Elektrodinamika

Nagy, Károly

Elektrodinamika

Nagy, Károly

Publication date 2002
Szerzői jog © 2002 Nagy Károly, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.

Szerző: Nagy Károly

Bírálók:

DR. GÁSPÁR REZSŐ - egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja

DR. NAGY KÁZMÉR egyetemi tanár, a fizikai tudományok doktora

A mű más kiadványban való részleges vagy teljes felhasználása, utánközlése, illetve sokszorosítása a Kiadó engedélye nélkül tilos!

Tartalom

Előszó az első kiadáshoz vii
Bevezetés viii
Elektromos alapfogalmak ix
Mágneses alapfogalmak xvi
1. A MAXWELL-EGYENLETEK 1
A Gauss-tétel differenciális alakban 1
Az elektromos áram mágneses tere 3
Az elektromágneses indukció 7
A Maxwell-egyenletek 9
Határfeltételek 13
Az elektromos töltés megmaradása. Kontinuitási egyenlet. Relaxációs idő 18
A Maxwel-egyenletek teljessége 21
Az elektromágneses tér energiája 22
2. ELEKTROSZTATIKA I. ELEKTROSZTATIKUS TÉR VÁKUMBAN 26
Az elektrosztatikus tér potenciálja 26
A ponttöltés elektrosztatikus tere 28
A folytonos töltéseloszlás potenciálja 31
Vezetők elektrosztatikus térben 34
Töltött vezető gömb elektrosztatikus tere 36
Töltött végtelen vezető sík elektrosztatikus tere 38
Kapacitás. Vezetők által keltett sztatikus tér energiája 41
Kondenzátor 45
Ponttöltés végtelen kiterjedésű vezető síkkal szemben 47
Dipólus elektrosztatikus tere 50
Kettősréteg 52
Térfogati dipóluseloszlás (elektrétek) elektrosztatikus tere 55
3. ELEKTROSZTATIKA II. ELEKTROSZTATIKUS TÉR SZIGETELŐKBEN. DIELEKTRIKUMOK 58
Az elektrosztatikus tér alapegyenletei dielektrikumokban 58
A dielektrikum polarizációja 61
A kondenzátor kapacitása 67
Az elektrosztatikus tér energiája szigetelőkben 71
Thomson tétele. Az elektrosztatikai probléma megoldásának egyértelműsége 76
Töltött testekre és szigetelőkre ható erő elektrosztatikus térben 79
4. MÁGNESEK SZTATIKUS TERE 90
Sztatikus mágneses tér vákuumban 90

Permeábilis anyagok 92
Mágnesezett anyagokra ható erő 94
5. EGYENÁRAMOK 96
Határfeltétel az áramsűrűség normális komponensére 97
Áramforrások. Általánosított Ohm-törvény 99
Egyenáramok elektromos terének meghatározása 99
Integrális Ohm-törvény zárt áramkörre 101
A Kirchhoff-törvények 103
Egyenáramok mágneses tere. Biot–Savart-törvény 106
1. Végtelen egyenes vezető tere 107
2. A tekercs mágneses tere 110
3. A mágneses tér kiszámítása a vektorpotenciál segítségével 111
Mágneses kettősréteg 116
Egyenáramok mágneses terének energiája. Indukciós együttható 119
Az áramra ható erő 122
Az elektromágneses energia áramlása egyenárammal átjárt végtelen vezető mentén (Tengeri kábel) 124
6. KVÁZISTACIONÁRIUS ÁRAMOK 133
Alapegyenletek 134
Áramkör ellenállással és önindukcióval 137
Két induktíve csatolt áramkör. Transzformátor 146
Áramkör önindukcióval és kapacitással 150
7. VÁLTOZÓ ELEKTROMÁGNESES TEREK. ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK 160
Az elektromágneses potenciálok 160
Retardált és avanzsált potenciálok 163
Pontszerű elektromos dipólus elektromágneses tere 171
A mágneses momentum elektromágneses tere és sugárzása 180
Elektromágneses síkhullámok homogén izotrop szigetelőben 183
Az elektromágneses hullámok polarizációja 191
Elektromágneses hullámok homogén vezető közegben 197
Elektromágneses síkhullámok törése és visszaverődése két különböző szigetelő határfelületén 203
Az elektromágneses síkhullámok visszaverődése fémeken 212
Elektromágneses hullámok terjedése homogén, anizotrop közegben. A kristályoptika alapjai 216
Elektromágneses hullámok terjedése hullámvezetőben 223
Az elektromágneses tér impulzusa. Fénynyomás 229
A geometriai optika mint a hullámoptika határesete. Fermat-elv 235

Az ábrák listája

1. ix
2. x
3. xi
4. xii
5. xii
6. xiv
7. xv
8. 1
9. 3
10. 5
11. 8
12. 9
13. 11
14. 13
15. 16
16. 28
17. 29
18. 32
19. 33
20. 35
21. 37
22. 38
23. 40
24. 41
25. 42
26. 45
27. 46
28. 48
29. 49
30. 50
31. 52
32. 54
33. 56
34. 65
35. 67

36. 69
37. 71
38. 81
39. 97
40. 98
41. 103
42. 103
43. 105
44. 107
45. 110
46. 110
47. 116
48. 122
49. 124
50. 131
51. 138
52. 139
53. 144
54. 151
55. 158
56. 176
57. 196
58. 207
59. 218
60. 221
61. 222
62. 223
63. 239
64. 241

Előszó az első kiadáshoz

Ez a tankönyv a tudományegyetemek matematika–fizika és kémia–fizika szakos hallgatóinak készült. Megírásakor az a szempont vezetett, hogy az elektrodinamika és a speciális relativitáselmélet alapvető tételeit egységes elméleti alapon tárgyaljam, és a tanterv adta keretet betartva, megfelelő tudományos hátteret adjak a leendő tanárok munkájához. A könyv tananyagának felépítésénél tekintetbe vettem az egyetemi oktatás ismeretanyagának fokozatos egymásra épülését. Mivel a kísérleti fizika e tárgyat megelőzi, arra építve, rövid összefoglalás után az elektrodinamika alaptörvényeit magukba foglaló Maxwell-egyenletrendszert választottam kiindulásul. Ez a felépítés tette lehetővé, hogy a jelenségeket a térelméleti felfogás alapján egységbe foglalva tárgyaljam, és megmutassam a közöttük levő mély fizikai összefüggések alapvető szerepét.

Mivel tanár szakos hallgatók számára készült e könyv, az ismeretanyagot az optimális mennyiségre szűkítettem, és bőséges alkalmazással egészítettem ki. Ezt a célt szolgálja a könyv végén található kis feladatgyűjtemény is.

A speciális relativitáselmélet legfontosabb tételeit a négyes vektorok és négyes tenzorok használata nélkül is lehet tárgyalni, mégis a négyes világ e mennyiségeinek a bevezetését és ezek használatát tartottam célszerűnek, mert így valósítható meg legszebben a relativitáselmélet programja: a természettörvények Lorentz-invariáns alakban való megfogalmazása.

A könyv megjelenésekor ezúton is köszönetet mondok mindazoknak, akik e munkámban tanácsaikkal, észrevételeikkel segítségemre voltak.

Budapest, 1967. január

Dr. Nagy Károly

Bevezetés

Az elektromos és mágneses jelenségekkel foglalkozó kísérleti fizikai tanulmányainkban eddig megismertük, hogy nagyon sok természeti folyamat megértéséhez és magyarázatához nem szükséges a makroszkopikus anyag molekuláris, atomos szerkezetét figyelembe vennünk. Tudjuk például azt, hogy az elektromos árammal kapcsolatos, a gyakorlati élettel is szorosan összefüggő számos jelenség kielégítően értelmezhető anélkül, hogy az elektromos áramot *elektronok* mozgásaként képzelnénk el. Az így kidolgozott elméletben az elektromos töltés és áram jellemzésére helytől és időtől függő folytonos függvényeket, ún. *sűrűségfüggvényeket* használunk ugyanúgy, mint pl. a rugalmas testek mechanikájában a tömegsűrűségre. A makroszkopikus közeg (szigetelő, vezető) szerepét pedig néhány ún. anyagi állandóval vesszük figyelembe. Az általános esetben ezek az anyagra jellemző mennyiségek tulajdonképpen nem állandók, hanem függnek a helytől, hőmérséklettől, esetleg iránytól. Az elektromágneses jelenségek elméletében az anyag jellemzésére a dielektromos állandót, a mágneses permeabilitást és a vezetőképességet használjuk. Ezeket adott mennyiségeknek tekintjük.

Az elektromágneses jelenségek így kidolgozott emléletét – amely nem veszi figyelembe a makroszkopikus anyag molekuláris szerkezetét – *fenomenológiai elektrodinamikának* nevezzük.

A fenomenológiai elméletek kiépítésénél arra törekszünk, hogy a természeti jelenségekben a leglényegesebb alapigazságokat megragadjuk, és azokat a matematika segítségével egzakt törvények formájában megfogalmazzuk. Az így megfogalmazott törvényekre – mint alappillérekre – építjük ezután fel az egész jelenségkört magába foglaló és azt magyarázó elméletet. Az alaptörvényeket a tapasztalatból, a megfigyelésből nyerjük. Az elmélet következtetéseit úgyszintén a tapasztalattal ellenőrizzük.

Az elektromágnesség körében a Maxwell-egyenletek foglalják magukba azokat az alaptörvényeket, amelyekre az egész elektrodinamika – mint az elektromos és mágneses jelenségek klasszikus elmélete – felépül. A fizikai megismerés hosszú tapasztalati úton jutott el a 19. század közepén odáig, hogy a Maxwell-egyenletekben megfogalmazott törvények alapján egzakt matematikai módszerekkel tudta tárgyalni az elektromos és mágneses jelenségek igen széles körét, beleértve az elektromágneses hullámok törvényszerűségeit, tehát az egész fénytant is. Majd látni fogjuk, hogy nincs a fizikának még egy egyenletrendszere, amely ilyen nagy jelenségkört ekkora pontossággal le tudna írni.

Az egyetemi kísérleti fizikai tanulmányokban az alapjelenségek részletes kísérleti elemzésével eljutunk a Maxwell-egyenletek integrális alakjához. Ezek a bevezető alaptanulmányok nagyon megkönnyítik a mi dolgunkat, mert rövid induktív áttekintés után könyvünkben a Maxwell-egyenleteken alapuló deduktív tárgyalásmódot követhetjük. Így az egész elektromágnességet egységes szempontból, a klasszikus térelmélet módszereivel tárgyalhatjuk. E módszer rendkívüli hatékonysága és előnye elsősorban abban rejlik, hogy *néhány alaptörvényből kiindulva, egzakt módon értelmezi az elektromos és mágneses jelenségek széles körét.*

Az egyetemi oktatásban először Heinrich *Hertz* német professzor alkalmazta azt az utat, hogy a Maxwell-egyenletekből – mint alapigazságokból – kiindulva tárgyalta az elektrodinamikát. Arnold *Sommerfeld* – a kiváló elméleti fizikus – Hertz tanítványa volt, és elragadtatással írt erről a módszerről. Azt mondotta, hogy az előadások alatt hályog esett le a szeméről.

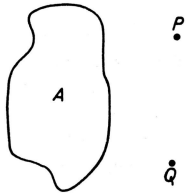
Könyvünkben mi is ezt az utat választjuk, de a Maxwell-egyenleteket nem tekintjük kőtáblára vésett kinyilatkoztatásnak, hanem a tapasztalatból leszűrt alaptörvényeknek.

Mielőtt e természettörvények matematikai megfogalmazását adnánk, röviden átismételünk néhány, a kísérleti fizikából már ismert alapfogalmat.

Elektromos alapfogalmak

Az elektrosztatika primer jelensége az, hogy az elektromosan töltött testek egymásra erőt fejtenek ki. Vizsgáljuk meg ezt az erőhatást kicsit részletesebben. Gondoljunk el e célból tetszőleges alakú és nagyságú *A* testet, amely elektromosan töltött *(1. ábra).* Tekintsünk ezután két kis töltött fémgolyócskát, töltésük legyen e_1, illetve e_2. Tegyük fel, hogy e_1 és e_2 kicsi az *A* test töltéséhez képest. A két kis golyócskát próbatestnek nevezzük. Helyezzük az első golyócskát a tér valamely *P* pontjába, és mérjük meg a reá ható $\mathbf{F}_1(P)$ erőt. Ezután helyezzük ugyanezt a próbatestet a tér *Q* pontjába, és megint mérjük meg a reá ható $\mathbf{F}_1(Q)$ erőt. Azt találjuk, hogy a két erő iránya is, nagysága is különbözik egymástól. Ismételjük meg ugyanezt a kísérletet a másik töltött golyócskával. A megfelelő erők $\mathbf{F}_2(P)$, illetve $\mathbf{F}_2(Q)$. A négy erő irányát és nagyságát tanulmányozva, a következő törvényszerűségek állapíthatók meg:

1. ábra -



a) Az $\mathbf{F}_1(P)$ erő iránya megegyezik az $\mathbf{F}_2(P)$ erő irányával, $\mathbf{F}_1(Q)$ iránya pedig $\mathbf{F}_2(Q)$ irányával.[1]

b) Az ugyanazon pontban mért erők nagyságának hányadosa a pont helyzetétől független, és a próbatöltések töltéseinek hányadosával egyezik meg:

$$|\mathbf{F}_1(P)| : |\mathbf{F}_2(P)| = |\mathbf{F}_1(Q)| : |\mathbf{F}_2(Q)| = e_1 : e_2 .$$

c) Valamely próbatöltésre a tér két különböző pontjában ható erők nagyságának hányadosa független a próbatöltéstől:

$$|\mathbf{F}_1(P)| : |\mathbf{F}_1(Q)| = |\mathbf{F}_2(P)| : |\mathbf{F}_2(Q)| .$$

Az *a–c)* megállapításokat közvetlen mérések, tehát a tapasztalat útján nyerjük. Ezeket az összefüggéseket elemezve, arra a következtetésre jutunk, hogy a *P* pontban elhelyezett *e* próbatöltésre ható $\mathbf{F}(P)$ erő két tényező szorzataként állítható elő:

[1] Ez abban az esetben igaz, ha a két golyócska töltése azonos előjelű. A természetben ui. kétfajta töltés fordul elő: pozitív, illetve negatív (lásd később).

$\mathbf{F}(P)=e\mathbf{E}(P)$ ((1). egyenlet).

e a próbatestre jellemző skalár: a próbatest elektromos töltése, **E**(*P*) pedig a próbatesttől független vektortér, amelyet az adott elektromosan töltött test állapota határoz meg.

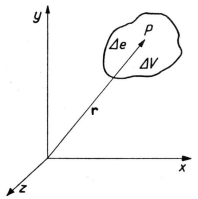
Az elektromos erőhatásokra vonatkozó fenti tapasztalati tények tehát a következőképpen értelmezhetők. *A testek elektromos töltésük révén a környező geometriai teret fizikai tulajdonságokkal ruházzák fel, fizikai térré alakítják*. Ezt a fizikai tulajdonságokkal felruházott teret *elektromos térnek* nevezzük. Az erőhatást az elektromos tér közvetíti a töltött testek között. Az elektromos tér általában helytől és időtől függő vektortér. Jellemzésére az **E**(*P*, *t*) vektort használjuk, amit *elektromos térerősségnek* nevezünk. A tér minden pontjához hozzárendelünk tehát egy vektort, az **E**(*P*, *t*) elektromos térerősséget. Az elektromos térerősség fizikai jelentését az (1) összefüggés definiálja. Eszerint, ha az elektromosan töltött test környezetébe egy kis *e* elektromos töltést hozunk, akkor erre a töltésre $\mathbf{F}=e\mathbf{E}$ erő hat az adott pontban. Ha az elektromos töltés egységét megválasztottuk, akkor ezt úgy is kifejezhetjük, hogy a térerősség nagysága és iránya valamely pontban a pozitív egységnyi töltésre ható erő nagyságával és irányával egyezik meg. Mivel az erő és a térerősség dimenziója különböző, azt nem mondhatjuk, hogy a térerősség a pozitív egységnyi töltésre ható erővel egyenlő. A térelméleti felfogás szerint a töltések által keltett elektromos térnek a próbatöltéstől független fizikai realitása van.

Speciális esetben a térerősség nem függ az időtől, csak a helytől, ilyenkor azt mondjuk, hogy az elektromos tér *sztatikus*. Ha a térerősség független a helytől, akkor az elektromos teret *homogénnek* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy az elektromos erő (1) kifejezése bizonyos értelemben korlátozott érvényű. Abban az esetben, ha a fémgolyócska *e* töltése nagy, vagy a próbatest túl közel van az *A* testhez, az erő kifejezése módosul. Ilyenkor ugyanis a próbatest által keltett tér befolyásolja az *A* test töltésállapotát. Az elektromos térnek (1) alapján való kimérésénél tehát olyan kis töltést kell használnunk, amelynek tere gyakorlatilag elhanyagolható, másrészt a próbatest mérete is igen kicsi, elméletileg pontszerűnek vehető.

Az elektromos teret a töltések keltik. A fenomenológiai elektrodinamikában a töltések eloszlását folytonosnak tételezzük fel, és az *elektromos töltéssűrűséggel* – mint a helynek és időnek folytonos függvényével – írjuk le. Ezt a következőképpen definiáljuk. Tekintsünk a térben *ΔV* térfogatot, amelyet *Δe* elektromos töltés tölt ki folytonosan.

2. ábra -



A *ΔV* térfogatot gondolatban húzzuk össze a *P* pontba *(2. ábra)*, vagyis képezzük a $\Delta V \to 0$ határátmenetet. A töltéssűrűség *P* pontbeli értékét a

$\varrho(\mathbf{r},t)=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta e}{\Delta V}$ ((2). egyenlet)

határértékkel definiáljuk. A véges térfogatban levő *e* töltést a $\varrho(\mathbf{r},t)$ függvény térfogati integrálja adja meg:

$e=\int_V \varrho(\mathbf{r},t)dV$ ((3). egyenlet).

Az elektrodinamikában a $\varrho(\mathbf{r},t)$ függvény általában adott, és az $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ térerősséget keressük.

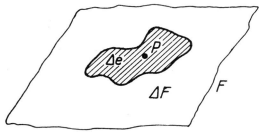
A gyakorlati élet által felvetett problémákban gyakran találkozunk olyan esetekkel, amikor az elektromos töltés egy felületen vagy egy vonal mentén oszlik el. Ilyenkor a felületi, illetve vonal menti töltéssűrűséget használjuk. Ezeket a térfogati töltéssűrűség (2) definíciójához hasonlóan értelmezzük.

A felületi töltéssűrűséget a megadott felületen folytonosan változó $\eta(P,t)$ függvénnyel írjuk le:

$\eta(P,t)=\lim_{\Delta F\to 0}\frac{\Delta e}{\Delta F}$ ((4). egyenlet),

ahol *Δe* most a *ΔF* felületelem elektromos töltése. A határátmenetnél a *ΔF* felületelemet összehúzzuk a felület *P* pontjára *(3. ábra)*. A véges *F* felületen levő *e* töltést az $\eta(P,t)$ függvény felületi integrálja adja meg:

3. ábra -



$e=\int_F \eta\, dF$ ((5). egyenlet),

ahol *η* a felületi koordináták folytonos függvénye.

