egyenletek

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mR^2}, \qquad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m};$$ (7.237a. egyenlet)

$$\dot{p}_\vartheta = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = 0, \qquad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz.$$ (7.237b. egyenlet)

Az első két egyenlet megegyezik a (7.235a)-val és a (7.235b)-vel. A (7.237b) első egyenletéből adódik, hogy

$$p_\vartheta = mR^2\dot{\vartheta} = \text{áll.} = l. \quad \text{(7.238. egyenlet)}$$

A bal oldal a *z* tengelyre vonatkoztatott impulzusnyomaték nagysága. Ez a (7.238) szerint állandó, a (7.238) tehát az impulzusnyomaték megmaradását fejezi ki. A második és a negyedik kanonikus egyenlet egybevetéséből pedig a

$$\ddot{z} + \frac{k}{m} z = 0 \quad \text{(7.239. egyenlet)}$$

egyenlet adódik. Ez az $\omega_0^2 = k/m$ jelöléssel a harmonikus rezgőmozgás $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ mozgásegyenletével azonos. A tömegpont tehát a henger felületén a *z* irányban harmonikus rezgést végez.

A irányú mozgást a (7.237a) első egyenletéből kapjuk. Mivel p_ϑ állandó, a $\dot{\vartheta}$ is az. Ebből következik, hogy

$$\vartheta(t) = \frac{l}{mR^2} t + C. \quad \text{(7.240. egyenlet)}$$

A ϑ irányban tehát egyenletes körmozgást végez a tömegpont $\omega = l/mR^2$ szögsebességgel.

3. *Elektromágneses térben levő ponttöltés Hamilton-függvénye.* Az elektromágneses tér hatásának kitett *e* töltésű, *m* tömegű anyagi pont Lagrange-függvénye (7.97) szerint

$$L = \frac{1}{2} mv^2 - e\Phi + \frac{e}{c} \mathbf{A}\mathbf{v}. \quad \text{(7.241. egyenlet)}$$

A Φ, **A** elektromágneses potenciálok a térerősségekkel az

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\ \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{H} = \text{rot}\ \mathbf{A} \quad \text{(7.242. egyenlet)}$$

kapcsolatban vannak. Az x_i koordinátához tartozó általános impulzus,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{e}{c} A_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \quad \text{(7.243. egyenlet)}$$

A Hamilton-függvény:

$$H=\sum_{i=1}^{3}p_i\dot{x}_i-L=mv^2+\frac{e}{c}\mathbf{Av}-L=\frac{1}{2}mv^2+e\Phi. \qquad \text{(7.244. egyenlet)}$$

Fejezzük ki a sebességkomponenseket a p_i általános impulzusokkal a (7.243)-ból:

$$\dot{x}_i=\frac{1}{m}\left(p_i-\frac{e}{c}A_i\right) \qquad (i=1,\ 2,\ 3). \qquad \text{(7.245. egyenlet)}$$

Ezeket (7.244)-be behelyettesítve, megkapjuk a Hamilton-függvényt az x_i koordináták és p_i impulzusok függvényeként:

$$H=\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}\left(p_i-\frac{e}{c}A_i\right)^2+e\Phi. \qquad \text{(7.246. egyenlet)}$$

Érdemes összehasonlítani ezt a kifejezést a V potenciálú konzervatív erőtérben mozgó anyagi pont

$$H=\frac{1}{2m}p^2+V \qquad \text{(7.247. egyenlet)}$$

Hamilton-függvényével. Látszik, hogy az elektromágneses térrel való kölcsönhatás a Hamilton-függvényben formálisan úgy jelenik meg, hogy a p_i helyére a $p_i-\frac{e}{c}A_i$–t, V helyére az $e\Phi$-t helyettesítjük. Ennek a felismerésnek különösén a kvantummechanikában lesz szerepe, írjuk még fel a kanonikus egyenleteket:

$$\dot{x}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}=\frac{1}{m}\left(p_i-\frac{e}{c}A_i\right) \qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}=\frac{e}{mc}\left(p_i-\frac{e}{c}A_i\right)\frac{\partial A_i}{\partial x_i}-e\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \qquad (i=1,\ 2,\ 3). \qquad \text{(7.248. egyenlet)}$$

Könnyű belátni, hogy ezek egyenértékűek az

$$m\ddot{\mathbf{r}}=e\left[\mathbf{E}+\frac{1}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{H})\right]$$

Newton-féle mozgásegyenletekkel.

72. A kanonikus transzformációk

Az *f* szabadsági fokú rendszer mozgásának a kanonikus egyenletek alapján történő tanulmányozásánál 2*f* elsőrendű differenciálegyenletet kell megoldanunk. A matematikai feladat ugyan egyszerűbbnek tűnik, mint a Lagrange-egyenleteknél, mivel ott másodrendű differenciálegyenletek lépnek fel, de hosszadalmasabb, mert a meg-oldandó egyenletek száma megkétszereződött. Továbbá a Hamilton-függvény meghatározásához is általában a Lagrange-függvényből kell kiindulnunk. Azonban mégis van előnye a kanonikus egyenleteknek, ha sikerül alkalmas általános koordinátákat találnunk. Ugyanis ha valamelyik koordináta a Hamilton-függvényben nem szerepel, akkor a hozzá tartozó általános impulzus a kanonikus egyenletek szerint állandó. Ez máris egy megoldása az egyenleteknek. Legyen pl. q_i az a koordináta, amely a *H*-ban nem fordul elő. Ekkor a

$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$$ (7.249. egyenlet)

kanonikus egyenletnek következménye, hogy a p_i=α_i=állandó. Az olyan koordinátát, amelyet a Hamilton-függvény nem tartalmaz, *ciklikus koordinátának* nevezzük.

Ha sikerülne azt elérnünk, hogy valamennyi általános koordináta ciklikus legyen, akkor mindegyik általános impulzus állandó:

$$p_k = \alpha_k \qquad (k = 1,\ 2, \ldots, f).$$ (7.250. egyenlet)

Tegyük fel egyelőre, hogy a vizsgált rendszer Hamilton-függvénye nem függ expliciten az időtől. Ebben az esetben a *H* csak az állandó p_k-kat tartalmazza:

$$H = H\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots \alpha_f\right).$$ (7.251. egyenlet)

Ennélfogva

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial \alpha_k} = \omega_k \qquad (k = 1,\ 2, \ldots, f).$$ (7.252. egyenlet)

ahol ω_k nem függ az időtől. Ezért a (7.252) egyenletek azonnal integrálhatók:

$$q_k(t) = \omega_k t + \beta_k.$$ (7.253. egyenlet)

A β_k integrálási állandók a kezdeti feltételekből számíthatók ki.

Látszik, hogy ha valamennyi általános koordináta ciklikus, akkor a mozgásfeladat a kanonikus egyenletek alapján nagyon egyszerűen, szinte azonnal megoldható. Azonban a konkrét fizikai feladathoz jól alkalmazkodó általános koordináták általában nem mind ciklikusak. Gondoljunk pl, a centrális erőtérben mozgó anyagi pontra. Ennek (7.222) Hamilton-függvénye a ϑ-t nem tartalmazza, ez ciklikus, de az r már nem. Ilyenkor megtehetjük azt, hogy jól megválasztott koordináta-transzformációval áttérünk olyan új koordinátákra, amelyek már ciklikusak lesznek. Így a feladat az előbbiek szerint azonnal megoldódik. Természetesen ez csak akkor igaz, ha az új általános koordináták és impulzusok is a Hamilton-féle kanonikus egyenleteknek tesznek eleget. Ezen elképzelés szerint a mozgásfeladat megoldását az alkalmas transzformáció megtalálására vezettük vissza.

A következőkben megvizsgáljuk azokat a transzformációkat, amelyek a kanonikus egyenleteket változatlanul hagyják. A régi koordinátákat és impulzusokat q_k-val és p_k-val, az újakat Q_k-val, illetve P_k-val jelöljük. A Hamilton-féle tárgyalásmódnak megfelelően ezeket egymástól függetleneknek tekintjük. Az egyikről a másikra való áttérést leíró transzformációt

$$Q_k = Q_k\left(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_f;\ p_1, p_2, \ldots, p_f;\ t\right)$$
$$P_k = P_k\left(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_f;\ p_1, p_2, \ldots, p_f;\ t\right)$$
$$\left(k = 1,\ 2, \ldots, f\right) \qquad \text{(7.254. egyenlet)}$$

alakban vesszük fel. Megköveteljük, hogy a kanonikus egyenletek az új koordinátákban és impulzusokban is legyenek érvényesek. Tehát

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial \overline{H}}{\partial P_k}, \qquad \dot{P}_k = \frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_k} \qquad \left(k = 1,\ 2, \ldots, f\right), \qquad \text{(7.255. egyenlet)}$$

ahol $\overline{H} = \overline{H}\left(Q_k,\ P_k,\ t\right)$ a Hamilton-függvény transzformáltja. Az ilyen transzformációkat *kanonikus transzformációknak* nevezzük.

Mivel a kanonikus egyenletek variációs elvből származtathatók, a (7.255) követelmény azt jelenti, hogy az új koordinátákra és impulzusokra teljesülnie kell a

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^{f} P_k \dot{Q}_k - \overline{H}\left(Q_k,\ P_k;\ t\right) \right] dt = 0 \qquad \text{(7.256. egyenlet)}$$

variációs elvnek. Természetesen ezzel egyidejűleg a régi koordináták és impulzusok is kielégítik a

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - \overline{H}\left(q_k, p_k;\ t\right) \right] dt = 0 \qquad \text{(7.257. egyenlet)}$$

variációs elvet. Ebből még nem következik, hogy a két integrandusznak meg kell egyeznie. Egy tetszőleges W függvény idő szerinti teljes deriváltjában különbözhetnek egymástól, mert ez az integrál variációjához nem ad járulékot. Ugyanis

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\frac{dW}{dt}dt=\delta W(t_2)-\delta W(t_1)=0, \qquad \text{(7.258. egyenlet)}$$

mert a variálás szabályai szerint a koordináták és impulzusok variációi a határokon eltűnnek.

Ennélfogva a (7.254) transzformáció akkor hagyja a kanonikus egyenleteket változatlanul, vagyis akkor kanonikus, ha

$$\sum_{k=1}^{f}p_k\dot{q}_k-H(q_k,p_k;t)=\sum_{k=1}^{f}P_k\dot{Q}-\bar{H}(Q_k,P_k;t)+\frac{dW}{dt}. \qquad \text{(7.259. egyenlet)}$$

Mivel a rendszer állapotát $2f$ független változóval (f koordinátával és f impulzussal) jellemezzük, W az időn kívül $2f$ független változó tetszőleges függvénye. Aszerint, hogy W a régi és új változókat milyen kombinációban tartalmazza, négy típus lehetséges

$$W_1(q_1,Q_k;t),\quad W_2(q_k,P_k;t),\quad W_3(p_k,Q_k;t),\quad W_4(p_k,P_k;t).$$

Ennek megfelelően a kanonikus transzformációknak is négy típusát adhatjuk meg. Azt a feladat konkrét jellege szabja meg, hogy ezek közül melyiket célszerű használni.

1. Vegyük először a W_1et. A kanonikus transzformáció feltétele:

$$\sum_{k=1}^{f}p_k\dot{q}_k-H=\sum_{k=1}^{f}P_k\dot{Q}-\bar{H}+\frac{d}{dt}W_1(q_1,Q_k;t), \qquad \text{(7.260. egyenlet)}$$

ahol

$$\frac{dW_1}{dt}=\frac{\partial W_1}{\partial t}+\sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial W_1}{\partial Q_k}\dot{Q}_k\right).$$

Mivel a régi és az új koordináták függetlenek, a (7.260) egyenlőség csak akkor teljesül, ha a q_k és Q_k együtthatói az egyenlet két oldalán megegyeznek. Így adódik, hogy

$$p_k = \frac{\partial W_1}{\partial q_k},$$
$$P_k = -\frac{\partial W_1}{\partial Q_k},$$
$$\bar{H} = H + \frac{\partial W_1}{\partial t}.$$ (7.261. egyenlet)

Az első egyenlet *f* számú összefüggést teremt a p_k, q_k, Q_k és a *t* idő között. Ezekből valamennyi Q_k kifejezhető a régi q_k-val, p_k-val és az idővel. Ezek alapján megkaptuk a (7.254) transzformáció első *f* egyenletét: $Q_k=Q_k(qk, pk; t)$. Ezután a (7.261) második egyenletcsoportjából valamennyi P_k kifejezhető a régi q_k-val és p_k-val. Végül a (7.261) utolsó egyenletéből adódik az új Hamilton-függvény, amelyet a P_k-k és Qk-k függvényeként állítunk elő. Ebből látszik, hogy a (7.261) összefüggések tulajdonképpen a transzformáció egyenleteit adják meg. A transzformáció tehát a W_1 függvényből származtatható. Éppen ezért a *W*-t a kanonikus transzformáció *alkotófüggvényének* nevezzük.

2. Ha független változóként a q_k-kat és a P_k-kat választjuk, akkor a $W_2(q_k, P_k; t)$ alkotófüggvényt kell használnunk. Megjegyezzük azonban, hogy a q_k, Q_k független változókról a q_k-, P_k-ra való áttérés a (7.261) második egyenletével kifejezett

$$\frac{\partial W_1}{\partial Q_k} = P_k$$ (7.262. egyenlet)

ún. Legendre-transzformációval közvetlenül is elvégezhető. Ez azt mutatja, hogy a W_2 alkotófüggvény megkapható a W_1-ből a

$$W_2(q_k, P_k; t) = W_1(q_k, Q_k; t) + \sum_k P_k Q_k$$ (7.263. egyenlet)

összefüggéssel. (Az egyenlőség igazolásául szolgál, hogy mindkét oldalt Q_k szerint differenciálva, a (7.262) Legendre-transzformációt kapjuk.) Fejezzük ki W_1-et a (7.263)-ból és írjuk be a (7.260)-ba. Így

$$\sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H = \sum_{k=1}^{f} P_k \dot{Q}_k - \bar{H} + \frac{d}{dt}\left[W_2(q_k, P_k; t) - \sum_{k=1}^{f} Q_k P_k\right] = -\sum_{k=1}^{f} Q_k \dot{P}_k - \bar{H} + \frac{dW_2}{dt}.$$ (7.264. egyenlet)

A keresett transzformációra az előbbi gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$p_k = \frac{\partial W_2}{\partial q_k},$$
$$Q_k = \frac{\partial W_2}{\partial P_k},$$
$$\bar{H} = H + \frac{\partial W_2}{\partial t}.$$ (7.265. egyenlet)

3. Nézzük a harmadik transzformációtípust, amelynél a p_k-k, Q_k-k a független változók. Az elsőből erre való áttérés a (7.261) első egyenletcsoportja szerinti Legendre-transzformációval közvetlenül adódik. Ezért W_3 a W_1-gyel a következőképpen fejezhető ki:

$$W_3(p_k, Q_k; t) = W_1(q_k, Q_k; t) - \sum_{k=1}^{f} q_k p_k.$$ (7.266. egyenlet)

Az ebből adódó W_1-et (7.260)-ba helyettesítve,

$$-\sum_{k=1}^{f} q_k p_k - H = \sum_{k=1}^{f} P_k \dot{Q}_k - \bar{H} + \frac{d}{dt} W_3(p_k, Q_k; t).$$ (7.267. egyenlet)

A keresett transzformációra ebből az előbbi gondolatmenettel adódik, hogy

$$q_k = -\frac{\partial W_3}{\partial p_k},$$
$$P_k = -\frac{\partial W_3}{\partial Q_k},$$
$$\bar{H} = H + \frac{\partial W_3}{\partial t}.$$ (7.268. egyenlet)

4. Végül, amikor a p_k-kat és P_k-kat tekintjük független változóknak, W_4 a W_1-ből kettős Legendre-transzformációval adódik,

$$W_4(p_k, P_k; t) = W_1(q_k, Q_k; t) + \sum_{k=1}^{f} P_k Q_k - \sum_{k=1}^{f} p_k q_k.$$ (7.269. egyenlet)

Ezt felhasználva, a (7.260)-ból kapjuk, hogy

$$-\sum_{k=1}^{f} q_k \dot{p}_k - H = -\sum_{k=1}^{f} Q_k \dot{P}_k - \bar{H} + \frac{d}{dt} W_4 (p_k, P_k; t).$$ (. egyenlet)

Az ebből adódó transzformációs képletek

$$q_k = -\frac{\partial W_4}{\partial p_k},$$
$$Q_k = \frac{\partial W_4}{\partial P_k},$$
$$\bar{H} = H + \frac{\partial W_4}{\partial t}.$$ (7.271. egyenlet)

Megjegyezzük, hogy a régi és új koordináták és impulzusok transzformációs képleteiben (vagyis az egyenletek első két csoportjában) egyik típusnál sem fordul elő a rendszerre jellemző Hamilton-függvény, ezért a transzformáció kanonikus jellege teljesen független a vizsgált problémától. A Hamilton-függvény transzformációja viszont mind a négy típusnál ugyanolyan alakú.

72.1 Példák a kanonikus transzformációkra

1. Legyen a kanonikus transzformáció alkotófüggvénye

$$W_2 = \sum_{k=1}^{f} q_k P_k.$$ (7.272. egyenlet)

A transzformációs képletek a (7.265) alapján adódnak:

$$p_k = \frac{\partial W_2}{\partial q_k} = P_k,$$
$$Q_k = \frac{\partial W_2}{\partial P_k} = q_k,$$
$$\bar{H} = H.$$

Eszerint az új koordináták és impulzusok megegyeznek a régiekkel. A (7.272) tehát az azonos transzformáció alkotófüggvénye.

2. A két szabadsági fokú rendszereknél gyakran találkozunk azzal a transzformációval, amelynek alkotófüggvénye

$$W_2 = q_1(P_1 + P_2) + q_2(P_1 + P_2).$$ (7.273. egyenlet)

Ebből (7.265) alapján

$$p_1 = \frac{\partial W_1}{\partial q_1} = P_1 + P_2, \qquad p_2 = \frac{\partial W_2}{\partial q_2} = P_1 - P_2,$$
$$Q_1 = \frac{\partial W_2}{\partial P_1} = q_1 + q_2, \qquad Q_2 = \frac{\partial W_2}{\partial P_2} = q_1 - q_2.$$

Az utóbbiakból

$$q_1 = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2), \qquad q_2 = \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2).$$

A Hamilton-függvény itt is megegyezik az eredetivel:

$$\bar{H} = H.$$

3. Nézzük azt a transzformációt, amelynek során az új Q_k koordináták csak a régi q_k-któl és az időtől függnek:

$$Q_k = Q_k(q_k, t).$$

Ide tartoznak pl. az ortogonális koordinátatranszformációk vagy a derékszögű koordinátákról a polárkoordinátákra való áttérés. Az ilyen transzformációt *ponttranszformációnak* nevezzük. Ez is kanonikus transzformáció, ugyanis a

$$W_2 = \sum_{k=1}^{f} g_k(q_1, q_2, \ldots, q_f, t) P_k$$ (7.274. egyenlet)

alkotófüggvényből származtatható. A (7.265) második egyenlete szerint

$$Q_k = \frac{\partial W_2}{\partial P_k} = g_k(q_k, t).$$ (7.275. egyenlet)

Mivel a g_k függvény tetszőleges, valamennyi ponttranszformáció kanonikus. Annak feltétele, hogy a q_k-k az új Q_k-ba transzformálódjanak, az, hogy az alkotófüggvény a P_k-kban lineáris legyen.

Hasonlóképpen igaz az is, hogy ha az alkotófüggvény a q_k-kban lineáris, akkor a p_k-k az új P_k-kba mennek át. Ekkor

$$W_2 = \sum_{k=1}^{f} \gamma_k\left(P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_f,\ t\right) q_k. \quad \text{(7.276. egyenlet)}$$

A (7.265) első egyenlete szerint

$$p_k = \frac{\partial W_2}{\partial q_k} = \gamma_k\left(P_k,\ t\right). \quad \text{(7.277. egyenlet)}$$

4. Vegyük az ortogonális transzformációt. Ennél

$$Q_k = \sum_{l=1}^{f} a_{kl} q_l. \quad \text{(7.278. egyenlet)}$$

Ennek alkotófüggvénye

$$W_2 = \sum_{k=1}^{f} \sum_{l=1}^{f} a_{kl} q_l P_k. \quad \text{(7.279. egyenlet)}$$

Az új impulzusokat a (7.265) első egyenletéből kapjuk:

$$p_l = \frac{\partial W_2}{\partial q_l} = \sum_{k=1}^{f} a_{kl} P_k. \quad \text{(7.280. egyenlet)}$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát a_{jl}-lel és összegezzünk l-re:

$$\sum_{l=1}^{f} a_{jl} p_l = \sum_{k=1}^{f} \sum_{l=1}^{f} a_{jl} a_{kl} P_k.$$

Az ortogonalitásnak az a feltétele, hogy $\sum_{l=1}^{f} a_{jl} a_{kl} = \delta_{jk}$. Ezt figyelembe véve,

$$P_j = \sum_{l=1}^{f} a_{jl} p_l. \quad \text{(7.281. egyenlet)}$$

Ebből látszik, hogy az impulzusok is ugyanúgy ortogonálisán transzformálódnak, mint a koordináták.

5. A derékszögű koordinátákról térbeli polárkoordinátákra való transzformáció képletei jól ismertek:

$$x = r\ \cos\ \varphi \sin\ \vartheta, \quad y = r\ \sin\ \varphi \sin\ \vartheta, \quad z = r\ \cos\ \vartheta.$$ (7.282. egyenlet)

Ezek alkotófüggvénye

$$W_3 = -\left(p_x r\ \cos\ \varphi \sin\ \vartheta + p_y r\ \sin\ \varphi \sin\ \vartheta + p_z r\ \cos\ \vartheta\right).$$ (7.283. egyenlet)

A (7.268) első csoportja adja a (7.282) transzformációt, a második csoport pedig az új impulzuskomponenseket fejezi ki a régi impulzusokkal és az új koordinátákkal. Ebből adódik, hogy

$$\begin{aligned} p_r &= p_x \cos\ \varphi \sin\ \vartheta + p_y \sin\ \varphi \sin\ \vartheta + p_z \cos\ \vartheta, \\ p_\varphi &= -p_x r\ \sin\ \varphi \sin\ \vartheta + p_y \mathrm{r}\ \cos\ \varphi \sin\ \vartheta, \\ p_\vartheta &= p_x r\ \cos\ \varphi \cos\ \vartheta + p_y \mathrm{r}\ \sin\ \varphi \cos\ \vartheta - p_z r\ \sin\ \vartheta. \end{aligned}$$ (7.284. egyenlet)

A transzformáció a $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ kifejezést a

$$p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\vartheta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} p_\varphi^2$$-be

viszi át.

6. Érdekes kanonikus transzformációt ír le a

$$W_1 = \sum_{k=1}^{f} q_k Q_k$$ (7.285. egyenlet)

alkotófüggvény. A (7.261) szerint

$$p_k = \frac{\partial W_1}{\partial q_k} = Q_k, \qquad P_k = -\frac{\partial W_1}{\partial Q_k} = -q_k.$$

Ez a transzformáció a koordináták és impulzusok szerepét felcseréli.

7. Végül nézzük a harmonikus rezgőmozgást. Vegyük a

$$W_1 = \frac{m}{2}\omega q^2 \operatorname{ctg} Q \quad \text{(7.286. egyenlet)}$$

alkotófüggvényt. Ebben az *m* és *ω* állandók az anyagi pont tömegét, illetve a rezgés körfrekvenciáját jelentik. A (7.261) transzformációs képletek

$$p = \frac{\partial W_1}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} Q, \quad \text{(7.287. egyenlet)}$$

$$P = -\frac{\partial W_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q}. \quad \text{(7.288. egyenlet)}$$

Fejezzük ki *p*-t és *q*-t *az* új koordinátával és impulzussal:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad \text{(7.289. egyenlet)}$$

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q. \quad \text{(7.290. egyenlet)}$$

Nézzük a Hamilton-függvényt! Mivel az alkotófüggvény az időt expliciten nem tartalmazza,

$$\bar{H} = H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega}{2} q^2. \quad \text{(7.291. egyenlet)}$$

A $\bar{H}$-t még ki kell fejeznünk az új változókkal. Ez (7.289) és (7.290) alapján könnyen megtehető. Eredményül adódik, hogy

$$\bar{H} = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P. \quad \text{(7.292. egyenlet)}$$

Az új Hamilton-függvény a *Q-t* nem tartalmazza, ezért *Q* ciklikus koordináta. Ennek megfelelően a *P* impulzus állandó:

$$P = \frac{E}{\omega} = \text{áll.}, \quad \text{(7.293. egyenlet)}$$

ahol *E* a teljes mechanikai energia, amely most megegyezik a Hamilton-függvénnyel.

A *Q* időfüggését a

$$\dot{Q} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} = \omega$$ (7.294. egyenlet)

kanonikus egyenlet megoldásával kapjuk. Ebből

$$Q = \omega t + \delta.$$ (7.295. egyenlet)

A δ integrálási állandót a kezdeti feltételekből lehet meghatározni. Ezzel a feladatot az új változókban megoldottuk.

Ha a régi változók időfüggésére vagyunk kíváncsiak, akkor a (7.289), (7.290) képletek segítségével azonnal adódik, hogy

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \delta),$$
$$p = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \delta).$$ (7.296. egyenlet)

Ezek a korábbról jól ismert kifejezések.

Összefoglalásul még egyszer rámutatunk arra, hogy a kanonikus transzformációknak a mechanika Hamilton-féle mozgásegyenleteinek a megoldásánál van fontos szerepük. Ha sikerül alkalmas kanonikus transzformációval olyan új koordinátákra áttérnünk, amelyek ciklikusak, akkor az alapegyenletek megoldása nagyon egyszerűvé válik.

73. A Hamilton-Jacobi-egyenlet

A mozgásegyenletek megoldása elvileg még egyszerűbbé tehető, ha sikerül olyan kanonikus transzformációt találnunk, amely a Hamilton-függvényt zérusra transzformálja. Ekkor ugyanis valamennyi új koordináta és impulzus állandó lesz, hiszen a kanonikus egyenletek szerint

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} = 0, \qquad \dot{P}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} = 0,$$ (7.297. egyenlet)

ha a $\bar{H} \equiv 0$. Mivel $\bar{H}$ a régi Hamilton-függvényből a

$$\bar{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t}$$ (7.298. egyenlet)

képlet szerint adódik, ennek a különleges kanonikus transzformáció alkotófüggvényének – amelyet *S*-sel fogunk jelölni – ki kell elégítenie a

$$\frac{\partial s}{\partial t} + H\left(q_k,\, p_k,\, t\right) = 0$$ (7.299. egyenlet)

parciális differenciálegyenletet. Az *S* alkotófüggvényt célszerű a q_k régi koordináták, a P_k új (állandó) impulzusok és az idő függvényének tekinteni, miként azt a W_2 esetében tettük. Ekkor a p_k régi impulzusok a (7.265) első csoportja szerint

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}.$$ (7.300. egyenlet)

Ezeket a (7.299)-be helyettesítve, az S-re a

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_k,\, \frac{\partial S}{\partial q_k},\, t\right) = 0$$ (7.301. egyenlet)

parciális differenciálegyenlet adódik. Ezt *Hamilton–Jacobi-egyenletnek* nevezzük. Az elnevezés onnan ered, hogy Hamilton vezette le más úton, és Jacobi ismerte fel, hogy a megoldásként adódó *S*-et a fenti kanonikus transzformáció alkotófüggvényének tekintve, a mozgásfeladat az említettek szerint oldható meg.

A mechanika alapfeladatának a megoldása ebben a tárgyalásmódban tehát egyetlen egy egyenlet, a (7.301) megoldására van visszavezetve. Az eredeti q_k koordinátáknak és p_k impulzusoknak az állandóknak adódó újakból való meghatározása nem okoz semmi nehézséget, mert az a transzformációs képletek alapján könnyen elvégezhető. A matematikai nehézség abban jelentkezik, hogy a (7.301) egyenlet parciális differenciálegyenlet, szemben a Hamilton-féle kanonikus egyenletekkel, amelyek közönséges differenciálegyenletek.