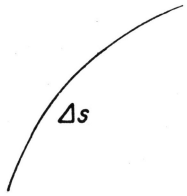
A vonal menti töltéseloszlást a $\gamma(s,t)$ függvény írja le:

$\gamma(s,t)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta e}{\Delta s}$ ((6). egyenlet),

ahol *Δe* most a *Δs* vonalelem elektromos töltése *(4. ábra)*. [$\gamma(s,t)$ általában az ívhossznak és az időnek folytonos függvénye.] Valamely véges vonalszakasz *e* töltését $\gamma(s,t)$ vonal menti integrálja adja meg:

$e = \int \gamma(s,t)\,ds$ ((7). egyenlet).

4. ábra -



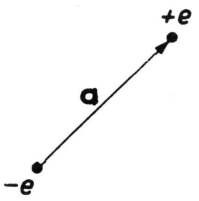
A természetben kétfajta elektromos töltés fordul elő: egyiket pozitívnak, másikat negatívnak nevezzük. Megállapodás szerint a bőrrel dörzsölt üvegrúd elektromosságát nevezik pozitívnak, a hasonlóan kezelt ebonitrúdét negatívnak. Mai tudásunk szerint a testekben egyenlő mértékben van jelen a pozitív és negatív elektromosság, és azok egymás hatását semlegesítik, ezért a legtöbb test makroszkopikusan semleges. A bőr és az üvegrúd érintkezésénél a felület mentén a kétfajta elektromosság szétválik, és negatív elektromosság megy át a bőrre. Így az üvegben a pozitív töltés marad túlsúlyban, a bőr pedig negatív lesz.

A természetben gyakran találkozunk olyan töltéseloszlással, amikor az anyag egész kis elemi tartományain belül (pl. molekulán belül) abszolút értékben egyenlő, de ellentétes előjelű elektromos töltések vannak szétválva, egymástól kis távolságban. Két, egymástól **a** távolságra levő +*e*, illetve –*e* pontszerű töltést *elektromos dipólusnak* nevezünk *(5. ábra)*. A dipólus jellemzésére a

$\mathbf{p} = e\mathbf{a}$ ((8). egyenlet)

mennyiséget használjuk, és ezt *dipolmomentumnak* nevezzük.

5. ábra -



Tekintsünk olyan anyagot, amelyben kis elemi dipólusok vannak, és tételezzük fel, hogy a dipólusok eloszlása folytonos. Az anyag ΔV térfogatelemében jelen levő elemi dipólusok eredő momentuma legyen $\mathbf{\Delta p}$. A ΔV tartományt gondolatban húzzuk össze a belsejében levő Q pontra, és képezzük a $\mathbf{\Delta p}/\Delta V$ hányados határértékét. Ez általában egy véges érték, és ezt nevezzük a folytonos térfogati dipóluseloszlás Q pontbeli *dipolmomentum-sűrűségének*: $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$.

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V}$$ ((9). egyenlet).

Gyakori a természetben az olyan dipóluseloszlás is, amikor a dipólusok nem térfogatilag, hanem egy felület mentén helyezkednek el. Az ilyen folytonos felületi dipóluseloszlást *elektromos kettősrétegnek* nevezzük, és jellemzésére a felületi dipolmomentum-sűrűséget használjuk. A felület ΔF elemének eredő momentuma legyen $\mathbf{\Delta p}$. A felületi momentumsűrűséget a

$$\boldsymbol{\nu}(P,t) = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta F}$$ ((10). egyenlet)

határérték definiálja. Kettősréteg esetén a felület normálisának irányítását úgy választjuk, hogy a negatív töltésű oldal felől mutasson a pozitív töltésű felé. Ebben az esetben a $\boldsymbol{\nu}$ momentumsűrűség iránya megegyezik a felület normálisának irányával.

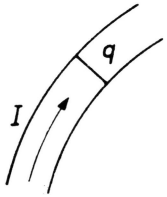
Megjegyezzük, hogy az elektromos dipólus a töltések szétválásából származik, és így az elektromos tér primer forrásai végeredményben az elektromos töltések. A dipólus speciális töltéseloszlás. Majd később látni fogjuk, hogy a mágneses térnél más a helyzet. A természetben mágneses pólusok, mágneses töltések nincsenek. A mágneses tér primer forrásai a mágneses momentumok, ezek azonban egyáltalán nem vezethetők vissza mágneses töltések szétválására.

A mozgó elektromos töltést *elektromos áramnak* nevezzük. A gyakorlatban legtöbbször vezetőben folyó árammal találkozunk. Ez a *vezetési* vagy *konduktív áram*. A diszkrét töltések, pl. ionok mozgásából származó elektromos áramot *konvektív áramnak* nevezzük.

Az áram jellemzésére az *áramerősséget* vagy az *áramsűrűséget* használjuk. E mennyiségek definiálásához tekintsünk egy vezetőt, amelyben elektromos áram folyik. Szemeljük ki a vezetőnek tetszőleges q keresztmetszetét *(6. ábra)*. Tételezzük fel, hogy a q keresztmetszeten Δt idő alatt átfolyik Δe elektromos töltés. Az áramerősséget a $\Delta e/\Delta t$ hányados határértékével definiáljuk, midőn $\Delta t \to 0$:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}$$ ((11). egyenlet).

6. ábra -



Az *I* áramerősség általában az idő függvénye.

Az áramerősség nem jellemzi teljesen az áramot, ezért helyette általában az áramsűrűséget használjuk. A **j** áramsűrűség vektormennyiség, amelynek iránya a vezető adott pontjában megegyezik az áram irányával, nagyságát pedig a következő képlet definiálja:

$$|\mathbf{j}| = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta F}$$ ((12). egyenlet).

ΔI a *ΔF* felületelemen merőlegesen átfolyó áram erőssége. A határátmenet az előbbieknek megfelelően értendő; nevezetesen, a *ΔF* felületelemet összehúzzuk egy pontra. **j** általában a helynek és időnek folytonos függvénye, tehát egy vektortér. A **j** szemléletes jelentése: a felületegységen merőlegesen az időegység alatt áthaladt töltésmennyiség.

Az *F* felületen átfolyó áram erősségét az áramsűrűség felületre merőleges komponensének felületi integrálja adja meg:

$$I = \int_F j_n \, dF$$ ((13). egyenlet).

Megjegyezzük e helyen, hogy valamely vektor normális komponensének felületi integrálját szokás más alakban is felírni. Ehhez értelmezni kell a vektoriális felületelemet: *d***F** olyan vektor, amelynek nagysága a *dF* felületelem, iránya pedig a felület normálisa. Ennek segítségével a (10) integrál a következőképpen írható:

$$I = \int_F \mathbf{j} \, d\mathbf{F}$$ ((13a). egyenlet).

A konvektív áram sűrűségének kifejezését a következő meggondolással kapjuk. Tekintsük elektromos töltések áramát. A töltések áramlását a folyadékáramláshoz hasonlóan a **v**(**r**, *t*) sebességtérrel írjuk le. Az áramló töltések térfogati sűrűsége legyen *ϱ*(**r**, *t*). Az áramsűrűség nagyságát a fentiek alapján az áramlás irányára merőlegesen elgondolt egységnyi felületen időegység alatt átáramló töltésmennyiség adja meg. Ez pedig megegyezik az egységnyi alapú, *v* magasságú hasábban levő töltéssel, amelynek értéke *ϱv*. Mivel az áramsűrűség iránya azonos a mozgó pozitív töltések sebességének irányával, ezért

$\mathbf{j}_k = \varrho\mathbf{v}$ ((14). egyenlet).

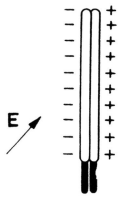
Az *F* felületen átáramló konvektív áram intenzitását (13a) alapján a következő kifejezés adja:

$$I = \int_F \varrho \mathbf{v} d\mathbf{F}$$ ((15). egyenlet).

A töltések által keltett elektromos tér az elektromos töltésre erőt fejt ki. A térnek ezt a tulajdonságát az (1) képlettel definiált **E**(**r**, *t*) térerősségvektorral jellemezzük. Az elektromos térnek az erőhatáson kívül más alapsajátossága is van. Nevezetesen: a tér hatására a vezetőkben a pozitív és negatív töltés szétválik. A pozitív töltés a tér irányában, a negatív ellentétes irányban a vezető felületéig mozog. A gyorsan beálló egyensúlyi állapotban a szétvált töltések által keltett tér a vezető belsejében kompenzálja a külső teret, és így ott zérus a térerősség. Ezt a jelenséget nevezzük *elektromos megosztásnak*. A megosztó hatás felhasználásával definiálunk egy másik vektorteret, amely szintén az elektromos teret jellemzi.

Vegyünk két egyforma, szigetelő nyéllel ellátott fémlemezt *(7. ábra)*. Helyezzük őket egymást érintő fedő helyzetben elektromos térbe. A megosztó hatás révén a két lemezen ellentétes előjelű, egyforma nagyságú elektromos töltés jelenik meg. A szigetelő nyeleket megfogva, a két lemezt különválasztjuk, és megmérjük a rajtuk levő töltés mennyiségét. Ezt a lemez felületével osztva, a felületi töltéssűrűséget kapjuk. Legyen ez η_1. A kísérletet megismételjük a tér ugyanazon helyén, de más helyzetben a térerősséghez képest. A mért töltéssűrűség η_2. A kísérletet tovább ismételve, a töltéssűrűségek η_1, η_2, η_3, ... sorozatát kapjuk. A lemezpár helyzetét folytonosan változtatva, egyszer maximális töltéssűrűséget kapunk, amit η-val jelölünk. Ennek 4π-szeresét felmérjük a lemezpár pozitív töltésű oldalának külső normálisára, abban a helyzetben, amely a maximális töltéssűrűséghez tartozik. Ezáltal a tér minden pontjához hozzárendelhető egy vektor; jelöljük ezt **D**(**r**, *t*)-vel. Nagysága $4\pi\eta$, iránya pedig a pozitív töltésű lap külső normálisa a maximális töltéshez vezető helyzetben. A **D** vektort az *elektromos indukció vektorának* nevezzük.

7. ábra -



Az elektromos tér jellemzésére tehát két vektortér szolgál: az **E** elektromos térerősség és a **D** elektromos indukció vektortere. E két vektor nem független egymástól. A köztük levő kapcsolat függ attól, hogy a teret milyen anyagi közeg tölti ki. Vákuumban a két vektor azonos egymással. Izotrop közegekben a

$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ ((16). egyenlet)

összefüggés érvényes. ε a közegre jellemző skalár, amely általában függhet a helytől. Neve: *dielektromos együttható*. Sok esetben azonban állandónak tekinthető. Ilyenkor a közeget homogénnek nevezzük. ε értéke mindig nagyobb egynél. Vákuum esetén $\varepsilon = 1$.

Anizotrop közegekben **D** és **E** között tenzoriális összefüggés áll fenn:

$$D_x = \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z$$
$$D_y = \varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z$$
$$D_z = \varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z. \quad \text{((17). egyenlet)}$$

Az ε_{ik} mennyiségek kétindexes szimmetrikus tenzor elemei.

Mágneses alapfogalmak

A mágnesség primer jelensége az, hogy a mágneses testek (pl. a mágnespatkó) a közelükbe helyezett kis mágnestűt elforgatják. A jelenség fizikai magyarázata, mint ismeretes, az, hogy a mágneses test erőtere forgatónyomatékot fejt ki a mágnestűre. Tanulmányozzuk ezt a forgatónyomatékot kicsit részletesebben. E célból elgondolunk vákuumban egy mágneses testet és két kis mágnestűt. A mágnestűnek – mint a kísérleti fizikából tudjuk – a dipólushoz hasonlóan momentuma van. Ezt a tű mágnességére jellemző momentumot a mágnestű *mágneses momentumának* nevezzük. Az egyik tű mágneses momentumának *nagysága* legyen m_1, a másiké m_2. Tételezzük fel, hogy mindkettő kicsi a test eredő momentumához képest. Helyezzük az egyik mágnestűt a test közelében levő *P* pontba. Próbálgatással megtalálható a tűnek olyan helyzete, amelyben a rá ható forgatónyomaték zérus, tehát a tű nem fordul el. Kísérletezéssel arra is rájöhetünk, hogy az erre merőleges helyzetben kapunk maximális forgatónyomatékot. Mérjük meg ezt a maximális forgatónyomatékot a *P* pontban, és jelöljük $\mathbf{N}_1(P)$-vel. Ezután helyezzük el ugyanezt a mágnestűt a tér valamely *Q* pontjába, és megint mérjük meg a tűre ható maximális forgatónyomatékot. Ezt jelölje $\mathbf{N}_1(Q)$. Ezt a két kísérletet elvégezzük a másik mágnestűvel is. A megfelelő maximális forgatónyomatékok legyenek $\mathbf{N}_2(P)$, illetve $\mathbf{N}_2(Q)$. A mérési eredményeket vizsgálva, arra a megállapításra jutunk, hogy az egy pontban mért maximális forgatónyomatékok abszolút értékének hányadosa nem függ a helytől, hanem csak a tűk mágneses momentuma nagyságának hányadosától:

$$\frac{|\mathbf{N}_1(P)|}{|\mathbf{N}_2(P)|} = \frac{|\mathbf{N}_1(Q)|}{|\mathbf{N}_2(Q)|} = \ldots = \frac{m_1}{m_2}.$$

Továbbá a tér különböző pontjaiban mért maximális forgatónyomatékok nagyságának aránya független a tű mágneses momentumától:

$$\frac{|\mathbf{N}_1(P)|}{|\mathbf{N}_1(Q)|} = \frac{|\mathbf{N}_2(P)|}{|\mathbf{N}_2(Q)|} = \ldots .$$

Ezeket a tapasztalatból leszűrt megismeréseket szeretnénk most fizikailag értelmezni. *A mágneses test* – az elektromosan töltött testhez hasonlóan – *a környező geometriai teret fizikai sajátságokkal ruházza fel, fizikai térré alakítja.* Ezt a fizikai tulajdonságokkal rendelkező teret nevezzük *mágneses térnek.* A mágnespatkó mágneses tere közvetítésével forgatja el a közelébe helyezett mágnestűt azáltal, hogy arra forgatónyomatékot fejt ki. Ez a forgatónyomaték – a fenti kísérletek tanúsága szerint – két mennyiségtől függ: a tű mágneses nyomatékától és a mágneses test fizikai terére jellemző $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ *mágneses térerősségtől*:

$\mathbf{N}(P) = \mathbf{m} \times \mathbf{H}(P)$ ((18). egyenlet).

A tű **m** mágneses momentumának irányát ismerjük. Eszerint **H** irányát az a tűhelyzet határozza meg, amelyben a forgatónyomaték zérus. Ennélfogva ismert mágneses momentumú mágnestűvel a mágneses tér (18) alapján kimérhető, hasonlóan ahhoz, ahogyan a próbatöltéssel az elektromos teret erőméréssel kimérjük.

Már ez a körülmény rámutat az elektromosság és mágnesség közötti egyik lényeges különbségre. Nevezetesen, a mágneses teret nem lehet „próbatöltésekkel" meghatározni, mert mágneses töltések nincsenek. A mágnestűt – mint kis dipólust – hiába próbáljuk kettévágással pólusokra szétválasztani, nem sikerül. Minden feldarabolással újabb kis mágnestűket, tehát mágneses momentumokat kapunk. Ebből arra kell következtetnünk, hogy a *mágneses teret* – ellentétben az elektromos térrel – végeredményben *nem pólusok*, tehát nem mágneses töltések, *hanem mágneses momentumok keltik*. A mágneses tér az elektromos dipólusok által keltett elektromos térrel állítható párhuzamba, de nem szabad szem elől téveszteni, hogy az elektromos dipólus két ellentétes pólus szétválasztására vezethető vissza, viszont a mágneses momentum nem. Mágnesrúd esetén – a régi hibás szemlélet maradványaként – beszélünk északi és déli pólusról. A későbbi részletes tárgyalásnál látni fogjuk, hogy hosszú, homogénen mágnesezett rúdnál ez gyakorlatilag megtehető, mert jó közelítéssel úgy viselkedik, mintha két ellentétes pólus lenne.[2]

A mágneses térnek (18) alapján történő meghatározásához természetesen szükséges, hogy a mágnestű által keltett tér jelentékenyen ne befolyásolja a mérendő teret. Olyan tűt kell használnunk, amelynek mágneses tere gyakorlatilag elhanyagolható a mérendő térhez képest.

A mágneses teret keltő test mágnesezettségének jellemzésére a mágneses momentumsűrűséget használjuk. Feltételezzük, hogy a mágnesezettség folytonos az egész anyagban. A makroszkopikus anyag ΔV térfogatelemében levő eredő mágneses momentum legyen $\Delta\mathbf{m}$. Képezzük a $\Delta\mathbf{m}/\Delta V$ hányados határértékét, midőn a térfogatelemet összehúzzuk egy pontra. Ez a hányados egy véges határértékhez tart, a *momentumsűrűséghez* az illető pontban:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{m}(t)}{\Delta V}$$ ((19). egyenlet).

A mágneses alapproblémáknál $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ ismert függvénye a helynek és időnek. A később ismertetésre kerülő elmélet alapján ebből meghatározható az általa keltett mágneses tér.

Egy mágneses test eredő mágneses momentumát az $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ térfogati integrálja adja, az egész test térfogatára véve:

$$\mathbf{m}(t) = \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)\, dV$$ ((20). egyenlet).

Oersted felfedezéséig a mágneses jelenségek a fizikának külön fejezetét képezték. Oersted (1820-ban) ismerte fel, hogy a vezetőben folyó áram is kelt mágneses teret. Tizenegy évvel később (1831-ben) *Faraday* pedig arra a megismerésre jutott, hogy az időben változó mágneses tér

[2] A mágnesség középiskolai tanításánál erre nagyon kell vigyázni. A mágnesrúd használatakor mindig hangsúlyozni kell, hogy bár dipólusnak tekinthető, de sohasem lehet pólusokra szétbontani!

elektromos teret hoz létre, amely az oda helyezett vezetőben áramot eredményez. *Oersted* és *Faraday* felismerései az elektromosság és mágnesség szoros kapcsolatát mutatják. A *Faraday* és *Maxwell* által kidolgozott elmélet a két jelenségkört eggyé olvasztja. A Maxwell-féle elektrodinamika az *elektromágneses* jelenségek elmélete.

A Faraday-féle indukciós törvényben a mágneses térnek egy újabb fizikai sajátsága tükröződik. A mágneses térnek ezt a tulajdonságát egy másik vektortérrel, az ún. *mágneses indukcióvektorral* jellemezzük. Definiálására a kísérleti fizikában már kvantitatíve is megismert indukciótörvényt használjuk fel. Gondoljunk el egy egységnyi alapterületű (1 cm^2) drótkeretet, amelyet egy helyen megszakítunk, hogy egy ballisztikus voltméterrel köthessük össze. Ezt mágneses térbe helyezzük, és síkjában fekvő bármely tengely körül egységnyi idő alatt 90°-kal elforgatjuk. A voltméter kitérést mutat. Próbálgatással megkeressük azt a helyzetet, amelyben a kitérés maximális lesz. Az indukált maximális feszültség lesz a bevezetendő új **B** vektor nagysága. Irányát pedig a vezetőkeret (mint síklap) normálisa adja a kezdőhelyzetben, abban az irányban véve, amelyben az indukált feszültség által keltett áram iránya az óramutató járásával megegyező.

A mágneses tér jellemzésére is két vektortér szolgál tehát: a **H** mágneses térerősség és a most definiált **B** indukcióvektor. Vákuumban a két vektor azonos egymással; valamilyen anyagi közegben pedig a közegtől függő kapcsolat van köztük. Izotrop közegben:

$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ((21). egyenlet).

A μ együttható neve: *mágneses permeabilitás*, értéke lehet egynél nagyobb vagy kisebb aszerint, hogy *para-* vagy *diamágneses* anyagokra vonatkozik. Vákuum esetén $\mu = 1$.

1. fejezet - A MAXWELL-EGYENLETEK

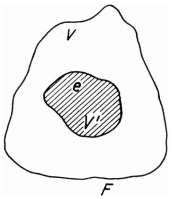
Az előző pontokban tapasztalati tények alapján megismertük az elektromos és mágneses jelenségek körébe tartozó alapvető fizikai mennyiségeket. Az elektromágneses teret négy vektortérrel: **E**, **D**, **H**, **B** jellemezzük. Ezek a vektorok általában a helynek és az időnek függvényei. A térbeli és időbeli változásukat meghatározott fizikai törvények szabályozzák. A fizikai törvényeket – mint a mechanikából ismerjük – matematikai egyenletekkel fogalmazzuk meg. Az elektromágneses tér változását leíró törvények differenciálegyenletek alakjában adhatók meg. A következő pontokban tapasztalati tényekre hivatkozva megállapítjuk az elektromágnesség alaptörvényeit: az ún. Maxwell-egyenleteket, majd ezek alapján tanulmányozzuk az elektromos és mágneses jelenségek széles körét.

A Gauss-tétel differenciális alakban

Tekintsünk egy *V'* tartományt, amelyet elektromos töltés tölt ki $\varrho = \varrho(\mathbf{r})$ térfogati sűrűségeloszlással. A *V'* térfogatban levő *e* összes töltést $\varrho(\mathbf{r})$ térfogati integrálja adja meg:

$$e = \int_{V'} \varrho(\mathbf{r}) dV$$ ((1,1). egyenlet).

8. ábra -



A *V'* térfogatot vegyük körül olyan zárt *F* felülettel, amely belsejében tartalmazza a *V'* tartományt, s így az *e* töltést is *(8. ábra).* Az *e* töltés által keltett **D** vektor értéke a fent ismertetett módon a tér minden pontjában megmérhető. Tegyük fel, hogy így a **D** vektor értékét az *F* felület minden pontjában ismerjük. Ezek után képezhető a **D** vektor felület menti külső normálisának az *F* felületre vett integrálja:

$$N = \int_F D_n dF$$ ((1,2). egyenlet).

Ennek az integrálnak szemléletes jelentés adható. A **D** vektorteret folytonos vonalak rendszerével szemléltetjük. A tér valamely *P* pontjában a **D** vektor irányát a *P* ponton átmenő vonal *P*-beli érintőjének iránya adja meg. A **D** abszolút értékét pedig a vonalak sűrűsége jellemzi. Megállapodunk

abban, hogy a vonalakra merőleges egységnyi felületű lapon (1 cm^2-en) keresztül annyi vonalat húzunk, amennyi ott a **D** abszolút értéke. Így folytonos vonalak rendszerével szemléltethetjük a **D** elektromos indukció vektorterét. Ennélfogva az (1,2) integrál az *F* felületen áthaladó elektromos indukcióvonalak számát adja meg. *N*-et az elektromos indukció fluxusának nevezzük.

A tapasztalat azt mutatja, hogy az *N* indukciófluxus arányos az *F* felület belsejében levő összes töltéssel:

$$\int_F D_n dF = ke$$ ((1,3). egyenlet).

A *k* arányossági tényező értéke a mértékegységek megválasztásával van szoros kapcsolatban. Válasszuk *k*-t 4π-nek, így – mint később látni fogjuk – a CGS mértékrendszerhez jutunk. Az (1,3) ekkor a következő alakba írható:

$$\int_F D_n dF = 4\pi e$$ ((1,3a). egyenlet).

Ezt az összefüggést az elektrosztatika Gauss-tételének szokás nevezni. (1,3a) szemléletesen azt jelenti, hogy az *e* töltésből $4\pi e$ számú **D** vonal indul ki.[1] Az *e* elektromos töltést (1,3a) jobb oldalán fejezzük ki a töltéssűrűség térfogati integráljával. Mivel *V'*-n kívül a ϱ sűrűség azonosan zérus, az (1,1) térfogati integrál kiterjeszthető a *V* térfogatra. Így (1,3a) a következőképpen írható:

$$\int_F D_n \, dF = 4\pi \int_V \varrho \, dV$$ ((1,4). egyenlet).

Az (1,4) bal oldala a matematikából ismert Gauss–Osztrogradszkij-tétel (1. függelék) felhasználásával térfogati integrállá alakítható át:

$$\int_F D_n \, dF = \int_V \operatorname{div} \mathbf{D} \, dV$$ ((1,5). egyenlet).

Ennélfogva (l,4)-ből és (l,5)-ből a következő egyenletet kapjuk:

$$\int_V (\operatorname{div} \mathbf{D} - 4\pi\varrho) \, dV = 0$$ ((1,6). egyenlet).

A tapasztalat szerint ez az integrál a *V* térfogat választásától függetlenül mindig zérus. Ez viszont csak úgy lehet, hogy az integrandusznak a tér minden pontjában el kell tűnnie:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\varrho$$ ((1,7). egyenlet).

[1] Megjegyezzük, hogy az *e* töltésből kiinduló **D** vonalak száma a töltést körülvevő anyagi közegtől függetlenül mindig $4\pi e$. Az elektromos térerősség a (16) képlet alapján **E** = **D**/ε, ahol ε a közeg dielektromos együtthatója.

Ez az egyenlet az egyik Maxwell-egyenlet, amely az (1,3a) Gauss-tételnek differenciális alakban való megfogalmazása.

Az (1,5) egyenletből következik, hogy ha a *V* tartományban div **D** = 0, akkor a *V*-t határoló felületre vett indukciófluxus zérus, vagyis a felületen **D** vonal nem megy át. Ellenben, ha $\mathrm{div}\,\mathbf{D} \neq 0$, akkor az *F* felületre vett fluxus zérustól különböző, tehát a felületet indukcióvonalak szelik át. Mivel (1,7) alapján div **D** ott különbözik zérustól, ahol elektromos töltés van, ezért a **D** vonalak töltésből indulnak ki, vagy töltésbe torkollnak be. Más szóval, az elektromos töltések az elektromos indukcióvonalak forrásai vagy nyelői. Ha div **D** > 0, tehát a töltés pozitív, akkor a fluxus is > 0, vagyis kifelé mennek az indukcióvonalak. div **D** < 0 (*ϱ* < 0) esetén az *F* zárt felületet befelé szelik át a **D** vonalak. Tehát: az elektromos indukcióvonalak a pozitív töltésből indulnak ki, és a negatív töltésben végződnek.

A töltések az (1,7) egyenlet alapján gerjesztik az elektromos teret. Következésképpen az elektromos tér gerjesztését a **D** indukcióvektor jellemzi. (l,7)-ből az is látszik, hogy a töltések által keltett **D** vektortér független attól, hogy a töltések milyen anyagi közegben helyezkednek el, ha az egész teret egységes anyag tölti ki, más szóval, ha a térben *ε*-nak nincsen szakadása.

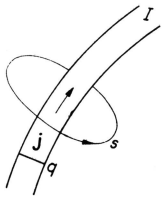
Az elektromos áram mágneses tere

A kísérleti fizikai tanulmányainkból tudjuk, hogy a vezetőben folyó áram maga körül mágneses teret kelt. A felismerés *Oersted* nevéhez fűződik, aki elsőként tapasztalta, hogy az áram közelébe helyezett mágnestű kitér, jeléül a jelen levő mágneses térnek. A mágneses tér erőssége a fent ismertetett módon próbamágnestűvel pontról pontra kimérhető.

Tekintsünk egy vezetőt, amelyben *I* erősségű áram folyik *(9. ábra)*. Az áram eloszlását a **j** áramsűrűség írja le, amely *I*-vei a következő kapcsolatban van:

$$I = \int_q j_n \, dq$$ ((2,1). egyenlet).

9. ábra -



Az integrál a vezető *q* keresztmetszetére terjesztendő ki. A vezetőt vegyük körül egy *s* zárt görbével. Tételezzük fel, hogy a mágneses tér **H** erőssége ismert az *s* görbe minden pontjában. Ezek után képezhetjük a **H** térerősség *s* görbe menti vonalintegrálját:

$\oint_s \mathbf{H}\, d\mathbf{s}$.

A tapasztalat azt mutatja, hogy ez az integrál arányos az *I* áramerősséggel, ha az *s* görbe körülfogja a vezetőt, viszont zérus akkor, ha a görbe a vezetőn kívül van:

$\oint_s \mathbf{H}\, d\mathbf{s} = kI$ ((2,2a). egyenlet),

és

$\oint_s \mathbf{H}\, d\mathbf{s} = 0$ ((2,2b). egyenlet),

ha *s* a vezetőt nem fogja körül. A *k* állandó értéke akkor pozitív, ha az *s* görbe körüljárása az áram irányába nézve az óramutató járásával megegyezik. *k* értéke a mértékegységek megválasztásától függ. *Weber* és *Kohlrauch* mérései szerint CGS mértékrendszerben

$k = \frac{4\pi}{c}$,

ahol $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s, vagyis a fény vákuumbeli sebessége.

Az áram által keltett mágneses tér alaptörvénye tehát a következő alakba írható:

$\oint_s \mathbf{H}\, d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} I$ ((2,3). egyenlet).

Nem szabad azonban szem elől téveszteni, hogy abban az esetben, ha az *s* görbe nem fog körül áram által átjárt vezetőt, az integrál értéke zérus.

Feltételezzük, hogy (2,3) érvényes akkor is, ha a vonal, amire integrálunk, a vezető belsejében fekszik. Ilyenkor az *I* nem a teljes, hanem a görbe által körülfogott áram erősségét jelenti.

Kísérletek tanúsága szerint (2,3) nemcsak a vezetőkben folyó áram mágneses terére érvényes, hanem a konvektív áram által keltett mágneses térre is.

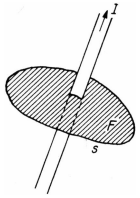
A (2,3) egyenlet az áram mágneses terének alaptörvényét fejezi ki integrális összefüggés formájában. Az elméleti fizikában arra törekszünk, hogy az alapegyenleteket differenciálegyenletek alakjában fogalmazzuk meg. E célból a (2,3) egyenletről is differenciális összefüggésre térünk át. Ehhez felhasználjuk a matematikából ismert Stokes-tételt (I. függelék):

$$\oint_s \mathbf{H}\, d\mathbf{s} = \int_F \mathrm{rot}\,\mathbf{H}\, d\mathbf{F}$$ ((2,4). egyenlet).

A jobb oldali felületi integrál olyan *F* felületre értendő, amely az *s* zárt görbére illeszkedik. (*s* az *F* felület határoló görbéje, *10. ábra.*) Mivel a vezetőn kívül **j** ≡ 0, a (2,1) integrál kiterjeszthető az *F* felületre. Így az *I* áramerősség a **j** áramsűrűség *F*-re vett integráljával állítható elő:

$$I = \int_F \mathbf{j}\, d\mathbf{F}$$ ((2,5). egyenlet).

10. ábra -



A (2,5) integrált írjuk be (2,3) jobb oldalára, és alkalmazzuk a (2,4) Stokes-tételt. Így a következő összefüggést kapjuk:

$$\int_F \left(\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \right) d\mathbf{F} = 0$$ ((2,6). egyenlet).

A tapasztalat szerint ez az integrál az *F* felület választásától függetlenül zérus.

Ez csak úgy lehet, hogy az integrandusz minden pontban eltűnik. Az áram által keltett mágneses térre érvényes tehát a következő differenciálegyenlet:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$ ((2,7). egyenlet).

Ez az egyenlet szolgál az áram mágneses terének a meghatározására. Ha az áramsűrűség ismert függvény, akkor (2,7) alapján az általa keltett mágneses tér erőssége bármely pontban meghatározható.

Konvektív áram esetén **j** helyére a konvektív áram $\varrho\mathbf{v}$ sűrűsége írandó. Ha a mágneses teret konduktív és konvektív áram együtt kelti, akkor a mágneses teret meghatározó alapegyenlet a következő:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \varrho\mathbf{v})$$ ((2,8). egyenlet).

Ez az egyenlet azonban még nem a legáltalánosabb esetre vonatkozik. Ugyanis az időben változó elektromos tér ugyanúgy mágneses teret kelt, mint az áram. Ezért a (2,3) egyenletet általánosítanunk kell arra az esetre, amikor időben változó elektromos tér is van jelen. Ebben az általános esetben a mágneses teret meghatározó integrális összefüggés a következő:

$$\oint_s \mathbf{H} d\mathbf{s} = \int_F \left(\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{4\pi}{c}\varrho\mathbf{v} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{F}$$ ((2,9). egyenlet).

Ebből az egyenletből Stokes tételével a fenti módon adódik a következő differenciálegyenlet:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \varrho\mathbf{v}) + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$ ((2,10). egyenlet).

Ez a differenciálegyenlet a Maxwell-egyenletek egyike.

A (2,10) egyenlet jobb oldalán álló $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ tag a mondottak szerint azt a felismerést tükrözi, hogy az időben változó elektromos tér mágneses teret kelt. Az így keletkezett mágneses tér erővonalai az áram által keltett térhez hasonlóan zárt görbék. Az áramsűrűség dimenziójú $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ mennyiséget szokás *eltolódási áramsűrűségnek* nevezni. Az elnevezés Maxwelltől származik. Ennek megvilágítására foglalkozzunk egy kicsit részletesebben e tag jelentésével.

Említettük már, hogy az elektromos teret jellemző **D** és **E** vektorok nem függetlenek egymástól, hanem közöttük az anyagtól függő kapcsolat áll fenn. A 23. pontban látni fogjuk, hogy a **D** indukcióvektor, az **E** elektromos térerősség és a **P** polarizációvektor között érvényes a következő összefüggés:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}\,.$$

Ennek alapján az eltolódási áram sűrűsége két tag összegére bontható:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$ ((2,10). egyenlet).

$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ az ún. *polarizációs áram sűrűsége*. Az anyagban a pozitív és negatív töltések szétválása – a szigetelő polarizációja – időben változik. Ez tulajdonképpen elektromos töltés mozgását jelenti, és így az időben változó polarizáció – mint áram – mágneses teret kelt. Az $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ tagnak nincs ilyen szemléletes jelentése, hiszen ez a tag vákuumban is fellép. Azonban Maxwell ezt is úgy értelmezte, hogy az elektromos tér hatására a pozitív és negatív töltések a vákuumban is szétválnak, a vákuum polarizálódik, és ennek időbeni változása mint vákuumbeli polarizációs áram jelenik meg.

Innen származik az eltolódási áram elnevezés: a pozitív és negatív töltések eltolódása eredményezi az áramot. A fizika fejlődése során kiderült, hogy az $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ mennyiségnek vákuumbeli eltolódási áramként való értelmezése nem felel meg a valóságnak. Fizikai jelentése egyszerűen az, hogy az időben változó elektromos tér az áramokhoz hasonlóan mágneses teret kelt. Tulajdonképpen ez a felismerés volt Maxwell legnagyobb alkotása. Ez tette lehetővé olyan elmélet kidolgozását, amely az elektromos és mágneses jelenségeken kívül az egész optikát egységes alapon tudja magyarázni. Nevezetesen, ennek alapján ismerte fel Maxwell az elektromágneses hullámok létezését, amelyet H. Hertz néhány évvel később (1888-ban) kísérlettel is igazolt.

Az elektromágneses indukció

Oersted ismerte fel először, hogy az elektromos és mágneses jelenségek nem függetlenek egymástól. Azt találta, hogy a vezetőben folyó elektromos áram maga körül mágneses teret kelt. Faraday meg volt győződve arról, hogy ennek a jelenségnek a duálisa is létezik a természetben; vagyis hogy a mágneses tér is kelt elektromos áramot. Végül is 1831-ben, több évig tartó kísérletezéssel az *indukciótörvényben* megtalálta a keresett jelenséget, amely abban áll, hogy zárt drótkeretben elektromos áram indukálódik, ha közelében mágnest mozgatunk. Értelmezése a következő. A mozgó mágnesnek időben változó mágneses tere van, amely maga körül elektromos teret kelt. Az elektromos térerősség vonalai zárt görbék. Ha a térbe zárt vezetőt helyezünk, benne az elektromos tér áramot indít meg. Jellemzésére az $\mathcal{E}$ indukált elektromotoros erőt használjuk. Ezen azt a munkát értjük, amelyet az elektromos tér akkor végez, ha a pozitív egységnyi töltést a zárt görbe (drótkeret) mentén egyszer végigmozgatja:

$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{s}$ ((3,1). egyenlet).

Az indukciótörvény kvantitatív megfogalmazásához gondoljunk el egy zárt drótkeretet, amely *F* nagyságú felületet határol. Az *F* felületen átmenő mágneses indukciófluxust az

$\mathcal{F} = \int \mathbf{B} d\mathbf{F}$ ((3,2). egyenlet)

integrál adja meg. A mágnes mozgatásakor az $\mathcal{F}$ fluxus változik. A mérések azt mutatják, hogy a vezetőkörben indukált elektromotoros erő nagysága a *c*-vel osztott indukciófluxus időegységre eső változásával egyezik meg, és akkor pozitív, ha az indukcióvonalak irányába nézve, a fluxus csökken:

$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ ((3,3). egyenlet).

A (3,1) és (3,2) figyelembevételével ez az egyenlet a következő alakba írható:

$\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_F \mathbf{B} d\mathbf{F}$ ((3,4). egyenlet).

Az elektromágneses indukció jelensége nem függ attól, hogy a térben van-e zárt vezető, vagy nincs. Az időben változó mágneses tér elektromos teret kelt a vezetőtől függetlenül. Ha történetesen vezető van a változó mágneses térben, akkor az **E** hatására áram indul meg. A (3,4) egyenlet tehát tetszőleges zárt görbére igaz. A bal oldali körintegrált Stokes tételével felületi integrállá alakítjuk:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = \int \mathrm{rot}\, \mathbf{E} d\mathbf{F}$$ ((3,5). egyenlet).

(3,5)-öt behelyettesítjük a (3,4) bal oldalára, és feltételezzük, hogy az *F* integrációs tartomány időben nem változik (a zárt görbe nyugszik), és így az idő szerint vett differenciálás az integráljel alá vihető:

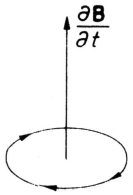
$$\int \mathrm{rot}\, \mathbf{E} d\mathbf{F} = -\frac{1}{c} \int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{F}$$ ((3,6). egyenlet).

Mivel ez az egyenlet tetszőleges *F* felületre érvényes, az integranduszok megegyeznek egymással:

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$ ((3,7). egyenlet)

(11. ábra). Ez az egyenlet fejezi ki a Faraday-féle indukciótörvényt differenciálegyenlet alakjában. Ez a harmadik Maxwell-egyenlet.

11. ábra -

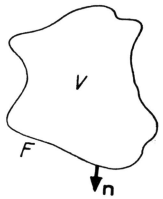


4, div B = 0

Gondoljunk el a térben egy *V* tartományt, amelyet az *F* zárt felület határol *(12. ábra)*. A mágneses indukcióvektor értéke a tér bármely pontjában meghatározható a bevezetésben említett méréssel. Tételezzük fel, hogy **B** az *F* felület minden pontjában ismert. Ezek után képezhető a **B** vektor *F* felület menti külső normálisának *F*-re vett integrálja:

$$\int_F B_n \, dF = \int_F \mathbf{B} d\mathbf{F}$$.