Az eljárás menete a következő. Megkeressük a Hamilton—Jacobi-egyenletnek ún. teljes megoldását.#[7] Mivel az egyenlet *f*+1 független változót (*f* koordinátát és a *t* időt) tartalmaz, a teljes megoldásban *f*+1 független állandó lép fel: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_f, \alpha_{f+1}$. A (7.301) egyenletben maga az *S* nem szerepel, hanem annak a koordináták és az idő szerinti deriváltjai fordulnak elő. Ezért, ha *S* megoldása a Hamilton—Jacobi-egyenletnek, akkor az $S+\alpha$ is az lesz (α tetszőleges állandó). Következésképpen az *f*+1 állandó közül egy additívan szerepel a megoldásban. Számunkra ennek az additív állandónak nincs jelentősége, mert a transzformációs képletek is az *S* deriváltjait tartalmazzák. Ennek megfelelően, a Hamilton—Jacobi-egyenlet megoldása

$$S = S\left(q_1,\, q_2, ...,\, q_f;\; \alpha_1,\, \alpha_2, ...,\, \alpha_f;\, t\right)$$ (7.302. egyenlet)

alakba írható, ahol az α_k-k közül egyik sem additív.

[7]# A parciális differenciálegyenletek teljes megoldása tetszőleges állandókat tartalmaz, szemben az általános megoldással, amelyben tetszőleges függvények szerepelnek.

Tegyük fel, hogy a (7.302) megoldást ismerjük. Mivel a P_k-k állandóak, az α_k integrálási állandókat tekintjük az új impulzusoknak:

$$P_k = \alpha_k.$$ (7.303. egyenlet)

A régi impulzusok (7.300) szerint számíthatók ki az S-ből:

$$p_k = \frac{\partial S(q_k,\ \alpha_k,\ t)}{\partial q_k} \quad (k = 1,\ 2, \ldots, f).$$ (7.304. egyenlet)

Ebből az f darab egyenletből a t = 0, valamint a q_k-k és p_k-k kezdeti értékeinek a behelyettesítésével az α_k állandók meghatározhatók. A (7.265) transzformációs képletek második csoportja az ugyancsak állandó új Q_k koordinátákat adja meg:

$$Q_k = \beta_k = \frac{\partial S(q_k,\ \alpha_k,\ t)}{\partial \alpha_k} \quad (k = 1,\ 2, \ldots, f).$$ (7.305. egyenlet)

Ha az egyenletek jobb oldalára a t = 0-t, valamint a q_k-k kezdeti értékeit helyettesítjük be, megkapjuk a β_k állandókat. Ezután a (7.305) egyenletekből kifejezzük a q_k régi koordinátákat:

$$q_k = q_k(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_f;\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots, \beta_f;\ t).$$ (7.306. egyenlet)

Ezzel a mozgásfeladatot megoldottuk, mert meghatároztuk a q_k koordinátákat az idő függvényeként. Az α_k és β_k állandók ezekben már ismertek a kezdeti feltételekből. Így a (7.306) a kezdeti feltételeknek megfelelő egyértelmű megoldást adja.

Nézzük meg az S alkotófüggvény fizikai jelentését. Képezzük e célból S-nek az idő szerinti teljes differenciálhányadosát.

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial S}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial s}{\partial t}.$$

Ezt a (7.299), valamint a (7.300) figyelembevételével a következőképpen írhatjuk:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{k=1}^{f} p_k\dot{q}_k - H = L.$$ (7.307. egyenlet)

Ebből adódik, hogy

$$S = \int_{t_0}^{t} L\, dt.$$ (7.308. egyenlet)

A Hamilton—Jacobi-egyenletben szereplő S alkotófüggvény tehát megegyezik a Hamilton-elv hatásintegráljával folytonosan változó felső határral. Ezért az S-et *hatásfüggvénynek* is szokták nevezni.

Tekintsük azt a speciális esetet, amikor a Hamilton-függvény nem tartalmazza expliciten az időt. Korábban megmutattuk, hogy ebben az esetben H az időben állandó. Ezért a (7.301)-ből következik, hogy az S hatásfüggvény most

$$S = S_0 - \alpha_1 t$$ (7.309. egyenlet)

alakú, ahol α_1 állandó, az S_0 pedig csak a q_k koordináták függvénye. Ha ezt a kifejezést (7.301)-be helyettesítjük, az S_0-t meghatározó ún. rövidített Hamilton—Jacobi-egyenletet kapjuk:

$$H\left(q_k,\ \frac{\partial S}{\partial q_k}\right) = \alpha_1.$$ (7.310. egyenlet)

Látszik, hogy az eredeti Hamilton—Jacobi-egyenlet teljes megoldásában fellépő f darab α_k állandó közül az egyik additív (a mi jelölésünkben az első) és megegyezik a Hamilton-függvény állandó értékével. Ha a rendszer konzervatív és a derékszögű koordinátákról a q_k-kra való áttérést leíró transzformáció az időt expliciten nem tartalmazza, akkor a Hamilton-függvény a teljes mechanikai energiával egyezik meg, és így ebben az esetben $\alpha_1 = E$. Egyébként $\alpha_1 = H$.

Vegyük azt az esetet, amikor $H = E$-vel. A rövidített Hamilton—Jacobi-egyenlet megoldása ekkor

$$S_0 = S_0\left(q_1,\ \ldots, q_f,\ E,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_f\right)$$ (7.311. egyenlet)

alakú. A mozgásfeladat megoldását a (7.304) és (7.305) kanonikus transzformációval kapjuk:

$$p_k = \frac{\partial S_0}{\partial q_k} \qquad (k = 1,\ 2, \ldots, f),$$ (7.312. egyenlet)

$$Q_1 = \beta_1 = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S_0}{\partial E} - t,$$
$$Q_k = \beta_k = \frac{\partial S_0}{\partial \alpha_k} \qquad (k = 2,\ 3, \ldots, f).$$ (7.313. egyenlet)

Az E, α_2, ..., α_f, β_1, …, β_f integrálási állandók a kezdeti feltételekből számíthatók ki.

A Hamilton—Jacobi-egyenlet megoldásánál további egyszerűsítést jelent, ha a rendszer Hamilton-függvénye a használt általános koordinátákban és impulzusokban a

$$H\left(q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_f;\, p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_f\right) = H_1\left(q_1,\, p_1\right) + H_2\left(q_2,\, p_2\right) + \ldots + H_f\left(q_f,\, p_f\right)$$ #-#7.314]

alakba írható. A (7.310) redukált egyenlet ekkor az

$$S\left(q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_f\right) = S_1\left(q_1\right) + S_2\left(q_2\right) + \ldots + S_f\left(q_f\right)$$ (7.315. egyenlet)

feltevéssel az egyes változókban szétválaszthatóvá válik. A (7.314)-et és (7.315)-öt (7.310)-be helyettesítve,

$$H_1\left(q_1,\, \frac{dS_1}{dq_1}\right) + H_2\left(q_2,\, \frac{dS_2}{dq_2}\right) + \ldots + H_f\left(q_f,\, \frac{dS_f}{dq_f}\right) = E.$$ (7.316. egyenlet)

Mivel a bal oldal egyes tagjai csak a megfelelő koordinátáktól függnek, az egyenlet akkor teljesül a független változók minden értékére, ha mindegyik tag külön-külön egy-egy állandóval egyenlő. Nevezetesen, ha

$$H_i\left(q_i,\, \frac{dS_i}{dq_i}\right) = \alpha_i \qquad \left(i = 1,\, 2, \ldots,\, f\right).$$ (7.317. egyenlet)

Az α_i állandók összegének (7.316) szerint az E energiával kell megegyeznie:

$$\sum_{i=1}^{f} \alpha_i = E.$$ (7.318. egyenlet)

A Hamilton—Jacobi-féle parciális differenciálegyenlet ebben az esetben f darab elsőrendű közönséges differenciálegyenletre vezet. Ezek megoldása általában nem okoz különösebb nehézséget.

Általános feltételt nem lehet adni arra vonatkozóan, hogy a Hamilton—Jacobi-egyenletet mikor lehet a változókban szétválasztani. Ez függ attól, hogy milyen általános koordinátákat használunk. Példaként megemlítjük, hogy a centrális erőtérben mozgó tömegpont esetében polárkoordinátákat használva, a szétválasztás lehetséges, derékszögű koordináták esetén viszont nem.

Bemutatunk még egy esetet, amikor a redukált Hamilton—Jacobi-egyenlet a változók szétválasztásával megoldható. Tekintsük pl. azt, amikor az általános koordináták egy kivételével mind ciklikusak. A nem ciklikus koordináta legyen a q_1 Keressük az S_0-t a következő alakban:

$$S_0 = \sum_k S_{0k}\left(q_k,\ P_k\right).$$ (7.319. egyenlet)

Mivel a ciklikus koordinátáknak megfelelő impulzusok állandók, a $k \neq l$-hez tartozó transzformációs képletek a következők:

$$\frac{dS_{0k}}{dq_k} = p_k = \alpha_k \qquad \left(k = 2,\ 3, \ldots, f\right).$$ (7.320. egyenlet)

A redukált Hamilton—Jacobi-egyenlet ennek megfelelően ilyen alakú lesz:

$$H\left(q_1,\ \frac{dS_{01}}{dq_1},\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_f\right) = \alpha_1.$$ (7.321. egyenlet)

Ez az S_{01}-re elsőrendű közönséges differenciálegyenlet, amit általában könnyű megoldani.

A (7.320) és (7.321) teljesen meghatározzák az S_0 alkotófüggvényt. Ugyanis (7.320)-ból adódik, hogy

$$S_{0k} = \alpha_k q_k \qquad \left(k \neq 1\right).$$ (7.322. egyenlet)

Az S_0 tehát

$$S_0 = S_{01} + \sum_{k=2}^{f} \alpha_k q_k.$$ (7.323. egyenlet)

73.1 Példák a Hamilton—Jacobi-egyenletre

1. A hajítás. Az m tömegű anyagi pontra az *mg* nehézségi erő hat. Derékszögű koordinátákat használunk, és a *z* tengelyt a nehézségi erővel egy irányúnak választjuk.

Mivel a rendszer konzervatív, a Hamilton-függvény megegyezik a teljes mechanikai energiával:

$$H = K + V = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - mgz.$$ (7.324. egyenlet)

A H az időt nem tartalmazza expliciten, ezért az mozgásállandó: $H = E$ = áll.

A hatásfüggvény:

$$S = -Et + S_0(x, y, z).$$ (7.325. egyenlet)

Az impulzuskomponensek (7.312) szerint

$$p_x = \frac{\partial S_0}{\partial x}, \qquad p_y = \frac{\partial S_0}{\partial y}, \qquad p_y = \frac{\partial S_0}{\partial z}.$$ (7.326. egyenlet)

A redukált Hamilton—Jacobi-egyenlet:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{dS_0}{dz}\right)^2\right] - mgz = E.$$ (7.327. egyenlet)

Vegyük fel az S_0-t

$$S_0 = X(x) + Y(y) + Z(z)$$ (7.328. egyenlet)

alakban. Ezt a (7.327)-be helyettesítve,

$$\frac{1}{2m}X'^2 + \frac{1}{2m}Y'^2 + \frac{1}{2m}Z'^2 - mgz = E.$$ (7.329. egyenlet)

Az X', K', Z' a megfelelő független változó szerinti differenciálhányadost jelenti.

Ez a differenciálegyenlet csak akkor teljesül a független változók minden értékére, ha az egyes tagok rendre állandók:

$$\frac{1}{2m}X'^2 = \alpha_2, \qquad \frac{1}{2m}Y'^2 = \alpha_3, \qquad \frac{1}{2m}Z'^2 = \alpha_4.$$ (7.330. egyenlet)

A (7.329)-ből következik, hogy

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = E.$$ (7.331. egyenlet)

A (7.330) elsőrendű közönséges differenciálegyenletek megoldása:

$$X(x) = \sqrt{2m\alpha_2}\,x, \qquad Y(y) = \sqrt{2m\alpha_3}\,y, \qquad Z(z) = \frac{1}{3m^2g}\left(2m\alpha_4 + 2m^2gz\right)^{\frac{3}{2}}.$$ (7.332. egyenlet)

(Az integrálási állandókat azért hagytuk el, mert ezek S_0-ban egy additív állandót eredményeznek, amelytől a korábban mondottak szerint eltekintünk. Ez ugyanis a kanonikus transzformáció képleteiben nem jelenik meg, mert utóbbiak az *x*, *y, z* és az *α*-k szerinti deriváltakat tartalmazzák, és emiatt az additív állandó nem ad járulékot.)

Az S_0 függvény a (7.328) és a (7.332) szerint

$$S_0 = \sqrt{2m\alpha_2}\,x + \sqrt{2m\alpha_3}\,y + \frac{1}{3m^2 g}\left(2m\alpha_4 + 2m^2 gz\right)^{\frac{3}{2}}. \qquad \text{(7.333. egyenlet)}$$

Vegyük figyelembe, hogy az α_2, α_3, α_4 nem függetlenek egymástól, mert közöttük a (7.331) összefüggés van. Eszerint az egyik (mondjuk, az α_4) kifejezhető az *E*-vel és a másik kettővel:

$$\alpha_4 = E - \alpha_2 - \alpha_3. \qquad \text{(7.334. egyenlet)}$$

Ezt (7.333)-ba beírva

$$S_0 = \sqrt{2m\alpha_2}\,x + \sqrt{2m\alpha_3}\,y + \frac{1}{3m^2 g}\left[2m\left(E - \alpha_2 - \alpha_3\right) + 2m^2 gz\right]^{\frac{3}{2}}. \qquad \text{(7.335. egyenlet)}$$

A koordináták és impulzusok időfüggését a (7.312) és (7.313) transzformációs képletek alapján kapjuk meg:

$$\begin{aligned}
p_x &= \frac{\partial S_0}{\partial x} = \sqrt{2m\alpha_2}, \\
p_y &= \frac{\partial S_0}{\partial y} = \sqrt{2m\alpha_3}, \\
p_z &= \frac{\partial S_0}{\partial z} = \left[2m\left(E - \alpha_2 - \alpha_3\right) + 2m^2 gz\right]^{\frac{1}{2}};
\end{aligned} \qquad \text{(7.336. egyenlet)}$$

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{\partial S_0}{\partial E} - t = \frac{1}{mg}\left[2m\left(E - \alpha_2 - \alpha_3\right) + 2m^2 gz\right]^{\frac{1}{2}} - t, \\
\beta_2 &= \frac{\partial S_0}{\partial \alpha_2} = \frac{mx}{\sqrt{2m\alpha_2}} - \frac{1}{mg}\left[2m\left(E - \alpha_2 - \alpha_3\right) + 2m^2 gz\right]^{\frac{1}{2}}, \\
\beta_3 &= \frac{\partial S_0}{\partial \alpha_3} = \frac{my}{\sqrt{2m\alpha_3}} - \frac{1}{mg}\left[2m\left(E - \alpha_2 - \alpha_3\right) + 2m^2 gz\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \qquad \text{(7.337. egyenlet)}$$

A (7.337) első egyenletéből

$$\frac{1}{mg}\left[2m(E-\alpha_2-\alpha_3)+2m^2gz\right]^{\frac{1}{2}}=\beta_1+t. \quad \text{(7.338. egyenlet)}$$

Ezt a második és a harmadik egyenletbe helyettesítve,

$$x=\sqrt{\frac{2\alpha_2}{m}}t+\sqrt{\frac{2\alpha_2}{m}}(\beta_2+\beta_1)=a_1t+b_1, \quad \text{(7.339. egyenlet)}$$

$$y=\sqrt{\frac{2\alpha_3}{m}}t+\sqrt{\frac{2\alpha_3}{m}}(\beta_3+\beta_1)=a_2t+b_2. \quad \text{(7.340. egyenlet)}$$

A *z* koordináta időfüggése a (7.338)-ból adódik:

$$z=\frac{1}{2}gt^2+\beta_1gt+\frac{m^2g^2\beta^2-2m(E-\alpha_2-\alpha_3)}{2m^2g}=\frac{1}{2}gt^2+a_3t+b_3. \quad \text{(7.341. egyenlet)}$$

Az a_i, b_i, (vagy az E, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3) integrálási állandók a kezdeti feltételekből számíthatók ki. A (7.339)—(7.341) megoldások a Newton-féle tárgyalásmódból már jól ismertek.

2. *Tömegpont mozgása centrális erőtérben.* A rendszer Hamilton-függvénye a (7.222) szerint

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\vartheta^2}{r^2}\right)+V(r). \quad \text{(7.342. egyenlet)}$$

Mivel ez a ϑ szöget nem tartalmazza, ϑ ciklikus koordináta. Az S_0, az előzőek alapján a (7.323) mintjára

$$S_0=S_1(r)+\alpha_2\vartheta \quad \text{(7.343. egyenlet)}$$

alakba írható. Az α_2 állandó fizikai jelentése (7.320) szerint

$$\alpha_2=\frac{\partial S_0}{\partial\vartheta}=p_\vartheta. \quad \text{(7.344. egyenlet)}$$

amely megegyezik az impulzusnyomaték nagyságával.

A redukált Hamilton—Jacobi-egyenlet ebben az esetben a következő alakot veszi fel:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2+\frac{\alpha_2^2}{r^2}\right]+V(r)=E. \quad \text{(7.345. egyenlet)}$$

Ebből átrendezéssel

$$\frac{dS_1}{dr}=\sqrt{2m(E-V)-\frac{\alpha_2^2}{r^2}},$$

amelynek megoldása

$$S_1=\int\sqrt{2m(E-V)-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}dr. \quad \text{(7.346. egyenlet)}$$

Ezt (7.343)-ba behelyettesítve, kapjuk, hogy

$$S_0=\int\sqrt{2m(E-V)-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}dr+\alpha_2\vartheta. \quad \text{(7.347. egyenlet)}$$

A (7.313) transzformációs képletek:

$$\beta_1=\frac{\partial S_0}{\partial E}-t=\int\frac{m\,dr}{\sqrt{2m(E-V)-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}}-t,$$

$$\beta_2=\frac{\partial S_0}{\partial \alpha_2}=\vartheta-\int\frac{\alpha^2 dr}{r^2\sqrt{2m(E-V)-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}}. \quad \text{(7.348. egyenlet)}$$

Az első egyenletből kiszámíthatjuk az *r* rádiuszvektort az idő függvényében. Vegyük észre, hogy ez megegyezik a kanonikus egyenletek alapján kapott (7.230) eredménnyel.

A második egyenletből a tömegpont pályaegyenletét lehet meghatározni, ha a $V(r)$ potenciál ismert függvénye a rádiuszvektornak. (Megjegyezzük, hogy ekkor célszerű áttérni az $u = \frac{1}{r}$ új változóra.)

74. A Poisson-féle zárójeles kifejezések

Legyen $F(q_k, p_k, t)$ a rendszerre vonatkozó valamilyen fizikái mennyiség, amely az időn kívül az általános koordinátáknak és impulzusoknak függvénye. A rendszer mechanikai állapotának változása következtében F is változik az időben. Az időbeli változását az idő szerinti differenciálhányadossal fejezzük ki:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k}\dot{p}_k\right). \quad \text{(7.349. egyenlet)}$$

A $\dot{q}_k$-ot és $\dot{p}_k$-ot a (7.208) kanonikus egyenletek szabják meg. Ezeket a (7.349)-be behelyettesítve,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right). \quad \text{(7.350. egyenlet)}$$

Annak feltétele, hogy az F mozgásállandó legyen, a $\partial F/\partial t$ parciális deriválton kívül a

$$\sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)$$

kifejezésnek is zérusnak kell lennie. Ez határozza meg F-nek a rendszer állapotával való változását vagy állandóságát. Az

$$[F, H]_{q,p} = \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) \quad \text{(7.351. egyenlet)}$$

kifejezést az F és H *Poisson-zárójelének* nevezzük. A Poisson-zárójeleknek a mechanika absztraktabb felépítésében és a kvantummechanikával való kapcsolatában van fontos szerepük. Látni fogjuk, hogy a mozgásegyenletek is megfogalmazhatók Poisson-zárójelekkel. Jelentőségük tulajdonképpen nem abban van, hogy konkrét mozgásfeladatok ezekkel könnyebben megoldhatók lennének, hanem abban, hogy a mozgásegyenletek ezekkel olyan alakban írhatók fel, amelyek közvetlenül alkalmazhatók a kvantummechanika Diractól származó megalapozásánál.

A Poisson-zárójelet nemcsak a Hamilton-függvényre lehet értelmezni, hanem bármely két dinamikai mennyiségre, amelyek az általános koordinátákkal és impulzusokkal kifejezhetők. Nevezetesen az $A(q_k, p_k, t)$ és $B(q_k, p_k, t)$ Poisson-zárójelén a következőt értjük:

$$[A,\ B]_{q,p}=\sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k}-\frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k}\right).$$ (7.352. egyenlet)

Ebből a definícióból közvetlenül adódnak az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned}
[A,\ B]&=-[B,\ A],\\
[A,\ A]&=0,\\
[A,\ B+C]&=[A,\ B]+[A,\ C],\\
[A,\ BC]&=B[A,\ C]+[A,\ B]C.
\end{aligned}$$ (7.353. egyenlet)

Az általános koordináták és impulzusok Poisson-zárójele

$$\begin{aligned}
[q_k,\ q_l]_{q,p}&=[p_k,\ p_l]_{q,p}=0,\\
[q_k,\ p_l]&=\delta_{kl},
\end{aligned}$$ (7.354. egyenlet)

ahol δ_{kl} a Weierstrass-szimbólumot jelenti ($\delta_{kl}=0$, ha $k\neq l$, $\delta_{kl}=1$, ha $k=l$). A (7.354) kifejezéseket *alapvető (fundamentális) Poisson-zárójeleknek* nevezzük.

A kanonikus egyenletek Poisson-zárójelekkel a következőképpen fejezhetők ki:

$$\dot{q}_k=[q_k,\ H]_{q,p},\quad \dot{p}_k=[p_k,\ H]_{q,p}\quad (k=1,\ 2,\ldots,\ f).$$ (7.355. egyenlet)

Ezek a (7.352) definíció alapján könnyen igazolhatók. Ugyanis

$$[q_k,\ H]_{q,p}=\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial q_k}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial q_k}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=\sum_{i=1}^{f}\delta_{ik}\frac{\partial H}{\partial p_i}=\frac{\partial H}{\partial p_k}=\dot{q}_k.$$

Hasonlóképpen

$$[p_k,\ H]_{q,p}=\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial p_k}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=-\sum_{i=1}^{f}\delta_{ik}\frac{\partial H}{\partial q_i}=-\frac{\partial H}{\partial q_k}=\dot{p}_k.$$

Itt kihasználtuk, hogy a koordináták és impulzusok egymástól függetlenek, tehát

$$\frac{\partial q_k}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0.$$

A Poisson-zárójeleknek nagyon fontos sajátsága, hogy invariánsuk a kanonikus transzformációkkal szemben. Ez azt jelenti, hogy

$$[A, B]_{q,p} = [A, B]_{Q,P}.$$ (7.356. egyenlet)

A bizonyítást először az alapvető Poisson-zárójelekre végezzük el, majd ennek alapján a (7.356)-ot bizonyítjuk be. Felhasználjuk azt a kanonikus transzformációkkal kapcsolatban megismert tételt, hogy e transzformációk a W alkotófüggvényből származtathatók. Vegyük először a $W_1(q_k, Q_k; t)$-t. A (7.261) szerint

$$p_k = \frac{\partial W_1}{\partial q_k}, \qquad P_k = -\frac{\partial W_1}{\partial Q_k}. \qquad (k = 1, 2, \ldots, f).$$ (7.357. egyenlet)

Ebből következik, hogy

$$\frac{\partial p_k}{\partial Q_l} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial Q_l \partial q_k} = -\frac{\partial P_l}{\partial q_k}$$ (7.358. egyenlet)

Hasonlóképpen adódnak a W_2-, W_3,- és W_4-ből:

$$\frac{\partial q_k}{\partial Q_l} = \frac{\partial P_l}{\partial p_k}, \qquad \frac{\partial q_k}{\partial P_l} = -\frac{\partial Q_l}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial P_l} = \frac{\partial Q_l}{\partial q_k}.$$ (7.359. egyenlet)

Ezeket felhasználva,

$$[Q_k, P_l]_{q,p} = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\frac{\partial P_l}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_i}\frac{\partial P_l}{\partial q_i}\right) = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_l} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial Q_l}\right) = \frac{\partial Q_k}{\partial Q_l} = \delta_{kl} = [Q_k, P_l]_{Q,P}.$$ (7.360. egyenlet)

Ugyanígy adódnak

$$[Q_k, Q_l]_{q,p} = [Q_k, Q_l]_{Q,P} = 0,$$
$$[P_k, P_l]_{q,p} = [P_k, P_l]_{Q,P} = 0.$$ (7.361. egyenlet)

Ezzel az alapvető Poisson-zárójelek invarianciáját bebizonyítottuk. Nézzük az általános esetet:

$$[A,B]_{Q,P}=\sum_i\left(\frac{\partial A}{\partial Q_i}\frac{\partial B}{\partial P_i}-\frac{\partial A}{\partial P_i}\frac{\partial B}{\partial Q_i}\right)=\sum_i\sum_j\left[\frac{\partial A}{\partial Q_i}\left(\frac{\partial B}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_i}+\frac{\partial B}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right)-\frac{\partial A}{\partial P_i}\left(\frac{\partial B}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}+\frac{\partial B}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\right)\right]=$$

$$=\sum_j\left(\frac{\partial B}{\partial q_j}[A,q_j]_{Q,P}+\frac{\partial B}{\partial p_j}[A,p_j]_{Q,P}\right). \qquad \text{(7.362. egyenlet)}$$

Alkalmazzuk most ezt az egyenlőséget a $[qj, A]_{Q\,P}$-re. A (7.362)-ből az $A\to q_j$, $B\to A$ helyettesítéssel

$$\left[q_j, A\right]_{Q,P}=\sum_k\left(\frac{\partial A}{\partial q_k}[q_j, q_k]_{Q,P}+\frac{\partial A}{\partial p_k}[q_j, p_k]_{Q,P}\right)=\frac{\partial A}{\partial p_k}\delta_{jk}=\frac{\partial A}{\partial p_j}. \qquad \text{(7.363. egyenlet)}$$

Hasonlóképpen kapjuk, hogy

$$\left[p_j, A\right]_{Q,P}=-\frac{\partial A}{\partial q_j}. \qquad \text{(7.364. egyenlet)}$$

A (7.353) első egyenletét felhasználva, ezeket a (7.362)-be behelyettesítve

$$[A,B]_{Q,P}=\sum_j\left(-\frac{\partial B}{\partial q_j}\frac{\partial A}{\partial p_j}+\frac{\partial B}{\partial p_j}\frac{\partial A}{\partial q_j}\right)\equiv[A,B]_{q,p}. \qquad \text{(7.365. egyenlet)}$$

Ezzel bebizonyítottuk a (7.356) egyenlőséget. A Poisson-zárójelek tehát invariánsak a kanonikus transzformációkkal szemben. Ez másként kifejezve azt jelenti, hogy a Poisson-zárójelek függetlenek attól, hogy milyen kanonikusan konjugált változókra vonatkoztatjuk őket. Emiatt a *q*, *p* index elhagyható a zárójel mellől.