12. ábra -



A tapasztalat azt mutatja, hogy ez az integrál a felület választásától függetlenül mindig zérus:

$$\oint_F \mathbf{B}\,d\mathbf{F} = 0$$ ((4,1). egyenlet).

Szemléletesen ez azt jelenti, hogy az *F* felületen be- és kimenő mágneses indukcióvonalak számának összege zérus. Más szóval: a vonalaknak nincs a tartományon belül forrásuk. Mivel a (4,1) integrál bármely zárt felületre eltűnik, a mágneses indukcióvonalaknak sehol nincs forrásuk, azok zárt görbék.

A (4,1) egyenlet bal oldalán levő felületi integrál a Gauss–Osztrogradszkij-tétellel térfogati integrállá alakítható:

$$\oint_F \mathbf{B}d\mathbf{F} = \int_V \mathrm{div}\,\mathbf{B}dV = 0$$ ((4,2). egyenlet).

Mivel ez az integrál a tapasztalat szerint a térfogattól függetlenül zérus, az integrandusznak mindenütt el kell tűnnie:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$$ ((4,3). egyenlet).

Ez az egyenlet a negyedik Maxwell-egyenlet. Azt a tapasztalati tényt fejezi ki, hogy a természetben mágneses töltések nincsenek, a mágneses indukció vektortere mindenütt forrásmentes.

A mágneses alapfogalmak bevezetésekor rámutattunk az elektromos és mágneses tér közötti lényeges különbségre. Említettük, hogy az utóbbit nem töltések, hanem mágneses momentumok keltik, mágneses töltések nincsenek. A (4,3) egyenlet ezt a mély igazságot fejezi ki, amely szemléletesen azt jelenti, hogy a mágneses indukcióvonalaknak nincsen sem kezdetük, sem végük, azok mindig zárt görbék, ellentétben az elektromos térrel, amelynek forrásai a töltések; következésképpen az elektromos indukcióvonalak töltésből indulnak ki, és töltésbe torkollnak be [lásd az (1,7) egyenletet].

A Maxwell-egyenletek

Az előző fejezetekben pontokban tapasztalati tények alapján megfogalmaztuk azokat az alapegyenleteket, amelyekre – mint szilárd tartóoszlopokra – épül az elektromos és mágneses jelenségek elmélete: az *elektrodinamika*.

Foglaljuk össze ezeket most egy egyenletrendszerbe:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}+\varrho\mathbf{v})+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} && \text{I.}\\ \operatorname{div}\mathbf{D} &= 4\pi\varrho && \text{II.}\\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} && \text{III.}\\ \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0 && \text{IV.} \end{aligned}\right\}$$ ((5,1). egyenlet)

Az I–IV. egyenleteket nevezzük *Maxwell-egyenleteknek*. Ezek segítségével az elektromágneses jelenségek igen széles köre – benne az optikai jelenségek is – elméleti úton magyarázhatók. Tanulmányainkban látni fogjuk, hogy nincs a fizikának még egy egyenletrendszere, amely ilyen széles jelenségkört ekkora egzaktsággal képes leírni.

Az elektrodinamika alapproblémája a következő: megadott töltés- és árameloszlás elektromágneses terét keressük. Ezt a problémát a Maxwell-egyenletek integrálásával oldjuk meg. Adott tehát a **j**, ϱ, **v** mint a helynek és időnek a függvénye, és keressük a teret leíró **E**, **D**, **H**, **B** vektorokat a hely és idő függvényeként.

Mint korábban említettük, az **E** és **D**, valamint a **H** és **B** nem függetlenek egymástól; közöttük a teret kitöltő makroszkopikus anyagi közegtől függő kapcsolatok állnak fenn. Ezért az (5,1) egyenleteket ki kell egészítenünk ezekkel az anyagi egyenletekkel. Vákuumban **E** megegyezik **D**-vel, **H** pedig **B**-vel. Ettől az esettől eltekintve, a legegyszerűbb összefüggések izotrop közegek esetén állnak fenn. Ekkor

$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ ((5,2). egyenlet);

$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ((5,3). egyenlet).

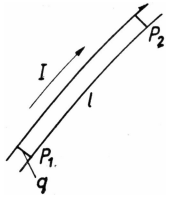
ε és μ a közegre jellemző mennyiségek: ε a *dielektromos együttható*, μ pedig a *mágneses permeabilitás*. Általános esetben ε és μ függhet a helytől, a hőmérséklettől és az anyag sűrűségétől. Abban a speciális esetben, ha ε és μ állandó, a közeget *homogén izotropnak* mondjuk. Könyvünk jelentős részében ezzel az esettel foglalkozunk.

Az I–IV. Maxwell-egyenleteket az (5,2), (5,3) egyenleteken kívül még egy egyenlettel ki kell egészítenünk, amely kapcsolatot teremt a vezetőkben folyó áram sűrűsége és az áramot létrehozó elektromos tér erőssége között. A vezetőben folyó áram sűrűsége vagy intenzitása ugyanis általában nem adott, hanem a vezetőben kialakult elektromos tér kelti. A tapasztalat azt mutatja, hogy az elektromos tér hatására meginduló áram erőssége függ a vezető anyagi minőségétől is; felvetődik a kérdés: milyen összefüggés van a vezetőben folyó áram erőssége és az azt létrehozó térerősség között? A választ kísérleteinek eredményeként G. S. *Ohm* adta meg 1821-ben. Ez a kísérleti fizikában *Ohm-törvény* néven ismert összefüggés a következőképpen fogalmazható meg. Tekintsünk egy vékony vezetőszakaszt (vezető drótot), és a két közeli P_1, P_2 pontja közötti potenciálkülönbséget jelöljük $\Delta\Phi$-vel. (A kísérleti fizikai tanulmányainkból tudjuk, hogy a $\Delta\Phi$ potenciálkülönbségen azt a munkát értjük, amelyet az elektromos tér akkor végez, ha a pozitív egységnyi töltést az áram irányában elmozgatja az egyik ponttól a másikig, esetünkben P_1-től P_2-ig, lásd a *13. ábrát*).

Legyen a P_1P_2 szakasz hossza l, a vezető keresztmetszete pedig q. Az Ohm-törvény szerint a vezetőben folyó áram I intenzitása arányos a $\Delta\Phi$ potenciálkülönbséggel és a q keresztmetszettel, fordítva arányos a szakasz l hosszával:

$$I = \sigma \frac{\Delta\Phi}{l} q$$ ((5,4). egyenlet).

13. ábra -



A σ arányossági tényező a vezető anyagára jellemző mennyiség; neve *vezetőképesség*. Az $\frac{l}{\sigma q}$ mennyiséget a vezetőszakasz *ellenállásának* nevezzük és R-rel jelöljük:

$$R = \frac{l}{\sigma q}$$ ((5,5). egyenlet).

Ennek alapján az (5,4) Ohm-törvény a következő megszokottabb formában írható:

$$I = \frac{\Delta\Phi}{R}$$ ((5,6). egyenlet).

Az (5,4) és (5,6) integrális összefüggés, nevezetesen: a vezető két különböző pontja közötti mennyiségekkel fejezi ki az áram erősségét. Az elméleti fizikában inkább a differenciális összefüggéseket használjuk, amelyek a tér egy pontjában érvényes mennyiségek között állapítanak meg kapcsolatot. Ezért az (5,4) integrális Ohm-törvényt most átírjuk differenciális alakba. E célból az (5,4) mindkét oldalát elosztjuk a q keresztmetszettel:

$$|\mathbf{j}| = \frac{I}{q} = \sigma \frac{\Delta\Phi}{l}$$ ((5,7). egyenlet).

Végezzük el ebben az egyenletben az $l \to 0$ határátmenetet, ami annak felel meg, hogy a P_2 ponttal közeledünk a P_1-hez. Ekkor (5,7)-ből a következő egyenletet kapjuk:

$|\mathbf{j}|_{P_1} = \lim_{l \to 0} \sigma \frac{\Delta \Phi}{l} = \sigma |\mathrm{grad}\, \Phi|_{P_1}$ ((5,7″). egyenlet).

Ez az egyenlet már egy pontban érvényes mennyiségek között teremt kapcsolatot. Mivel az Ohm-törvény a vezető tetszőleges szakaszára igaz, a P_1 indexet el is hagyhatjuk, és az összefüggés a vezető bármely pontjára igaz lesz:

$|\mathbf{j}| = \sigma |\mathrm{grad}\, \Phi|$ ((5,8). egyenlet).

$\Delta\Phi$-t az egységnyi pozitív töltés P_1-től P_2-ig történő mozgatásakor végzett munkával definiáltuk. Ez a munka az **F** = e**E** erőképlet alapján a következő szakasz menti integrállal egyezik meg:

$$\Delta \Phi = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}\, d\boldsymbol{s}$$ ((5,9). egyenlet).

Ebből arra következtethetünk, hogy a Φ potenciál és az **E** elektromos térerősség között fennáll az

$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\, \Phi$ ((5,10). egyenlet)

összefüggés.[2] Ezt (5,8)-ba helyettesítve kapjuk:

$|\mathbf{j}| = \sigma |\mathbf{E}|$ ((5,11). egyenlet).

Mivel az áram iránya a pozitív töltés mozgásirányával, tehát **E** irányával egyezik meg, az abszolútérték-jeleket elhagyhatjuk:

$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ ((5,12). egyenlet).

Ez az egyenlet fejezi ki az Ohm-törvényt differenciális alakban. Jelentése a következő: az áramsűrűség a vezető bármely pontjában arányos az elektromos térerősséggel, az arányossági tényező a σ vezetőképesség. σ általában függhet a helytől és a hőmérséklettől: homogén vezetőknél értéke állandó.

Az (5,2), (5,3) (5,12) egyenleteket, mivel a közegre jellemző ε, μ, σ anyagi együtthatókat tartalmazzák, *anyagi egyenleteknek* nevezzük. Az (5,1) Maxwell-egyenletek ezekkel kiegészítve írják le az elektromágneses tér fizikai sajátságait.

[2] A későbbiekben látni fogjuk, hogy ez következik a Maxwell-egyenletekből. Itt azonban nem akartunk még erre hivatkozni, hanem a potenciálkülönbség kísérleti fizikából jól ismert definícióját használtuk, és ennek alapján jutottunk el (5,10)-hez.

Határfeltételek

A Maxwell-egyenleteket a tapasztalatból nyert integrális összefüggésekből vezettük le a Stokes-, illetve a Gauss–Osztrogradszkij-tétel alkalmazásával. Ezeknél a matematikai tételeknél fel kell tételeznünk, hogy az integranduszban szereplő függvények folytonosak az egész integrációs tartományban. Következésképpen a Maxwell-egyenletek olyan térrészben érvényesek, ahol a bennük szereplő térmennyiségek – térerősségek és indukcióvektorok – folytonosak. Ez az eset áll fenn akkor, ha a tekintetbe vett tartományt egységes közeg tölti ki. Két különböző közeg határfelületén az anyagra jellemző ε, μ, σ mennyiségek ugrásszerűen változnak. Ennélfogva, az anyagi egyenletek alapján, a különböző közegek határán a térmennyiségeknek is szakadásuk van. Ezért a Maxwell-egyenletek az integrális összefüggésekből az egységes anyaggal kitöltött térrészekre vezethetők le. A különböző közegekre felírt Maxwell-egyenletek megoldásait az érintkező közegek határfelületén egymáshoz kell illesztenünk. Ehhez ismernünk kell azokat a törvényeket, amelyek megmondják, hogyan változnak a térmennyiségek két különböző közeg határán. A következőkben ezeket az ún. *határfeltételi egyenleteket* határozzuk meg.

Határfeltétel az elektromos indukcióvektor normális komponensére (D_n)

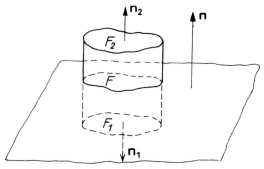
Tekintsünk egymással érintkező két különböző közeget. A megfelelő dielektromos együtthatókat jelöljük ε_1-gyel, ill. ε_2-vel. A határon vegyünk fel egy F felületet, amely speciálisan legyen töltött vezető. A rajta levő e elektromos töltést az η felületi töltéssűrűség F-re vett integrálja adja:

$$e = \int_F \eta dF$$ ((6,1). egyenlet).

Az F felület mindkét oldalán, tőle h távolságban vegyünk fel egy-egy olyan felületet, amely F alakját követi *(14. ábra)*. Ezeket jelöljük F_1-gyel, ill. F_2-vel. F_1 és F_2 határvonalát kössük össze egy P palástszerű felülettel. Így olyan zárt térfogatot kaptunk, amelyet az F_1 és F_2 felület, valamint a P palást határol. Alkalmazzuk erre a térfogatra az (1,3a) egyenletet:

$$\int_{F_2} D_n dF + \int_{F_1} D_n dF + \int_P D_n dF = 4\pi \int_F \eta \, dF$$ ((6,2). egyenlet).

14. ábra -



Végezzük most el a $h \to 0$ határátmenetet. Ekkor az F_1 és az F_2 felület az F felülethez, a P palást pedig zérushoz tart. Mivel a bal oldal harmadik integráljában az integrandusz korlátos, az integrációs tartomány pedig zérushoz tart, a palástra vett integrál a fenti határátmenetben eltűnik:

$$\int_P D_n dF \to 0$$ ((6,3). egyenlet).

Az F_1-re és az F_2-re vett integrál az F felületre vett integrálba megy át. Az F_2 felület külső normálisát válasszuk az F felület pozitív normálisával egyirányúnak. Ekkor a fenti határátmenetben:

$$\int_{F_2} D_n dF \to \int_F D_{n_2} dF$$ ((6,4a). egyenlet),

$$\int_{F_1} D_n dF \to -\int_F D_{n_1} dF$$ ((6,4b). egyenlet).

D_{n_1} és D_{n_2} az elektromos indukcióvektor normálisát jelenti az F felület mentén az 1, ill. 2 indexű (ε_1, ill. ε_2 dielektromos együtthatójú közeggel érintkező) oldalon. A (6,2) egyenletből a $h \to 0$ határesetben így a következőt kapjuk:

$$\int_F \left(D_{n_2} - D_{n_1} \right) dF = 4\pi \int_F \eta dF$$ ((6,5). egyenlet).

A (6,5) egyenlet a határ menti F felület választásától függetlenül érvényes, ezért a két oldalon szereplő integranduszok megegyeznek egymással:

$$D_{n_2} - D_{n_1} = 4\pi\eta$$ ((6,6). egyenlet).

A **D** vektor normális komponensére tehát a (6,6) határfeltétel áll fenn. Ez az összefüggés azt jelenti, hogy ha az elválasztó felület mentén töltés van (pl. töltött vezető a határoló felület), akkor a **D** normális komponense ugrik a határon. Ellenben ha a két közeg határán nincs töltés ($\eta = 0$), akkor az elektromos indukcióvektor normális komponense folytonosan megy át a két közeg határán:

$$D_{n_2} = D_{n_1}$$ ((6,7). egyenlet).

Az (5,2) anyagi egyenletből, valamint a (6,7) határfeltételből következik, hogy az elektromos térerősség normális komponense a határfelület mentén ugrik:

$$\varepsilon_2 E_{n_2} = \varepsilon_1 E_{n_1} \to E_{n_2} \neq E_{n_1}$$ ((6,8). egyenlet).

A két normális komponens hányadosa a megfelelő dielektromos együtthatók hányadosának reciprokával egyezik meg:

$$\frac{E_{n_2}}{E_{n_1}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$ ((6,9). egyenlet).

Határfeltétel a mágneses indukció vektorának normális komponensére (B_n)

Az egymással érintkező két közeg mágneses permeabilitása legyen μ_1, ill. μ_2.

A tapasztalatból nyert (4,1) egyenletet alkalmazzuk az előbbi hengerszerű térfogatra:

$$\int_{F_2} B_n dF + \int_{F_1} B_n dF + \int_{P} B_n dF = 0$$ ((6,10). egyenlet).

Ebből ugyanolyan gondolatmenettel, mint előbb, $h \to 0$ határesetben adódik:

$$\int_{F} \left(B_{n_2} - B_{n_1} \right) dF = 0$$ ((6,11). egyenlet).

Mivel ez az integrál az F felület választásától függetlenül zérus, az integrandusznak el kell tűnnie:

$$B_{n_2} = B_{n_1}$$ ((6,12). egyenlet).

A mágneses indukcióvektor normális komponense tehát folytonosan megy át két különböző közeg határán. Az (5,3) anyagi egyenletből, valamint a (6,12) határfeltételből kapjuk a mágneses térerősség normális komponensére vonatkozó határ- feltételi egyenletet:

$$\mu_2 H_{n_2} = \mu_1 H_{n_1} \to H_{n_2} \neq H_{n_1}$$ ((6,13). egyenlet).

A mágneses térerősség normális komponense ugrik két különböző közeg határán. A **H** normális komponenseinek hányadosa a megfelelő mágneses permeabilitások hányadosának reciprokával egyenlő:

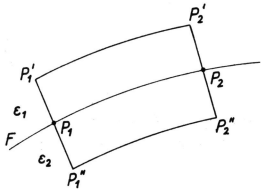
$$\frac{H_{n_2}}{H_{n_1}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$ ((6,14). egyenlet).

Határfeltétel az elektromos térerősség tangenciális komponensére (E_t)

A két közeg közös határfelületén vegyünk fel egy $\overline{P_1P_2}$ vonalszakaszt *(15. ábra)*. Húzzunk ezzel egy-egy párhuzamos vonalat az 1-gyel, illetve 2-vel jelölt közegben egyforma távolságra. A megfelelő vonalszakaszokat jelöljük $\overline{P_1'P_2'}$-vel, ill. $\overline{P_1''P_2''}$-vel. Integráljuk az elektromos térerősséget a $P_1'P_2'P_2P_2''P_1''P_1P_1'$ zárt görbére. Ez az integrál (3,4) alapján a következőképpen írható:

$$\int_{P_1'}^{P_2'} \mathbf{E} d\mathbf{s} + \int_{P_2'}^{P_2''} \mathbf{E} d\mathbf{s} + \int_{P_2''}^{P_1''} \mathbf{E} d\mathbf{s} + \int_{P_1''}^{P_1'} \mathbf{E} d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \int_{F} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{F}$$ ((6,15). egyenlet).

15. ábra -



A jobb oldalon levő felületi integrál a $P_1'P_2'P_2P_2''P_1''P_1P_1'$ zárt görbe által határolt *F* felületre értendő. A (6,15) egyenlet mindkét oldalán végezzük el a $P_1' \to P_1$, $P_1'' \to P_1$, $P_2' \to P_2$, $P_2'' \to P_2$ határátmenetet. Más szóval: a $\overline{P_1'P_2'}$ és a $\overline{P_1''P_2''}$ szakaszt folytonosan ráhúzzuk a $\overline{P_1P_2}$ vonaldarabra. Ennél a határátmenetnél az *F* felület zérushoz tart: $F \to 0$. Mivel az $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ mennyiség korlátos, az $F \to 0$ határátmenetnél a felületi integrál zérushoz tart:

$$\frac{1}{c}\int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{F} \to 0$$ ((6,16). egyenlet).

Hasonló a helyzet a bal oldalon levő második és negyedik integrállal. Ugyanis az integrációs tartomány mindkettőnél zérushoz tart, az integrandusz pedig korlátos:

$$\int_{P_1}^{P_2''} \mathbf{E}\, d\mathbf{s} \to 0$$ ((6,17a). egyenlet).

$$\int_{P_1''}^{P_2'} \mathbf{E}\, d\mathbf{s} \to 0$$ ((6,17b). egyenlet).