Nagyon érdekes megvizsgálni — különösen a megfelelő kvantummechanikai eredménnyel való későbbi összehasonlítás miatt — az impulzusnyomaték bármely két komponensének Poisson-zárójelét. Gondoljunk egy anyagi pontra, és írjuk fel az impulzusnyomaték derékszögű komponenseit. Az impulzusnyomatékot korábban **L**-lel jelöltük. Azért, hogy elkerüljük a Lagrange-függvénnyel való összetévesztést, most **l**-lel jelöljük. Az **l** derékszögű komponensei az *x, y,* z$\to x_1, x_2, x_3$ jelölésrendszerben:

$$l_1=x_2p_3-x_3p_2, \qquad l_2=x_3p_1-x_1p_3, \quad l_3=x_1p_2-x_2p_1, \qquad \text{(7.366. egyenlet)}$$

ahol $p_i=m\dot{x}(i=1,\ 2,\ 3)$. Képezzük az l_1 és l_2 Poisson-zárójelét. A (7.351) definíció alapján

$$[l_1, l_2] = \sum \left(\frac{\partial l_1}{\partial x_k} \frac{\partial l_2}{\partial p_k} - \frac{\partial l_1}{\partial p_k} \frac{\partial l_2}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial l_1}{\partial x_3} \frac{\partial l_2}{\partial p_3} - \frac{\partial l_1}{\partial p_3} \frac{\partial l_2}{\partial x_3} = p_2 x_1 - x_2 p_1 = l_3.$$

[MA. #-#7.367]

Hasonlóan adódik a másik két komponensre, hogy

$$[l_1, l_3] - l_2, \qquad [l_2, l_3] = l_1.$$ (7.368. egyenlet)

Összefoglaló jelöléssel

$$\left[l_i, l_j \right] = \sum_k e_{ijk} l_k,$$ (7.369. egyenlet)

ahol e_{ijk} = 1, ha az *i*, *j*, *k* indexek sorrendje az 1, 2, 3 páros számú, és e_{ijk}= –1, ha páratlan számú felcserélésével adódik. Az összes többi esetben e_{ijk} = 0.

Tekintsük az **l** vektor valamelyik komponensének az impulzusnyomaték négyzetével képezett Poisson-zárójelét:

$$\left[l_i, l^2 \right] = \left[l_1, \sum_{j=1}^{3} l_j^2 \right] = \sum_{j=1}^{3} \left[l_i, l_j^2 \right].$$ (7.370. egyenlet)

A (7.353) utolsó egyenlősége szerint

$$\left[l_i, l_j^2 \right] = 2 l_j \left[l_i, l_j \right]$$

Ezt (7.370)-be helyettesítve, a (7.369) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\left[l_i, l^2 \right] = 2 \sum_{j=k}^{3} \sum_{k=1}^{3} e_{ijk} l_k l_j \equiv 0.$$ (7.371. egyenlet)

Visszatérve a kiindulásul vett (7.349) egyenlethez, az általános koordinátákkal és impulzusokkal kifejezhető *F* fizikai mennyiségnek a rendszer állapotváltozása következtében fellépő időbeli megváltozását a Poisson-zárójellel a következőképpen adhatjuk meg:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \left[F, H \right].$$ (7.372. egyenlet)

Ha F nem függ expliciten az időtől, akkor annak a feltétele, hogy az F-fel jellemzett fizikai mennyiség mozgásállandó legyen, az, hogy az F és H Poisson-zárójelének el kell tűnnie: $[F, H] = 0$. Ebből szembetűnően nyilvánvaló, hogy ha a Hamilton-függvény nem tartalmazza az időt expliciten, akkor az mozgásállandó, ugyanis $[H, H] \equiv 0$.

Ha $A(q_k, p_k.)$ és $B(q_k, p_k)$ olyan két fizikai mennyiséget jelent, amelyek a mozgás során állandók, akkor be lehet látni, hogy e kettő $[A, B]$ Poisson-zárójele is az. Ennek bizonyításához előbb igazolunk egy tételt, amelyet *Jacobi-azonosságnak* neveznek.

Tekintsük a következő kifejezést:

$$\big[A,[B,\,C]\big]-\big[B,[A,\,C]\big]=\left[A,\,\sum_k\left(\frac{\partial B}{\partial q_k}\frac{\partial C}{\partial p_k}-\frac{\partial B}{\partial p_k}\frac{\partial C}{\partial q_k}\right)\right]-\left[B,\,\sum_k\left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial C}{\partial p_k}+\frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial C}{\partial q_k}\right)\right].$$

A jobb oldal a (7.353) összefüggések alapján átalakítható a következőképpen:

$$\sum_k\left\{-\frac{\partial C}{\partial q_k}\left(\left[\frac{\partial A}{\partial p_k},\,B\right]+\left[A,\,\frac{\partial B}{\partial p_k}\right]\right)+\frac{\partial C}{\partial p_k}\left(\left[\frac{\partial A}{\partial p_k},\,B\right]+\left[A,\,\frac{\partial B}{\partial q_k}\right]\right)\right\}+$$
$$+\sum_k\left\{\frac{\partial B}{\partial q_k}\left[A,\,\frac{\partial C}{\partial p_k}\right]-\frac{\partial B}{\partial p_k}\left[A,\,\frac{\partial C}{\partial q_k}\right]-\frac{\partial A}{\partial q_k}\left[B,\,\frac{\partial C}{\partial p_k}\right]+\frac{\partial A}{\partial p_k}\left[B,\,\frac{\partial C}{\partial q_k}\right]\right\}.$$

Belátható, hogy a második $\sum_k\{\ldots\}=0$, az első pedig a

$$\frac{\partial}{\partial x}[A,\,B]\equiv\left[\frac{\partial A}{\partial x},\,B\right]+\left[A,\,\frac{\partial B}{\partial x}\right]$$

azonosság felhasználásával a

$$\sum_k\left(-\frac{\partial C}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k}[A,\,B]+\frac{\partial C}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k}[A,\,B]\right)=-\big[C,\,[A,\,B]\big]$$

alakra hozható. Így adódik az

$$\big[A,\,[B,\,C]\big]-\big[B,\,[A,\,C]\big]=-\big[C,\,[A,\,B]\big]$$

azonosság, amelynek az

$$\big[A,\ [B,\ C]\big]+\big[B,\ [A,\ C]\big]+\big[C,\ [A,\ B]\big]=0$$ (7.373. egyenlet)

szimmetrikus alakja az említett Jacobi-azonosság. Alkalmazzuk ezt arra az esetre, amikor *C* = *H*:

$$\big[A,\ [B,\ H]\big]+\big[B,\ [H,\ A]\big]+\big[H,\ [A,\ B]\big]=0.$$ (7.374. egyenlet)

Ha az *A* és *B* mozgásállandók, azaz

$$[A,\ H]=0,\qquad \text{és}\qquad [B,\ H]=0,$$ (7.375. egyenlet)

akkor a (7.374)-ből következik, hogy az [*A, B*] is az. Ugyanis a (7.374)-ből a (7.375) alapján adódik, hogy

$$\big[H,\ [A,\ B]\big]=0,$$ (7.376. egyenlet)

ami éppen azt jelenti, hogy [*A, B*] állandó az időben.

A Jacobi-azonosság felhasználásával ismert mozgásállandókból újabbak képezhetők.

75. A fázistér. Liouville-tétel

Az *f* szabadsági fokú rendszer mechanikai állapotát adott időpontban a Hamilton-féle tárgyalásmódban *f* darab q_k általános koordinátával és *f* általános impulzussal, p_k-val adjuk meg. A rendszer állapotának időbeli változását a

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k},\qquad \dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k}\qquad (k=1,\ 2,\ldots,\ f)$$ (7.377. egyenlet)

kanonikus egyenletek írják le.

Az állapotot és annak időbeli változását szemléltethetjük geometriailag a koordináták és impulzusok egyesített 2*f*-dimenziós terében, az ún. *fázistérben.* A fázistér pontjait az

$$\mathbf{R}=\mathbf{e}_1q_1+\mathbf{e}_2q_2+\ldots+\mathbf{e}_fq_f+\mathbf{e}_{f+1}p_1+\ldots+\mathbf{e}_{2f}p_f=\sum_{i=1}^{f}\left(\mathbf{e}_iq_i+\mathbf{e}_{i+f}p_i\right)$$ (7.378. egyenlet)

vektorral adjuk meg. Az $\mathbf{e}_i$ vektorok ortogonális egységvektorok:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = \delta_{ik} \qquad (i,k = 1,\ 2,\ldots,\ f).$$ (7.379. egyenlet)

A rendszer mechanikai állapotát adott időpillanatban a fázistér egy pontja, az **R** vektorral megadott pont ábrázolja. Ahogy a rendszer állapota a mozgásegyenleteknek megfelelően változik az időben, a megfelelő fázispont helyzete folytonosan változik a fázistérben egy vonal, az ún. *fázisgörbe* mentén. A fázispont sebességét a

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{f}\left(\mathbf{e}_i\dot{q}_i + \mathbf{e}_{i+f}\dot{p}_i\right)$$ (7.380. egyenlet)

vektorral értelmezzük. A fázistér minden pontjához hozzárendelhető a **V** vektornak egy értéke. Az így definiált **V=V**(**R**) vektortér a fázispontok sebességtere. A **V**(**R**) a (7.377) kanonikus egyenletek alapján a következő alakba írható:

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{f}\left(\mathbf{e}_i\frac{\partial H}{\partial p_i} - \mathbf{e}_{i+f}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right).$$ (7.381. egyenlet)

Konzervatív rendszerek esetén a Hamilton-függvény nem függ expliciten az időtől, ezért a **V**(**R**) sem. Vegyük a **V** sebességnek a 2*f*-dimenziós fázistérben értelmezett divergenciáját, amely a háromdimenziós térbeli divergenciának általánosítása magasabb dimenziójú terekben:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial q_i}\right) = 0.$$ (7.382. egyenlet)

A **V**(**R**) sebességtér divergenciamentes. A fázispontok mozgása összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlásához hasonlít.

A rendszer kezdeti állapotát a 2*f*-dimenziós fázistér $q_k(0) = q_k^0$, $p_k(0) = p_k^0$ adatokkal megadott $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0$ pontja ábrázolja. A különböző lehetséges kezdeti állapotok a fázistérben sűrűn elhelyezkedő pontok halmaza. Feltesszük, hogy ezek kitöltik a fázistérnek egy Γ_0 tartományát. A mozgástörvény szerint mindegyik kezdőpontból más és más mechanikai állapot jön létre *t* idő múlva. Ezen *t* időbeli állapotok fázispontjai a fázistér $\Gamma(t)$ tartományát töltik ki. Vizsgáljuk meg, hogy a $\Gamma(t)$ tartomány hogyan változik az időben, miközben a pontok a mozgásegyenletek szerint változtatják a helyüket a fázistérben. A $t + \Delta t$ időponthoz tartozó tartomány: $\Gamma(t+\Delta t)$. A Δt időtartam alatti térfogatváltozás

$$\Delta\Gamma = \Gamma(t+\Delta t) - \Gamma(t) = \Delta t\oint \mathbf{V}d\mathbf{f}.$$ (7.383. egyenlet)

A jobb oldali integrál a tartományt határoló hiperfelületre vett felületi integrál a 2*f*-dimenziós térben. A *d***f** vektor nagysága megegyezik a felületelemmel, iránya pedig a tartományból kifelé mutat. Osszuk el a (7.383) egyenletet Δt-vel, majd vegyük a $\Delta\Gamma/\Delta t$ határértékét, midőn $\Delta t\to 0$. A határérték a Γ-nak *t* szerinti differenciálhányadosa lesz:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta t} = \oint \mathbf{V}\, d\mathbf{f}.$$ (7.384. egyenlet)

Ezt a „felületi" integrált a 2*f*-dimenziós fázistérre általánosított Gauss-tétellel „térfogati" integrállá alakítjuk:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{\Gamma} \mathrm{div}\, \mathbf{V}\; d\Gamma = \int_{(2f)} \ldots \int \mathrm{div}\, \mathbf{V} dq_1 dq_2 \ldots dq_f dp_1 \ldots dp_f.$$ (7.385. egyenlet)

Mivel a sebességtér (7.382) szerint divergenciamentes, a jobb oldali integrál zérus. Ezért

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \qquad \text{amiből} \qquad \Gamma = \text{áll.}$$ (7.386. egyenlet)

A lehetséges kezdeti állapotok fázispontjait tartalmazó *Γ* tartomány a fázispontok mozgása során csak az alakját változtatja meg, de a térfogatát nem. Ezt nevezzük *Liouville tételnek*. A tételnek a statisztikus mechanika#[8] megalapozásánál van fontos szerepe.

Ugyancsak a statisztikus mechanika számára érdekes következtetés adódik a Liouville-tétel differenciális alakjából. Gondoljuk el a fázistér **R** pont körüli *ΔΓ* tartományát, amelyben *ΔN* fázispont van. Képezzük a *ΔN/ΔΓ* hányadost, és vegyük ennek határértékét, amidőn a *ΔΓ* tartományt összehúzzuk az **R** pontra, tehát a *ΔΓ*→0 határátmenetet nézzük. Ezt a véges határértéket a fázispontok ϱ_f számsűrűségének nevezzük. Nyilvánvaló, hogy ϱ_f függ az **R** „helyvektortól" — tehát az általános koordinátáktól és impulzusoktól — és általában az időtől:

$$\varrho_f(\mathbf{R}, t) = \lim_{\Delta\Gamma \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta\Gamma}.$$ (7.387. egyenlet)

A ϱ_f az idővel általában két okból változhat. Egyrészt változhat az idővel az adott pontban, másrészt a fázispontok mozgása következtében a q_k-kon és p_k-kon keresztül. Ezért a ϱ_f-nek az idő szerinti teljes deriváltja a (7.372) szerint

$$\frac{d\varrho_f}{dt} = \frac{\partial \varrho_f}{\partial t} + \left[\varrho_f, H\right].$$ (7.388. egyenlet)

Azonban a (7.387) definícióból következik, hogy mivel a fázispontok száma és a fázistérfogat állandó, a ϱ_f is az. Tehát

[8]# A statisztikus mechanika (vagy statisztikus fizika) azzal foglalkozik, hogyan lehet a makroszkopikus testek fizikai sajátságait értelmezni az anyag mikroszerkezetére vonatkozó törvényekből.

$$\frac{d\varrho_f}{dt} = 0.$$ (7.389. egyenlet)

Ezt figyelembe véve, a (7.388)-ból következik, hogy

$$\frac{\partial\varrho_f}{\partial t} = -\left[\varrho_f, H\right].$$ (7.390. egyenlet)

Ha a fázispontok eloszlása stacionárius, akkor a ϱ_f-nek a fázistér bármely pontjában időben állandónak kell lennie. Vagyis

$$\frac{\partial\varrho_f}{\partial t} = 0.$$ (7.391. egyenlet)

Ez a (7.390) szerint egyenértékű azzal, hogy a ϱ_f-nek a Hamilton-függvénnyel képezett Poisson-zárójele zérus:

$$\left[\varrho_f, H\right] = 0.$$ (7.392. egyenlet)

Következésképpen, ha a ϱ_f-et valamilyen mozgásállandó függvényének tekintjük, akkor a fázispontok eloszlása mindvégig stacionárius marad a Liouville-tétel miatt, mert az ebből adódó (7.392) biztosítja a ϱ_f állandóságát. Ezért konzervatív rendszerek esetén ϱ_f a rendszer állandó energiájának bármilyen függvénye lehet, mert ekkor teljesül a stacionárius eloszlás (7.392) feltétele. A statisztikus mechanikában a fázispontok stacionárius eloszlását statisztikus egyensúlynak nevezzük. Ennélfogva a (7.392)-t úgy is felfoghatjuk, mint a statisztikus egyensúly feltételét.

Nézzünk egy egyszerű példát a Liouville-tételre. Gondoljunk egy egyenes mentén állandó gyorsulással mozgó tömegpontra. Válasszuk az *x* tengelyt a mozgás irányának. A fázistér most kétdimenziós. Az anyagi pont energiája

$$E = \frac{p^2}{2m} - ax,$$ (7.393. egyenlet)

ahol *a* a tömegpontra ható állandó erő nagyságát jelenti. Ez az egyenlet a tömegpont pályaegyenlete a fázistérben. Ez egy parabolát ír le. Az $E+\Delta E$ energiához egy másik parabola tartozik. A két parabolának *x* irányban mért vízszintes távolsága mindig ugyanakkora: $\Delta x=\Delta E/a$. Nézzük azokat az állapotokat, amelyek fázispontjai a $t = 0$ időpontban az E és $E+\Delta E$ energiájú fázispályák, valamint a p_{01} *és* p_{02} impulzus-értékek közé esnek. A tömegpont impulzusa az idő lineáris függvénye: $p=p_0+at$. A mozgó fázispont impulzustengelyre eső vetülete tehát állandó sebességgel mozog. Ebből következik, hogy a kiszemelt állapotok halmazát határoló alsó és felső egyenesek a mozgás folyamán párhuzamosak maradnak és a távolságuk is állandó:

$p_2 - p_1 = p_{02} - p_{01}$

Így a rombuszra emlékeztető fázistartomány alapja is, magassága is minden időben ugyanakkora, ezért a tartomány területe állandó.

76. A variációszámítás határképlete

A mozgásegyenletek Hamilton-elvből történt levezetésénél az

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t)dt \qquad \text{(7.394. egyenlet)}$$

hatásintegrált szélsőértékké tevő $q_k(t)$ függvényeket határoztuk meg. Láttuk, hogy azok a $q_k(t)$ függvények elégítik ki a $\delta S = 0$ variációs elvet, amelyek megoldásai a

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ldots,\ f) \qquad \text{(7.395. egyenlet)}$$

Euler–Lagrange-egyenleteknek. A variáció szabályai a következők voltak: 1. az időt nem variáltuk, $\delta t = 0$; 2. a q_k koordináták δq_k, variációi az integrálási tartomány határain eltűntek, $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$.

A Lagrange-egyenletek megoldásait a (7.394)-be behelyettesítve, az S a $q_k^{(1)},\ t_1,\ q_k^{(2)},\ t_2$ mennyiségek függvénye. Megvizsgáljuk, hogy mennyire változik meg az S hatásintegrál, ha a felső határ koordinátáit és az idejét is megváltoztatjuk, de az alsó határt rögzítve tartjuk. A felső határ mellől a „2" indexet ezért elhagyjuk. Az S szélsőértékét jelöljük S*-gal. A megváltoztatott végpont maga után vonja az S szélső-értékre vezető q_k-k menetének a megváltozását is. Ezeket a függvényeket $q_k'(\tau)$-val jelöljük, ahol r az időt mint integrálási változót jelöli (azért tértünk át más jelölésre, mert most t az integrál változó felső határa):

$$q_k'(\tau) = q_k(\tau) + \eta_k(\tau), \qquad \text{(7.396. egyenlet)}$$

ahol $\eta_k(\tau)$ infinitezimálisan kicsi függvényeket jelent. Ezek az alsó határon a mondottak értelmében eltűnnek:

$$\eta_k(t_1) = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ldots,\ f). \qquad \text{(7.396. egyenlet)}$$

Képezzük a δS*-ot, amely a felső határon vett koordináták δq_k és az idő δt meg-változásából származik:

$$\delta S^{*} = \int_{t_1}^{t+\delta t} L\left(q_k', \dot{q}_k', \tau\right) d\tau - \int_{t_1}^{t} L\left(q_k, \dot{q}_k, \tau\right) d\tau = \int_{t_1}^{t} L\left(q_k+\eta_k, \dot{q}_k+\dot{\eta}_k, \tau\right) d\tau +$$
$$+ \int_{t_1}^{t+\delta t} L\left(q_k+\eta_k, \dot{q}_k+\dot{\eta}_k, \tau\right) d\tau - \int_{t_1}^{t} L\left(q_k, \dot{q}_k, \tau\right) d\tau.$$
(7.397. egyenlet)

A *t*-től (*t*+*δt*)-ig vett integrál integrálási tartománya infinitezimálisan kicsi, ezért az integrál az *L* integrandusznak és a *δt* tartománynak a szorzatával helyettesíthető:

$$\int_{t}^{t+\delta} L\, d\tau = L(t)\, \delta t.$$
(7.398. egyenlet)

A $L(q_k+\eta_k, \dot{q}_k+\dot{\eta}_k, \tau)$ függvényt Taylor-sorba fejtjük és a lineáris tagoknál megállunk, mivel feltevésünk értelmében az η_k és $\dot{\eta}_k$ infinitezimálisan kicsi függvények:

$$L\left(q_k+\eta_k, \dot{q}_k+\dot{\eta}_k, \tau\right) = L\left(q_k, \dot{q}_k, \tau\right) + \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\eta_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{\eta}_k\right).$$
(7.399. egyenlet)

A (7.398)-at és (7.399)-et (7.397)-be helyettesítve,

$$\delta S^{*} = \int_{t_1}^{t} \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\eta_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{\eta}_k\right) d\tau + L(t)\ \delta t.$$

Az integrál második tagjában parciálisan integrálva,

$$\delta S^{*} = \int_{t_1}^{t} \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\eta_k d\tau + \left[\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\eta_k\right]_{t_1}^{t} + L(t)\,\delta t.$$
(7.400. egyenlet)

Az integrál az Euler—Lagrange-egyenletek miatt eltűnik, az integrált rész az alsó határon az $\eta_k(t_1) = 0$ feltétel miatt zérus. Ennek alapján

$$\delta S^{*} = \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\eta_k(t) + L(t)\,\delta t.$$
(7.401. egyenlet)

Az $\eta_k(t)$ a felső határon vett koordináták δq_k megváltozásával a következőképpen fejezhető ki:

$$\delta q_k = q_k'(t+\delta t) - q_k(t) = q_k(t+\delta t) + \eta_k(t+\delta t) - q_k(t).$$

Ebből

$$\eta_k(t+\delta t) = \delta q_k - \left[q_k(t+\delta t) - q_k(t)\right].$$

A [. . .] zárójel a differenciálszámítás középértéktétele alapján $\dot{q}_k \delta t$-vel helyettesíthető, az $\eta_k(t+\delta t)$ helyett pedig a δt és η_k kicsinysége miatt $\eta_k(t)$ írható. (Itt a másodrendű és ennél magasabbrendű tagokat hagytuk el.) Tehát

$$\eta_k(t) = \delta q_k - \dot{q}_k \delta t. \quad \text{(7.402. egyenlet)}$$

Ezt a (7.40I)-be beírva

$$\delta S^* = \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k \delta t\right] + L\delta t. \quad \text{(7.403. egyenlet)}$$

Vezessük be a

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad \text{és} \qquad H = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L = \sum_k p_k \dot{q}_k - L \quad \text{(7.404. egyenlet)}$$

jelöléseket. Ekkor

$$\delta S^* = \sum_{k=1}^{f} p_k \delta q_k - H\delta t. \quad \text{(7.405. egyenlet)}$$

Ez a *variációszámítás határképlete.* Ennek segítségével definiáljuk a q_k általános koordinátákhoz és a t időhöz kanonikusan konjugált változókat. A q_k és a t kanonikusan konjugált párjainak azokat a mennyiségeket tekintjük, amelyek a variációszámítás határképletében a δq_k, illetve a δt együtthatói. Ennek megfelelően a q_k-hoz kanonikusan konjugált mennyiség a (7.404) első képletével értelmezett p_k, amelyet korábban általános impulzusnak neveztünk, a t-hez pedig a (7.404) második képletével definiált Hamilton-függvény −1-szerese. Tehát

$$q_k \to p_k, \qquad \text{ill.} \qquad t \to -H. \quad \text{(7.406. egyenlet)}$$

Ha a rendszer konzervatív és a derékszögű x_i koordinátákról a q_k általános koordinátákra való áttérés transzformációs képlete az időt expliciten nem tartalmazza, akkor a Hamilton-függvény megegyezik a rendszer teljes mechanikai energiájával. Ezért ebben az esetben a t-hez az energia −1-szerese a kanonikusan konjugált mennyiség.

A (7.405)-ből következik, hogy

$$p_k = \frac{\partial S^*}{\partial q_k}, \qquad \frac{\partial S^*}{\partial t} = -H.$$ (7.407. egyenlet)

Ez azt mutatja, hogy a felső határ $q_k(t)$ koordinátáinak és a t idő függvényének tekintett S^* hatásfüggvény kielégíti a Hamilton—Jacobi-egyenletet. Képezzük az S^*-nak a q_k és a t szerinti vegyes parciális deriváltjait:

$$\frac{\partial^2 S^*}{\partial t \partial q_k} = \dot{p}_k, \qquad \frac{\partial^2 S^*}{\partial q_k \partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

Mivel ezek a vegyes parciális deriváltak megegyeznek egymással,

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$ (7.408. egyenlet)

Ez éppen a kanonikus egyenletek egyik csoportja. Az egyenletek másik csoportja is levezethető ilyen módon, ha az S^* helyett az

$$\bar{S} = S^* - \sum_{k=1}^{f} p_k q_k$$

függvényt tekintjük. Vegyük ennek a variációját:

$$\delta \bar{S} = \delta S^* - \sum_{k=1}^{f} (p_k \delta q_k + q_k \delta p_k).$$

A (7.405) figyelembevételével

$$\delta \bar{S} = \sum_{k=1}^{f} p_k \delta q_k - H \delta t - \sum_{k=1}^{f} p_k \delta q_k - \sum_{k=1}^{f} q_k \delta p_k = -H \delta t - \sum_{k=1}^{f} q_k \delta p_k.$$

Ebből következik, hogy $\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = -H$ és $\frac{\partial \bar{S}}{\partial p_k} = -q_k.$

Képezzük az $\bar{S}$ vegyes parciális deriváltjait:

$$\frac{\partial^2 \overline{S}}{\partial p_k \partial t} = -\frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \frac{\partial^2 \overline{S}}{\partial t \partial p_k} = -\dot{q}_k.$$

Ebből

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}.$$ (7.409. egyenlet)

77. Az általános variációs elv. A legkisebb hatás elve

A Hamilton-elvnél az időt nem variáltuk. A valóságos pálya x_i pontjaihoz a variált pálya megfelelő x_i' pontjait ugyanabban az időpontban rendeltük hozzá. Vagyis a δx_i variációkra fennáll, hogy

$$\delta x_i = x_i'(t) - x_i(t).$$ (7.410. egyenlet)

Ez a δx_i variáció megegyezik az *i*-edik koordináta virtuális elmozdulásával, mert az utóbbin ugyanabban az időpontban vett lehetséges (elgondolt) elmozdulást értünk.

Most a (7.410)-nél általánosabb variációval foglalkozunk, ugyanis az időt is variáljuk. Az ennek megfelelő variációt úgy értelmezzük, hogy a valóságos pálya $x_i(t)$ pontjához olyan x_i' pontot rendelünk, amely nem a *t*-hez, hanem a $t+\Delta t$ időponthoz tartozik. A korábbi variációktól való megkülönböztetés miatt ezt az általános variációt Δ-val jelöljük. Tehát

$$\Delta x_i = x_i'(t+\Delta t) - x_i(t).$$ (7.411. egyenlet)

A Δx_i és Δt variációkat az idő folytonos és differenciálható függvényeinek tekintjük. Ennek megfelelően a variált pontok sokasága most is egy folytonos görbét, a variált pályát adja. Az általános Δ variáció mellett használjuk a korábbi egyidejű δ variációkat is. Sőt a valódi pálya mentén történő változást is, ezutóbbira a *d* jelet használjuk. Ha a tömegpont a pálya x_i pontjából *dt* idő alatt elmozdul az $x_i(t+dt)$ pontba, akkor a valódi elmozdulás

$$dx_i = x_i(t+dt) - x_i(t) = \dot{x}_i dt.$$ (7.412. egyenlet)

A Δ, δ és *d* variációkat szemléletessé tehetjük a *102. ábrán.* A Δx_i variáció azt jelenti, hogy az *1* ponthoz a variált pálya *3* pontját rendeljük. A δx_i-nél *1*-hez a *2*-t, míg a dx_i-nél az *1*-hez a *4*-et. E szemléletes kép alapján a Δ és δ variációk kapcsolata könnyen megállapítható. A Δ-t összetehetjük egy *d* és egy δ variációból. Ugyanis *1*-ből *3*-ba eljuthatunk úgy is, hogy előbb a valódi pályán mozdulunk el *4*-ig, majd *4*-ből *3*-ba. Ennek alapján

$$\Delta x_i = \dot{x}_i \Delta t + \delta x_i,$$ (7.413. egyenlet)

vagy

$$\delta x_i = \Delta x_i - \dot{x}_i \Delta t.$$ (7.414. egyenlet)

Míg a δ variációnál a variálás és az idő szerinti differenciálás sorrendje felcserélhető, addig a Δ-nál nem. Ennek belátásához szükségünk van az x_i-k és a t tetszőleges f függvényének Δ és δ variációja közötti összefüggésekre:

$$\delta f = \sum_i \frac{\delta f}{\delta x_i} \delta x_i, \qquad \Delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t,$$

$$\frac{df}{dt} = \dot{f} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Ezek alapján

$$\Delta f - \dot{f} \Delta t = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\Delta x_i - \dot{x}_i \Delta t \right) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = \delta f.$$ (7.415. egyenlet)

Legyen $f = \dot{x}_i$. Így kapjuk, hogy

$$\delta \dot{x}_i = \Delta \dot{x}_i - \ddot{x}_i \Delta t.$$ (7.416. egyenlet)

Képezzük ezek után a δx_i idő szerinti teljes deriváltját:

$$\frac{d}{dt} \delta x_i = \frac{d}{dt} \left(\Delta x_i - \dot{x}_i \Delta t \right) = \frac{d}{dt} \Delta x_i - \ddot{x}_i \Delta t - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \Delta t.$$

Vegyük figyelembe a (7.416)-ot:

$$\frac{d}{dt} \delta x_i = \frac{d}{dt} \Delta x_i + \delta \dot{x}_i - \Delta \dot{x}_i - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \Delta t.$$

Mivel $\frac{d}{dt} \delta x_i = \delta \dot{x}_i$, ebből adódik, hogy

$$\Delta \dot{x}_i = \frac{d}{dt}\Delta x_i - \dot{x}_i \frac{d}{dt}\Delta t.$$ (7.417. egyenlet)

Eszerint a *Δ*-variáció és az idő szerinti differenciálás sorrendje valóban nem cserélhető fel.

Ezen előkészítés után most képezzük a

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{x}_i^2$$

mozgási energia általános variációját:

$$\Delta K = \sum_i m_i \dot{x}_i \Delta \dot{x}_i = \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt}\Delta x_i - \sum_i m_i \dot{x}_i^2 \frac{d}{dt}\Delta t =$$
$$\sum_i m_i \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \Delta x_i\right) - \sum_i m_i \ddot{x}_i \Delta x_i - \sum_i m_i \dot{x}_1^2 \frac{d}{dt}\Delta t.$$ (7.418. egyenlet)

A jobb oldalt átalakítjuk a (7.413) figyelembevételével:

$$-\sum_i m_i \ddot{x}_i \Delta x_i = -\sum_i m_i \ddot{x}_i \dot{x}_i \Delta t - \sum_i m_i \ddot{x}_i \delta x_i = -\frac{dK}{dt}\Delta t - \sum_i m_i \ddot{x}_i \delta x_i.$$

Ezt (7.418)-ba behelyettesítve,

$$\Delta K + 2K\frac{d}{dt}\Delta t + \frac{dK}{dt}\Delta t + \sum_i m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \dot{x}_i \Delta x_i.$$ (7.419. egyenlet)

Vonjuk ki az egyenlet mindkét oldalából a külső erők $\delta A = \sum_i X_i \delta x_i$ virtuális munkáját, majd integráljuk az idő szerint t_1-től t_2-ig.

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\Delta K + 2K\frac{d}{dt}\Delta t + \frac{dK}{dt}\Delta t + \sum_i \left(m_i \ddot{x}_i - X_i\right)\delta x_i\right]dt = -\int_{t_1}^{t_2}\delta A\, dt + \left[\sum_i m_i \dot{x}_i \Delta x_i\right]_{t_1}^{t_2}.$$

A bal oldal utolsó tagja a d'Alembert-elv szerint zérus, ezért végül a következő egyenletet kapjuk:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\Delta K + 2K\frac{d}{dt}\Delta t + \frac{\Delta K}{dt}\Delta t + \delta A\right]dt = \left[\sum_i m_i \dot{x}_i \Delta x_i\right]_{t_1}^{t_2}.$$ (7.420. egyenlet)

Mivel a Δx_i variációk általában nem tetszőlegesek, hanem kényszerfeltételeknek vannak alávetve, a korábbi gyakorlatnak megfelelően bevezetjük a q_k általános koordinátákat úgy, hogy a kényszefeltételeket azokkal már figyelembe vesszük. Az áttérést leíró transzformáció

$$x_i = x_i\left(q_1, q_2, \ldots, q_f, t\right).$$ (7.421. egyenlet)

Ebből

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_k a_{ik}\dot{q}_k + a_i,$$ (7.422. egyenlet)

$$\Delta x_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\Delta q_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}\Delta t = \sum_k a_{ik}\Delta q_k + a_i \Delta t.$$ (7.423. egyenlet)

A Δq_k és Δt variációk már tetszőlegesek.

A rendszer mozgási energiája:

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i\sum_k\sum_l m_i a_{ik} a_{il}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_i\sum_k m_i a_{ik} a_i \dot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_i m_i a_i^2 = K_2 + K_1 + K_0.$$ (7.424. egyenlet)

A (7.422)—(7.424) képletek segítségével igazolható a

$$\sum_i m_i \dot{x}_i \Delta x_i = 2K\Delta t + \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial k}{\partial \dot{q}_k}\left(\Delta q_k - \dot{q}_k \Delta t\right)$$ (7.425. egyenlet)

összefüggés érvényessége. Ezt (7.420)-ba helyettesítve, az általános variációs elv végleges alakját kapjuk:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\Delta K + 2K\frac{d}{dt}\Delta t + \frac{dK}{dt}\Delta t + \delta A\right]dt = \left[2K\Delta t + \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\left(\Delta q_k - \dot{q}_k\Delta t\right)\right]_{t_1}^{t_2}.$$ (7.426. egyenlet)

Ha a bal oldalon elvégezzük a

$$2K\frac{d}{dt}\Delta t+\frac{dK}{dt}\Delta t=2\frac{d}{dt}\left(K\Delta t\right)-\frac{dK}{dt}\Delta t$$

azonos átalakítást, akkor a (7.426) így is írható:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\Delta K-\frac{dK}{dt}\Delta t+\delta A\right]dt=\left[\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_k}\left(\Delta q_k-\dot{q}_k\Delta t\right)\right]_{t_1}^{t_2}. \quad \text{(7.427. egyenlet)}$$

A (7.415) alapján

$$\Delta K-\frac{dK}{dt}\Delta t=\delta K. \quad \text{(7.428. egyenlet)}$$

Ennek figyelembevételével

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta K+\delta A\right)dt=\left[\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_k}\left(\Delta q_k-\dot{q}_k\Delta t\right)\right]_{t_1}^{t_2}. \quad \text{(7.429. egyenlet)}$$

Ez teljesen egyenértékű a (7.427)-tel.

Ha most a Δq_k és Δt variációktól megköveteljük, hogy a határokon tűnjenek el: $\Delta q_k(t_1) = \Delta q_k(t_2) = 0$ és $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 0$, akkor a (7.429)-ből a Hamilton-elv (7.185) általános alakját kapjuk.

77.1 A legkisebb hatás elve

Az általános variációs elv (7.426) alakjából speciális érvényű további elvek adódnak, ha a variálás módjára megszorításokat teszünk. Követeljük meg a

$$\delta A=\delta K=\Delta K-\frac{dK}{dt}\Delta t \quad \text{(7.430. egyenlet)}$$

összefüggés teljesülését minden időpontra. Ez azt jelenti, hogy a valóságos pályáról a szomszédos variált pályára való áttérésnél az energia megmarad. Ugyanis az energia megváltozása a végzett munka és a mozgási energia változásának a különbségével egyenlő. Természetesen ez nem azt jelenti, hogy az energia a mozgás alatt állandó, hanem csak azt, hogy a valódi pályához olyan szomszédos pályákat rendelünk, amelyeknél az energia pontról pontra megegyezik a valódi pálya megfelelő pontjában vett energiával.

Ha a (7.426) egyenletbe a δ*A* helyére a (7.430) jobb oldalát helyettesítjük be, a következőt kapjuk:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[2\Delta K+2K\frac{d\Delta t}{dt}\right]dt=\left[2K\Delta t+\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\left(\Delta q_k-\dot{q}_k\Delta t\right)\right]_{t_1}^{t_2}.$$ (7.431. egyenlet)

A bal oldal szimbolikusan így írható:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[2\Delta K+2K\frac{d\Delta t}{dt}\right]dt=\Delta\int_{t_1}^{t_2}2K dt.$$ (7.432. egyenlet)

Az integrál *Δ* variációján a variált és a valódi pályára vett integrál különbségét értjük:

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}K\,dt=\int_{t_1}^{t_2}K\left(q_k+\Delta q_k,\,t+\Delta t\right)d\left(t+\Delta t\right)-\int_{t_1}^{t_2}K\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\Delta K\,dt+\int_{t_1}^{t_2}K\,d\Delta t.$$

A (7.430)-on kívül feltesszük még, hogy a Δq_k és Δt variációk az integrálási tartomány határain eltűnnek: $\Delta q_k(t_1) = \Delta q_k(t_2) = 0$, $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 0$. Ekkor a (7.431) egyenlet jobb oldala zérus, és így az Euler—Maupertuis-féle legkisebb hatás elvének legáltalánosabb alakját kapjuk:

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}K\,dt=0.$$ (7.433. egyenlet)

Ez anholonom-reonom rendszerre is érvényes. Szavakkal kifejezve: a mozgási energia integrálja a valódi pályára szélsőértéket vesz fel a *Δ*-variációval képzett szomszédos pályákhoz képest a (7.430) valamint a $\Delta q_k(t_1) = \Delta q_k(t_2) = 0$, $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 0$ mellékfeltételekkel.

Szkleronom rendszereknél a mozgási energia az általános sebességeknek homogén másodfokú kifejezése, a K_0 és K_1 zérus. Ekkor az Euler-tétel miatt

$$2K=\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k.$$

így a (7.426) jobb oldalán csak a

$$\left[\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\Delta q_k\right]_{t_1}^{t_2}$$

kifejezés marad meg, amely eltűnik, ha $\Delta q_k(t_1) = \Delta q_k(t_2) = 0$, bármi is a Δt. Tehát a Δt-re nem kell határfeltételt előírni. Ez azt jelenti, hogy a (7.433) legkisebb hatás elve szkleronom rendszerekre akkor is igaz, ha a variált pályák a kezdeti helyzetből a véghelyzetbe tetszőleges idő alatt érkeznek.

További egyszerűsítés érhető el, ha a vizsgált rendszer konzervatív holonom-szkleronom. Ilyenkor

$$K+V=E=\text{áll.}, \quad \text{(7.434. egyenlet)}$$

és a mozgási energia a sebességek homogén másodfokú függvénye:

$$K=\frac{1}{2}\sum_i^f\sum_k^f a_{ik}\frac{dq_1}{dt}\frac{dq_k}{dt},$$

amiből

$$dt=\frac{1}{\sqrt{2K}}\sqrt{\sum_i\sum_k a_{ik}dq_i dq_k}. \quad \text{(7.435. egyenlet)}$$

Figyelembe véve a $K=E-V$ összefüggést, a (7.433)-ból a legkisebb hatás elvének Jacobi-féle alakját kapjuk:

$$\Delta\int_1^2\sqrt{E-V}\sqrt{\sum_i\sum_k a_{ik}dq_i dq_k}=0. \quad \text{(7.436. egyenlet)}$$

Az integrálási határok a t_1 és t_2 időpontokhoz tartozó rögzített koordinátaértékeket jelentik. Az alkalmazások szempontjából célszerű a koordinátákat valamilyen τ paraméter függvényeként előállítani: $q_k=q_k(t)$, $dq_k=\frac{dq_k}{d\tau}d\tau$. Így (7.436)-ból adódik, hogy

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{E-V}\sqrt{\sum_i\sum_k a_{ik}\frac{dq_i}{d\tau}\frac{dq_k}{d\tau}}d\tau=0. \quad \text{(7.437. egyenlet)}$$

Mivel ez az időt nem tartalmazza, a Jacobi-féle legkisebb hatás elvéből a pálya alakját lehet meghatározni. A mozgás időbeli lefolyását ezután az energiatételből kaphatjuk meg.

Jelöljük a (7.437) integranduszát F-fel:

$$F=F\left(q_k,\ q_k',\ \tau\right)=\sqrt{E-V}\sqrt{\sum_i\sum_k a_{ik}q_i',\ q_k'}, \quad \text{(7.438. egyenlet)}$$

ahol $q_k' = \frac{dq_k}{d\tau}$. A variációszámításról tanultak alapján ismeretes, hogy a (7.437) integrál azokra a $q_k(\tau)$ függvényekre lest szélsőérték, amelyek megoldásai a

$$\frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q_k'} = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ldots,\ f)$$ (7.439. egyenlet)

Euler-egyenleteknek. Ezek adják meg a pálya paraméteres egyenletrendszerét. Az egyszerűség kedvéért gondoljunk egyetlen tömegpontra. A mozgási energia

$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$ (7.440. egyenlet)

ahol *ds* az elemi ívhosszat jelenti. Ebből $dt = \sqrt{\frac{m}{2K}}ds$, és így a legkisebb hatás elve

$$\Delta\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{E-V}\,ds = 0.$$ (7.441. egyenlet)

Vegyük az erőmentes mozgást. Ekkor mind az *E,* mind a *V* állandó, ezért a (7.441) egyenértékű a

$$\Delta\int_{s_1}^{s_2} ds = 0$$ (7.442. egyenlet)

variációs elvvel. Eszerint, ha a tömegpontra nem hat erő, akkor az két rögzített pont között olyan pályán mozog, amelynek hossza szélsőérték a kényszerek által megengedett más pályákhoz képest. (Ki lehet mutatni, hogy ha a két pont elég közel van egymáshoz, akkor a szélsőérték minimum.) Ezért a legkisebb hatás elvét az erőmentes mozgás esetén *a legrövidebbb pálya elvének* is szokták nevezni.

Ha a mozgás teljesen szabad, vagyis nincsenek kényszerfeltételek, akkor a pálya egyenes. Az adott felületen történő mozgásnál a pálya geodetikus vonal. Mint a geometriából ismeretes, ennek a geodetikus vonalnak a görbülete a legkisebb a kényszerek által megengedett többi vonalhoz képest. (Megjegyezzük, hogy Hertz más megfontolásokkal jutott el a róla elnevezett Hertz-féle legegyenesebb pálya elvéhez, amelyet mi a legkisebb hatás elvéből erőmentes mozgásokra közvetlenül megkaptunk.)

A Jacobi-féle elvnek (7.441) alakja *f* szabadsági fokú rendszerekre is érvényes, ha a *ds* elemi ívhosszat a

$$ds = \sqrt{\sum_i \sum_k g_{ik} dq_i dq_k}$$ (7.443. egyenlet)

képlettel definiáljuk.

77.2 A klasszikus mechanika és a geometriai optika kapcsolata

A fénytanból ismeretes, hogy ha a fény hullámhossza kicsi az útjában levő tárgyak (nyílások) méreteihez képest, akkor a fény terjedésének iránya a fénysugarak fogalmával dolgozó geometriai optika törvényeivel meghatározható. A fénysugarak pályáját a tapasztalattal jó egyezésben írja le a *Fermat-elv.* Eszerint a fénysugár az $n = n(x, y, z)$ törésmutatójú közegben az A és B pontok között olyan pályán terjed, hogy az

$$I = \int_A^B n\, ds$$ (7.444. egyenlet)

optikai úthossz a fénysugár mentén szélsőérték. Az n törésmutatót az $n = c_0/c$ képlettel értelmezzük; c_0 a fény vákuumbeli, c pedig a közegbeli sebessége. Mivel

$$n\, ds = c_0 \frac{ds}{c} = c_0 dt,$$

a Fermat-elv úgy is fogalmazható, hogy a fénysugár az A és B pontok között olyan pályán halad, amelyen a legrövidebb idő alatt jut A-ból a B-be.

A legkisebb hatás elvének (7.441) alakját a Fermat-elvvel összehasonlítva, látható, hogy a konzervatív erőtérben mozgó tömegpont pályái egybeesnek az olyan közegben haladó fénysugarakkal, amelynek törésmutatója

$$n = C\sqrt{E - V},$$

ahol a C tetszőleges állandót jelent. A klasszikus mechanika és a geometriai optika között ilyen értelemben kapcsolat van.

Érdemes rámutatni arra, hogy ez a kapcsolat a fizika fejlődésében milyen nagyszerű felismeréshez vezetett. Tudjuk, hogy a geometriai optika a fényjelenségek pontos elméletének, az elektromágneses hullámokra vonatkozó elméletnek a már említett feltételek mellett jó közelítése. A huszadik század elején kiderült, hogy az atomi méretű testek mozgásának törvényei is eltérnek a klasszikus mechanika törvényeitől. Az utóbbiak is közelítő érvényűek. Erwin Schrödinger osztrák fizikusnak támadt az a gondolata, hogy a klasszikus mechanikát úgy általánosítsa az atomi részek mozgásának leírására, miként a geometriai optikának általánosítása a fény hullámelmélete. A tömegponthoz is valamilyen értelemben hullámot kell rendelnünk. Schrödinger így jutott el a kvantummechanika dinamikai törvényéhez, az ún. Schrödinger-egyenlethez.

A legkisebb hatás elvén alapul az elektronoptika, amelyben fénysugarak helyett elektronsugarakat használnak. Az elektronsugarak eltérítését elektromos és mágneses térrel végzik.

Gondoljunk először arra, hogy az elektronok elektrosztatikus térben mozognak. A legkisebb hatás elvének (7.433) alakját átírjuk olyan alakra, amelyben a mozgási energia helyett az *mv*impulzus szerepel. Mivel $v = \frac{ds}{dt}$,

$$2\int_{t_1}^{t_2} K\, dt = \int_{t_1}^{t_2} mv \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} mv\, ds.$$

A legkisebb hatás elvének (7.433)-mal egyenértékű megfogalmazása

$$\Delta \int_1^2 mv\, ds = 0.$$ (7.445. egyenlet)

Az elektrosztatikus tér potenciálját Φ-vel jelöljük. Tegyük fel, hogy az elektron a Φ_0 potenciálú helyről $v_0 = 0$ kezdeti sebességgel indul. Legyen v a sebessége a Φ potenciálú helyen. Az energiatétel szerint

$$\frac{1}{2} mv^2 - e\Phi = -e\Phi_0,$$

amiből

$$mv = \alpha \sqrt{\Phi - \Phi_0},$$ (7.446. egyenlet)

ahol $\alpha = \sqrt{2me}$. Az impulzus (7.446) kifejezését a (7.445)-be helyettesítve

$$\Delta \int_1^2 \sqrt{\Phi - \Phi_0}\, ds = 0.$$ (7.447. egyenlet)

A (7.444) Fermat-elvvel összehasonlítva, látjuk, hogy az elektrosztatikus potenciálkülönbség négyzetgyöke felel meg a törésmutatónak az elektronoptikában, ha az elektronok eltérítését elektrosztatikus térrel végezzük. Az elektronsugár pályája a hellyel ismert módon változó potenciáleloszlás esetén a (7.447) variációs elvből határozható meg. Az elektronok fokuszálását a Φ változtatásával lehet elérni.

Az elektronok mágneses térrel is eltéríthetők, ezért elektronoptikai „lencsének" nemcsak elektrosztatikus potenciálkülönbség, hanem tekercs is használható. Mivel a mágneses tér nem konzervatív, a legkisebb hatás elvének fenti alakja mágneses térre nem alkalmazható. Erre az esetre Schwarzschild adott meg egy variációs elvet, amely szerint az elektronok pályáját a

$$\Delta\int_1^2\left(mv-\frac{e}{c}A_s\right)ds=0$$ (7.448. egyenlet)

egyenletből lehet kiszámítani. Az *As* a mágneses tér **A** vektorpotenciáljának pálya menti összetevője. Az **A** a mágneses térerősséggel a **H** = rot **A** kapcsolatban van. Ekkor az

$$n(x,\,y,\,z)=mv-\frac{e}{c}A_s$$ (7.449. egyenlet)

mennyiséget tekinthetjük törésmutatónak.

78. A Hamilton-elv folytonos anyageloszlású testek mechanikájában

A mechanika elveit az előző pontokban úgy fogalmaztuk meg, hogy a vizsgált fizikai rendszert diszkrét anyagi pontok összességének tekintettük. A deformálható (szilárd, folyadék és gáznemű) testek mechanikájában viszont a folytonos anyageloszlás modelljét használtuk. Felmerülhet a kérdés, hogy alkalmazhatók-e a bemutatott elvek ebben a modellben is. Az egyszerű válasz az, hogy igen. Mi a Hamilton-elvre mutatjuk ezt meg a rugalmas szilárd testekre alkalmazva.

Vegyük azt az esetet, amikor létezik rugalmas potenciál (izotermikus és adiabatikus deformációk) és a testre ható térfogati erők konzervatívak, tehát potenciálból származtathatók. A rendszer Lagrange-függvénye ebben az esetben a mozgási energiának és a teljes potenciális energiának a különbsége: *L=K–U*#[9] A Hamilton-elv szerint a valóságos mozgásra a hatásintegrál szélsőértéket vesz fel, vagyis

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=0.$$ (7.450. egyenlet)

A Hamilton-féle variációs eljárásnak megfelelően feltételezzük, hogy a rugalmas szilárd test a t_1 időponthoz tartozó **s**(**r**, t_1) elmozdulásvektorral jellemzett állapotból a t_2–t_1 időtartam alatt eljut az **s**(**r**, t_2) állapotba. Ezt a valóságos mozgást összehasonlítjuk olyan elgondolt (variált) mozgásokkal, amelyek ugyanabból a kezdeti állapotból indulnak ki és a t_2–t_1 időtartam alatt ugyancsak az **s**(**r**, t_2) állapotba jutnak. A kezdeti és a végállapot tehát mind a valódi, mind az elgondolt mozgásokra ugyanaz. A valóságban bekövetkező mozgást a Hamilton-elv szerint az tünteti ki a többi lehetséges mozgáshoz képest, hogy az előbbire a hatásintegrál szélsőértéket vesz fel. Az elgondolt (variált) mozgásállapotok úgy adódnak a valóságosból, hogy adott időpillanatban a test minden pontjához hozzárendelünk egy **s'**(**r**, *t*) elmozdulás-vektort, amely az **s**(**r**, *t*)-től csak infinitezimálisan tér el:

$$\mathbf{s}'(\mathbf{r},t)=\mathbf{s}(\mathbf{r},t)+\delta\mathbf{s}(\mathbf{r},t).$$ (7.451. egyenlet)

[9]# A test térfogatát jelöltük V-vel, ezért az összetévesztés elkerülése végett a potenciális energiát most U-val jelöljük.

Az időt nem variáljuk, δ*t*=0; ezért a (7.451) minden tagjában ugyanaz az időpont szerepel. Másrészt a mondottak értelmében

$$\delta\mathbf{s}(\mathbf{r},t_1)=\delta\mathbf{s}(\mathbf{r},t_2)=0. \quad \text{(7.452. egyenlet)}$$

A **s**(**r**, *t*) vektor a helynek és az időnek folytonos és differenciálható függvénye.

Megmutatjuk, hogy a Hamilton-elvből e variálási szabályok alkalmazásával kiadódnak mind a mozgásegyenletek, mind a határfeltételek. Az eljárás menete az, hogy először meghatározzuk a Lagrange-függvényt, majd képezzük a hatásintegrál variációját.

A test mozgási energiája

$$K=\frac{1}{2}\int_V \varrho\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 dV, \quad \text{(7.453. egyenlet)}$$

ahol az integrál a test térfogatára értendő.

A potenciális energia három részből áll: a deformációkkal kapcsolatos rugalmas potenciális energiából, valamint a külső térfogati és felületi erők potenciáljából. Utóbbiak értelem szerint azt a munkát jelentik, amelyet a külső erőkkel szemben végezni kell, ha a testet az **s=0** deformálatlan állapotból az **s**(**r**, *t*) elmozdulásvektor-térrel jellemzett állapotba visszük. A szokásos megállapodásnak megfelelően a külső erők potenciálját zérusnak vesszük a deformálatlan állapotban. Eszerint a test teljes potenciális energiája

$$U=\int_V \Phi\, dV-\int_V \mathbf{f}\mathbf{s}\, dV-\int_F \mathbf{P}_{(n)}\mathbf{s}\, df, \quad \text{(7.454. egyenlet)}$$

ahol a felületi integrál a test térfogatát határoló *F* felületre terjesztendő ki.

A Lagrange-függvény

$$L=K-U=\int_V\left[\frac{1}{2}\varrho\left(\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial t}\right)^2-\Phi+\mathbf{f}\mathbf{s}\right]dV+\int_F \mathbf{P}_{(n)}\mathbf{s}\, df. \quad \text{(7.455. egyenlet)}$$

Ezt a kifejezést kell a (7.450) variációs elvbe beírni. Az egyszerűbb számolás kedvéért célszerű a vektoriális írásmódról áttérni a komponensekkel dolgozó tárgyalásra. Ezt az eljárást követve

$$L=\int_V\left(\frac{1}{2}\varrho\dot{s}_i\dot{s}_i-\Phi+f_i s_i\right)dV+\int_F P_{(n)i}s_i\, df, \quad \text{(7.456. egyenlet)}$$

ahol $\dot{s}_i = \frac{\partial s_i}{\partial t}$, továbbá a vektorkomponensek szorzatösszegénél a $\sum_{i=1}^{3}$ jelet a korábbi megállapodásunknak megfelelően elhagytuk. (Felidézzük, hogy pl. az $f_i s_i$-n az $f_i s_i = \sum_{i=1}^{3} f_i s_i$ összeget értjük.)

A hatásintegrál variációja

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(s_i + \delta s_i,\ \dot{s}_i + \delta \dot{s}_i;\ x_i,\ t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(s_i,\ \dot{s}_i;\ x_i,\ t)\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_V \left[\frac{1}{2} \varrho (\dot{s}_i + \delta \dot{s}_i)(\dot{s}_i + \delta \dot{s}_i) - \Phi' + f_i (s_i + \delta s_i) \right] dV + \int_F \mathbf{P}_{(n)i} (s_i + \delta s_i)\ df \right\} dt -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_V \left[\frac{1}{2} \varrho \dot{s}_i \dot{s}_i - \Phi + f_i s_i \right] dV + \int_F P_{(n)i} s_i\ df \right\} dt = 0. \qquad \text{(7.457. egyenlet)}$$

A Φ' az $s_i + \delta s_i$ állapotnak megfelelő rugalmas potenciál. Az (5.10) képlet szerint

$$\Phi = \frac{1}{2} C_{iklm} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm},$$

amely az ε_{ik} deformációtenzor 4.7 definíciója, valamint a C_{iklm} együtthatók (5.5) és (5.8) szimmetriatulajdonságai alapján a

$$\Phi = \frac{1}{2} C_{iklm} \frac{\partial s_i}{\partial x_k} \frac{\partial s_l}{\partial x_m} \quad \text{(7.458. egyenlet)}$$

alakba írható. Ennek megfelelően

$$\Phi' = \frac{1}{2} C_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} (s_i + \delta s_i) \frac{\partial}{\partial x_m} (s_l + \delta s_l).$$

Mivel a δs_i variációk infinitezimálisan kicsik, a másodrendű tagokat elhagyjuk. Így a (7.457) egyes tagjai a következők lesznek:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \varrho \dot{s}_i \delta \dot{s}_i\ dV\ dt = \left[\int_V \varrho \dot{s}_i \delta s_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \varrho \ddot{s}_i \delta s_i\ dV\ dt.$$

Itt felhasználtuk a $\delta\dot{s}_i = \frac{\partial}{\partial t}\delta s_i$ összefüggést, amely érvényes, mivel az időt nem variáljuk. Az integrált rész eltűnik, mert $\delta s_i(t_1) = \delta s_i(t_2) = 0$. Ezért

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V \varrho \dot{s}_i \delta\dot{s}_i \; dV\, dt = -\int_{t_1}^{t_2}\int_V \varrho \ddot{s}_i \delta s_i \; dV\, dt.$$

(7.459. egyenlet)

A második tag a $\sigma_{ik} = C_{iklm}\varepsilon_{lm} = C_{iklm}\frac{\partial s_l}{\partial x_m}$ Hooke-törvény figyelembevételével

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V C_{iklm}\frac{\partial s_l}{\partial x_m}\frac{\partial \delta s_i}{\partial x_k} dV\, dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \sigma_{ik}\frac{\partial \delta s_i}{\partial x_k}\frac{\partial s_i}{\partial x_k} dV\, dt =$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{ik}\delta s_i\right) - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\delta s_i\right] dV\, dt.$$

A jobb oldal első tagja Gauss-tétellel felületi integrállá alakítható:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V C_{iklm}\frac{\partial s_l}{\partial x_m}\frac{\partial \delta s_i}{\partial x_k} dV dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \sigma_{ik}\delta s_i n_k df dt - \int_{t_1}^{t_2}\int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\delta s_i dV dt.$$

(7.460. egyenlet)

Itt n_K a felület külső normálisa irányába mutató egységvektor komponense. Ezek után végül a következőt kapjuk:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \left[-\varrho\ddot{s}_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i\right]\delta s_i dV dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_F \left(P_{(n)i} - \sigma_{ik}n_k\right)\delta s_i df dt = 0.$$

(7.461. egyenlet)

A δs_i variációk a tartomány belsejében és annak határán egymástól függetlenül megadhatók, ezért a térfogati és felületi integrálnak külön-külön zérusnak kell lennie. Vegyük először a térfogati integrált. Mivel a δs_i-k tetszőleges függvények lehetnek, az együtthatóiknak zérusnak kell lenniük, azaz a tartomány minden pontjában

$$\varrho\ddot{s}_i = f_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

(7.462. egyenlet)

Ezek a rugalmas szilárd test mozgásegyenletei.