Ennélfogva a (6,15) egyenlet a határátmenet során a következő egyenletbe megy át:

$$\int_{P_1}^{P_2} \left(E_{t_1} - E_{t_2}\right) ds = 0$$ ((6,18). egyenlet).

Ez az integrál a $\overline{P_1P_2}$ vonalszakasz választásától függetlenül eltűnik. Ez csak úgy lehet, hogy az integrandusz azonosan zérus:

$$E_{t_1} = E_{t_2}$$ ((6,19). egyenlet).

Az elektromos térerősség tangenciális komponense tehát folytonosan megy át két különböző közeg határán.

Az (5,2)-ből és (6,19)-ből következik, hogy a **D** vektor tangenciális komponense ugrik a két különböző közeg határfelületén:

$$\frac{D_{t_1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{t_2}}{\varepsilon_2} \rightarrow D_{t_1} \neq D_{t_2}$$ ((6,20). egyenlet).

Az elektromos indukcióvektor tangenciális komponenseinek hányadosa a megfelelő dielektromos együtthatók hányadosával egyezik meg:

$$\frac{D_{t_1}}{D_{t_2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$ ((6,21). egyenlet).

Határfeltétel a mágneses térerősség tangenciális komponensére (H_t)

A (2,9) egyenletet írjuk fel az előbbi $P_1'P_2'P_2P_2''P_1''P_1P_1'$ zárt görbére, illetve az általa meghatározott F felületre:

$$\int_{P_1'}^{P_2'} \mathbf{H}\,d\mathbf{s} + \int_{P_2'}^{P_2''} \mathbf{H}\,d\mathbf{s} + \int_{P_2''}^{P_1''} \mathbf{H}\,d\mathbf{s} + \int_{P_1''}^{P_1'} \mathbf{H}\,d\mathbf{s} = \int_F \left(\frac{4\pi}{c}\mathbf{i} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{F}$$ ((6,22). egyenlet),

itt **i** a konvektív és a konduktív áram sűrűségének összege. Végezzük el ismét a $P_1' \rightarrow P_1$, $P_1'' \rightarrow P_1$, $P_2' \rightarrow P_2$, $P_2'' \rightarrow P_2$ határátmenetet. Ekkor a (6,15)–(6,17b)-nél követett gondolatmenet alapján a bal oldali második és a negyedik integrál, valamint a jobb oldali második integrál zérushoz tart. Így (6,22)-ből a következő egyenletet kapjuk:

$$\int_{P_1}^{P_2} \left(H_{t_1} - H_{t_2} \right) ds = \frac{4\pi}{c} I_{\text{fel}}$$ ((6,23). egyenlet),

ahol I_{fel} a két közeg határfelülete mentén folyó áram erősségét jelenti. Az I_{fel} „felületi” áramerősséget fejezzük ki i_{fel} ,,felületi” áramsűrűséggel a következőképpen:

$$I_{\text{fel}} = \int_{P_1}^{P_2} i_{\text{fel}}\, ds$$ ((6,24). egyenlet).

(6,24)-et (6,23)-ba írva, kapjuk, hogy

$$\int_{P_1}^{P_2}\left(H_{t_1}-H_{t_2}\right)ds=\frac{4\pi}{c}\int_{P_1}^{P_2}i_{\text{fel}}\,ds$$ ((6,25). egyenlet).

A (6,25) egyenlet a $\overline{P_1P_2}$ vonalszakasz választásától független, ezért az integranduszok megegyeznek:

$$H_{t_1}-H_{t_2}=\frac{4\pi}{c}i_{\text{fel}}$$ ((6,26). egyenlet).

Ez a határfeltétel azt fejezi ki, hogy „felületi" áramok esetén a mágneses térerősség tangenciális komponense ugrik a felület mentén. Az ugrás mértékét (6,26) alapján a „felületi" áramsűrűség határozza meg.

A levezetésből következik, hogy i_{fel} a kiválasztott tangenciális irányra merőlegesen folyó „felületi" áram sűrűségét jelenti.

Ha a határfelület mentén nem folyik áram ($i_{\text{fel}} = 0$), akkor a mágneses térerősség tangenciális komponense folytonosan megy át a két közeg határán:

$$H_{t_1}=H_{t_2}$$ ((6,27). egyenlet).

A mágneses indukcióvektor tangenciális komponense ugrik a határfelületen. **B** tangenciális komponensének hányadosa (5,3) és (6,27) alapján:

$$\frac{B_{t_1}}{B_{t_2}}=\frac{\mu_1}{\mu_2}$$ ((6,28). egyenlet).

Az elektromos töltés megmaradása. Kontinuitási egyenlet. Relaxációs idő

Képezzük az (5,1) I. Maxwell-egyenlet mindkét oldalának divergenciáját:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\left(\mathbf{j}+\varrho\mathbf{v}\right)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{D}$$ ((7,1). egyenlet).

Mivel bármely vektor rotációjának divergenciája azonosan zérus, (7,1) bal oldala eltűnik. Helyettesítsük be div **D** helyére az (5,1) II. egyenletből $4\pi\varrho$-t, majd $\frac{4\pi}{c}$-vel egyszerűsítsünk:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j} + \varrho \mathbf{v}) = 0$$ ((7,2). egyenlet).

Ez a mechanikából már ismert *kontinuitási egyenlet*. Az elektromos töltés megmaradását fejezi ki differenciális formában. Erről könnyen meggyőződhetünk, ha az egyenletet integráljuk egy zárt, rögzített *V* térfogatra:

$$\int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} dV + \int_V \operatorname{div}(\mathbf{j} + \varrho \mathbf{v}) dV = 0$$ ((7,3). egyenlet).

Mivel a térfogat rögzített, az idő szerinti differenciálhányados kiemelhető az integráljel elé. A második integrált pedig a Gauss–Osztrogradszkij-tétellel a *V* felületére vett integrállá alakíthatjuk. Így (7,3) a következőképpen írható:

$$\frac{d}{dt}\int_V \varrho \, dV = -\int_F (\mathbf{j} + \varrho \mathbf{v}) d\mathbf{F} = 0$$ ((7,4). egyenlet).

A (7,4) bal oldala a *V* térfogatban levő elektromos töltés időegységre eső növekedését jelenti, a jobb oldalon pedig az *F* felületen időegység alatt beáramló töltésmennyiség áll. A *V* térfogatban tehát adott idő alatt annyival nő meg a töltés, amennyi az *F* felületen beáramlik. Ez azt jelenti, hogy az elektromos töltés nem tűnik el, hanem megmarad.

Relaxációs idő

A (7,2) kontinuitási egyenlet alapján tanulmányozhatjuk, hogy a vezető vagy szigetelő belsejébe vitt elektromos töltés időben hogyan változik. A konvektív áramoktól egyelőre tekintsünk el. Ebben az esetben (7,2) a következő alakot veszi fel:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$ ((7,5). egyenlet).

Foglalkozzunk először a szigetelő esetével. A szigetelők vezetőképessége zérus, ezért szigetelőkben **j** ≡ 0. Így (7,5)-ből adódik:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0, \qquad \varrho = \text{const}$$ ((7,6). egyenlet).

A szigetelőkbe vitt elektromos töltés tehát ott marad a helyén, mivel a közeg nem vezeti az áramot.

Vezetőkben viszont az elektromos tér hatására áram indul meg, ami a töltést a felületre szállítja mindaddig, amíg az egyensúlyi állapotban (a sztatikában) a vezető belsejében az elektromos tér zérussá válik. Vizsgáljuk meg, hogy mennyi idő alatt következik be ez az egyensúlyi állapot magára hagyott vezető esetén.

Az (5,12) Ohm-törvény szerint:

$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ ((7,7). egyenlet).

Írjuk be **j**-nek ezt a kifejezését (7,5)-be:

$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathrm{div}(\sigma \mathbf{E}) = 0$ ((7,8). egyenlet).

Tegyük fel, hogy a vezető homogén (σ és ε állandó), és vegyük figyelembe az (5,2) anyagi egyenletet. Ekkor (7,8) a következőképpen írható:

$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \mathrm{div}\mathbf{D} = 0$ ((7,9). egyenlet).

Felhasználva az (5,1)–I. Maxwell-egyenletet, kapjuk:

$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\varrho = 0$ ((7,10). egyenlet).

Ez a differenciálegyenlet írja le homogén vezető belsejében az elektromos töltés sűrűségének időbeni változását. (7,10) megoldása a következő:

$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t}$ ((7,11). egyenlet).

Homogén vezető belsejében az elektromos töltéssűrűség tehát időben exponenciálisan csökken. ϱ_0 a $t = 0$ időponthoz tartozó töltéssűrűséget jelenti. A $t_r = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$ idő alatt a ϱ töltéssűrűség kezdeti értékének e-ed részére csökken. A t_r időt *relaxációs időnek* nevezzük. Mivel vezetők dielektromos állandója közelítőleg egy nagyságrendű, a relaxációs időt gyakorlatilag az $\frac{1}{4\pi\sigma}$ mennyiség határozza meg. Vezetők σ vezetőképessége igen nagy érték, ezért a relaxációs idő rendkívül kicsi. Pl. réz esetén $\sigma = 53 \cdot 10^{16}$ s^{-1}, $t_r \sim 0,15 \cdot 10^{-18}$ s.

A vezetők belsejébe vitt elektromos töltés tehát gyakorlatilag *azonnal* a vezető felületére kerül, és beáll a sztatikus egyensúly, amikor a vezetőn belül $\varrho = 0$, és ezzel együtt az elektromos térerősség is [lásd az (5,1)–II. egyenletet].[3]

[3] Meg kell azonban jegyeznünk, hogy ilyen gyors folyamatokra a fenomenológia elektrodinamika törvényei nem helytállóak, mivel azokat normális viszonyokból származtattuk. Annyi azonban látszik ebből, hogy vezetőkben rendkívül gyorsan beáll az egyensúlyi állapot.

A Maxwel-egyenletek teljessége

Az (5,1) Maxwell-egyenletekben adott mennyiségek a ϱ, **v**, ε, μ, σ a helynek és az időnek a függvényei (az anyagi együtthatók általában függhetnek még a hőmérséklettől és a tömegsűrűségtől is). Ezeket ismert függvényeknek tekintjük. Ismeretlenek a térre jellemző mennyiségek. Az (5,1) egyenletek ezek meghatározására szolgálnak. Mivel az I. és III. egyenlet vektoregyenlet, (5,1) nyolc egyenletet jelent. Tekintetbe véve az (5,2), (5,3) (5,12) anyagi egyenleteket, az ismeretlen függvények száma hat. Úgy tűnik, hogy a nyolc egyenlet túlhatározza a hat ismeretlen függvényt. Ez azonban nincs így, mert ténylegesen hat a független egyenletek száma is. Ugyanis két összefüggés áll fenn közöttük. A II. és a IV. egyenlet valójában kiegészítő feltételek szerepét játssza az I. és a III. megoldásánál. A töltésmegmaradás miatt az áram- és töltéssűrűség között mindig fennáll a (7,2) kontinuitási egyenlet:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j} + \varrho \mathbf{v}) = 0 \quad .$$

Ez azt jelenti, hogy a **j** (tehát a kezdeti **E**) ϱ és **v** nem adhatók meg önkényesen, hanem úgy, hogy (7,2)-nek fenn kell állnia. Ha e mennyiségeket ennek megfelelően választottuk, akkor (7,1) (amely I. következménye) és (7,2) alapján érvényes a következő összefüggés:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \frac{\partial \varrho}{\partial t}$$ ((8,1). egyenlet),

vagy

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{D} - 4\pi\varrho) = 0$$ ((8,2). egyenlet).

Ez annyit jelent, hogy $(\operatorname{div} \mathbf{D} - 4\pi\varrho)$ az időben állandó. Ha **D** kezdeti értékét úgy választottuk meg, hogy ez az állandó zérus, vagyis

$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\varrho$ ((5,1)–(II). egyenlet),

akkor ez bármely későbbi időpontban is fennáll. Minthogy (8,2) az (5,1)–I. egyenlet következménye, így **D** kezdeti értékének alkalmas megválasztásával (5,1)–II. is az I. egyenlet folyománya. **D** kezdeti értékének alkalmas megválasztása tehát feleslegessé teszi az (5,1)–II. egyenletet.

Hasonlóképpen belátható, hogy **B** kezdeti értékének alkalmas megválasztásával (5.1)–II. az (5,1)–III. következménye lesz.

Ha a **D** és **B** kezdeti értékeit tehát úgy választottuk meg, hogy (5,1)–II. és (5,1)–IV. a $t = 0$ esetben teljesül, akkor az (5,1)–I. és az (5,1)–III. folyományaként mindig teljesülni fog. Ennélfogva a kezdeti értékek alkalmas megválasztása után a II. és a IV. egyenlet elhagyható, az elektromágneses teret a I. és a III. egyenlet határozza meg. Ez pedig hat egyenletet jelent a hat ismeretlen függvényre (pl. a hat térerősség-komponensre). Ezzel a Maxwell-egyenletek teljességét megmutattuk.

Az elektromágneses tér energiája

Tételezzük fel, hogy a közeg, amelyben az elektromágneses teret vizsgáljuk, homogén izotrop, tehát ε, μ és σ állandók. Az (5,2), (5,3) anyagi egyenletek figyelembevételével írjuk fel az (5,1)–I. és az (5,1)–III. Maxwell-egyenletet:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \varrho\mathbf{v}) + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$ ((I′). egyenlet),

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$ ((III′). egyenlet).

Az (I′) egyenletet szorozzuk meg $\left(-\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\right)$-vel, a (III′)-t pedig $\left(+\frac{c}{4\pi}\mathbf{H}\right)$-val, és az így kapott egyenleteket adjuk össze. Megfelelő sorrendváltoztatás után kapjuk, hogy

$$\varrho(\mathbf{v},\mathbf{E}) = -\frac{c}{4\pi}(-\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} + \mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}) - (\mathbf{j},\mathbf{E}) - \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{\mu}{4\pi}\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$ ((9,1). egyenlet).

Az egyenlet mindkét oldalát integráljuk egy V térfogatra:

$$\int_V \varrho(\mathbf{v},\mathbf{E})\,dV = -\frac{c}{4\pi}\int_V (-\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} + \mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E})\,dV -$$
$$-\int_V (\mathbf{j},\mathbf{E})\,dV - \frac{1}{4\pi}\int_V \left(\varepsilon\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right)dV$$ ((9,2). egyenlet).

A jobb oldalon szereplő első integrál integrandusza a vektoranalízisből ismert összefüggés alapján a következőképpen írható:

$$\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} - \mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$ ((9,3). egyenlet).

Az utolsó integrál integrandusza pedig idő szerinti differenciálhányadossá alakítható:

$$\varepsilon\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\mathbf{E}^2 + \mu\mathbf{H}^2\right)$$ ((9,4). egyenlet).

(9,3) és (9,4) behelyettesítése után (9,2) a következő alakot veszi fel:

$$\int_V \varrho(\mathbf{v}, \mathbf{E})\,dV = -\frac{c}{4\pi}\int_V \operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,dV - \int_V (\mathbf{j}, \mathbf{E})\,dV - \\ -\frac{1}{8\pi}\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\mathbf{E}^2 + \mu\mathbf{H}^2\right)dV$$

((9,5). egyenlet).

Mivel a tekintett *V* térfogat rögzített, az utolsó integrálból az idő szerinti differenciálás jele az integrál elé emelhető. A jobb oldal első integrálját a Gauss–Osztrogradszkij-tétellel alakítjuk át a *V* tartomány zárt *F* felületére vett integrállá. Ezek után (9,5) így írható:

$$\int_V \varrho(\mathbf{v}, \mathbf{E})\,dV = -\frac{c}{4\pi}\int_F (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,d\mathbf{F} - \int_V (\mathbf{j}, \mathbf{E})\,dV - \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{8\pi}\int_V \left(\varepsilon\mathbf{E}^2 + \mu\mathbf{H}^2\right)dV\right]$$

((9,6). egyenlet).

Az itt szereplő integráloknak konkrét fizikai jelentésük van. A bal oldal azt a teljesítményt jelenti, amelyet az elektromágneses tér végez, midőn a konvektív áramot képviselő ϱ sűrűségű töltésrendszert **v** sebességgel mozgatja. Ez a teljesítmény – mint a mechanikából tudjuk – a töltésrendszer *K* kinetikai energiájának időegységre eső növekedésével egyenlő:

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \varrho(\mathbf{v}, \mathbf{E})\,dV$$

((9,7). egyenlet).

A jobb oldalon álló utolsó integrál fizikai jelentésének megbeszélése végett egyelőre tételezzük fel, hogy a kiszemelt *V* tartományban vezetők nincsenek (**j** = 0), és a tartomány határán a térerősségek eltűnnek. Ez az utóbbi feltevés tulajdonképpen azt jelenti, hogy a vizsgált fizikai rendszerünk zárt, hisz elektromágneses terével az *F* felületen kívüli testekre nem fejt ki erőhatást és viszont, tehát nincs a környezettel elektromágneses kölcsönhatásban. A tett feltevések következtében a jobb oldalon csak az utolsó tag marad meg, az első két integrál eltűnik:

$$\int_V \varrho(\mathbf{v}, \mathbf{E})\,dV = -\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon\mathbf{E}^2 + \mu\mathbf{H}^2\right)dV$$

((9,8). egyenlet).

Írjuk be az egyenlet bal oldalára (9,7) alapján a töltésrendszer kinetikai energiájának időegységre eső növekedését:

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon\mathbf{E}^2 + \mu\mathbf{H}^2\right)dV$$

((9,9). egyenlet).

Ez az egyenlet azt a meglepő felismerést tükrözi, hogy zárt rendszer esetén sem érvényes a mechanikai jellegű energia megmaradásának a tétele:

$$\frac{dK}{dt} \neq 0 \,.$$

A vizsgált zárt rendszerünk azonban nemcsak töltött testeket tartalmaz, hanem az általuk keltett elektromágneses teret is. Ha az energia megmaradásának tételét minden zárt rendszerre érvényesnek akarjuk tekinteni, akkor fel kell tételeznünk, hogy *az elektromágneses térnek is van energiája*. (9,9) alapján nyilvánvaló, hogy az elektromágneses térnek

$$U = \frac{1}{8\pi}\int\left(\varepsilon\mathbf{E}^2 + \mu\mathbf{H}^2\right)dV$$ ((9,10). egyenlet)

energiát kell tulajdonítanunk. Így a zárt fizikai rendszer (töltött testek + elektromágneses tér) teljes energiájára érvényes a megmaradási tétel:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}(K+U)=0\\ K+U=\text{const}\end{array}\right\}$$ ((9,11). egyenlet)

Az elektromágneses tér energiájának (9,10) kifejezése az

$$u = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon\mathbf{E}^2 + \mu\mathbf{H}^2\right)$$ ((9,12). egyenlet)

folytonos függvénynek a *V* térfogatra vett integrálja. A térenergia tehát folytonosan oszlik el az egész tartományban. Az *u* folytonos függvényt az elektromágneses tér *energiasűrűségének* nevezzük. Az energiasűrűség (9,12) képletéből látszik, hogy *u* ott különbözik zérustól, ahol a térerősségek is zérustól különböznek, tehát ahol elektromágneses tér van. Az anyagi egyenletek figyelembevételével *u* a következő szokásosabb alakba írható:

$$u = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})$$ ((9,13). egyenlet).

Ezután foglalkozzunk a (9,6) egyenlet fizikai jelentésével, amely nem zárt rendszerre vonatkozik. Írjuk (9,6)-ot (9,7) és (9,10) felhasználásával a következőképpen:

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{dK}{dt} + \int_F \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})d\mathbf{F} + \int_V \mathbf{jE}dV$$ ((9,14). egyenlet).