A felületi integrál akkor tűnik el, ha az *F* felület mentén

$\sigma_{ik} n_k = P_{(n)i},$ (7.463. egyenlet)

vagy ha a felületen

$\delta s_i = 0.$ (7.464. egyenlet)

A (7.463) egyenletek teljesülése esetén a δs_i elmozdulások tetszőlegesek lehetnek a határfelületen. Ez a test szabad felületének felel meg. A (7.463) határfeltételek azt jelentik, hogy a $\sigma_{ik} n_k$ feszültségvektornak a szabad felület mentén meg kell egyeznie a felületre ható $\mathbf{P}_{(n)}$ külső felületi erővel. A (7.464) határfeltétel pedig annak az esetnek felel meg, amikor a felület rögzített és emiatt ott virtuális elmozdulások nem lehetnek.

Összefoglalásul megállapíthatjuk, hogy a Hamilton-elvből mind a mozgásegyenletek, mind a határfeltételek egyszerre adódnak.

A Hamilton-elvből — a pontrendszerek mechanikájához hasonlóan — itt is levezethetők a mozgásegyenletek általános alakban is. Ezek a fizikai rendszer állapotát jellemző térmennyiségekre vonatkozó Euler—Lagrange-egyenletek.

Gondoljunk valamilyen fizikai rendszerre, amelynek állapotát a $\varphi_i(x_k, t)$ függvényekkel adjuk meg. A rugalmas szilárd test esetén ezek a függvények az elmozdulásvektor $s_i(x_k, t)$ komponensei voltak. A mozgástörvények a $\varphi_i(x_k, t)$ állapotjelzők térbeli és időbeli változását meghatározó egyenletek.

A vizsgált fizikai rendszert jellemző L Lagrange-függvény most térfogati integrál alakjában írható fel:

$$L = \int_V \mathcal{L}\, dV,$$ (7.465. egyenlet)

ahol az $\mathcal{L}$ Lagrange-sűrűség a $\varphi_i(x_k, t)$ térmennyiségektől, azok $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ deriváltjaitól, valamint a x_k koordinátáktól és a t időtől függ:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\varphi_i,\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t},\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k};\ x_k,\ t\right).$$ (7.466. egyenlet)

A Hamilton-elv szerint

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathcal{L}\, dV\, dt = 0.$$ (7.467. egyenlet)

A variációs eljárás a következő szabályok szerint történik. Az x_k (k= 1, 2, 3) koordinátájú pontban t időpillanatban vett $\varphi_i(x_k, t)$ mennyiségekhez hozzárendeljük az ugyanezen pontban és időben vett $\varphi_i'(x_k, t)$ függvényt:

$$\varphi_i'(x_k, t) = \varphi_i(x_k, t) + \delta\varphi_i.$$ (7.468. egyenlet)

A $\delta\varphi_i$ variációkra előírjuk, hogy a tekintett térfogat határán, valamint a t_1 és t_2 időpontokban tűnjenek el:

$$\delta\varphi_i\,(\text{a határoló felületen}) = 0,$$
$$\delta\varphi_i(t_1) = \delta\varphi_i(t_2) = 0.$$ (7.469. egyenlet)

A φ_i térmennyiségek (7.468) variálása a hatásintegrál

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i}\delta\varphi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i}\delta\dot{\varphi}_i + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}} \delta \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right) dV\, dt$$ (7.470. egyenlet)

variációjához vezet. A (7.468) szerint az időt és a helykoordinátákat nem variáljuk, ezért

$$\delta\dot{\varphi}_i = \frac{\partial}{\partial t}\delta\varphi_i,$$
$$\delta \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} = \delta\varphi_i.$$ (7.471. egyenlet)

$\dot{\varphi}_i$ a φ_i-nek az idő szerinti parciális deriváltját jelenti. Az integrandusz második és harmadik tagját átalakítjuk a következőképpen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i}\delta\dot{\varphi}_i = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i}\delta\varphi_i \right) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i}\delta\varphi_i,$$ (7.472. egyenlet)

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}} \delta \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{3} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}} \delta\varphi_i \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}} \delta\varphi_i \right].$$ (7.473. egyenlet)

Ezeket behelyettesítjük a (7.470) integrálba:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \sum_i \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}} \right) \delta\varphi_i + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \delta\varphi_i \right) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}} \delta\varphi_i \right) \right] dV\ dt.$$

(7.474. egyenlet)

Az utolsó előtti tag integrálja a (7.469) feltételek miatt zérus. Az utolsó tag Gauss-tétellel felületi integrállá alakítható:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V \sum_i \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}} \delta\varphi_i \right) dV\ dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_F \sum_i \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}} n_k \delta\varphi_i\ df\ dt,$$

(7.475. egyenlet)

ahol n_k a felület külső normálisa irányába mutató egységvektor k-adik komponense. Mivel a (7.469) határfeltételek miatt a $\delta\varphi_i$ variációk az F felületen eltűnnek, az egyenlet jobb oldala zérus.

Ezek után a hatásintegrál variációja

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}} \right) \delta\varphi_i\ dV\ dt = 0.$$

(7.476. egyenlet)

A $\delta\varphi_i$ variációk az egész tartományban tetszőleges függvények, ezért a $\delta S = 0$ egyenlet csak akkor teljesül, ha a $\delta\varphi_i$ együtthatója a tartomány minden pontjában zérus:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}} = 0.$$

(7.477. egyenlet)

Ezek az ún. Euler—Lagrange-egyenletek írják le a rendszer fizikai állapotának á változását. Tehát ezek a mozgásegyenletek általános alakban. Számuk megegyezik a φ_i függvények számával.

Az itt bemutatott variációs eljárás az elméleti fizika más fejezeteiben is — különösen a térelméletben — leginkább elterjedt módszer a mozgásegyenletek meghatározására. Csupán megemlítjük, hogy az elektrodinamika alapegyenletei, az ún. Maxwell-egyenletek is felírhatok a variációs elv Euler—Lagrange-egyenleteiként. Az eljárásnak a koordináta-rendszer választásától független tulajdonságán kívül az ad különös jelentőséget, hogy a kvantumtérelmélet alapjául szolgál, másrészt az általános relativitáselmélet keretein belül — itt nem részletezett eljárással — megadja a rendszer energiájának és impulzusának (pontosabban szólva, az energia-impulzus tenzornak) a kifejezését is.

78.1 A megfeszített húr mozgásegyenleteinek levezetése a Hamilton-elv alapján

A 35. pontban foglalkoztunk a két végén rögzített, megfeszített húr sajátrezgéseivel. Most a Hamilton-elv alkalmazásaként megmutatjuk, hogy az ilyen típusú feladatoknál is milyen egyszerűen lehet eljutni a mozgásegyenletekhez. Ugyanazokat a jelöléseket használjuk, mint korábban. A koordináta-rendszer *x* tengelyét a nyugalmi állapotban levő húr mentén vesszük fel. A húrt a *q* keresztmetszetre merőleges *F* erővel feszítjük meg. A nyugalmi hossza legyen *l*. Az egyik vége az *x*=0, a másik az *x*=*l* helyen van. Ezeknél az **s** elmozdulásvektor a rögzítés miatt minden időben zérus.

A húr rezgését leíró mozgásegyenletek levezetése az előbbiek szerint úgy történik, hogy először meghatározzuk az $\mathcal{L}$ Lagrange-sűrűséget, majd ebből a (7.477) alapján felírjuk az Euler—Lagrange-egyenleteket.

A térfogategység mozgási energiája

$$k = \frac{1}{2}\varrho\left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial t}\right)^2\right].$$

A Φ rugalmas potenciál az (5.24), valamint az (5.55)—(5.58) képletek alapján

$$\Phi = \frac{E}{2}\varepsilon^2,$$

ahol *E* a Young-modulus, ε pedig a húr relatív megnyúlása: $\varepsilon = \delta l / l$.

A hosszúságváltozás két okból következik be. Egyrészt a megfeszítettség miatt van egy $\varepsilon_0 = P / E = F / qE$ kezdeti megnyúlás, másrészt ehhez hozzáadódik a rezgés következtében fellépő $\Delta\varepsilon$ relatív hosszváltozás. A húrban transzverzális és longitudinális rezgés egyaránt lehetséges, ezért a $\Delta\varepsilon$ is két részből tevődik össze:

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_{\text{tr}} + \Delta\varepsilon_{\text{l}},$$

ahol $\Delta\varepsilon_{\text{tr}}$ a transzverzális, $\Delta\varepsilon_{\text{l}}$ a longitudinális rezgések miatt bekövetkező relatív megnyúlás.

A rugalmas potenciál ezek alapján

$$\Phi = \frac{E}{2}\varepsilon^2 = \frac{E}{2}\left(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_{tr} + \Delta\varepsilon_1\right)^2 = \frac{E}{2}\left[\varepsilon_0^2 + \left(\Delta\varepsilon_{tr}\right)^2 + \left(\Delta\varepsilon_1\right)^2 + 2\varepsilon_0\Delta\varepsilon_{tr} + 2\varepsilon_0\Delta\varepsilon_1 + 2\Delta\varepsilon_{tr}\Delta\varepsilon_1\right].$$

Mivel a $\Delta\varepsilon_{tr}$ és $\Delta\varepsilon_1$ az ε_0-hoz képest kicsi, a $\Delta\varepsilon_{tr}^2$ és a $\Delta\varepsilon_{tr}\Delta\varepsilon_1$elhagyható a többi tag mellett. (Látni fogjuk, hogy a $\Delta\varepsilon_1^2$ ugyanolyan nagyságrendű, mint a $\Delta\varepsilon_{tr}$ ezért ezt megtartjuk.) Marad tehát

$$\Phi = \frac{E}{2}\varepsilon_0^2 + E\varepsilon_0\Delta\varepsilon_{tr} + E\varepsilon_0\Delta\varepsilon_1 + \frac{E}{2}\left(\Delta\varepsilon_1\right)^2. \quad \text{(7.478. egyenlet)}$$

Számítsuk ki a $\Delta\varepsilon_1$ és $\Delta\varepsilon_{tr}$ relatív megnyúlásokat. Az ε_{ik} tenzor elemeinek jelentése alapján

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{\partial s_x}{\partial x}. \quad \text{(7.479. egyenlet)}$$

A $\Delta\varepsilon_{tr}$-t pedig a következőképpen számíthatjuk ki:

$$\Delta\varepsilon_{tr} = \left(\frac{\delta l}{l}\right)_{tr} = \frac{1}{l}\int_0^l\left[\sqrt{1+\left(\frac{\partial s_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial x}\right)^2} - 1\right]dx.$$

Mivel a $\frac{\partial s_y}{\partial x}$ és $\frac{\partial s_z}{\partial x}$ kicsik az l-hez képest, a négyzetgyök sorba fejtett alakjában a magasabb rendű tagokat elhagyhatjuk:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial s_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial x}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_y}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_z}{\partial x}\right)^2 + \ldots.$$

Így kapjuk, hogy

$$\Delta\varepsilon_{tr} = \frac{1}{2l}\int_0^l\left[\left(\frac{\partial s_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial x}\right)^2\right]dx. \quad \text{(7.480. egyenlet)}$$

A *q* keresztmetszetű húr rugalmas potenciális energiája a (7.478)—(7.480) alapján

$$\int_V \Phi\, dV = q\int_0^l \Phi\, dx = \frac{E\varepsilon_0^2 lq}{2} + \frac{E\varepsilon_0 q}{2}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial s_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial x}\right)^2\right] dx +$$

$$+ E\varepsilon_0 q\int_0^l \frac{\partial s_x}{\partial x}\, dx + \frac{Eq}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial s_x}{\partial x}\right)^2 dx\,.$$

Az utolsó előtti integrál az $s_x(0)=s_x(l)=0$ határfeltételek miatt zérus. Az $E\varepsilon_0$ helyére a kezdeti P húzófeszültség írható. Így

$$\int_V \Phi\, dV = \Phi_0 + \frac{Pq}{2}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial s_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial x}\right)^2\right] dx + \frac{Eq}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial s_x}{\partial x}\right)^2 dx.$$

A Lagrange-függvény

$$L = K - U = \frac{q}{2}\int_o^l \varrho\left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial t}\right)^2\right] dx -$$

$$-\frac{q}{2}\int_o^l \left\{P\left[\left(\frac{\partial s_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial x}\right)^2\right] + E\left(\frac{\partial s_x}{\partial x}\right)^2\right\} dx.$$

Ebből a Lagrange-sűrűségre adódik, hogy

$$\mathcal{L} = \frac{q}{2}\left\{\varrho\left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial t}\right)^2\right] - P\left[\left(\frac{\partial s_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_z}{\partial x}\right)^2\right] - E\left(\frac{\partial s_x}{\partial x}\right)^2\right\}. \quad \text{(7.481. egyenlet)}$$

Az s_x-, s_y-, s_z-re vonatkozó (7.477) Euler—Lagrange-egyenletek

$$-\varrho\frac{\partial^2 s_y}{\partial t^2} + E\frac{\partial^2 s_y}{\partial x^2} = 0,$$

$$-\varrho\frac{\partial^2 s_y}{\partial t^2} + E\frac{\partial^2 s_y}{\partial x^2} = 0,$$

$$-\varrho\frac{\partial^2 s_z}{\partial t^2} + E\frac{\partial^2 s_z}{\partial x^2} = 0. \quad \text{(7.482. egyenlet)}$$

Ezek megegyeznek a húr (5.302) és (5.305) mozgásegyenleteivel. Megoldásukkal a 35. pontban már foglalkoztunk.

79. Szimmetriák és megmaradási tételek

Az előző fejezetekben többször is megmutattuk, hogy a mozgásegyenletekből fontos megmaradási tételek következnek a fizikai rendszerre. A mechanikában az energiára, az impulzusra és az impulzusnyomatékra vonatkozó megmaradási tétel szerepelt. Ezek a tételek a mozgás dinamikai leírása nélkül is lényeges felvilágosítást adnak a vizsgált rendszerről. Oktatásmódszertani szempontból ezen túlmenően azért van fontos szerepük, mert általában egyszerű alakban kifejezhető törvényeket fogalmaznak meg, és emiatt a középfokú oktatásban is könnyen használhatók, szemben a mozgásegyenletekkel, amelyek megoldása magasabb matematikai ismereteket igényel. Mivel e tételek a mozgásegyenletek következményei, a belőlük nyert információk összhangban vannak a mozgástörvénnyel.

A megmaradási tételek zárt fizikai rendszerekre vonatkoznak, de bizonyos feltételek mellett nyitott rendszerek esetén is adnak felvilágosítást a rendszert jellemző egyes mennyiségek értékéről.

A következőkben megmutatjuk, hogy az említett három megmaradási tétel szoros kapcsolatban van a tér és az idő szimmetriáival. Mi ehhez a mechanika Hamilton-féle tárgyalásmódját vesszük alapul, mert hasonlóképpen történik a szimmetriák és megmaradási tételek kapcsolatának kvantumelméleti tárgyalása is. Megemlítjük, hogy a Lagrange-féle másodfajú egyenleteket is használhatnánk mozgásegyenletekként, mert ugyanarra az eredményre jutnánk.

Feltételezzük, hogy a vizsgált fizikai rendszer *N* tömegpontot tartalmaz és zárt. A rendszert a Hamilton-függvénnyel jellemezzük, és állapotát az egyes tömegpontok $\mathbf{r}_i$ helyvektoraival és $\mathbf{p}_i$ impulzusaival adjuk meg. A mozgásegyenletek az

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad (k = 1,\ 2,\ldots,\ 3N) \tag{7.483. egyenlet}$$

kanonikus egyenletek. A későbbiek szempontjából célszerű ezeket vektoriális alakban felírni:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathrm{grad}_{(\mathbf{p}_i)} H, \qquad \dot{\mathbf{p}}_i = -\mathrm{grad}_{(\mathbf{r}_i)} H \qquad (i = 1,\ 2,\ldots,\ N).$$

A $\mathrm{grad}_{(pi)}$, illetve $\mathrm{grad}_{(ri)}$ azt jelenti, hogy az előbbinél a $\mathbf{p}_i$, az utóbbinál az $\mathbf{r}_i$ derékszögű komponensei szerint vett gradiensről van szó. Az egyszerűbb írásmód kedvéért a $\mathrm{grad}_{(pi)}$-t, és $\mathrm{grad}_{(ri)}$-t a $\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i}$ illetve $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i}$ szimbólummal jelöljük. A kanonikus egyenletek ebben a jelölésben a következők:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}, \qquad \dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ldots,\ N). \tag{7.484. egyenlet}$$

79.1 A koordináta-rendszer eltolása és az impulzus megmaradása

A koordináta-rendszert eltoljuk tetszőleges irányban állandó távolsággal, amelyről feltesszük, hogy infinitezimálisan kicsi. Az eltolást tehát egy állandó infinitezimális kicsi a vektorral jellemezhetjük. A tömegpontok helyvektorait az eltolt koordináta-rendszerben $\mathbf{r}_i'$-vel jelöljük. Az $\mathbf{r}_i$ és $\mathbf{r}_i'$ között az

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i + \mathbf{a}$$ (7.485. egyenlet)

A zárt fizikai rendszer mozgásállapotát a (7.485) eltolás nem változtatja meg, mert a térnek egyik pontja sincs kitüntetve, vagyis bármelyik választható a koordináta-rendszer kezdőpontjának. A térnek ezt a tulajdonságát nevezzük a tér homogenitásának. Eszerint a rendszer Hamilton-függvénye független attól, hogy hol vesszük fel a koordináta-rendszer kezdőpontját. Ez azt jelenti, hogy *H*-nak invariánsnak kell lennie az eltolási transzformációval szemben. Vagyis a *H* alaki megváltozásának el kell tűnnie.

Írjuk fel a *H* megváltozását:

$$\delta H = H\left(\mathbf{r}_i', \mathbf{p}_i, t\right) - H\left(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, t\right) \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{a} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} = 0.$$ (7.486. egyenlet)

Mivel az $\mathbf{r}_i$ vektorok $\delta\mathbf{r}_i = \mathbf{a}$ megváltozása infinitezimálisan kicsi, az **a**-ra nézve magasabb rendű tagokat elhagytuk. Az **a** vektor a feltevésünk értelmében tetszőleges, ezért a Hamilton-függvény csak akkor lesz invariáns az eltolással szemben, ha

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} = 0.$$ (7.487. egyenlet)

A (7.484) kanonikus egyenletek második csoportja szerint ez azt jelenti, hogy

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_i = 0.$$ (7.488. egyenlet)

Ebből integrálással a rendszer eredő impulzusának állandóságát kapjuk:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = \text{áll.}$$ (7.489. egyenlet)

Az impulzus megmaradásának a tétele tehát a tér homogenitásának a következménye.

Ha a Hamilton-függvény nem tartalmazza expliciten valamelyik koordinátát, vagyis az illető koordináta ciklikus, akkor a hozzá tartozó impulzuskomponens nem zárt rendszer esetén is állandó marad. Pl. a szabadesésnél vagy hajításnál a *H* nem tartalmazza a tömegpont *x* és *y* koordinátáját, ha a *z* tengelyt választjuk a nehézségi erő irányának. Ekkor a p_x, p_y impulzuskomponensek állandók, noha a rendszer nem zárt.

79.2 A koordináta-rendszer elforgatása és az impulzusnyomaték megmaradása

Forgassuk el a derékszögű koordináta-rendszert az **e** egységvektorral kijelölt irány körül kis $\delta\varphi$ szöggel. A tömegpontok helyvektorai és impulzusai az elforgatás miatt megváltoznak a következőképpen:

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i + \delta\mathbf{r}_i, \qquad \mathbf{p}_i' = \mathbf{p}_i + \delta\mathbf{p}_i,$$

ahol $\delta\mathbf{r}_i = \delta\varphi\mathbf{e}\times\mathbf{r}_i, \qquad \delta\mathbf{p}_i = \delta\varphi\mathbf{e}\times\mathbf{p}_i.$ (7.490. egyenlet)

A tér izotrop (vagyis semmilyen irány nincs benne kitüntetve), ezért a koordináta-rendszer elforgatása a zárt rendszer mechanikai állapotát nem változtatja meg. A Hamilton-függvénynek tehát a forgatással szemben is invariánsnak kell lennie. Eszerint a (7.490) transzformáció során bekövetkező alaki megváltozásának el kell tűnnie:

$$\delta H = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i}\delta\mathbf{r}_i + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}\delta\mathbf{p}_i\right) = 0.$$ (7.491. egyenlet)

A (7.490) összefüggések figyelembevételével

$$\delta H = \delta\varphi\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{e}\times\mathbf{r}_i) + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}(\mathbf{e}\times\mathbf{p}_i)\right] = \delta\varphi\mathbf{e}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\mathbf{r}_i\times\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i}\right) + \left(\mathbf{p}_i\times\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}\right)\right] = 0.$$

Ez a kanonikus egyenletek alapján a következő alakot veszi fel:

$$\delta H = \delta\varphi\mathbf{e}\sum_{i=1}^{N}\left[-(\mathbf{r}_i\times\dot{\mathbf{p}}_i) + (\mathbf{p}_i\times\dot{\mathbf{r}}_i)\right] = 0.$$ (7.492. egyenlet)

A $\mathbf{p}_i\times\dot{\mathbf{r}}_i = 0$, mert a vektoriális szorzat tényezői párhuzamosak. Mivel $\delta\varphi$ tetszőleges, a (7.492) csak úgy teljesül, ha

$$\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{r}_i\times\dot{\mathbf{p}}_i) = 0.$$ (7.493. egyenlet)

A bal oldal az

$$L = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i)$$

impulzusnyomaték idő szerinti deriváltjával egyenlő, ezért a (7.493) szerint

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0,$$

amiből

$\mathbf{L} = \text{áll.}$ (7.494. egyenlet)

A zárt rendszer impulzusnyomatékának megmaradása a tér izotropiájának a következménye.

Ha a testre ható külső erő valamilyen irányra szimmetrikus, akkor az impulzusnyomatéknak erre az irányra való vetülete nem zárt rendszer esetén is állandó. Például a centrális erő hatására mozgó test erőcentrumra vonatkoztatott impulzusnyomatéka állandó, noha a rendszer nem zárt.

79.3 Az idő eltolása és az energia megmaradása

Az idő folyamatában egyetlen időpont sincs kitüntetve, tehát az idő is homogén. Ez azt jelenti, hogy a kezdeti időpont tetszőlegesen megválasztható, ez a zárt rendszer mozgásállapotát nem befolyásolja. A Hamilton-függvénynek invariánsnak kell lennie a

$t' = t + t_0$ (7.495. egyenlet)

időeltolással szemben. Tehát

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial t}\delta t = \frac{\partial H}{\partial t}t_0 = 0.$$ (7.496. egyenlet)

Mivel a t_0 tetszőleges,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$ (7.497. egyenlet)

Eszerint a zárt rendszer Hamilton-függvénye nem tartalmazza expliciten az időt. Képezzük a *H*-nak idő szerinti teljes deriváltját:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \dot{\mathbf{p}}_i \right).$$

A kanonikus egyenletek, valamint a (7.497) figyelembevételével

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} \right) = 0$$

A zárt rendszer Hamilton-függvénye tehát állandó:

$H = \text{áll.}$ (7.498. egyenlet)

Ha a rendszerre külső erők nem hatnak (zárt rendszer) és a belső erők nem függnek sem az időtől, sem a sebességtől, akkor a Hamilton-függvény megegyezik a rendszer mechanikai energiájával. Így az időeltolással szembeni invarianciából következik az energia megmaradása zárt rendszerekre.

Ha a rendszer nem zárt, de konzervatív külső erők hatnak rá, akkor is igaz, hogy a Hamilton-függvény nem függ az időtől expliciten és egyenlő a teljes mechanikai energiával:

$$H = K + V.$$

Ezért (7.498)-ból adódik, hogy konzervatív rendszerekre is érvényes az energiamegmaradás tétele.

Befejező megjegyzések

1. A klasszikus mechanika a fizikai megismerés végtelen folyamatában több szempontból is kiemelkedő helyet foglal el. Ez adott először egzakt tudományos módszert arra, hogyan lehet a matematika felhasználásával egy rendszer fizikai állapotát előre meghatározni bármely későbbi időpontra, ha a környezettel való kölcsönhatást és a kezdeti állapotát ismerjük. Gondoljuk át még egyszer, hogy milyen lenyűgöző hatása lehetett a kortársakra, amikor a Newton-féle mozgásegyenletekből és a gravitációs erőtörvényből a bolygók pályáját pontosan ki tudták számítani. Ehhez mérhető tudományos teljesítményt a természetkutatásban ezt megelőzően nem találunk. Newton neve méltán szerepel az emberiség kultúrtörténetének legnagyobb géniuszai között. A Principia megjelenése után a legkiválóbb matematikusok és természettudósok érdeklődése a természeti jelenségek matematikai úton történő leírása felé fordult, így alakult ki az elméleti fizika, amelynek megalapozója kétségtelenül Newton volt, és őt követték több mint kétszáz éven keresztül a legjobb matematikusok. Az elméleti mechanika diadalútja nemcsak a mozgások tanát tette teljessé, hanem a matematika terén is olyan gyümölcsözőnek bizonyult, hogy több kutatási irány és egészen új diszciplína kialakulását eredményezte.

Másrészt az elméleti mechanikában kialakult matematikai módszerek a fizika más területein is igen hatásosnak bizonyultak. Elég megemlítenünk a mozgástörvényeknek a variációs elvből való levezetését vagy a mozgásfeladat megoldásának Hamilton-féle tárgyalásmódját. Az előbbi a fizika minden területén nagyon eredményesen használható, de különösen a térelméletekben aratott nagy sikereket. A helyes mozgásegyenletekhez vezető Lagrange-függvény alapján értelmezhetők a kanonikus változópárok, amelyek a kvantumelmélet kiindulópontját jelentik nemcsak a kvantummechanikában, hanem a kvantumtérelméletekben is.

Végül megemlítjük, hogy a mechanika a fizika oktatásának minden szintjén (a közép- vagy a felsőoktatásban) központi helyet foglal el, mert a legtöbb fizikai fogalom egyszerű bevezetését teszi lehetővé. Ez az oka annak, hogy a fizika tanításának oktatásmódszertanilag jól átgondolt terve a mechanikával kezdődik.

2. A könyv első hat fejezetének tartalmi felépítésében és tárgyalásmódjában a mechanika dinamikai szemléletmódját tekintettük vezérfonalnak. Nevezetesen a különféle fizikai rendszerek, illetve modellek vizsgálatánál a hangsúlyt arra helyeztük, hogyan változik a rendszer mozgásállapota a környezettől származó vagy más hatásra. Kiindulópontunk mindig a mozgásegyenletek felírása volt, amelyek megoldásával a kezdeti feltételek figyelembevételével meghatároztuk a rendszer állapotát jellemző mérhető fizikai mennyiségeket az idő függvényében. Ezek a rendszer mechanikai viselkedéséről teljes információt adnak, és alkalmasak arra, hogy az eredményeket a tapasztalattal összehasonlítsuk.

A mozgásegyenletek következményeiként adódtak az igen széles körben érvényes megmaradási tételek. Ezek egyszerű alakjuknál fogva az alkalmazások gazdag körét kínálják, továbbá olyan esetekben is eredményesen használhatók, amikor kerülnünk kell a magasabb matematikai ismereteket. A levezetésük viszont megmutatja, hogy ezek is a dinamika alaptörvényeiből származnak.

3. Minden fizikai elméletnél gondosan meg kell vizsgálnunk annak érvényességi határait. A klasszikus mechanika ugyan nagyon széles körben alkalmazható, és a tapasztalattal egybehangzó nagyszerű eredményeket ad, de az alaptörvények itt is csak bizonyos határig érvényesek.

A speciális relativitáselmélet egy kritériumot állított fel az egzakt természettörvényekkel szemben. Nevezetesen az egzakt törvényeknek nem szabad megváltozniuk, ha az egyik inerciarendszerről másikra térünk át. Einstein ismerte fel, hogy a klasszikus mechanika Newton-féle mozgástörvényei ezt a kritériumot nem teljesítik. Ez lényegében azzal függ össze, hogy az idő nem abszolút, hanem mindegyik inerciarendszerben más és más. A klasszikus mechanikának a relativitáselmélet követelményét is kielégítő általánosítása megmutatta, hogy a Newton-féle mozgásegyenletekre alapozott mechanika azokban az esetekben adja a mozgások jó leírását, ha a sebesség jóval kisebb, mint a fény vákuumbeli sebessége: $v \ll c$. A XX. század nagy technikai fejlődése lehetővé tette olyan berendezések előállítását, amelyekkel a fénysebességet megközelítő sebességek elérhetők. Ezek a kísérleti tapasztalatok igen nagy pontossággal igazolják, hogy a klasszikus mechanika alapegyenletei a $v \ll c$ sebességtartományra korlátozódnak. A fénysebességgel összemérhető sebességek esetén az ún. relativisztikus mechanika törvényei a helyesek. Ennek ismertetésére a relativitáselmélet keretein belül az Elektrodinamika c. könyvünkben kerül sor. Érdemes azonban itt is rámutatni, hogy a mozgástörvénynek eredeti Newton-féle megfogalmazása, miszerint az impulzus idő szerinti deriváltja egyenlő a ható erővel, a relativisztikus mechanikában is helytálló, csak az impulzus definíciójában szereplő tehetetlen tömeg nem állandó, hanem függ a tömegpont sebességétől:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

ahol m_0 az ún. nyugalmi tömeg, v a tömegpont sebessége és c a fény vákuumbeli sebessége.

A huszadik század másik igen hatásos fizikai elmélete, a kvantummechanika a klasszikus mechanikának az atomok és molekulák tartományában való általánosítását adja. A mechanikában alkalmazott alapvető fogalmak revíziója itt még radikálisabb, mint a relativitáselméletben. Magának a fizikai állapotnak az értelmezése is másként történik, mint a klasszikus mechanikában, ahol — mint tudjuk — a mechanikai állapotot a tömegpont helyével és sebességével (vagy impulzusával) jellemezzük. A kvantummechanika erre a célra egy komplex függvényt, az ún. állapotfüggvényt használja. Az atomokban és molekulákban mozgó, tömegpontnak tekintett elektron pályafogalma is értelmét veszíti. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy a lassan változó erőterekben a mikrorészek jó közelítéssel a Newton-féle mozgásegyenletek szerint mozognak. A kvantummechanikával elméleti fizikai tankönyvsorozatunk harmadik kötete, a Kvantummechanika című könyv foglalkozik.

Rámutatva a klasszikus mechanika érvényességi határaira, durván szólva azt mondhatjuk, hogy az a nem túl nagy sebességgel mozgó makroszkopikus testek mozgásának törvényeit a tapasztalattal igen jó egyezésben írja le, de a vákuumbeli fénysebesség közelében, valamint az atomok és molekulák tartományában már nem használható.

4. A deformálható testek mechanikájában — mint minden fenomenológiai elméletben — a mozgásegyenletek mellett szükségünk van az ún. anyagi egyenletekre, amelyek itt kapcsolatot teremtenek a feszültségtenzor és a deformációtenzor között. A fenomenológiai tárgyalásmódra az jellemző, hogy a testek belső szerkezetéről semmit sem tételezünk fel, az anyagot általában folytonos eloszlásúnak tekintjük, és az anyagra jellemző tulajdonságokat a tapasztalatra alapozva néhány paraméterrel jellemezzük. A rugalmas deformációkkal szembeni viselkedésüket például a rugalmas együtthatókkal, az összenyomhatóságukat a kompressziómodulussal, a belső súrlódást a súrlódási együtthatóval vesszük tekintetbe. A távolabbi cél természetesen az, hogy ezeket az anyag szerkezetére vonatkozó ismeretek alapján elméleti úton értelmezzük. Ez azonban túlmegy a klasszikus mechanika feladatán.

A rugalmas deformációkra vonatkozó anyagi egyenletek meghatározásánál a feszültségtenzort Taylor-sorba fejtettük a deformációk szerint, és a lineáris tagoknál megálltunk. Könyvünkben csak olyan jelenségeket vizsgáltunk, amelyek ebben a közelítésben kielégítően tárgyalhatók. Nem foglalkoztunk sem a nemlineáris tagok járulékaival, sem a plasztikus deformációkkal. Nyilvánvaló, hogy így a gyakorlati alkalmazások szempontjából fontos jelenségeket is kirekesztettünk a vizsgálatok köréből. Ezek a tantervi előírások szerint nem tartoznak a tananyaghoz, de rá kell mutatnunk arra, hogy a mechanika alaptörvényeinek igen széles körű alkalmazási lehetősége van pl. különféle anyagok megmunkálásánál. Itt azonban olyan deformációkkal van dolgunk, amelyek túlvannak a rugalmasság határán, és ezért az egyszerű Hooke-törvénnyel már nem jellemezhetők. Ezek leírására jóval összetettebb anyagi egyenleteket kell használnunk. Sőt a *42. ábrán* vázolt feszültség—deformáció görbe teljes menete nem is írható le egyetlen analitikus függvénnyel. A gyakorlatban a görbe egyes szakaszaira adnak meg kísérleti úton meghatározott anyagi egyenleteket. Egyszerűbb esetekben különféle modellek alapján elméleti vizsgálatokkal is levezethetők ilyen egyenletek. Ezek az ún. reológiai kutatások, valamint a nemlineáris jelenségek tanulmányozása ma is aktuális területét képezik az elméleti mechanikának.

5. Befejezésül megemlítjük, hogy az utóbbi évek egyik nagy érdeklődést kiváltó elméleti fizikai kutatási iránya, az ún kaotikus mozgások vizsgálata a klasszikus mechanika eddig kevésbé tanulmányozott vagy megoldatlan kérdéseire terelte a figyelmet. Gondoljunk az 59. pontban tárgyalt turbulens áramlásra, mint az egyik tipikus olyan problémára, amelynek kielégítő elméleti magyarázata még nem ismeretes. A jelenség vázlatos kvalitatív leírásakor említettük, hogy a Reynolds-szám kritikus' értéke felett a korábban réteges áramlás teljesen rendezetlen, gomolygó áramlásba megy át. Az ehhez hasonló jelenségek alapegyenletei, mint a hidrodinamika mozgásegyenletei, nemlineárisak. Az utóbbi években fellendült matematikai jellegű

kutatások kimutatták, hogy a rendezetlen kaotikus mozgások oka az egyenletek nemlineáris jellegével van kapcsolatban. A rendszerre jellemző bizonyos paraméterek (mint pl. a Reynolds-szám) változtatásával a kauzális mozgások egyszer csak teljesen rendezetlen formába mennek át, a megoldás instabillá válik.

Ezek a matematikai természetű vizsgálatok csak részben analitikus jellegűek, egy részük számítógépes eljárást alkalmaz. Talán ez az oka annak, hogy a már régebben felvetődött megoldatlan problémák gépi szimulációs módszerrel részleteiben vizsgáhatók lettek, és a mozgások olyan új formáira is fényt derítettek, amelyeket korábban a tisztán analitikus eljárásokkal nem lehetett tanulmányozni. Reméljük, hogy a megélénkült érdeklődés a klasszikus mechanika lenyűgözően nagyszerű tudományos teljesítményét még teljesebbé teszi.

8. fejezet - FÜGGELÉK

1. A derékszögű koordináták transzformációja a koordináta-rendszer elforgatásakor

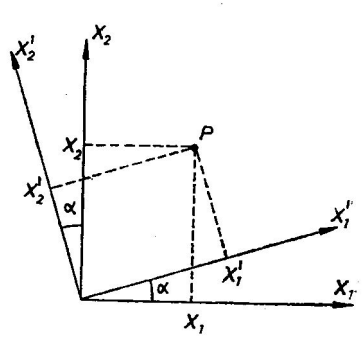
A vektorok és tenzorok fogalma a matematikai tanulmányokból ismert. Ezek definíciójából következik, hogy a komponensek hogyan transzformálódnak, amikor a koordináta-rendszert valamilyen tengely körül elforgatjuk. Az elméleti fizikában e mennyiségeket általában a transzformációs tulajdonságukkal definiáljuk. Ezért bevezetőül a derékszögű koordináta-rendszerek transzformációjával foglalkozunk.

Az egyszerűség kedvéért először a kétdimenziós elforgatást vizsgáljuk.

Tekintsük a síknak egy *P* pontját, amelynek derékszögű koordinátáit x_1-, x_2-vel jelöljük az eredeti koordináta-rendszerben. Forgassuk el a koordináta-rendszert a középpont körül a szöggel. A *P* pont koordinátái az elforgatott rendszerben : x_1', x_2'. A *103. ábráról* leolvasható, hogy

$$x_1' = x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha = x_1 \cos\alpha + x_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \text{(F.1. egyenlet)}$$

103. ábra -



$$x_2' = -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha = x_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + x_2 \cos\alpha. \quad \text{(F.2. egyenlet)}$$

Vezessük be a következő jelöléseket. Az x_i' és az x_j (i,j= 1,2) tengelyek által bezárt szöget jelöljük (x_i', x_j)-vel, ennek koszinuszát pedig a_{ij}-vel:

$$a_{ij} = \cos\left(x_i', x_j\right).$$ (F.3. egyenlet)

Ennek megfelelően

$$a_{11} = \cos\left(x_1', x_1\right) = \cos\alpha, \qquad a_{12} = \cos\left(x_1', x_2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,$$

$$a_{21} = \cos\left(x_2', x_1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha. \qquad a_{22} = \cos\left(x_2', x_2\right)\cos\alpha.$$ (F.4. egyenlet)

Az (F.I), (F.2) transzformációs képletek ezzel a jelöléssel:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{21}x_2,$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2.$$ (F.5. egyenlet)

A háromdimenziós térbeli elforgatás transzformációja ennek mintájára:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$ (F.6. egyenlet)

E három képlet egybefoglaló jelöléssel

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$ (F.7. egyenlet)

Megállapodunk abban, hogy az összeg jelét elhagyjuk, és ha egy index egy kifejezésben kétszer fordul elő, akkor arra összegezés értendő 1-től 3-ig. Ennek megfelelően az (F.7) röviden így írható:

$$x_i' = a_{ij}x_j \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$ (F.8. egyenlet)

Az inverz transzformáció

$$x_i = a_{ji} x'_j \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$ (F.9. egyenlet)

Az a_{ij} iránykoszinuszok egy 3x3-as négyzetes mátrix* alakjában írhatók:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$ (F.10. egyenlet)

Az a_{ij}-t a transzformáció mátrixának nevezzük. Az első sorban álló a_{11}, a_{12}, a_{13} elemek az x'_1 tengely iránykoszinuszai az eredeti (vesszőtlen) koordináta-rendszerre vonatkoztatva. Hasonlóképpen a második sor az x'_2 a harmadik az x'_3 tengely iránykoszinuszai. Ez a kilenc iránykoszinusz nem független egymástól, mert közöttük hat trigonometriai összefüggés van. Nevezetesen az egyes x'_i tengelyek iránykoszinuszainak négyzetösszege 1, másrészt az egymásra merőleges x'_i, x'_j ($i \neq j$) tengelyek iránykoszinuszainak szorzatösszege zérus. Ezt a hat trigonometriai egyenletet összefoglalhatjuk a következő egyenlőségbe:

$$a_{ij} a_{ij} = \delta_{ik},$$ (F.11. egyenlet)

ahol δ_{ik} a Weierstrass- (Kronecker-) szimbólum, amelynek jelentése

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad i = k, \\ 0, & \text{ha} \quad i \neq k. \end{cases}$$ (F.12. egyenlet)

Az (F.10) transzformációs mátrix egyes oszlopaiban álló elemek az x_i tengelyeknek a vesszős koordináta-rendszerre vonatkozó iránykoszinuszai. Az előbbihez hasonló gondolatmenettel adódik, hogy

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}.$$ (F.13. egyenlet)

Az (F.11) és (F.13) összefüggések annak a következményei, hogy mindegyik koordináta-rendszer tengelyei merőlegesek egymásra. Az ilyen koordináta-rendszereket *ortogonálisaknak* nevezzük. Az (F.11), (F.13) egyenlőségek az ortogonalitás feltételi egyenletei.

A *P* pont x_1, x_2, x_3 koordinátái felírhatok oszlopmátrix alakjában is:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$ (F.14. egyenlet)

Az (F. 10) mátrixot $\hat{a}$ -val jelölve, az (F.7) koordinátatranszformáció az $\hat{a}$ mátrixnak $\hat{x}$ mátrixszal való szorzataként írható:

$\hat{x}' = \hat{a}\hat{x}.$ (F.15. egyenlet)

Ha az *á* mátrix sorait az oszlopaival felcseréljük, akkor az $\hat{a}$ *transzponáltját* kapjuk. Ezt $\hat{a}^t$-vel jelöljük. Az értelmezésből következik, hogy

$a^t_{ij} = a_{ji}.$ (F.16. egyenlet)

Nyilvánvaló, hogy

$\left(\hat{a}^t\right)^t = \hat{a}.$ (F.17. egyenlet)

Az (F.9) inverztranszformációt a transzponált mátrixszal fejezhetjük ki, ekképpen

$\hat{x} = \hat{a}^t\hat{x}'.$ (F.18. egyenlet)

Az (F.7) koordinátatranszformáció az $\overline{OP}$ távolság négyzetét változatlanul hagyja. Ugyanis

$x_i'^2 = a_{ij}x_j a_{ik}x_k = a_{ij}a_{ik}x_j x_k = \delta_{jk}x_j x_k = x_j x_j = x_j^2.$

2. A skalár és vektor definíciója transzformációs tulajdonságuk alapján

Azokat az *s* mennyiségeket nevezzük *skalárnak,* amelyek az (F.7) transzformáció során invariánsak maradnak. *Vektoron* pedig egy olyan háromkomponensű $v_i(v_1, v_2, v_3)$ mennyiséget értünk, amelynek komponensei úgy transzformálódnak, mint a megfelelő koordináták. Tehát

$v_i' = a_{ij}v_j \qquad (i = 1, 2, 3).$ (F.19. egyenlet)

Az a_{ij} transzformációs mátrix kielégíti az (F.11), (F.13) ortogonalitási összefüggéseket.

3. Vektoralgebra

Legyen a_i, b_i, c_i, három vektor. Összeadásukra igaz a kommutatív és asszociatív szabály:

$a_i+b_i = b_i+a_i$ (kommutatív)

$a_i+(b_i+c_i) = (a_i+b_i)+c_i$ (asszociatív)

A vektornak skalárral való szorzata vektor. Szorozzuk meg az a_i vektort az s skalárral. A $b_i=sa_i$ úgy transzformálódik, mint a vektor. Ugyanis

$$b_i' = sa_i' = sa_{ij}a_j = a_{ij}sa_j = a_{ij}b_j.$$

A $b_i=sa_i$ tehát vektor.

Két vektor $\mathbf{ab}=a_ib_i$ skaláris szorzata skalár:

$$\mathbf{a'b'} = a_i'b_i' = a_{ij}a_ja_{il}b_l = a_{ij}a_{il}a_jb_l = \delta_{jl}a_jb_l = a_jb_l = \mathbf{ab}.$$

Az a_i, b_i vektorok vektoriális szorzatán a következő háromkomponensű mennyiséget értjük:

$$c_i = e_{ijk}a_jb_k \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$ (F.20. egyenlet)

ahol e_{ijk} *az* ún. Levi–Civita-szimbólum, amelynek jelentése

$$e_{ijk}\begin{cases} 0, & \text{ha bármelyik két index megegyezik;} \\ +1, & \text{ha } i, j, k \text{ az 1, 2, 3-nak páros,} \\ -1, & \text{ha páratlan permutációja.} \end{cases}$$

A hagyományos jelöléssel

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Könnyen be lehet bizonyítani, hogy két vektor vektoriális szorzata az (F.19) szerint transzformálódik, tehát vektor. Ehhez azonban ismernünk kell az e_{ijk} Levi–Civita-szimbólum transzformációs képletét. Mivel az tenzor, ezért arra később térünk vissza.

4. Vektoranalízis

4.1 Vektor skalár szerinti deriváltja

Tegyük fel, hogy a v_i vektor az s skalár függvénye: $v_i = v_i(s)$. A v_i -nek az s szerinti deriváltja vektor. Ugyanis

$$\frac{dv_i'}{ds'} = \frac{d}{ds'} a_{ij} v_j = a_{ij} \frac{dv_j}{ds'}.$$

Mivel az *s* invariáns, *s′=s,* ezért

$$\frac{dv_i'}{ds'} = a_{ij} \frac{dv_i}{ds}.$$

Eszerint a dv_j/ds ugyanúgy transzformálódik, mint a vektor, ezért a vektornak skalár szerinti deriváltja vektor.

A pontmechanikában a helyvektor az időnek a függvénye. Az idő a koordináta-rendszer transzformációjakor változatlan marad, tehát skalár. A fentiek értelmében az x_i vektornak az idő szerinti deriváltja (a sebesség) vektor. Hasonlóképpen a v_i sebességvektornak az időderiváltja (a gyorsulás) is vektor.

4.2 Skalár gradiense

Legyen a ψ skalár az x_i koordinátáknak folytonos és differenciálható függvénye. Képezzük a ψ-nek a koordináták szerinti parciális deriváltjait:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_3}.$$

Megmutatjuk, hogy ezek a deriváltak egy vektor komponenseit jelentik. Képezzük az elforgatott koordináta-rendszerbeli differenciálhányadosokat:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i'} = \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i'}.$$ (F.21. egyenlet)

Az inverztranszformáció (F.9) képletéből

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_i'} = a_{ij}.$$

Ezt (F.21)-be beírva,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i'} = a_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j}.$$ (F.22. egyenlet)

Az (F.19)-cel összehasonlítva, látjuk, hogy a $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ úgy transzformálódik, mint egy vektor *i*-edik komponense. A ψ skalárfüggvénynek a koordináták szerinti parciális deriváltjai tehát egy vektor három komponensét jelentik. Ezt a vektort a ψ *gradiensének* nevezzük, és grad ψ-vel jelöljük.

A gradienst felfoghatjuk operátornak* is, amely a ψ skalárból a fentiek szerint képez egy vektort. A grad operátorra gyakran a ∇ jelölést használjuk. A ∇ jelet *nabla* operátornak nevezzük.** Tehát

$$\text{grad} \equiv \nabla \quad \text{(F.23. egyenlet)}$$

Ennek megfelelően

$$\text{grad}\, \psi = \nabla \psi. \quad \text{(F.24. egyenlet)}$$

A grad ψ-nek szemléletes jelentés adható. Vegyük a $\psi(x_1, x_2, x_3)$ skalárfüggvénynek a megváltozását, amidőn a $P(x_1, x_2, x_3)$ pontból a $P'(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ szomszédos pontba megyünk át:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx_j. \quad \text{(F.25. egyenlet)}$$

A jobb oldal felfogható úgy is, mint két vektornak a skaláris szorzata. Az egyik vektor a grad ψ, a másik pedig a dx_1, dx_2, dx_3 komponensű $d\mathbf{s}$ elemi elmozdulás. A hagyományos vektoriális jelöléssel

$$d\psi = \text{grad}\, \psi \cdot d\mathbf{s} = \nabla \psi \cdot d\mathbf{s}. \quad \text{(F.26. egyenlet)}$$

Ha a grad ψ és a ds vektorok közötti szöget α-val jelöljük, akkor a skaláris szorzat elemi értelmezéséből következik, hogy

$$d\psi = |\text{grad}\, \psi|\, ds\, \cos\alpha, \quad \text{(F.27. egyenlet)}$$

ahol ds a $d\mathbf{s}$ elmozdulásvektor nagysága. Az (F.26)-ból, illetve (F.27)-ből adódik a grad ψ vektor szemléletes jelentése. Tegyük fel, hogy $d\mathbf{s}$ elemi elmozdulásvektor a ψ =áll. felület érintősíkjába esik. Ez azt jelenti, hogy a szomszédos P' pont is rajta van a ψ = áll. felületen. Ezért a $d\psi = 0$. A grad ψ vektor az (F.26) alapján merő-leges a ψ =áll. felület P pontbeli érintősíkjára, tehát a felület normálisa irányába mutat. Másrészt az (F.27)-ből

$$\frac{d\psi}{ds} = |\text{grad}\, \psi| \cos\alpha. \quad \text{(F.28. egyenlet)}$$

Eszerint a $\frac{d\psi}{ds}$ (vagyis a ψ-nek a hosszúságegységre eső megváltozása) akkor a legnagyobb, ha a $d\mathbf{s}$ elmozdulás a grad ψ irányába esik, mert ekkor cos α = 1. Ebben az esetben $\frac{d\psi}{ds} = |\text{grad } \psi|$. A grad ψ vektor iránya tehát megegyezik azzal az iránnyal, amelyben a ψ változása a legnagyobb, a nagysága pedig ψ-nek a hosszúságegységre eső növekedése ebben az irányban.

4.3 Vektor divergenciája

Tekintsünk egy v_i (x_1, x_2, x_3) vektorteret, amelyről feltesszük, hogy a helykoordinátáknak folytonos és differenciálható függvénye. A $\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ összeget a v_i vektor *divergenciájának* nevezzük és div **v**-vel jelöljük:

$$\text{div}\,\mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Ez a mennyiség invariáns skalár. Erről úgy győződünk meg, hogy elvégezzük az (F.7) transzformációt:

$$\frac{\partial v_i'}{\partial x_i'} = a_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i'} = a_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_i'}.$$ (F.30. egyenlet)

Az inverztranszformáció (F.9) képletéből

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_l'} = a_{lk}.$$

Ezt (F.30)-ba beírva,

$$\frac{\partial v_i'}{\partial x_l'} = a_{ij}a_{lk}\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \delta_{jl}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}.$$ (F.31. egyenlet)

Eszerint a $\partial v_i/\partial x_i$ valóban skalár.

A vektor divergenciája formálisan felfogható úgy is, mint a grad (nabla) operátornak és a v_1 vektornak a skaláris szorzata:

$$\text{div}\,\mathbf{v} = \nabla\mathbf{v}.$$

Vegyük most azt a speciális esetet, amikor a v_i vektor egy skalár gradiense: $v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$. Ennek divergenciája

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_i}.$$ (F.33. egyenlet)

A jobb oldalról látszik, hogy ez a $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ operátornak a ψ skalárra való hatása. A

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$ (F.34. egyenlet)

operátort *Laplace-operatornak* nevezzük és Δ-val jelöljük: $\nabla^2 \equiv \Delta$. Ennek alapján

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi = \Delta\psi.$$ (F.35. egyenlet)

A div **v**-nek is adható közvetlen szemléletes jelentés. E célból a tér *P* pontját vegyük körül *V* térfogatú zárt felülettel, és képezzük a **v** normális irányú komponensének a *V*-t határoló felületre vett integrálját. Feltesszük, hogy a v_i komponensek a térfogatban mindenütt folytonos és differenciálható függvényei a koordinátáknak. Megmutatjuk, hogy

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_F v_n \, df,$$

ahol v_n a vektor kifelé mutató normális irányú komponense a felület mentén. Jelöljük a normális irányú egységvektort **n**-nel, és vegyük az

$$\int_F v_n df = \int_F \left[v_1 \cos(\mathbf{n}, x_1) + v_2 \cos(\mathbf{n}, x_2) + v_3 \cos(\mathbf{n}, x_3) \right] df$$ (F.36. egyenlet)

felületi integrálnak az első tagját. Osszuk fel az egész *V* térfogatot az x_1 irányban fekvő $dx_2 dx_3$ keresztmetszetű elemi hasábokra, amelyek közül tekintsünk most egyet. Ez a zárt felületből kimetszi a df_1, df_2 felületelemeket. Ezeknek az x_1 koordinátái legyenek $x_1^{(1)}$ és $x_1^{(2)} > x_1^{(1)}$. A megfelelő külső normális irányú egységvektorok $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$.

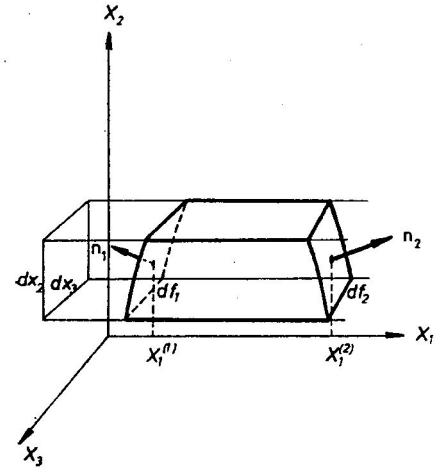
A két felületelem az (F.36) felületi integrál első tagjához a következő értékkel járul:

$$v_1^{(1)} \cos\left(\mathbf{n}^{(1)}, x_1\right) df_1 + v_1^{(2)} \cos\left(\mathbf{n}^{(2)}, x_1\right) df_2.$$ (F.37. egyenlet)

Mivel ($\mathbf{n}^{(1)}$, x_1) tompaszög, az ($\mathbf{n}^{(2)}$, x_1) pedig hegyesszög *(104. ábra),*

$$\cos\left(\mathbf{n}^{(1)}, x_1\right) df_1 = -dx_2 dx_3, \qquad \cos\left(\mathbf{n}^{(2)}, x_1\right) df_2 = dx_2 dx_3. \quad \text{(F.38. egyenlet)}$$

104. ábra -



Az (F.37) ezekkel így írható:

$$\left(v_1^{(2)} - v_1^{(1)}\right) dx_2 dx_3 = dx_2 dx_3 \int_{x_1^{(1)}}^{x_1^{(2)}} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1. \quad \text{(F.39. egyenlet)}$$

Hasonló egyenletek érvényesek valamennyi hasábra. Ezeket adjuk össze, és a felosztást minden határon túl finomítsuk. Így az összeadás az x_2 és x_3 szerinti integrálást jelent. Ennek alapján

$$\int_F v_1 \cos\left(\mathbf{n}, x_1\right) df = \int_V \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3. \quad \text{(F.40. egyenlet)}$$

Az (F.36) integrál másik két tagja is átalakítható az itt követett gondolatmenettel. Eredményül adódik

$$\int_F v_n df = \int_V \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) dV, \quad \text{(F.41. egyenlet)}$$

ahol $dV=dx_1dx_2dx_3$. Osszuk el ezt az egyenletet a *P* pont körüli kis tartomány *V* térfogatával, majd végezzük el azt a határátmenetet, amikor az egész tartományt folytonosan „ráhúzzuk" a *P* pontra. A jobb oldal az integrandusznak a *P* pontbeli értékébe megy át. Tehát

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \left(\operatorname{div}\mathbf{v}\right)_P = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_F v_n\,df. \qquad \text{(F.42. egyenlet)}$$

Ha a **v** vektortér stacionáriusán áramló folyadék sebességterét jelenti, akkor az $\int_F v_n df$ a *V* térfogatot határoló zárt felületen időegység alatt átáramló folyadék térfogatát adja meg. Pontosabban, a ki- és beáramló folyadék térfogatának a különbségét, mert **n** a kifelé mutató normális irányú egységvektor. Tegyük fel, hogy a folyadék összenyomhatatlan, továbbá hogy a *V*-ben nincs sem forrás, sem nyelő. Ebben az esetben az $\int_F v_n df = 0$. Ha viszont *V*-ben források (vagy nyelők) vannak, akkor ez az integrál ezek forráserősségének a mértéke. Ennek megfelelően az (F.42) jobb oldalán szereplő határérték a térfogategységre vonatkoztatott forráserősség a *P* pontban. (Ha ez a limes negatív, akkor nyelőerősségről van szó.) így a div **v** a forráserősség sűrűsége. Ha a **v** vektortér divergenciája a tartományban mindenütt zérus (div **v**= 0), akkor a vektorteret forrásmentesnek nevezzük.