A bal oldalon az *F* felülettel bezárt elektromágneses tér energiájának időegységre eső csökkenése áll. (9,6)-ból látható, hogy ez az energiacsökkenés három részből tevődik össze. Az első tag az elektromágneses tér által mozgatott töltések kinetikai energiájának időegységre eső növekedése. A harmadik tag az egész *V* térfogatra vett integrál. Ennek integrandusza csak vezetőkben különbözik zérustól. Tapasztalatból tudjuk, hogy a vezetőkben folyó áram hőt termel, az ún. *Joule-hőt*. Kézenfekvő ezt a tagot a Joule-hővel azonosítanunk. Eszerint a *V* térfogatban időegység alatt keletkezett hő kifejezése:

$$Q = \int_V \mathbf{j}\mathbf{E}\,dV$$ ((9,15). egyenlet).

Alkalmazzuk a (9,15) képletet *l* hosszúságú, *q* keresztmetszetű vékony homogén drótszakaszra, amelyben *I* erősségű áram folyik. Ebben az esetben $I = |\mathbf{j}|q$, $dV = q\,dl$. A **j** = σ**E** Ohm-törvény felhasználásával (9,15)-ből kapjuk, hogy

$$Q = \int_V \frac{j^2}{\sigma} q\,dl = I^2 \int_l \frac{dl}{\sigma q}$$ ((9,16). egyenlet).

Bevezetve a vezető szakasz ohmikus ellenállásának

$$R = \int_l \frac{dl}{\sigma q}$$ ((9,17). egyenlet)

kifejezését, a vezetőben időegység alatt keletkezett Joule-hőre a kísérleti fizikából jól ismert

$$Q = I^2 R$$ ((9,18). egyenlet)

képletet kapjuk. (9,18)-at Joule tapasztalati úton állapította meg, és a mindennapi gyakorlat igazolja. Ennélfogva az áram által vezetőben keltett hő (9,15) kifejezése a tapasztalattal egyezik. Ez a hő (9,14) szerint az elektromágneses tér energiáját fogyasztja.

(9,14) jobb oldalának második tagja az

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$ ((9,19). egyenlet)

kifejezés *F*-re vett felületi integrálja. Értéke tehát **S**-nek a határfelületen felvett értékeitől függ. Ezt a tagot a *V* tartomány *F* határfelületén az időegység alatt kiáramló energiával azonosítjuk. A (9,19) képlettel definiált vektort, az *energiaáram- sűrűséget*, bevezetőjéről *Poynting-vektornak* nevezzük.

Ezek után megfogalmazzuk a Maxwell-egyenletekből levezetett (9,14) energiaegyenlet fizikai jelentését. Az *F* felülettel határolt tartomány elektromágneses terének energiája három okból kifolyólag csökken: 1. Az erőtér mozgatja a töltött testeket, miközben munkát végez, és így azok kinetikai energiáját növeli (a jobb oldal első tagja); 2. a határfelületen energia áramlik ki (második tag); 3. a *V* térfogatban levő vezetőkben az áram hatására hő keletkezik (harmadik tag).

2. fejezet - ELEKTROSZTATIKA I. ELEKTROSZTATIKUS TÉR VÁKUMBAN

Az I. fejezetben a tapasztalatból kiindulva megfogalmaztuk azokat az alaptörvényeket, amelyek az elektromos és mágneses jelenségek fizikai sajátságait írják le. Ezek ismeretében a jelenségek igen széles köre tárgyalható elméleti úton. A következő fejezetekben végigmegyünk az egész elektrodinamikán, és a legfontosabb jelenségeken megmutatjuk a Maxwell-elmélet alkalmazását, miközben új ismereteket szerzünk az elektromágnesség területén.

Először az elektrosztatikus térrel foglalkozunk. Ezen a nyugvó töltések időben állandó elektromos terét értjük. Alapegyenleteit a Maxwell-egyenletekből kapjuk a következő feltételek figyelembevételével:

1. minden fizikai mennyiség állandó az időben;

2. a töltések nem mozognak, tehát **v** = 0; továbbá nincs áram: **j** = 0.

A Maxwell-egyenletek és a határfeltételek ezekkel a feltételekkel a következő alakot öltik:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=0 \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}=0$$
$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0 \qquad \operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\varrho$$
$$B_{n_2}-B_{n_1}=0 \qquad D_{n_2}-D_{n_1}=4\pi\eta$$
$$H_{t_2}-H_{t_1}=0 \qquad E_{t_2}-E_{t_1}=0$$

Látható, hogy sztatikus tér esetén a Maxwell-egyenletek két egymástól független egyenletrendszerre esnek szét. Egyik az elektromos, másik a mágneses tér tulajdonságait írja le.

A következőkben a vákuumbeli elektrosztatikus térrel foglalkozunk. Vákuumban $\varepsilon = 1$, ezért

D = **E**.

Az elektrosztatikus tér potenciálja

A sztatikai teret leíró alapegyenletek:

$\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$ ((10,1). egyenlet);

$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\varrho$ ((10,2). egyenlet).

Az elektrosztatika alapfeladata: megadott $\varrho = \varrho(\mathbf{r})$ töltéseloszlás **E**(**r**) elektrosztatikus terét kell meghatározni a tér minden pontjában.

A (10,1) egyenlet szavakkal kifejezve azt jelenti, hogy az elektrosztatikus tér rotációmentes: a térerősségvektor rotációja minden pontban eltűnik. A matematikából ismeretes, hogy a rotációmentes vektorterek skalártérből származtathatók. A (10,1) egyenlet ugyanis kielégül, ha az **E** térerősséget egy $\Phi(\mathbf{r})$ skalár függvény gradienseként írjuk fel:

$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi$ ((10,3). egyenlet).

(10,3) a (10,1) egyenlet általános megoldása. Jelentése a következő: ha a $\Phi = \Phi(\mathbf{r})$ skalárt ismerjük minden pontban, akkor a térerősséget (10,3) alapján egyszerűen gradiensképzéssel kapjuk. Feladatunkat tehát visszavezettük a *Φ* skalártér meghatározására. *Φ*-t a sztatikus tér *potenciáljának* nevezzük.

A térerősség (10,3) kifejezését írjuk be a (10,2) egyenletbe:

$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = 4\pi\varrho$ ((10,4). egyenlet).

Mivel

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \Delta\Phi,$$

a $\Phi(\mathbf{r})$ skalártér meghatározására szolgáló (10,4) egyenlet a következő alakot veszi fel:

$\Delta\Phi = -4\pi\varrho$ ((10,5). egyenlet).

(10,5) az elektrosztatikus potenciál *Poisson-egyenlete*. Adott $\varrho = \varrho(\mathbf{r})$ töltéseloszlás sztatikus potenciálját a (10,5) megoldásával kapjuk.

A térerősségre vonatkozó határfeltételek is felírhatók a *Φ* potenciál segítségével:

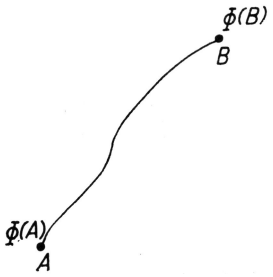
$(\operatorname{grad}\Phi)_{n_2} - (\operatorname{grad}\Phi)_{n_1} = -4\pi\eta$ ((10,6). egyenlet);

$(\operatorname{grad}\Phi)_{t_2} - (\operatorname{grad}\Phi)_{t_1} = 0$ ((10,7). egyenlet).

Az elektrosztatikus tér Φ potenciáljának konkrét fizikai jelentése van. E célból számítsuk ki azt a munkát, amelyet a tér végez, amikor a pozitív egységnyi elektromos töltést elmozgatja a tér *A* pontjából a *B*-be *(16. ábra)*:

$$\text{Munka} = \int_A^B \mathbf{E}\,d\mathbf{s} = -\int_A^B \text{grad}\,\Phi\,d\mathbf{s} = \Phi(A) - \Phi(B)$$ ((10,8). egyenlet).

16. ábra -



A végzett munka tehát az $\overline{AB}$ *út végpontjaiban érvényes potenciálok különbségével egyenlő*. (10,3)-ból következik, hogy az **E** elektromos térerősség és a Φ potenciál közötti kapcsolat egy konstans erejéig meghatározott. Ugyanis Φ-hez tetszőleges konstans hozzáadható anélkül, hogy **E** megváltozna. Ez lehetőséget ad arra, hogy a sztatikus potenciál értékét egy pontban tetszés szerint megválasszuk. Az elméleti fizikában a potenciál végtelen távoli pontban felvett értékét zérusnak választjuk: $\Phi(\infty) = 0$. (Technikai problémáknál általában a Föld potenciálját választjuk zérusnak.) Miután a potenciál végtelenben felvett értékét így előírtuk, nemcsak a potenciálkülönbségnek, hanem magának a potenciálnak is van konkrét fizikai jelentése: $\Phi(P)$ az a munka, amelyet az elektrosztatikus tér végez, amikor a pozitív egységnyi töltést a *P* pontból a végtelenbe mozgatja.

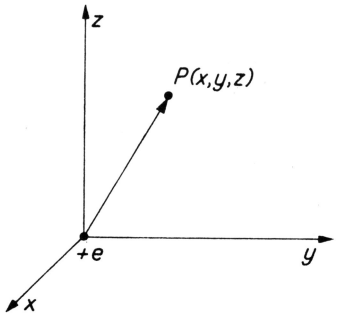
A (10,8) összefüggésből az is látszik, hogy a sztatikus tér munkája független az úttól; a kezdő- és végállapot egyértelműen meghatározza. Az elektrosztatikus tér tehát *konzervatív*.

A ponttöltés elektrosztatikus tere

Gondoljunk el pontszerű pozitív *e* elektromos töltést, amely a vonatkoztatási rendszerül választott derékszögű koordináta-rendszer origójában nyugszik. Határozzuk meg az általa keltett elektrosztatikus teret. Az előző pontban mondottak szerint előbb a tér potenciálját határozzuk meg. Keressük tehát a Φ potenciál értékét a tér valamely *P* pontjában. Az (*x*, *y*, *z*) koordinátájú *P* pont helyét az **r** = **r**{*x*, *y*, *z*) helyzetvektorral jellemezzük *(17. ábra)*. A potenciál meghatározására a (10,5) Poisson-egyenlet szolgál. A ponttöltésen (tehát az origón) kívül az egyenlet jobb oldala zérus. A megoldandó egyenlet tehát:

$\Delta\Phi = 0$ ((11,1). egyenlet).

17. ábra -



Az origóban nyugvó ponttöltés potenciáltere gömbszimmetrikus, a Φ potenciál tehát csak az origótól mért r távolságtól függ. Ezért célszerű a (11,1) egyenletet polárkoordinátákban felírni. Mivel 0 nem függ a polárszögektől, (11,1) polár- koordinátákban a következő alakot veszi fel:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr}=0$$ ((11,2). egyenlet).

Vezessük be a $\Psi = r\Phi$ függvényt. A (11,2) egyenlet Ψ-re a következő egyszerű alakba írható:

$$\frac{1}{r}\frac{d^2\Psi}{dr^2}=0$$ ((11,3). egyenlet).

Ennek az egyenletnek megoldása:

$\Psi(r)=Ar+B$ ((11,4). egyenlet),

ahol A és B meghatározandó állandók. (11,4)-ből a Φ potenciálra a következő kifejezést kapjuk:

$$\Phi=\frac{\Psi}{r}=\frac{B}{r}+A$$ ((11,5). egyenlet).

Az előző pontban a potenciált úgy normáltuk, hogy az $r=\infty$-ben eltűnik. Ebből következik, hogy az A konstans értéke zérus:

A = 0.

(11,5)-ből az elektromos térerősségre (10,3) alapján kapjuk:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\frac{B}{r} = \frac{B}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$ ((11,6). egyenlet).

Az origóban nyugvó ponttöltés tere sugárirányú gömbszimmetrikus tér. A *B* konstans értékét az (1,3a) egyenletből határozzuk meg. Integráljuk az elektromos térerősséget az origót körülvevő *r* sugarú gömbfelületre. Mivel **E** a felületen állandó és sugárirányú,

$$\int_G \mathbf{E}\,d\mathbf{F} = |E|\int_G dF = \frac{B}{r^2}4\pi r^2 = 4\pi B$$ ((11,7). egyenlet).

(11,7)-et (1,3a)-val összehasonlítva látható, hogy a *B* konstans értéke az *e* töltéssel egyezik meg.

Az origóban nyugvó ponttöltés sztatikus terének potenciálja és térerőssége tehát a következő:

$$\Phi(r) = \frac{e}{r}$$ ((11,8). egyenlet),

$$\mathbf{E} = \frac{e}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$ ((11,9). egyenlet).

A ponttöltés (11,9) sztatikus tere az (1) erőképlettel együtt lehetővé teszi az elektromos töltés egységének definiálását. E célból gondoljunk el egy másik *e′* ponttöltést az előbbitől *r* távolságra. Az *e* töltés (11,9) erőtere révén

$$\mathbf{F} = e'\mathbf{E} = \frac{e'e}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$ ((11,10). egyenlet)

erőt fejt ki az *e′* töltésre. (11,10) a kísérleti fizikából jól ismert *Coulomb-törvény*. Ennek alapján a töltés egységét a következőképpen definiáljuk: *egységnyi töltés a tőle 1 cm-re levő ugyancsak egységnyi töltésre 1 dyn erőt fejt ki*. Ez a töltés abszolút elektrosztatikai egysége.

(11,8) és (11,9) levezetésénél a töltést az egyszerűség kedvéért az origóba helyeztük. Ebben az esetben $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, ahol (*x*, *y*, *z*) annak a pontnak a koordinátái, amelyben a potenciált keressük. Ha *r* mindig a töltés és a *P*(*x*, *y*, *z*) pont közötti távolságot, $\frac{\mathbf{r}}{r}$ pedig a töltéstől a *P* pont felé mutató egységvektort jelenti, akkor ugyanezek a képletek vonatkoznak arra az esetre is, amikor a töltés egy tetszőleges, pl. a $Q(x_0, y_0, z_0)$ pontban nyugszik. Ekkor $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$. A potenciál a *P*(*x*, *y*, *z*) pontban tehát:

$$\Phi(x,y,z)=\frac{e}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$ ((11,11). egyenlet).

Több ponttöltés elektrosztatikus terét az egyes töltések terének szuperpozíciója adja meg. Ugyanis az alapegyenleteink lineáris volta miatt az egyes megoldások összege is megoldás:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\ldots=-\operatorname{grad}\Phi 1-\operatorname{grad}\Phi 2-\ldots=$$
$$=-\operatorname{grad}(\Phi_1+\Phi_2+\ldots)=-\operatorname{grad}\Phi$$ ((11,12). egyenlet),

ahol $\mathbf{E}_l$, $\mathbf{E}_2$, ...,; Φ_1, Φ_2, ... az egyes ponttöltések által keltett elektromos térerősségeket, illetve azok potenciáljait jelentik: $\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\cdots$. Ha az e_i ponttöltés helykoordinátái x_i, y_i, z_i, akkor

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(x,y,z)=\sum_i\dfrac{e_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}}\\ \text{vagyis rövidebben}\\ \Phi=\sum_i\dfrac{e_i}{r_i}\end{array}\right\}$$ ((11,13). egyenlet)

ahol $r_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}$.

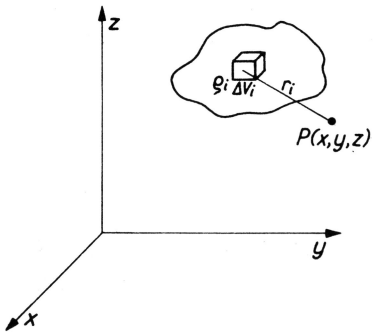
Az elektromos térerősséget (11,12) alapján az *x*, *y*, *z* koordináták szerinti gradiensképzéssel kapjuk.

A folytonos töltéseloszlás potenciálja

Tételezzük fel, hogy a *V* térfogatot az elektromos töltés folytonosan tölti ki ϱ sűrűséggel. Határozzuk meg ennek a töltéseloszlásnak az elektrosztatikus potenciálját a *P*(*x*, *y*, *z*) pontban *(18. ábra)*. A *V* térfogatot osszuk fel ΔV_i elemi tartományok összességére, és tegyük fel, hogy ΔV_i-ben a sűrűség középértéke ϱ_i. Elég kicsire választva a ΔV_i tartományt, a *P* pontból közelítőleg pontszerűnek tekinthető. A *P* pontbeli potenciált megkapjuk, ha ezen elemi tartományok – mint ponttöltések – potenciáljait összegezzük, majd a $\Delta V_i \to 0$ határátmenettel a folytonos eloszlásra térünk át. Így (11,13) felhasználásával a következő kifejezést kapjuk:

$$\Phi(x,y,z)=\lim_{\Delta V_i\to 0}\sum_i\frac{\varrho_i\Delta V_i}{r_i}=\int_V\frac{\varrho(x',y',z')dx'dy'dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$ ((12,1). egyenlet).

18. ábra -



Vagy rövidebb jelöléssel:

$$\Phi = \int_V \frac{\varrho dV}{r}.$$

A ponttöltés elektrosztatikus potenciálját a (10,5) Poisson-egyenlet megoldásával kaptuk. Ebből – a fizikában elég gyakori fenti gondolatmenettel – következtettünk a folytonos töltéseloszlás (12,1) potenciálkifejezésére. A gondolatmenet logikája alapján biztosak vagyunk abban, hogy (12,1) megoldása a Poisson-egyenletnek, azonban néhány ilyen egyszerűbb esetben mégis célszerű pontos matematikai úton is megmutatni, hogy a fenti gondolatmenettel nyert megoldások valóban megoldásai a probléma alapegyenletének, jelen esetben a (10,5)-nek. Ennek a nevelési szempontból is jogos követelménynek teszünk eleget, amikor most a matematikából ismert Green-tétel felhasználásával megmutatjuk, hogy (12,1) valóban kielégíti a (10,5) Poisson-egyenletet.

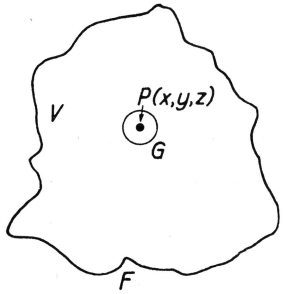
Tegyük fel, hogy Ψ és Φ differenciálhányadosukkal együtt reguláris függvényei az x, y, z változóknak a V térfogatban. A Green-tétel szerint ekkor fennáll a következő egyenlőség:

$$\int_V (\Psi \Delta \Phi - \Phi \Delta \Psi) dV = \int_F (\Psi \operatorname{grad} \Phi - \Phi \operatorname{grad} \Psi) d\mathbf{F}$$ ((12,2). egyenlet),

ahol F a V tartomány határoló felülete. Legyen $P(x, y, z)$ a V tartomány egy tetszőleges belső pontja *(19. ábra)*. A többi pont ettől számított távolságát jelöljük r-rel. Ψ-t válasszuk speciálisan úgy, hogy kielégítse a $\Delta \Psi = 0$ egyenletet. Nevezetesen, legyen $\Psi = \frac{1}{r}$. Ez a Ψ függvény a P pontban nem reguláris. Ezért (12,2) csak akkor alkalmazható, ha a P pontot egy P középpontú, R sugarú kis gömbbel körülvéve, kirekesztjük a tekintett V tartományból. Majd a G felületű gömböt összehúzzuk a P pontra. Ezek után alkalmazzuk a (12,2) Green-tételt az F és G által határolt tartományra. Ebben mind a Ψ, mind a Φ reguláris. A Φ függvényről tegyük fel, hogy az a keresett potenciállal egyezik meg. Így a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\int_{V\text{-gömb}} \frac{\Delta\Phi}{r} dV = \int_F \left(\frac{1}{r} \operatorname{grad} \Phi - \Phi \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) d\mathbf{F} + \int_G \left(\frac{1}{r} \operatorname{grad} \Phi - \Phi \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) d\mathbf{F}$$ ((12,3). egyenlet).