4.4 Vektor rotációja

Legyen a v vektortér ismét folytonos és differenciálható függvénye a helykoordinátáknak. Képezzük az

$$u_i = e_{ik\ell}\frac{\partial v_\ell}{\partial x_k} \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \qquad \text{(F.43. egyenlet)}$$

háromkomponensű mennyiséget. Erről be lehet látni, hogy (F.19) szerint transzformálódik, tehát vektor. (A bizonyításra a tenzorokra vonatkozó 5. pontban visszatérünk.) Az (F.43)-mal definiált vektort a **v** rotációjának nevezzük, és hagyományosan rot **v**-vel jelöljük:

$$\mathbf{u} = \operatorname{rot}\mathbf{v}. \qquad \text{(F.44. egyenlet)}$$

A Levi – Civita-szimbólum (F.21) definíciója alapján könnyű belátni, hogy

$$u_1 = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \qquad u_2 = \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \qquad u_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \qquad \text{(F.45. egyenlet)}$$

Az (F.43) definícióból látszik, hogy a **v** vektor rotációja felfogható úgy is, mint a ∇ nabla operátornak és a **v** vektornak a vektoriális szorzata:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{v}. \qquad \text{(F.46. egyenlet)}$$

Ha **v** a ψ skalárnak gradiense, akkor a rot **v** ≡ 0. Ez szembetűnő módon következik az (F.43) képletből. Ugyanis ekkor

$$u_i = e_{ike}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k \partial x_l}.$$ (F.47. egyenlet)

Az e_{ijk} a *k, l* indexekben antiszimmetrikus, a $\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k \partial x_l}$ tényező pedig szimmetrikus.

Egy antiszimmetrikus és egy szimmetrikus mennyiségnek a szorzatösszege azonosan zérus, mert az összeg mindegyik tagjának van olyan párja, amely csak előjelben különbözik az előbbitől, és emiatt e kettő összege zérust ad. Az (F.47) a hagyományos írásmódban

$$\mathbf{u} = \text{rot grad } \mathbf{v} \equiv 0.$$ (F.48. egyenlet)

Szavakkal kifejezve: a grad **v** vektortér mindenütt rotációmentes.

A rot **v** vektornak is adható szemléletes geometriai jelentés. Az x_1^0, x_2^0, x_3^0 koordinátájú *P* pontot vegyük körül egy zárt síkgörbével, és képezzük e mentén a **v** vektor vonalmenti integrálját. A síkgörbe által határolt zárt tartomány felületét jelöljük *f*-fel, és a felület normális irányú egységvektora legyen **n**. A *d***s** vonalelem irányítása legyen olyan, hogy az **n** irányába nézve a görbe körüljárása egyezzék meg az óramutató járásával:

$$\oint \mathbf{v}\, d\mathbf{s} = \oint \left(v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3\right).$$ (F.49. egyenlet)

Vizsgáljuk a jobb oldal első tagját. A $v_1(x_1, x_2, x_3)$ függvényt fejtsük Taylor-sorba a *P* pont környezetében:

$$v_1 = v_1^0 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)_0 \left(x_1 - x_1^0\right) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)_0 \left(x_2 - x_2^0\right) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)_0 \left(x_3 - x_3^0\right) + \ldots$$ (F.50. egyenlet)

Feltesszük, hogy a *P* pont körüli zárt görbe a *P* közvetlen környezetében halad, vagyis a görbe pontjainak a *P*-től számított távolsága kicsi. Ebben az esetben az $\left(x_i - x_i^0\right)$ különbségek magasabb hatványai elhanyagolhatók a lineárisak mellett. (Ez a közelítés annál is inkább meg van engedve, mert végül áttérünk arra a határ-átmenetre, amikor a görbét folytonosan ráhúzzuk a *P* pontra.)

Az (F.49) első integrálja (F.50) alapján a következőképpen írható:

$$\oint v_1 dx_1 = v_1^0 \oint dx_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)_0 \oint \left(x_1 - x_1^0\right) dx_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)_0 \oint \left(x_2 - x_2^0\right) dx_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)_0 \oint \left(x_3 - x_3^0\right) dx_1.$$ (F.51. egyenlet)

Az első és a második integrál, valamint a harmadikban és a negyedikben az x_1^0-t és az x_3^0-t tartalmazó tag zérus. Ugyanis

$$\oint dx_1 = \left[x_1\right]_{x_1^0}^{x_1^0} = 0, \qquad \oint x_1 dx_1 = \frac{1}{2}\left[x_1^2\right]_{x_1^0}^{x_1^0} = 0.$$

Így marad

$$\oint v_1 dx_1 = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)_0 \oint x_2 dx_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)_0 \oint x_3 dx_1. \quad \text{(F.52. egyenlet)}$$

A $\oint x_2 dx_1$, illetve a $\oint x_3 dx_1$ az f felület vetülete az x_1x_2, illetve az x_1x_3 síkra. Mivel a görbe vetületének körüljárása az x_1x_2 síkon az óramutató járásával ellentétes, az x_1x_3 síkon vele megegyező értelmű, ezért az előbbi vetület negatív, az utóbbi pozitív előjellel adódik. [Ez akkor van így, ha az (**n**, x_2) és (**n**, x_3) szögek hegyes-szögek. Ha a felület normálisa ellentétes irányú, akkor a felületek előjele fordított.]

Így

$$\oint x_2 dx_1 = -f\cos(\mathbf{n}, x_3),$$
$$\oint x_3 dx_1 = f\cos(\mathbf{n}, x_2). \quad \text{(F.53. egyenlet)}$$

Ezt (F.52)-be helyettesítve,

$$\oint v_1 dx_1 = \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)_0 \cos(\mathbf{n}, x_2) - \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)_0 \cos(\mathbf{n}, x_3)\right] f. \quad \text{(F.54. egyenlet)}$$

Hasonló gondolatmenettel adódik, hogy

$$\oint v_2 dx_2 = \left[\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)_0 \cos(\mathbf{n}, x_3) - \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)_0 \cos(\mathbf{n}, x_1)\right] f, \quad \text{(F.55. egyenlet)}$$

$$\oint v_3 dx_3 = \left[\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)_0 \cos(\mathbf{n}, x_1) - \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)_0 \cos(\mathbf{n}, x_2)\right] f. \quad \text{(F.56. egyenlet)}$$

Ezek összege

$$\oint \mathbf{v}\, d\mathbf{s} = \oint \left(v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3\right) =$$
$$= \left\{\left[\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)_0 - \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)_0\right]\cos(\mathbf{n}, x_1) + \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)_0 - \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)_0\right]\cos(\mathbf{n}, x_2) + \left[\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)_0 - \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)_0\right]\cos(\mathbf{n}, x_3)\right\} f. \quad \text{(F.57. egyenlet)}$$

Osszuk el az egyenletet *f*-fel, majd végezzük el azt a folytonos határátmenetet, amikor a görbét ráhúzzuk a *P* pontra. A deriváltak mellől a 0 indexet elhagyva, a jobb oldali kifejezés *P* pontbeli értékét kapjuk:

$$\lim_{f\to 0} \frac{1}{f} \oint \mathbf{v}\, d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\cos(\mathbf{n}, x_1) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\cos(\mathbf{n}, x_2) + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\cos(\mathbf{n}, x_3). \quad \text{(F.58. egyenlet)}$$

A jobb oldalon a rot **v** vektornak és az **n** egységvektornak a skalárszorzata áll. Ez tehát a rot **v**-nek **n** irányú összetevője:

$$\left(\text{rot}\, \mathbf{v}\right)_n = \lim_{f\to 0} \frac{1}{f} \oint \mathbf{v}\, d\mathbf{s}. \quad \text{(F.59. egyenlet)}$$

Ezt az egyenletet a rotáció koordináta-rendszertől független definíciójának tekintjük.

4.5 Vektoranalitikai integráltételek

a) *A Gauss-tétel*

Feltételezzük, hogy a $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$ vektortér a *V* térfogatú tartomány minden pontjában véges, egyértékű, folytonos és differenciálható függvénye a koordinátáknak. Az (F.41) egyenlőség alapján fennáll a következő nevezetes tétel:

$$\int_F v_n df = \int_V \text{div}\, \mathbf{v}\, dV, \quad \text{(F.60. egyenlet)}$$

ahol *F* a *V*-t határoló zárt felület. Eszerint a **v** vektor normális irányú komponensének *F*-re vett felületi integrálja egyenlő a div **v**-nek az *F* által határolt térfogatra vett térfogati integráljával. Ez a Gauss-tétel néven ismert összefüggés az elméleti fizikában egyik leggyakrabban használt vektoranalitikai integráltétel.

b) *A Green-tétel*

Legyen Φ és ψ a koordinátáknak egyértékű, folytonos és differenciálható skalár-függvénye. Alkalmazzuk az (F.60) Gauss-tételt a $\mathbf{v} = \Phi$ grad ψ vektorra:

$$\int_F \Phi(\operatorname{grad}\psi)_n\,df = \int_V \operatorname{div}(\Phi\operatorname{grad}\psi)\,dV.$$ (F.61. egyenlet)

A térfogati integrál integranduszát átalakítjuk a

$$\operatorname{div}(\Phi\operatorname{grad}\psi) = \Phi\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi + \operatorname{grad}\Phi\operatorname{grad}\psi = \Phi\Delta\psi + \operatorname{grad}\Phi\operatorname{grad}\psi$$ (F.62. egyenlet)

vektoranalitikai összefüggés felhasználásával. (Az egyenlőség érvényességéről könnyű meggyőződni a grad és a div definíciója alapján.) Az (F.62)-t (F.61)-be helyettesítve nevezetes integráltételhez, az ún. *Green-tételhez* jutunk:

$$\int_F \Phi(\operatorname{grad}\psi)_n\,df = \int_V (\Phi\Delta\psi + \operatorname{grad}\Phi\operatorname{grad}\psi)\,dV.$$ (F.63. egyenlet)

Természetesen ez az egyenlőség akkor is igaz, ha a Φ-t ψ-vel felcseréljük:

$$\int_F \psi(\operatorname{grad}\Phi)_n\,df = \int_V (\psi\Delta\Phi + \operatorname{grad}\psi\operatorname{grad}\Phi)\,dV.$$ (F.63'. egyenlet)

Vonjuk ki (F.63')-t az (F.63)-ból. így adódik a *Green-tétel szimmetrikus alakja:*

$$\int_F (\Phi\operatorname{grad}\psi - \psi\operatorname{grad}\Phi)_n\,df = \int_V (\Phi\Delta\psi - \psi\Delta\Phi)\,dV.$$ (F.64. egyenlet)

c) *A Stokes-tétel*

Gondoljunk el egy tetszőleges *C* zárt görbét (amelynek nem kell síkgörbének lennie). Képzeljünk el egy olyan tetszőleges *F* felületet, amely illeszkedik a görbére úgy, hogy utóbbi annak határoló vonala. Osszuk fel az *F* felületet két görbesereggel igen kicsi Δf_i felületelemekre. A Δf_i -ket határoló görbék körüljárási iránya egyezzék meg a *C* körüljárási irányával.

Az (F.57) szerint mindegyik Δf_i felületelemre érvényes, hogy

$$\oint_{C_i} \mathbf{v}\,d\mathbf{s} = (\operatorname{rot}\mathbf{v})_{n_i}\,\Delta f_i.$$ (F.65. egyenlet)

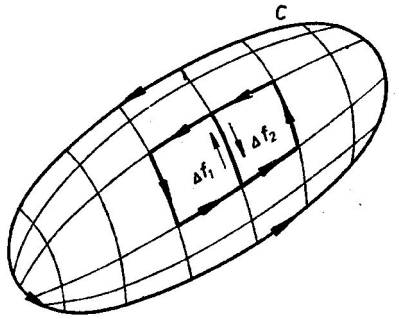
Adjuk össze ezeket az integrálokat:

$$\sum_i \oint_{C_i} \mathbf{v}\,d\mathbf{s} = \sum_i (\operatorname{rot}\mathbf{v})_{n_i}\,\Delta f_i.$$

A bal oldalon a belső vonalszakaszokra vett integrálok kiesnek, mert mindegyiken kétszer megyünk végig, de a második esetben az előbbivel ellentétes irányban. A Δf_i-kre való felosztást minden határon túl finomítva ($\Delta f_i \to 0$), a baloldal a C görbére vett vonalmenti integrálba, a jobb oldali összeg pedig a határozott integrál definíciójánál fogva a $(\text{rot}\ \mathbf{v})_n$ F-re vett felületi integráljába megy át. Így adódik az ún *Stokes-tétel:*

$$\oint_C \mathbf{v}\, d\mathbf{s} = \int_F (\text{rot}\ \mathbf{v})_n\, df.$$ (F.66. egyenlet)

105. ábra -



Szavakkal kifejezve: a **v** vektor zárt görbe menti integrálja egyenlő a rot **v**-nek a C-re fektetett tetszőleges olyan F felületre vett integráljával, amelynek a C határoló vonala.

A Stokes-tétel alkalmazásánál vigyázni kell arra, hogy az a tartomány, amelyre az integrálokat vesszük, egyszeresen összefüggő-e, vagyis a görbére illeszkedő felület benne van-e abban a tartományban, ahol a **v** értelmezve van. Ha a tartomány többszörösen összefüggő, akkor segédvonalakkal való felmetszéssel egyszeresen össze-függővé kell tenni, és olyan felületet kell választani, amely teljesen a vizsgált tartományban fekszik.

5. Tenzorok

A fizikában gyakran találkozunk olyan mennyiségekkel, amelyek jellemzéséhez nem elegendő egy vagy három adat, mint a skalárnál, illetve vektornál. Gondoljunk pl. a rugalmas deformációknál keletkező feszültségekre. Ezek *tenzorokkal* írhatók le.

A tenzornak a legegyszerűbb esetben kilenc komponense van. Jelölésére a T_{ik} kétindexű szimbólumot használjuk, ahol az i és k indexek az 1, 2, 3 (illetve az x, y, z) értékeket vehetik fel. Definíciójára a koordináta-rendszer elforgatásakor való viselkedésüket vesszük alapul: *a T_{ik} tenzor egyes elemei a koordináta-rendszer elforgatásakor úgy transzformálódnak, mint a megfelelő koordináták szorzatai.* Tehát

$$T'_{ik} = a_{ir}a_{ks}T_{rs} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3).$$ (F.67. egyenlet)

Az (F.67) definícióból nyilvánvaló, hogy két vektor u_iv_k szorzata tenzort ad, mert u_i, és v_k úgy transzformálódnak, mint az x_i, illetve x_k koordináták.

A kétindexű tenzor definíciója könnyen általánosítható akárhányadrendű (indexű) tenzorra. így pl. harmadrendű tenzor olyan 3^3=27 komponensből álló mennyiség, amelynek T_{ikl} eleme a koordináta-rendszer elforgatásakor úgy transzformálódik, mint az $x_ix_kx_l$ szorzat, vagyis

$$T_{ikl} = a_{ir}a_{ks}a_{lt}T_{rst}.$$ (F.68. egyenlet)

Megtehetjük azt is, hogy a tenzor fogalmát olyan általános értelemben használjuk, hogy az magába foglalja a vektor és a skalár értelmezését is. Nevezetesen a vektort elsőrendű (egyindexű), a skalárt pedig nulladrendű (index nélküli) tenzornak tekinthetjük.

Két tenzor összege vagy különbsége is tenzor. Ugyanis

$$T^{(1)}_{ik} \pm T^{(2)}_{ik} = a_{ir}a_{ks}T^{(1)}_{rs} + a_{ir}a_{ks}T^{(2)}_{rs} = a_{ir}a_{ks}\left(T^{(1)}_{rs} + T^{(2)}_{rs}\right).$$

Vektornak és tenzornak v_iT_{kl} szorzata harmadrendű tenzor. Ez a szorzás úgy értendő, hogy a vektor mindhárom komponensét megszorozzuk a T_{kl} tenzor valamennyi elemével. így 3·9 = 27 elemből álló

$$T_{ikl} = v_iT_{kl}$$ (F.69. egyenlet)

harmadrendű tenzort kapunk. Ugyanis a v_iT_{kl} úgy transzformálódik, mint az $x_ix_kx_l$ koordinátaszorzat:

$$T'_{ikl} = v'_iT'_{kl} = a_{ir}a_{ks}a_{lt}v_rT_{rst}.$$ (F.70. egyenlet)

A tenzorok szorzásával tehát magasabb rendű tenzort kapunk.

Előfordul olyan eset is, hogy egy tenzor kifejezésében két index megegyezik és erre összegezés történik. Ilyenkor az eredmény kettővel alacsonyabb rendű tenzor lesz. Vegyük pl. az (F.69) harmadrendű tenzort, és ebben az *i* index egyezzék meg az *l*-lel, amelyre összegezés értendő 1-től 3-ig:

$$T_{ikl} = T_{lk}v_l = T_{1k}v_1 + T_{2k}v_2 + T_{3k}v_3 \qquad (k = 1,\ 2,\ 3).$$ (F.71. egyenlet)

A fentiekhez hasonlóan látható be, hogy ez vektorként transzformálódik. A T_{ikl} tehát egy u_k vektor:

$$u_k = T_{lk}v_l \qquad (k = 1,\ 2,\ 3).$$ (F.71'. egyenlet)

Ezt az összefüggést úgy is mondhatjuk, hogy az u_k vektorkomponensek homogén lineáris függvényei a v_l vektorkomponenseknek. Eszerint a T_{kl} tenzor a v_l vektorhoz az (F.71) módon hozzárendeli az u_k vektort. A matematikában az (F.71')-vel definiálják a T_{kl} tenzort.

A fizikában gyakran előfordul kétindexű tenzor főátlóban álló elemeinek az összege: T_{ll}. Ezt a mennyiséget a T_{kl} tenzor *átlós összegének* (idegen szóval *spurjának*) nevezzük. Ez a koordináta-rendszer elforgatásakor invariáns skalárként viselkedik. Emlékeztetünk rá, hogy a deformációknál fellépő relatív térfogatváltozás az ε_{ik} deformációtenzor spurja:

$$\frac{\Delta V}{V} = \Theta = \varepsilon_{ll}.$$

Vektorból vagy tenzorból újabb tenzort nemcsak algebrai úton nyerhetünk, hanem differenciálással is. Legyen v_i a koordinátáknak folytonos és differenciálható függvénye. Képezzük a v_i vektorkomponensek x_k szerinti parciális deriváltjait: $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$. Ez a kilenc elemből álló mennyiség egy kétindexű tenzor:

$$T_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$ (F.72. egyenlet)

Ennek belátásához megvizsgáljuk, hogyan transzformálódik a $\partial v_i / \partial x_k$ ha a koordináta-rendszert elforgatjuk:

$$\frac{\partial v'_i}{\partial x'_k} = a_{ir} \frac{\partial v_r}{\partial x'_k} = a_{ir} \frac{\partial v_r}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x'_k} = a_{ir} a_{ks} \frac{\partial v_r}{\partial x_s}.$$ (F.73. egyenlet)

Ez megegyezik a T_{ik} tenzor (F.67) transzformációs képletével, tehát a $\partial v_i / \partial x_k$ valóban másodrendű tenzor.

Tekintsük a T_{ik} tenzor elemeinek a koordináták szerinti deriváltjait. Az így adódó, huszonhét elemet tartalmazó $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}$ mennyiség harmadrendű tenzor. Ugyanis

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x'_l} = a_{ir} a_{ks} \frac{\partial T_{rs}}{\partial x'_l} = a_{ir} a_{ks} \frac{\partial T_{rs}}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial x'_l} = a_{ir} a_{ks} a_{lt} \frac{\partial T_{rs}}{\partial x_t}.$$ (F.74. egyenlet)

Vegyük most a $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$ összeget. A fentiekhez hasonlóan belátható, hogy ez vektor:

$$v_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$ (F.75. egyenlet)

Ezt a T_{ik} tenzor divergenciájának nevezzük.

Ezek után megmutatjuk, hogy két vektor (F.20) definíciójú vektoriális szorzata is vektor. Az $e_{,jk}$ Levi –Civita-szimbólum harmadrendű tenzor, ezért

$$c_i' = e_{ijk}a_j'b_k' = a_{ir}a_{js}\overbrace{a_{ku}a_{kv}}^{\delta_{uv}}e_{rst}a_u b_v = a_{ir}\delta_{su}\delta_{tv}e_{rst}a_u b_v = a_{ir}e_{rst}a_s b_t = a_{ir}c_r$$
(F.76. egyenlet)

A *c,* vektoriális szorzat valóban úgy transzformálódik, mint egy vektor. Hasonlóképpen igazolható, hogy a *v,* vektor (F.43) rotációja is vektor. A fizikában leginkább olyan tenzorok fordulnak elő, amelyek valamilyen szimmetriával rendelkeznek. A T_{ik} tenzor szimmetrikus, ha

$$T_{ik} = T_{ki},$$ (F.77. egyenlet)

és antiszimmetrikus, ha

$$T_{ik} = -T_{ki}.$$ (F.78. egyenlet)

Az (F.7) koordinátatranszformáció a tenzor szimmetriáját megőrzi. Ugyanis

$$T_{ik}' = a_{ir}a_{ks}T_{rs},$$
$$T_{ki}' = a_{ks}a_{ir}T_{sr}.$$

Ha az eredeti tenzor szimmetrikus: $T_{rs} = T_{sr}$, akkor a két jobb oldali kifejezés megegyezik, és emiatt

$$T_{ik}' = -T_{ki}'.$$

Hasonlóképpen belátható, hogy az antiszimmetria-tulajdonság is megmarad a koordináta-rendszer elforgatásánál.

A szimmetrikus másodrendű tenzornak 6 független eleme van: a főátlóban álló három és a fölötte levő három. Az antiszimmetrikus tenzornak a főátlóban álló elemei zérusok, mert az indexek felcserélésének előjelváltozást kell eredményeznie, másrészt az indexek azonossága miatt ilyen nem következhet be. így pl. a $T_{11} = -T_{11}$ egyenletből a $T_{11} = 0$ következik. Ezért az antiszimmetrikus másodrendű tenzornak csak három független eleme van.

Bármely kétindexes tenzor felbontható szimmetrikus és antiszimmetrikus tenzor összegére:

$$T_{ik} = \frac{1}{2}\left(T_{ik} + T_{ki}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{ik} - T_{ki}\right).$$ (F.79. egyenlet)

Az első tag szimmetrikus, a második antiszimmetrikus.

6. Vektortér felbontása rotáció- és divergenciamentes terek összegére

Bármely folytonos **v** vektortér, amely az egész koordinátatérben mindenütt értelmezve van és a végtelenben az első deriváltjaival együtt eltűnik, felbontható olyan két vektortér összegére, amelyek közül az egyik rotációmentes, a másik divergenciamentes. Vagyis

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,$$ (F.80. egyenlet)

ahol

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}_1 = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v}_2 = 0.$$ (F.81. egyenlet)

Mivel egy vektortér divergenciája ott különbözik zérustól, ahol a térnek forrásai (vagy nyelői), a rotációja pedig ott, ahol örvények vannak, ezért az (F.80), (F.81) felbontás annak felel meg, hogy a **v** vektortér forrásai a $\mathbf{v}_1$ résztérben, az örvények pedig a $\mathbf{v}_2$-ben vannak. Ugyanis

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{div}\mathbf{v}_1, \quad \operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{rot}\mathbf{v}_2.$$ (F.82. egyenlet)

Az (F.80) felbontás egy állandó vektor erejéig egyértelmű. Ugyanis az állandó vektornak mind a rotációja, mind a divergenciája zérus.

Az (F.80) tételt A. Sommerfeld nyomán három lépésben bizonyítjuk be:

1. *A* $\mathbf{v}_1$ *kiszámítása.* Mivel a $\mathbf{v}_1$ rotációmentes, egy Φ skalártér negatív gradienseként állítható elő:

$$\mathbf{v}_1 = -\operatorname{grad}\Phi + \text{áll.}$$ (F.83. egyenlet)

Vegyük ennek a divergenciáját:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_1 = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = -\Delta\Phi.$$

Ez az (F.82) első egyenlete alapján a következőképpen írható:

$$\Delta\Phi = -\operatorname{div}\mathbf{v}.$$ (F.84. egyenlet)

Ebből a Poisson-típusú egyenletből lehet a Φ skalárt kiszámítani. Feltételezve, hogy ez egyenlet jobb oldalát ismerjük, a 4.5 pontban bemutatott Green-tétel alapján adódik, hogy

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\operatorname{div}\mathbf{v}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'.$$ (F.85. egyenlet)

A térfogati integrál arra a V tartományra értendő, amelyben a div $\mathbf{v} \neq 0$. Az így meghatározott Φ-ből (F.83) alapján lehet a $\mathbf{v}_1$-et kiszámítani. Ez az összefüggés v_1-et egy állandó erejéig határozza meg.

2. *A* $\mathbf{v}_2$ *kiszámítása.* Vezessünk be egy segédvektort, az ún. **A** vektorpotenciált úgy, hogy legyen

$$\mathbf{v}_2 = \operatorname{rot}\mathbf{A} + \text{áll.}$$ (F.86. egyenlet)

Vegyük ennek az egyenlőségnek a rotációját és használjuk fel a

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}$$ (F.87. egyenlet)

vektoranalitikai összefüggést. így az (F.82) második egyenlete alapján

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = \operatorname{rot}\mathbf{v}_2 = \operatorname{rot}\mathbf{v}.$$ (F.88. egyenlet)

Mivel az (F.86) egyenlőségben az **A** vektorhoz egy tetszőleges χ skalárfüggvény gradiense hozzáadható anélkül, hogy $\mathbf{v}_2$ megváltoznék, minden olyan **A'** vektorpotenciál, amelyik **A**-tól grad χ-ben különbözik, ugyanazt a $\mathbf{v}_2$-t adja, mint az **A**. Az **A** megválasztásában mutatkozó ezen szabadságot arra használjuk fel, hogy olyan vektorpotenciált vezetünk be, amelyre az **A**-t meghatározó (F.88) differenciálegyenlet a lehető legegyszerűbb. Ezt elérhetjük úgy, hogy **A**-ra kikötjük a

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$$ (F.89. egyenlet)

mellékfeltételt. Az **A** vektorpotenciált ebben az esetben a

$$\Delta\mathbf{A} = -\operatorname{rot}\mathbf{v}$$ (F.90. egyenlet)

Poisson-egyenletből lehet kiszámítani a (6.1)-ben követett eljárással. Eredményül adódik, hogy

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\operatorname{rot}\mathbf{v}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'.$$ (F.91. egyenlet)

Most még meg kell mutatnunk, hogy ez a megoldás kielégíti az (F.89) mellék-feltételt is. Az integranduszban szereplő rot **v**-t az egyszerűbb írás kedvéért jelöljük **ω**-val. Tehát

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'.$$

Képezzük ennek divergenciáját az **r** pont koordinátái szerint:

$$\operatorname{div}_{(\mathbf{r})}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \operatorname{div}_{(\mathbf{r})}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV' = \frac{1}{4\pi}\int_V \operatorname{grad}_{(\mathbf{r})}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}')\,dV' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_V \operatorname{grad}_{(\mathbf{r}')}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}')\,dV' = -\frac{1}{4\pi}\int_V \operatorname{div}_{(\mathbf{r}')}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV' +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\operatorname{div}_{(\mathbf{r}')}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}')\,dV'.$$

A jobb oldali második integrál zérus, mert $\operatorname{div}_{(\mathbf{r}')}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}') = \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{v} \equiv 0$. Az első integrált Gauss-tétellel felületi integrállá alakítjuk. Mivel az **r** = **r'** pontban az $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ függvény szinguláris, a Gauss-tétel nem alkalmazható további megszorítás nélkül, mert a div jele mögötti vektortérnek végesnek, egyértékűnek, folytonosnak és differenciálhatónak kell lennie. Ezért a szingularitás helyét (az **r** pontot) egy kis gömbbel körülvesszük és kirekesztjük az integrálási tartományból, majd a végén a gömböt folytonosan „ráhúzzuk" az **r** pontra. Ennélfogva

$$\int_V \operatorname{div}_{(\mathbf{r}')}\frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d'V = \int_F \frac{\omega_n}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}df - \int_G \frac{\omega_n}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,df.$$

A V térfogatot határoló *F* felületet kitoljuk a végtelenbe, és ekkor az *F*-re vett integrál eltűnik, mert a feltevésünk szerint a **v** vektortér az első deriváltjaival együtt zérus a végtelenben. A *G* gömböt pedig folytonos határátmenettel „ráhúzzuk" az **r** pontra. A ω_n az **r** pontbeli véges értékéhez tart, az $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}df = \frac{1}{r}r^2 d\Omega \to 0$, amidőn $r\to 0$. Ezért a gömbre vett felületi integrál határértéke is zérus. Ezzel bebizonyítottuk, hogy az **A** vektorpotenciál (F.91) kifejezése valóban kielégíti a div **A**=0 mellékfeltételt. Az így meghatározott A-ból (F.86) szerint számítható ki a $\mathbf{v}_2$.

3. *A* $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ *felbontás egyértelműsége.* Tegyük fel, hogy létezik egy másik felbontás is:

$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, (F.92. egyenlet)

ahol

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_1' = 0, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{v}_2' = 0.$$ (F.93. egyenlet)

Mivel mind $\mathbf{v}_l$, mind $\mathbf{v}_1'$ rotációmentes vektorterek, a kettő különbsége is az: rot $(\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1) = 0$. Másrészt div $\mathbf{v}_1'$ = div **v** = div $\mathbf{v}_1$, ezért a $(\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1)$ egyúttal divergenciamentes is:

$$\mathrm{div}(\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1) = 0.$$ (F.94. egyenlet)

Ugyanígy belátható, hogy a $(\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_2)$ különbség is egyszerre divergencia- és rotációmentes:

$$\mathrm{rot}(\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_2) = 0.$$ (F.95. egyenlet)

A (6.1), illetve a (6.2) pontban követett eljárásnak megfelelően legyen most

$$\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1 = -\mathrm{grad}\,\Phi + \text{áll.}$$ (F.96. egyenlet)

$$\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_2 = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} + \text{áll.}$$ (F.97. egyenlet)

A 0-t és A-t az (F.85), illetve az (F.91) képletekből lehet kiszámítani. Az (F.94) és (F.95) alapján adódik, hogy Φ = 0, **A**=0. Ezért az (F.96)-ból és (F.97)-ből

$$\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1 = \text{áll.}, \qquad \mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_2 = \text{áll.}$$

Az (F.86) felbontás tehát valóban egy állandó vektor erejéig egyértelmű.

7. Differenciáloperátorok kifejezése görbevonalú ortogonális koordinátákban

A derékszögű koordináták helyett gyakran használunk henger- vagy polárkoordinátákat, mert a fizikai feladat sok esetben ezekkel könnyebben megoldható. Ezért az alapegyenletekben előforduló differenciáloperátorokat (grad, div, rot, Δ) felírjuk görbevonalú ortogonális koordinátákban, amelyeket q_1-, q_2-, q_3-mal jelölünk. A derékszögű x_i koordinátákról a q_k-kra való áttérés az

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

transzformációs képletek segítségével történhet. A q_k = áll. egy felületnek az egyenletét jelenti. Ha az állandó értékét változtatjuk, akkor felületsereget kapunk. Mindegyik q_k koordinátához tartozik egy-egy felületsereg. Ha ez a három felületsereg egymásra merőleges, akkor ortogonális koordinátákról beszélünk.

A háromdimenziós euklidészi tér két szomszédos pontja közötti távolság (ívelem) négyzete

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} dx_i^2.$$

Ez a transzformációs képletek alapján kifejezhető a dq_k koordinátadifferenciálokkal is:*[1]

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)^2 dq_k^2.$$

Vezessük be a $g_k^2 = \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)^2$ jelölést. így az ívelemnégyzet a

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{3} g_k^2 dq_k^2$$ (F.98. egyenlet)

alakba írható. A g_k mennyiségek általában a q_k koordináták függvényei. A q_i = áll. és $q_i + dq_i$ = áll. koordinátafelületek elemi hasábot határolnak. A q_1, q_2, q_3 koordinátájú pontba összefutó éleket érintő egység-vektorokat jelöljük $\mathbf{e}_1$-, $\mathbf{e}_2$-, $\mathbf{e}_3$-mal. Ezek egymásra merőlegesek, de irányuk pontról pontra változik. Egy tetszőleges $\mathbf{v}(q_i)$ vektor felírható

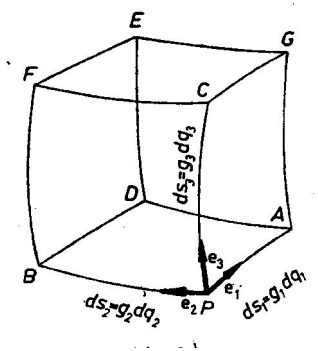
$$\mathbf{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$$

alakban, ahol v_1, v_2, v_3 a **v** vektornak a q_1, q_2, q_3 koordináták menti komponensei.

[1]* Ha a q_k-k nem ortogonálisak, akkor

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \frac{dx_i}{dq_k}\frac{dx_i}{dq_i} dq_k dq_i.$$

106. ábra -



Az ívelemnégyzet (F.98) kifejezéséből látszik, hogy az elemi hasáb éleinek a hossza $ds_1=g_1dq_1$, $ds_2=g_2dq_2$, $ds_3 = g_3dq_3$; a térfogatelem pedig

$$dV = g_1 g_2 g_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$ (F.99. egyenlet)

A gradiens, divergencia és rotáció kifejezéseit a q_k koordinátákban e differenciáloperátorok koordináta-rendszertől független definícióiból kaphatjuk meg a legkönnyebben.

Nézzük először a gradienst. A 4.2 pontban adott értelmezés szerint a grad ψ vektor q_1-komponense megegyezik a ψ skalárnak a q_1 koordináta menti hosszegységre eső megváltozásával. Tehát

$$\operatorname{grad}_1 \psi = \lim_{\Delta q_1 \to 0} \frac{\psi(q_1 + \Delta q_1,\ q_2\ ,q_3) - \psi(q_1,\ q_2,\ q_3)}{g_1 \Delta q_1} = \frac{1}{g_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1}.$$

Általában

$$\operatorname{grad}_i \psi = \frac{1}{g_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$ (F.100. egyenlet)

Valamely vektor divergenciájának kifejezését a q_k koordinátákban az (F.42) definíció alapján határozzuk meg. Eszerint képezzük a **v** vektornak az elemi hasáb felületére vett fluxusát, majd ezt elosztjuk a hasáb térfogatával, és az így adódó ki-fejezés határértékét vesszük, midőn a tartományt egy pontra folytonosan összehúzzuk. Vegyük először a *PBFC* lapon kimenő (tehát a $-\mathbf{e}_1$ irányú) fluxust. Ez $-v_1 g_2 g_3 dq_2 dq_3$. A szemközti lapon áthaladó fluxus a $v_1 g_2 g_3 dq_2 dq_3$ szorzat lesz, de ezt most a q_1+dq_1 helyen kell venni:

$$(v_1 g_2 g_3)_{q_1+q_1} dq_2 dq_3.$$

Fejtsük ezt Taylor-sorba a q_1 hely környezetében:

$$(v_1 g_2 g_3)_{q_1} dq_2 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_1}(v_1 g_2 g_3) dq_1 dq_2 dq_3 + \dots .$$

A két szemközti lapon átmenő fluxus e két kifejezés összege:

$$-v_1 g_2 g_3 dq_2 dq_3 + v_1 g_2 g_3 dq_2 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_1}(v_1 g_2 g_3) dq_1 dq_2 dq_3.$$

Itt a sorfejtés magasabb rendű tagjait elhagytuk, mert az említett határértékképzésnél ezek úgyis zérust adnak. Az első két tag kiejti egymást, és marad a

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(v_1 g_2 g_3) dq_1 dq_2 dq_3.$$

Hasonló gondolatmenettel számítható ki a másik négy felületelemen áthaladó fluxus. Végül ezek összege adja a v vektortérnek az elemi hasáb felületére vett fluxusát:

$$\int v_n df \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(v_1 g_2 g_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(v_2 g_1 g_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(v_3 g_1 g_2) \right] dq_1 dq_2 dq_3.$$

Ezt el kell osztani a $g_1 g_2 g_3 dq_1 dq_2 dq_3$ térfogatelemmel, és az így adódó kifejezés határértékét kell venni, amidőn a $dV \to 0$. Ezzel megkapjuk a div **v**-t görbevonalú ortogonális koordinátákban:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{dV \to 0} \int v_n df = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(v_1 g_2 g_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(v_2 g_1 g_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(v_3 g_1 g_2) \right]. \quad \text{(F.101. egyenlet)}$$

A rotáció kifejezésének meghatározásánál az (F.59) definícióból indulunk ki. Vegyük a **v** vektor vonalmenti integrálját a *106. ábra PBFCP* zárt görbéjére. Ez az (F.59) szerint a rot **v** q_1 komponensével arányos:

$$\oint_{PBFCP} \mathbf{v}\, d\mathbf{s} = (\operatorname{rot} \mathbf{v})_1 g_2 g_3 dq_2 dq_3.$$

A bal oldal:

$$\oint_{PBFCP} \mathbf{v}\,d\mathbf{s} = \int_{P}^{B} \mathbf{v}\,d\mathbf{s} + \int_{B}^{F} \mathbf{v}\,d\mathbf{s} + \int_{F}^{C} \mathbf{v}\,d\mathbf{s} + \int_{C}^{P} \mathbf{v}\,d\mathbf{s} =$$

$$= v_2 g_2 dq_2 + (v_3 g_3)_{q_1+dq_1} dq_3 - (v_2 g_2)_{q_1+dq_1} dq_2 - v_3 g_3 dq_3 =$$

$$= v_2 g_2 dq_2 + v_3 g_3 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_2}(v_3 g_3) dq_2 dq_3 - v_2 g_2 dq_2 - \frac{\partial}{\partial q_3}(v_2 g_2) dq_2 dq_3 - v_3 g_3 dq_3 =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial q_2}(v_3 g_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(v_2 g_2)\right] dq_2 dq_3.$$

A sorfejtésnél a lineárisnál magasabb rendű tagokat elhagytuk, mert a következő határértékképzésnél ezek zérust adnak. A rotáció (F.59) definíciója szerint ezt elosztjuk a *PBFCP* felülettel, majd a felületet folytonos határátmenettel a *P* pontra húzzuk össze. Így a rot **v** q_1 komponensét kapjuk a *P* pontban:

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_1 = \frac{1}{g_2 g_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(v_3 g_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(v_2 g_2)\right].$$ (F.102. egyenlet)

Hasonlóan adódik a másik két komponensre:

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_2 = \frac{1}{g_1 g_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(v_1 g_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(v_3 g_3)\right],$$ (F.102'. egyenlet)

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_3 = \frac{1}{g_1 g_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(v_2 g_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(v_1 g_1)\right].$$ (f.102''. egyenlet)

Végül nézzük a Laplace-operátort görbevonalú ortogonális koordinátákban. Vegyük azt az esetet, amikor skalárfüggvényre alkalmazzuk. A $\Delta\psi$ kifejezését könnyen megkaphatjuk, ha figyelembe vesszük a $\Delta\psi$ = div grad ψ összefüggést és az (F.101)-ben a **v** helyére grad ψ-t helyettesítünk. Így adódik, hogy

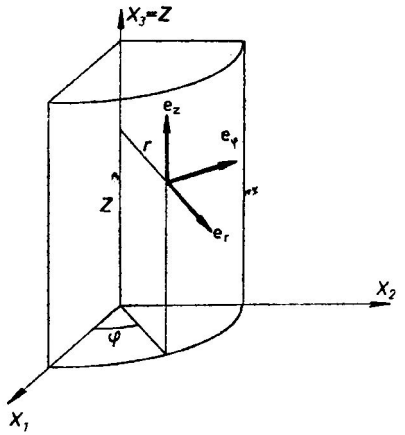
$$\Delta\psi = \mathrm{div\ grad}\,\psi = \frac{1}{g_1 g_2 g_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{g_2 g_3}{g_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{g_1 g_3}{g_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{g_1 g_2}{g_3}\frac{\partial \psi}{\partial q_3}\right)\right].$$ (F.103. egyenlet)

Ha a Laplace-operátort vektorra alkalmazzuk, akkor a Δ**v**=grad div **v**–rot rot **v** összefüggést kell alapul venni, és ebből lehet kiszámítani a Δ**v**-t görbevonalú ortogonális koordinátákban. Ezt általánosságban nem adjuk meg, hanem a számítás részleteitől eltekintve, a végeredményt közöljük az alábbiakban henger- és gömbi polárkoordinátákban.

Az (F.98)–(F.103) általános képleteket az alkalmazások szempontjából legfontosabb két esetre, a henger- és gömbi koordinátákra külön összefoglaljuk.

1. Hengerkoordináták: r, φ, z (107. ábra). A transzformációs képletek:

107. ábra -



$$x_1 = r\cos\varphi, \qquad x_2 = r\sin\varphi, \qquad x_3 = z,$$
$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{x_2}{x_1}, \qquad z = x_3. \quad \text{(F.104. egyenlet)}$$

Az ívelemnégyzet:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2,$$
$$g_1 = 1, \quad g_2 = r, \quad g_3 = 1. \quad \text{(F.105. egyenlet)}$$

A térfogatelem:

$$dV = r\, dr\, d\varphi\, dz. \quad \text{(F.106. egyenlet)}$$

$$\operatorname{grad}\psi = \mathbf{e}_r\frac{\partial\psi}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_z\frac{\partial\psi}{\partial z}. \quad \text{(F.107. egyenlet)}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad \text{(F.108. egyenlet)}$$

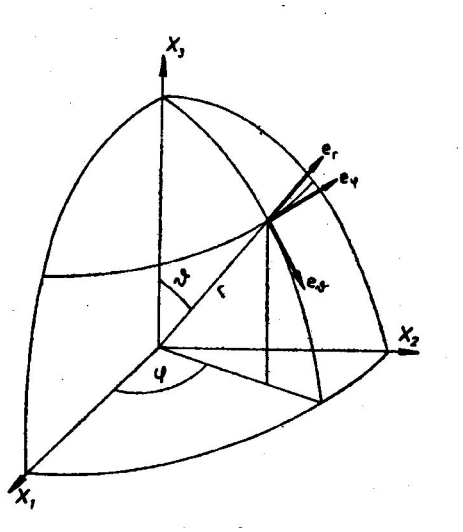
$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v}=\mathbf{e}_r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right]+\mathbf{e}_\varphi\left[\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\right]+\mathbf{e}_z\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right].$$ (F.109. egyenlet)

$$\Delta\psi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$ (F.110. egyenlet)

$$\Delta\mathbf{v}=\mathbf{e}_r\left(\Delta v_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{v_r}{r^2}\right)+\mathbf{e}_\varphi\left(\Delta v_\varphi-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{v_\varphi}{r^2}\right)+\mathbf{e}_z\Delta v_z.$$ (F.111. egyenlet)

2. *Gömbi polárkoordináták: r, ϑ, φ (108. ábra).*

108. ábra -



A transzformációs képletek:

$$x_1=r\sin\vartheta\cos\varphi;\qquad x_2=r\sin\vartheta\sin\varphi;\qquad x_3=r\cos\vartheta;$$
$$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2},\qquad \vartheta=\arccos\frac{x_3}{r},\qquad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}.$$ (F.112. egyenlet)

Az ívelemnégyzet:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 d\varphi^2; \quad g_1 = 1 \quad g_2 = r, \quad g_3 = r \sin\vartheta.$$ (F.113. egyenlet)

A térfogatelem:

$$dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \, \mathrm{d}\vartheta \, d\varphi.$$ (F.114. egyenlet)

$$\mathrm{grad}\psi = \mathbf{e}_r \frac{\partial\psi}{\partial r} + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}.$$ (F.115. egyenlet)

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(v_\vartheta \sin\vartheta\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}.$$ (F.116. egyenlet)

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \mathbf{e}_r \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(v_\varphi \sin\vartheta\right) - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial\varphi}\right] + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_\varphi\right)\right] + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_\vartheta\right) - \frac{\partial v_r}{\partial\vartheta}\right].$$ (F.117. egyenlet)

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}.$$ (F.118. egyenlet)

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{e}_r\left[\Delta v_r - \frac{2}{r^2}\left(v_r + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta v_\vartheta\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right] +$$
$$+ \mathbf{e}_\vartheta\left[\Delta v_\vartheta - \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial\vartheta} - \frac{v_\vartheta}{2\sin^2\vartheta} - \frac{\mathrm{ctg}\,\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right] +$$
$$+ \mathbf{e}_\varphi\left[\Delta v_\varphi - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\left(\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \mathrm{ctg}\,\vartheta\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\varphi} - \frac{v_\varphi}{2\sin\vartheta}\right)\right].$$ (F.119. egyenlet)

8. A súrlódási tenzor henger- és gömbi polárkoordinátákban

Az áramló folyadék elméleti tanulmányozásánál gyakran találkozunk olyan esettel, amikor a feladat jellegéből fakadóan célszerű az alapegyenleteket derékszögű koordináták helyett hengerkoordinátákban felírni. (Gondoljunk pl. a henger alakú csőben áramló folyadékra.) Ehhez szükségünk van a súrlódási tenzor elemeinek hengerkoordinátákban történő előállítására.

Összenyomhatatlan folyadék esetén a súrlódási tenzor derékszögű koordinátákban:

$$\sigma'_{ij} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right).$$ (F.120. egyenlet)

A zárójel a grad ≡ ∇ (nabla) operátor és a **v** sebesség tenzori (diadikus) szorzatának szimmetrikus része. Két vektor tenzori szorzatára a koordináta-rendszertől független $\mathbf{u}\circ\mathbf{v}$ jelölést szoktuk használni. Ha az $\mathbf{u}\circ\mathbf{v}$ szorzat valamilyen koordináta-rendszerbeli elemeire vagyunk kíváncsiak, akkor választunk a koordináta-rendszernek megfelelő ortogonális egységvektor-rendszert és az $\mathbf{u}\circ\mathbf{v}$ tenzori szorzatot előállítjuk az $\mathbf{e}_i\circ\mathbf{e}_j$ szerint kifejtett alakban. Az $(\mathbf{u}\circ\mathbf{v})_{ij}$. tenzorelem az $\mathbf{e}_i\circ\mathbf{e}_j$ együtthatója lesz. Ennek belátásához írjuk fel mindkét vektort a következőképpen:

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 u_1 + \mathbf{e}_2 u_2 + \mathbf{e}_3 u_3 = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i u_i,$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 v_1 + \mathbf{e}_2 v_2 + \mathbf{e}_3 v_3 = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{e}_j v_j.$$ (F.121. egyenlet)

Ebből adódik, hogy

$$\mathbf{u}\circ\mathbf{v} = \sum_i \sum_j u_i v_j \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j.$$ (F.122. egyenlet)

Az $\mathbf{u}\circ\mathbf{v}$ tenzori szorzat elemei az $\mathbf{e}_i$ (i = 1, 2, 3) egységvektorokkal megadott koordináta-rendszerben – a mondottak értelmében – az $\mathbf{e}_i\circ\mathbf{e}_j$ együtthatói: $u_i v_j$.

E bevezetés után könnyű felírni a $\nabla\circ\mathbf{v}$ tenzori szorzatot a q_k görbevonalú ortogonális koordináták egységvektor-rendszerében. Az előző pont szerint

$$\nabla \equiv \mathrm{grad} = \frac{1}{g_1}\mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{1}{g_2}\mathbf{e}_2\frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{1}{g_3}\mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial q_3} = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{g_i}\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial q_i}.$$ (F.123. egyenlet)

Az (F. 121) és F.123) alapján írható, hogy

$$\nabla\circ\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{g_i}\frac{\partial v_j}{\partial q_i}\left(\mathbf{e}_i\circ\mathbf{e}_j\right) + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{g_i}v_j\left(\mathbf{e}_i\circ\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q_i}\right).$$ (F.124. egyenlet)

Ahhoz, hogy a tenzorelemek e kifejezésből kiolvashatók legyenek, a második tagot még át kell alakítanunk úgy, hogy abban is az $\mathbf{e}_i\circ\mathbf{e}_j$ tényezők szerepeljenek, mert ezek együtthatóira vagyunk kíváncsiak. Ezt az átalakítást azonban már nem általánosan, hanem speciálisan henger- és gömbi polárkoordinátákra adjuk meg. Hengerkoordinátákban (q_1=r, q_2=φ, q_3=z):

$$g_1 = 1, \qquad g_2 = r, \qquad g_3 = 1.$$ (F.125. egyenlet)

A $\partial \mathbf{e}_j / \partial q_i$ parciális deriváltak két esetben különböznek zérustól:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi, \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_r.$$ (F.126. egyenlet)

Ezt felhasználva, végül a következő kifejezést kapjuk:

$$\nabla \circ \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{g} \frac{\partial v_j}{\partial q_i} \left(\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j \right) + \frac{v_r}{r} \left(\mathbf{e}_\varphi \circ \mathbf{e}_\varphi \right) - \frac{v_\varphi}{r} \left(\mathbf{e}_\varphi \circ \mathbf{e}_r \right).$$

Ebből adódik, hogy

$$\nabla \circ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} & \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$ (F.127. egyenlet)

A súrlódási tenzor (F.120) szerint

$$\sigma_{ij} = \eta \left[\left(\nabla \circ \mathbf{v} \right)_{ij} + \left(\nabla \circ \mathbf{v} \right)_{ji} \right].$$ (F.128. egyenlet)

Ebből (F.127) alapján kapjuk, hogy

$$\hat{\sigma}' = \begin{pmatrix} 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} & \eta \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \right) & \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \\ \eta \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \right) & 2\eta \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right) & \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right) \\ \eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) & \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right) & 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$ (F.129. egyenlet)

Az előbbihez hasonló gondolatmenettel lehet a súrlódási tenzort meghatározni gömbi polárkoordinátákban, ahol

$g_1 = 1, \quad g_2 = r, \quad g_3 = r \sin \vartheta.$ (F.130. egyenlet)

Itt csak a végeredményt közöljük:

$$\hat{\sigma}' = \begin{pmatrix} \sigma'_{rr} & \sigma'_{r\vartheta} & \sigma'_{r\varphi} \\ \sigma'_{\vartheta r} & \sigma'_{\vartheta\vartheta} & \sigma'_{\vartheta\varphi} \\ \sigma'_{\varphi r} & \sigma'_{\varphi\vartheta} & \sigma'_{\varphi\varphi} \end{pmatrix},$$
#-#F.131]

ahol

$$\sigma'_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\sigma'_{r\vartheta} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - \frac{v_\vartheta}{r} \right)$$

$$\sigma'_{r\varphi} = \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right)$$

$$\sigma'_{\vartheta r} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - \frac{v_\vartheta}{r} \right)$$

$$\sigma'_{\vartheta\vartheta} = 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{v_r}{r} \right)$$

$$\sigma'_{\vartheta\varphi} = \eta \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \vartheta} + \frac{v_\varphi \operatorname{ctg} \vartheta}{r} \right)$$

$$\sigma'_{\varphi r} = \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right)$$

$$\sigma'_{\varphi\vartheta} = \eta \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{v_\varphi \operatorname{ctg} \vartheta}{r} \right)$$

$$\sigma'_{\varphi\varphi} = 2\eta \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\vartheta}{r} \operatorname{ctg} \vartheta \right)$$

9. Gauss-tétel tenzordivergenciára

Feltesszük, hogy a T_{ij} tenzor elemei a V térfogatú tartomány minden pontjában véges, egyértékű, folytonos és differenciálható függvényei a koordinátáknak. Képezzük a T_{ij} divergenciájának a V térfogatra vett integrálját:

$$\int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV.$$

Megmutatjuk, hogy ez átalakítható a *V-t* határoló zárt felületre vett integrállá.

E célból bevezetjük a $\mathbf{T}_1(T_{11},\ T_{12},\ T_{13})$, $\mathbf{T}_2(T_{21},\ T_{22},\ T_{23})$, $\mathbf{T}_3(T_{31},\ T_{32},\ T_{33})$ segédvektorokat. Ezeknek a divergenciái megegyeznek a T_{ij} tenzor divergenciájának komponenseivel. Ugyanis

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \operatorname{div} \mathbf{T}_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$ (F.132. egyenlet)

Ennek alapján

$$\int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_V \operatorname{div} \mathbf{T}_i dV.$$

A jobb oldalon vektor divergenciájának térfogati integrálja szerepel. Erre alkalmazható a Gauss-tétel, és így (F.60) szerint adódik, hogy

$$\int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_V \operatorname{div} \mathbf{T}_i dV = \oint_F T_{in} df.$$ (F.133. egyenlet)

T_{in} a $\mathbf{T}_i$, vektornak a felületből kifelé mutató normális irányra való vetületét jelenti. Ha **n**-nel jelöljük a felületelem kifelé irányuló egységvektorát, akkor

$$T_{in} = \mathbf{T}_i \mathbf{n} = T_{ij} n_j \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$ (F.134. egyenlet)

Ezt (F.133)-ba helyettesítve, a tenzordivergenciára vonatkozó Gauss-tételt kapjuk:

$$\int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV = \oint_F T_{ij} n_j df \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$ (F.135. egyenlet)

10. A gyakrabban használt vektoralgebrai és vektoranalitikai képletek összefoglalása

1. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

2. Gauss-tétel

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV = \int_F v_n df,$$

ahol *F* a *V* térfogatot határoló zárt felület.

3. Stokes-tétel:

$$\oint_L \mathbf{v}\, d\mathbf{s} = \int_F (\operatorname{rot} \mathbf{v})_n df,$$

az *F* felület az *L* zárt görbére illeszkedik.

4. Green-tétel:

$$\int_V (\Phi \Delta\psi - \psi \Delta \Phi) dV = \int_F (\Phi \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \Phi)_n df.$$

5. $$\operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi^2}{\partial z^2}.$$

6. $$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi \equiv 0.$$

7. $$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} \equiv 0.$$

8. $$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}.$$

9. $$(\mathbf{a}, \operatorname{grad}) \mathbf{b} = a_x \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z}.$$

10. $$\operatorname{grad} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \operatorname{grad}) \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \operatorname{grad}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \times \operatorname{rot}\, \mathbf{b}).$$

11. $$\operatorname{rot} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \operatorname{grad}) \mathbf{a} - (\mathbf{a}, \operatorname{grad}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a}.$$

12. $$\operatorname{grad} (\Phi\psi) = \Phi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \Phi$$

13. $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{v}) = \varphi \operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\operatorname{grad}\varphi.$

14. $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{v}) = \varphi \operatorname{rot}\mathbf{v} + \operatorname{grad}\varphi \times \mathbf{v}.$

15. $\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}.$

A 2–4. tételekben szereplő vektorterek a szóban forgó tartományokban mindenütt regulárisak.