19. ábra -



A gömb felületén vett integrálban:

$$(\operatorname{grad} \Phi)_n = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=R}; \qquad \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r} \right)_n = \frac{1}{R^2},$$

$$dF = R^2 d\Omega,$$

ahol $d\Omega$ a P-ből kiinduló elemi térszög. Ha a G gömbfelületet folytonosan összehúzzuk a P pontra, a gömbre vett felületi integrál $-4\pi\Phi(P)$-hez tart. Ennélfogva:

$$\Phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Delta\Phi}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \int_F \left(\frac{1}{r} \operatorname{grad} \Phi - \Phi \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) d\mathbf{F}$$ ((12,4). egyenlet).

Most feltételezzük, hogy a tekintett tartomány az egész végtelen tér, és hogy a Φ potenciál differenciálhányadosaival együtt mindenütt reguláris. Ekkor a (12,4)-ben szereplő F felület a végtelen sugarú gömbfelület. Nézzük meg, hogy a fenti felületi integrál mihez tart ebben az $F \to \infty$ határátmenetben. A végtelenben Φ úgy tart zérushoz, mint $\frac{1}{r}$; a $(\operatorname{grad} \Phi)_n$ és a $\left(\operatorname{grad} \frac{1}{r} \right)_n$ pedig úgy, mint $\frac{1}{r^2}$. Az egész integrandusz tehát úgy viselkedik a végtelenben, mint $\frac{1}{r^3}$. A $dF = r^2 d\Omega$ felületelem másodfokú függvényként tart a végtelenhez. Ezért az egész felületi integrál zérushoz tart, amikor az F felületet teljesen kitoljuk a végtelenbe. Ennélfogva (12,4) a végtelen térre kiterjesztve a következő alakot veszi fel:

$$\Phi(P) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta\Phi}{r} dV$$ ((12,5). egyenlet).

A (10,5) Poisson-egyenlet alapján $\Delta\Phi$ helyébe $-4\pi\varrho$ írható. Így végül éppen a (12,1) megoldást kapjuk:

$$\Phi(P) = \int \frac{\varrho}{r} dV$$.

Ezzel megmutattuk azt, hogy (12,1) valóban a $\Delta\Phi = -4\pi\varrho$ Poisson-egyenlet megoldása.

Ha a folytonos töltéseloszlás nem térfogati, hanem felületi, η sűrűséggel, akkor a (12,I)-et megelőző gondolatmenethez hasonlóan, a Φ potenciálra a

$$\Phi = \int_F \frac{\eta}{r} dF$$ ((12,6). egyenlet)

kifejezést kapjuk. Erről is megmutatható a Green-tétellel, hogy kielégíti az elektrosztatika alapegyenleteit.

Abban az általánosabb esetben, amikor a térben térfogati és felületi töltéseloszlások egyaránt jelen vannak, az elektrosztatikus tér potenciálját (12,1) és (12,6) összege adja meg:

$$\Phi = \int_V \frac{\varrho}{r} dV + \int_F \frac{\eta}{r} dF$$ ((12,7). egyenlet).

Vezetők elektrosztatikus térben

A vezetőkre az jellemző, hogy elektromos tér esetén bennük áram indul meg az (5,12) Ohm-törvénynek megfelelően:

$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$.

A fenomenológiai elektrosztatikában a vezetők sajátságait az anyagra jellemző σ vezetőképességgel vesszük figyelembe. Az elektrosztatikus térben a töltések nyugalomban vannak, tehát nincs áram: $\mathbf{j} \equiv 0$. Ennélfogva az Ohm-törvényből következik, hogy sztatikus tér esetén a vezetőkben az elektromos térerősség mindenütt zérus:

$\mathbf{E} = 0$ ((13,1). egyenlet).

A $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ anyagi egyenlet alapján ez maga után vonja az elektromos indukcióvektor eltűnését is: $\mathbf{D} = 0$. Amiből az is következik, hogy a vezetőben sztatikus esetben

$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0$ ((13,2). egyenlet).

Ha ezt az egyenletet összevetjük az általános érvényű

$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\varrho$

második Maxwell-egyenlettel, látjuk, hogy elektrosztatikában a vezetőkben az elektromos töltés térfogati sűrűsége mindenütt zérus:

$\varrho = 0$ ((13,3). egyenlet).

Ebből következik, hogy az elektromos töltés a vezetők felületén helyezkedik el; tehát $\eta \neq 0$. Ha a töltött vezetőt külső elektromos térbe helyezzük, a töltés a felületen átrendeződik úgy, hogy belül az általa keltett tér a külső teret teljesen kompenzálja.

A térerősségekre vonatkozó határfeltételek tárgyalásánál (6. pontban) láttuk, hogy a töltött határfelület mentén:

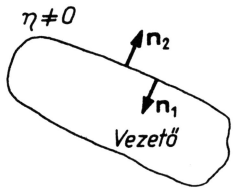
$D_{n_2} - D_{n_1} = 4\pi\eta$,

$E_{t_2} - E_{t_1} = 0$.

A 2-es index vonatkozzék a vezetőfelület külső normálisára. Mivel feltevésünk értelmében a vezetőn kívül vákuum van, ezért $D_{n_2} = E_{n_2}$, továbbá (13,1) miatt $E_{t_1} = 0$, $D_{n_1} = 0$, a töltött vezető felületén *(20. ábra)*:

$E_{n_2} = 4\pi\eta, \qquad E_{t_2} = 0$ ((13,4). egyenlet).

20. ábra -



A (13,4) összefüggések azt jelentik, hogy a töltött vezető felületét az elektromos térerősség vonalai merőlegesen hagyják el, vagyis a felületen

$\mathbf{E} = 4\pi\eta\mathbf{n}_2$ ((13,5). egyenlet).

Az **E** = –grad *Φ* összefüggés alapján (13,I)-ből következik, hogy az elektrosztatikus potenciál a vezető minden pontjában ugyanaz az érték:

$\Phi = \text{const}$ ((13,6). egyenlet).

Ezért a *Φ* potenciálnak a vezetőn felvett értékét szokás a vezető potenciáljának nevezni.

A (13,4) összefüggések kifejezhetők a potenciállal is. Töltött vezető felületén:

$$\left.\begin{aligned}(\text{grad}\,\Phi)_{n_2} &= -4\pi\eta \\ (\text{grad}\,\Phi)_{t_2} &= 0\end{aligned}\right\}$$ ((13,7). egyenlet)

A vezetők *η* felületi töltéseloszlását – a legegyszerűbb esetektől eltekintve – általában nem tudjuk megadni, hanem csak az egyes vezetők összes töltését. Ezért az általuk keltett elektrosztatikus teret általában nem lehet a (12,6) képlet alapján számítani. Ilyenkor a potenciálra vonatkozó Poisson-egyenletet kell megoldanunk, amely a vezetőkön kívül (*ϱ* = 0) kielégíti a

$\Delta\Phi = 0$ ((13,8). egyenlet)

egyenletet. Ennek megoldásánál tekintetbe kell vennünk, hogy

a) Φ a vezetőkön (és azok belsejében) állandó;

b) grad *Φ* normális komponensének a vezető felületére vett integrálja a vezető összes töltésének (–4*π*)-szeresével egyenlő [(13,7)-ből]:

$$\int_F (\text{grad}\,\Phi)_n\, dF = -4\pi e$$ ((13,9). egyenlet).

A legegyszerűbb esetekben természetesen megadható *η* a felület mentén. Ezekben az esetekben a *Φ* potenciál meghatározására célszerű használnunk az egyszerű (12,6) képletet.

Töltött vezető gömb elektrosztatikus tere

Gondoljunk el *R* sugarú vezető gömböt, amelynek középpontja koordináta-rendszerünk origójában van. A gömb töltése legyen *e*. Ez a töltés a gömbön egyenletesen oszlik el, tehát

$$\eta = \frac{e}{4\pi R^2} = \text{állandó}$$ ((14,1). egyenlet).

Az általa keltett sztatikus tér potenciálját a (12,6) képlet adja meg:

$$\Phi(P)=\int_F \frac{\eta}{r}dF=\frac{e}{4\pi R^2}\int\frac{dF}{r}$$ ((14,2). egyenlet).

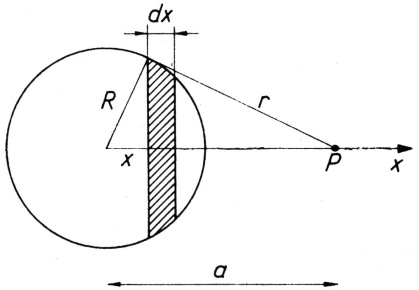
A *P* pontot az általánosság megszorítása nélkül választhatjuk a koordináta-rendszer *x* tengelyén, az origótól *a* távolságra. A *dF* felületelemet vegyük fel úgy, hogy az a *P*-ből *r* távolságra levő *dx* vastagságú gömbi zóna felszíne legyen. Ekkor

$dF = 2\pi R\,dx$.

A *21. ábrából* leolvasható, hogy az *r* távolság a következő négyzetgyökös kifejezés:

$$r=\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos(R,a)}=\sqrt{R^2+a^2-2ax}.$$

21. ábra -



Mivel ez a négyzetgyök távolságot jelent, értéke csak pozitív lehet. Ezek után kapjuk:

$$\Phi(P)=\frac{e}{2R}\int_{-R}^{+R}\frac{dx}{\sqrt{R^2+a^2-2ax}}=-\frac{e}{2Ra}\left[\sqrt{R^2+a^2-2ax}\right]_{-R}^{+R}=$$
$$=-\frac{e}{2Ra}\left\{\sqrt{R^2+a^2-2aR}-\sqrt{R^2+a^2+2aR}\right\}$$ ((14,3). egyenlet)

Ha a *P* pont a gömbön kívül van ($a > R$), akkor az első négyzetgyök értéke $a - R$, a másodiké a *P* pont helyzetétől függetlenül $a + R$. Ennélfogva az $a > R$ esetben $\left[\Phi(P)=\Phi_k\right]$:

$$\Phi_k=-\frac{e}{2Ra}(a-R-a-R)=\frac{e}{a}$$ ((14,4). egyenlet).

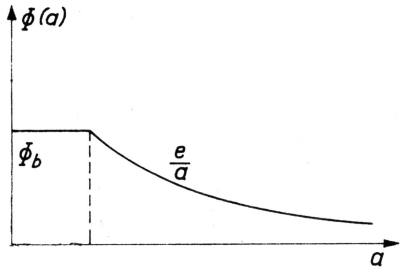
Ha a *P* pont a gömbön belül van (*a* < *R*), akkor az első négyzetgyök értéke *R* – *a* és így $[\Phi(P)=\Phi_b]$:

$$\Phi_b=-\frac{e}{2Ra}(R-a-a-R)=\frac{e}{R}$$ ((14,5). egyenlet).

(14,4)-ből látszik, hogy a gömbön kívüli pontban a potenciál olyan, mintha a teljes *e* töltés a gömb középpontjába lenne egyesítve; (14,5) pedig – az előző pontban mondottakkal megegyezésben – azt jelenti, hogy a gömbön belül a potenciál állandó. A gömb felszínén a potenciál megegyezik a belső potenciállal (lásd *22. ábra*):

$$\Phi_k(R)=\frac{e}{R}=\Phi_b$$ ((14,6). egyenlet).

22. ábra -



A töltött vezető felületén való áthaladáskor a potenciál folytonosan változik.

(14,4)-ből és (14,5)-ből következik, hogy a gömbön kívül az elektromos térerősség sugárirányú, és nagysága:

$$|\mathbf{E}|=\frac{e}{a^2}$$ ((14,7). egyenlet)

a gömbön belül pedig zérus, miként az az előzőek alapján várható is volt.

Töltött végtelen vezető sík elektrosztatikus tere

Tekintsünk egy, az *x* tengelyre merőlegesen origóban elhelyezett, töltött végtelen vezető síkot. Az *η* felületi töltéssűrűség szimmetria folytán itt is állandó. A potenciált most a Poisson-egyenlet megoldásával határozzuk meg. *Φ* a vezető síkon kívül kielégíti a

$\Delta\Phi = 0$ ((15,1). egyenlet)

egyenletet. Természetesnek látszik az a feltevés, hogy az elektrosztatikus tér a vezető lap mindkét oldalán az $x = 0$ síkra szimmetrikusan ugyanaz. Ezért Φ csak az $|x|$-től függ. Így a (15,1) egyenlet megoldása:

$\Phi = a|x| + \Phi_0$ ((15,2). egyenlet).

A térerősséget ebből gradiensképzéssel kapjuk:

$$E_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \begin{cases} -a, & \text{ha} \quad x > 0 \\ +a, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases}$$
$$E_y = E_z = 0$$
((15,3). egyenlet)

Mivel *a* állandó, a térerősség homogén, és mindkét oldalon ugyanakkora abszolút értékű. Az *a* állandó értékét az $x = 0$ helyen érvényes

$E_{n_2} - E_{n_1} = 4\pi\eta$ ((15,4). egyenlet)

határfeltételből határozzuk meg:

$E_x(x = +0) - E_x(x = -0) = -a - a = -2a$ ((15,5). egyenlet).

A (15,4) és a (15,5) egyenlet egybevetéséből kapjuk:

$a = -2\pi\eta$ ((15,6). egyenlet).

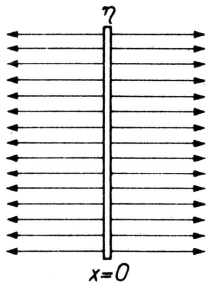
A teret leíró Φ potenciál tehát (lásd *23. ábra*):

$\Phi = -2\pi\eta|x| + \Phi_0$ ((15,7). egyenlet);

a térerősség pedig:

$$E_x = \begin{cases} 2\pi\eta, & \text{ha} \quad x > 0 \\ -2\pi\eta, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases}$$
$$E_y = E_z = 0$$
((15,8). egyenlet).

23. ábra -



Módosítsuk a feladatot olyképpen, hogy az előbbi töltött vezető sík mellé, tőle *d* távolságra másik vezető síkot helyezünk, amelynek töltéssűrűsége –*η*. Határozzuk meg a két töltött végtelen vezető sík elektrosztatikus terét. A második sík által keltett tér potenciálja az előbbiek szerint:

$\Phi' = 2\pi\eta|x-d| + \Phi_0'$ ((15,9). egyenlet).

Az alapegyenletek linearitásából következik, hogy az eredő tér potenciálja (15,7) és (15,9) összege:

$\Phi + \Phi' = 2\pi\eta\left(|x-d| - |x|\right) + \Phi_0 + \Phi_0'$ ((15,10). egyenlet).

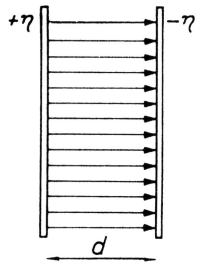
(15,l0) alapján meghatározható az elektrosztatikus tér a vezető síkok által elválasztott térrészekben:

$$
\left.\begin{array}{ll}
x<0 \text{ esetén:} & \Phi+\Phi' = 2\pi\eta d + \Phi_0 + \Phi_0' = \Phi_1 = \text{const} \\
 & E_x = E_y = E_z = 0 \\
x=0 \text{ helyen:} & \Phi+\Phi' = 2\pi\eta d + \Phi_0 + \Phi_0' = \Phi_1 \\
0<x<d \text{ tartományban:} & \Phi+\Phi' = -4\pi\eta x + \Phi_1 \\
 & E_x = 4\pi\eta, \qquad E_y = E_z = 0 \\
x=d \text{ helyen:} & \Phi+\Phi' = -2\pi\eta d + \Phi_0 + \Phi_0' = \Phi_2 = \text{const} \\
d<x \text{ esetén:} & \Phi+\Phi' = -2\pi\eta d + \Phi_0 + \Phi_0' = \Phi_2 = \text{const} \\
 & E_x = E_y = E_z = 0
\end{array}\right\}
$$

((15,11). egyenlet)

A második sík jelentősen megváltoztatta az előbbi teret. Nevezetesen: az elektrosztatikus tér most csak a két lap közötti $0<x<d$ tartományban különbözik zérustól. Itt a térerősség homogén, a lapokra merőleges, és abszolút értéke az előbbinek kétszerese. Az erővonalak a pozitív töltésű lapból kiinduló, az *x* tengellyel párhuzamos egyenesek. Az így meghatározott tér végtelen vezető síkok esetén igaz csak. Véges síkok esetében a lapok végeinél a tér már nem homogén. Eredményeink azonban jó közelítéssel használhatók olyan valóságos problémáknál is, amikor a két lap egymástól való *d* távolsága kicsi a lapok méreteihez képest (pl. síkkondenzátornál, *24. ábra*).

24. ábra -



Kapacitás. Vezetők által keltett sztatikus tér energiája

Ha a térben egyetlen vezető van, vagy a többi vezető tőle olyan messze helyezkedik el, hogy a tekintett vezető felületi töltéseloszlását nem befolyásolják (elméletileg végtelen távol vannak), akkor a vezető által keltett tér potenciálját kizárólag a rajta levő töltés és annak alakja határozza meg. A vezető potenciálját ebben az esetben az *e* töltésének és a vezető alakjától függő *C* állandónak a hányadosa adja meg:

$$\Phi = \frac{e}{C}$$ ((16,1). egyenlet).

A vezetőre jellemző *C* állandót a vezető *kapacitásának* nevezzük. A *C* kapacitás határozza meg tehát azt, hogy adott *e* töltés esetén mekkora a vezető potenciálja, vagy hogy adott potenciál mellett mekkora töltés vihető a vezetőre. (16,I)-ből látszik, hogy nagy kapacitású vezetőre kis potenciál esetén is nagy mennyiségű töltés vihető. Mivel a vezető potenciálja a belsejében érvényes állandó Φ_b potenciállal megegyezik, a vezető Φ potenciálja helyébe egyúttal a Φ_b belső potenciál helyettesíthető.

(14,6)-ból látszik, hogy vezető gömb kapacitása a gömb sugarával egyenlő:

$$C_{\text{gömb}} = \frac{e}{\Phi_b} = R$$ ((16,2). egyenlet).

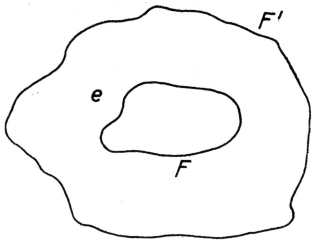
Az elméleti fizikában használatos CGS egységrendszerben a kapacitás egysége a hosszúság egysége, tehát a cm. Eszerint ha 1 cm sugarú gömböt 1 CGS egységnyi töltéssel feltöltünk, a vezető potenciálja is egységnyi lesz. A gyakorlati életben ennek a potenciálnak a 300-ad részét használjuk a potenciál egységére, és ezt nevezzük *voltnak* (jele: V). A töltés gyakorlati egységének a *coulombot* használjuk, amely a töltés CGS egységének $3 \cdot 10^9$-szerese (jele: C). A (16,1) képletnek megfelelően a kapacitás gyakorlati egysége a coulomb/volt. Ezt nevezzük *faradnak* (jele: F). A mondottak szerint $1\,\text{F} = 9 \cdot 10^{11}\,\text{cm}$.[1]

[1] Az elektromos és mágneses mennyiségek különböző egységrendszereivel és ezek egymással való kapcsolatával a könyv végén külön pontban foglalkozunk.

A töltött vezetők által keltett elektrosztatikus tér energiája kifejezhető a vezetők kapacitásával. Mivel ennek a kifejezésnek a gyakorlati elektromosságtanban fontos szerepe van, részletesebben foglalkozunk vele. Először az egyszerűség kedvéért egyetlen vezetőt tekintünk. A vezető felületén legyen *e* töltés, amelynek eloszlását az *η* sűrűségfüggvény írja le *(25. ábra)*. A töltött vezető által keltett sztatikus tér energiája (9,10) szerint a következő:

$$U = \frac{1}{8\pi}\int_V E^2 dV$$ ((16,3). egyenlet).

25. ábra -



Az integrál a vezetőn kívüli tartományra értendő. E célból vegyük körül az *F* vezetőt egy olyan nagy *F'* zárt felülettel, amely magában foglalja a keltett elektromos teret. (A számítás végén az *F'* felületet kitoljuk a végtelenbe.) A (10,3) összefüggés figyelembevételével (16,3) a következőképpen írható:

$$U = \frac{1}{8\pi}\int_V \mathbf{E}\left(-\operatorname{grad}\Phi\right)dV$$ ((16,4). egyenlet).

A vektoranalízisből ismert

$$\operatorname{div}\left(\Phi\mathbf{E}\right) = \Phi \operatorname{div}\mathbf{E} + \mathbf{E}\operatorname{grad}\Phi$$

összefüggés alapján (16,4) átalakítható a következőképpen:

$$U = \frac{1}{8\pi}\left[\int_V \Phi \operatorname{div}\mathbf{E}dV - \int_V \operatorname{div}\left(\Phi\mathbf{E}\right)dV\right].$$

Mivel az *F* és *F'* közötti tartományban töltés nincs, (10,2) alapján az első integrál eltűnik. A második integrált pedig Gauss-tétellel felületi integrállá alakítjuk:

$$U = -\frac{1}{8\pi}\int_F \Phi E_n dF + \frac{1}{8\pi}\int_F \Phi E_n dF$$ ((16,5). egyenlet).

Itt mindkét felületi integrálban E_n a térerősség kifelé mutató normális irányú komponense. Ha az *F'* felületet kitoljuk a végtelenbe, az első (*F'*-re vett) integrál eltűnik. Ugyanis a végtelenben az *F* vezető tere úgy viselkedik, mint a pontszerű töltésé, tehát Φ úgy tart zérushoz, mint $\frac{1}{r}$, a térerősség pedig úgy, mint $\frac{1}{r^2}$. Az integrandusz tehát $\frac{1}{r^3}$ szerint viselkedik. A felületelem r^2 szerint tart végtelenhez, ezért az egész integrál úgy tart a zérushoz, mint $\frac{1}{r}$. A vezető felületére vett második integrálban E_n helyére (13,4) alapján $4\pi\eta$ írható. Tehát:

$$U = \frac{1}{2}\int_F \Phi\eta \, dF$$.

Mivel a Φ potenciál a vezető felületén állandó, kiemelhető az integrál elé:

$$U = \frac{1}{2}\Phi\int_F \eta \, dF = \frac{1}{2}e\Phi$$ ((16,6). egyenlet).

A potenciál és a vezető kapacitása közötti (16,1) összefüggés alapján (16,6) a következőképpen is írható:

$$U = \frac{e^2}{2C}$$ ((16,7). egyenlet).

Eszerint a töltött vezetők által keltett elektrosztatikus tér energiáját a vezető töltése és kapacitása a (16,7) egyszerű összefüggés szerint határozza meg.

Az itt követett gondolatmenet könnyen általánosítható arra az esetre, ha a térben több töltött vezető van jelen. Ekkor a tér energiája:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} e_k\Phi_k$$ ((16,8). egyenlet),

ahol e_k és Φ_k a *k*-adik vezető töltése, ill. potenciálja, az összegezés pedig a jelen levő vezetőkre történik. *N* a vezetők számát jelenti.

A *k*-adik vezető Φ_k potenciálja most nemcsak az e_k töltéstől függ, hanem a többi vezető e_i töltésétől is. Mivel a töltések összegének potenciálja az egyes töltések potenciáljainak összegével egyenlő, Φ_k lineárisan függ e_i-től:

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^{N} e_i a_{ki} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$ ((16,9). egyenlet).

Az a_{ki} együtthatók a vezetők egymáshoz viszonyított helyzeteitől függnek. Ha η_i helyett bevezetjük az i-edik vezető egységnyi töltéseloszlását leíró η'_i sűrűségfüggvényt az

$$\eta_i = e_i \eta'_i$$ ((16,10). egyenlet)

képlet alapján, akkor a potenciálra vonatkozó (12,6) általános képletből következik:

$$a_{ki} = \int_{F_i} \frac{\eta'_i}{r_{ki}} dF_i$$ ((16,10). egyenlet).

r_{ki} az i-edik vezető integrációs felületelemének a k-adik vezető valamely rögzített pontjától mért távolságát jelenti.

Ha a (16,9) egyenleteket a töltésekre megoldjuk, akkor a vezetők e_i töltéseit a Φ_k potenciálok lineáris kifejezéseként kapjuk:

$$e_i = \sum_{k=1}^{N} C_{ik} \Phi_k$$ ((16,11). egyenlet).

$C_{ik} = D_{ik}/D$, ahol D a (16,9) egyenletben szereplő együtthatók determinánsa, D_{ik} pedig az a_i elemhez tartozó aldeterminánsa.

Az a_{ik} együtthatókat potenciál-együtthatóknak, a C_{ik} együtthatókat pedig kapacitás-együtthatóknak vagy az i-edik és k-adik vezető kölcsönös kapacitásának nevezzük. Segítségükkel a vezetők rendszerének elektrosztatikus energiáját (16,8), (16,9) és (16,11) alapján a következőképpen fejezhetjük ki:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} e_k \Phi_k = \frac{1}{2} \sum_{C_i} \sum_{k} a_{ik} e_i e_k = \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{k} C_{ik} \Phi_i \Phi_k$$ ((16,12). egyenlet).

Mivel az U energia állapotfüggvény (a rendszer feltöltéseinél végzett munka független az egyes részfolyamatok egymás utáni sorrendjétől), az a_{ik} és C_{ik} együtthatók szimmetrikusak:

$$a_{ik} = a_{ki}, \qquad C_{ik} = C_{ki}$$ ((16,13). egyenlet).

A C_{ii} együttható az i-edik vezető kapacitása.

Az a_{ik} és C_{ik} együtthatók elméleti meghatározása általában bonyolult matematikai feladat. Megoldása csak egyszerűbb esetekben lehetséges. Általában közelítéssel kell megelégednünk, vagy kísérleti úton határozzuk meg az együtthatókat.

Kondenzátor

Tekintsünk egymás közelében levő két töltött vezetőt, amelyek közül egyiknek *+e*, a másiknak *–e* a töltése. Az ilyen vezetőrendszert nevezzük *kondenzátornak*. A kettős végtelen vezető sík idealizált példáján láttuk, hogy a tér a két vezető közé sűrűsödik, és a vezetők környezetére korlátozódik. Az erővonalak a *+e* töltésű vezetőből indulnak ki, és a *–e* töltésűbe torkollanak. A vezető lapokat a kondenzátor fegyverzeteinek nevezzük. Az egyik potenciálja legyen Φ_1, a másiké Φ_2. A két fegyverzet közötti potenciálkülönbség:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \int_1^2 \mathbf{E}\, d\mathbf{s}$$ ((17,1). egyenlet).

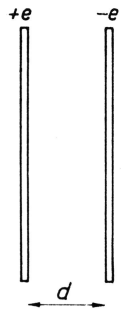
A kondenzátor kapacitásán a pozitív töltésű fegyverzet töltésének és a ($\Phi_1 - \Phi_2$) potenciálkülönbségnek a hányadosát értjük:

$$C = \frac{e}{\Phi_1 - \Phi_2}$$ ((17,2). egyenlet).

Példaként tekintsük a síkkondenzátort és a gömbkondenzátort. Előbb a síkkondenzátorral foglalkozunk. Síkkondenzátornál a két fegyverzet egymástól kis *d* távolságra levő töltött síklap *(26. ábra)*. Ha *d* kicsi a fegyverzetek méreteihez képest, akkor a 15. pont eredményeit használhatjuk. Eszerint a fegyverzetek közötti potenciálkülönbséget (15,1) alapján a következő képlet adja:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = 4\pi\eta\, d$$ ((17,3). egyenlet).

26. ábra -



A síkkondenzátor kapacitása tehát:

$$C_{\text{síkkond}} = \frac{e}{4\pi\eta\, d}$$ ((17,4). egyenlet).

Ha az egyik fegyverzet felületét *F*-fel jelöljük, akkor a homogén töltéseloszlás miatt $e = \eta F$. Ezt (17,4)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$C_{\text{síkkond}} = \frac{F}{4\pi\, d}$$ ((17,5). egyenlet).

A síkkondenzátor kapacitása tehát annál nagyobb, minél nagyobb a fegyverzetek felülete, és minél kisebb a közöttük levő *d* távolság.

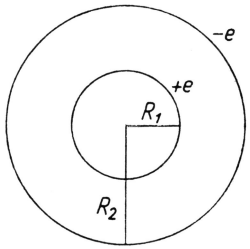
Gömbkondenzátoron két koncentrikus töltött vezető gömböt értünk. A belső gömb sugara legyen R_1, töltése $+e$; a külső gömbé R_2, töltése $-e$ *(27. ábra)*. A fegyverzetek közötti potenciálkülönbséget (17,1)-ből (14,6) felhasználásával kapjuk:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \int_1^2 \mathbf{E}\, d\mathbf{s} = \int_{R_1}^{R_2} |\mathbf{E}|\, dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{e}{r^2}\, dr =$$

$$= \left[-\frac{e}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{e}{R_1} - \frac{e}{R_2} = \frac{e}{R_1}\frac{R_2 - R_1}{R_2}$$ ((17,6). egyenlet)

(Itt az integrálást a sugárirányú vonal mentén végeztük el.)

27. ábra -



A gömbkondenzátor kapacitása (17,2) és (17,6) alapján tehát:

$$C_{\text{gömbkond}} = R_1 \frac{R_2}{R_2 - R_1}$$ ((17,7). egyenlet).

(17,7) -ből látszik, hogy a gömbkondenzátor kapacitása a belső gömb R_1 kapacitásának $R_2/(R_2 - R_1)$-szerese. Mivel $R_2 - R_1$ általában kicsi, ez a tényező nagyon jelentős. Ezért kondenzátorokon adott potenciálkülönbség esetén tekintélyes töltésmennyiség halmozható fel.

Ponttöltés végtelen kiterjedésű vezető síkkal szemben

Az előző pontokban olyan esetekben határoztuk meg az elektrosztatikus tér potenciálját, amikor a töltéseloszlás egyszerűen megadható. A 13. pont végén már említettük, hogy a legegyszerűbb esetektől eltekintve, a vezetők η töltéseloszlása általában nem adható meg előre. Ezért az elektrosztatikus tér meghatározásánál az idézett helyen említett módon kell eljárnunk. A gyakorlatilag felmerülhető esetek jelentős részénél éppen a felületi töltéseloszlás meghatározása a feladat. Ilyenkor általában arról van szó, hogy ismert elektromos térbe vezetőt helyezünk, és azt vizsgáljuk, hogy a behelyezett vezető mennyire változtatja meg az előbbi (a vezető jelenléte nélküli) teret. A vezetők térmódosító hatása abból származik, hogy az adott elektromos tér hatására a vezetőben megosztás útján elektromos töltés keletkezik, és ennek elektrosztatikus tere hozzáadódik az előbbi térhez.

Foglalkozzunk azzal az egyszerűbb esettel, amikor egy végtelen vezető síkkal szemben pontszerű elektromos töltés helyezkedik el. A vezető sík legyen az *xy* sík. A $+e$ töltést helyezzük a pozitív *z* tengelyre az origótól *d* távolságra. Határozzuk meg a tér potenciálját.

A keresett Φ potenciálnak a 13. pont szerint ki kell elégítenie a következő feltételeket:

1. $\Delta\Phi = 0$ a vezetőn kívüli pontokban, ahol nincs töltés;

2. Φ a vezető felületén és az alsó féltérben állandó;

3. $\oint (\operatorname{grad}\Phi)_n \, dF = -4\pi e$ a $z > 0$ felső féltér minden olyan zárt felületére, amely a $+e$ töltést belsejében tartalmazza.

Ha a vezető sík nem lenne jelen, akkor $\Phi' = \frac{e}{r}$ lenne a potenciál. Ez azonban nem elégíti ki a 2. feltételt, ugyanis: a $z = 0$ sík mentén nem állandó. Ki kell egészíteni úgy, hogy a fenti feltételek teljesüljenek. E célból a $+e$ töltés síkra tükrözött pontjában $-e$ töltést gondolunk. A síkra szimmetrikusan elhelyezkedő két ponttöltés potenciálja a tér azon *P* pontjában, amely a $+e$ töltéstől *r*, a $-e$ töltéstől *r'* távolságra van, a következő:

$\Phi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r'}$ ((18,1). egyenlet).

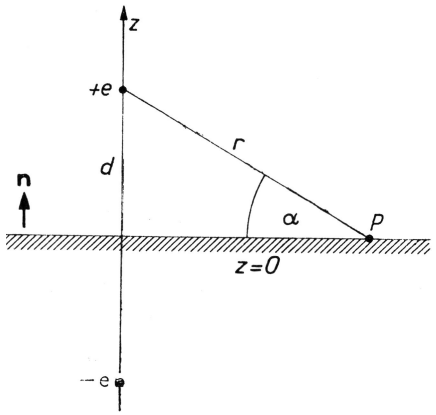
Azonnal belátható, hogy (18,1) a keresett potenciál a $z > 0$ féltérben. Nevezetesen (18,1) kielégíti a fenti három feltételt. A 11. pontban láttuk, hogy ponttöltések potenciáljainak összege kielégíti a $\Delta\Phi = 0$ egyenletet. Mivel a vezető sík pontjaiban $r = r'$, Φ az egész síkon az állandó zérus értéket veszi fel. Az alsó féltérre is a zérus értéket fogadjuk el megoldásnak, mert az eredeti problémánál az alsó féltérben nincs töltés, így ott a potenciál gradiensének bármely zárt felületre vett integrálja zérussal egyenlő. Ha itt Φ-t zérusnak választjuk, akkor ez a követelmény is teljesül.

(18,1) tehát helyesen írja le az elektrosztatikus teret a $z > 0$ felső féltérben *(28. ábra)*. A tér a ponttöltésen kívül mindenütt forrásmentes, az erővonalak a $+e$ töltésből indulnak ki, és a vezető síkba merőlegesen torkollanak. Határozzuk meg a sík felületén kialakult töltéseloszlást. Ha a sík normálisát a felső féltér felé irányítjuk, akkor (13,4) szerint fennáll a következő összefüggés:

$$\eta = \frac{1}{4\pi} E_n = -\frac{1}{4\pi} (\operatorname{grad} \Phi)_n = -\frac{1}{4\pi} \left[e \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r} \right)_n - e \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r'} \right)_n \right] =$$

$$= -\frac{e}{4\pi} \left(+\frac{1}{r^2} \cos\alpha + \frac{1}{r^2} \cos\alpha \right) = -\frac{e}{2\pi r^2} \cos\alpha$$

28. ábra -



A *28. ábrából* látható, hogy $\cos\alpha = \frac{d}{r}$, így a felületi töltéssűrűség kifejezése a következő:

$$\eta = -\frac{ed}{2\pi r^3}$$ ((18,2). egyenlet).

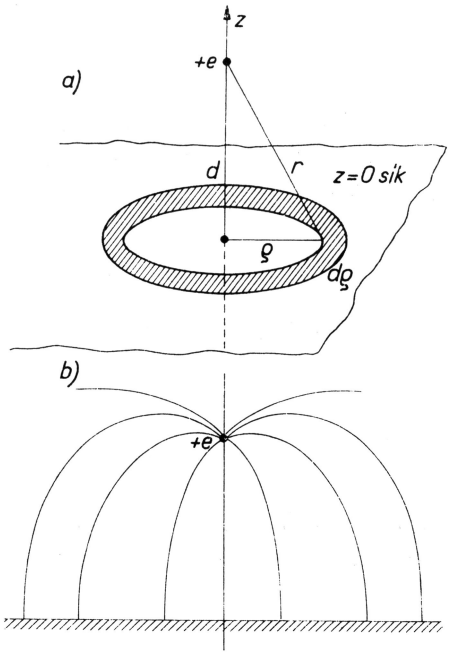
A vezető sík mentén tehát olyan töltéseloszlás alakul ki, amelynek sűrűsége a *+e* töltéstől mért távolság harmadik hatványával fordítva arányos.

A végtelen vezető sík teljes töltését a (18,2) sűrűség *z* = 0 síkra vett integrálja adja meg. A *dF* felületelemet vegyük az origó mint középpont körüli körgyűrűnek *(29/a ábra)*:

$$dF = 2\pi\varrho\, d\varrho, \qquad r = \sqrt{\varrho^2 + d^2}\,.$$

$$\int \eta\, dF = -\frac{e}{2\pi} d\, 2\pi \int_0^\infty \frac{\varrho\, d\varrho}{\left(\varrho^2 + d^2\right)^{3/2}} = ed \left[\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + d^2}} \right]_{\varrho=0}^{\varrho=\infty} = -e$$ ((18,3). egyenlet).

29. ábra -



A vezető sík össztöltése tehát ugyanolyan nagyságú, de ellentétes előjelű, mint a síkkal szemben levő ponttöltésé. A ponttöltésből kiinduló valamennyi erővonal a síkba torkollik a felületre merőlegesen.

A *+e* ponttöltés terének megosztó hatására *(29/b ábra)* a vezető síkban a pozitív és negatív töltések szétválnak olyan mértékben, hogy a vezető belsejében a teret éppen kompenzálják. Az azonos előjelű töltés a vezető lap ellentétes oldalán helyezkedik el. A mi esetünkben ezt pl. földeléssel gondolatban elvezettük a síkból. Így a keltő töltéssel ellentétes előjelű töltés marad a síkon. (Hasonló a helyzet a kondenzátoroknál is.)

Ha töltött vezető közelébe ponttöltést viszünk – pl. a tér kimérésére –, akkor a ponttöltés vezető által módosított tere a vezető terével együtt alakítja ki az eredő elektromos teret a vezető közelében. Ezért a vezető közelében ilyen módon sohasem a töltött vezető által eredetileg keltett teret mérjük. Éspedig annál kevésbé, minél nagyobb a próbatest töltése, és minél közelebb van a vezetőhöz.

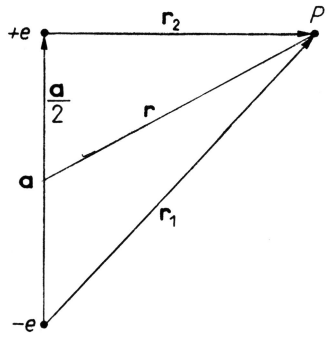
Dipólus elektrosztatikus tere

A természetben gyakran előfordul olyan töltéseloszlás, amelynél két ellentétes előjelű, azonos nagyságú, pontszerű töltés van egymáshoz igen közel *(30. ábra)*. Az ilyen töltésrendszert elektromos *dipólusnak* nevezzük. A –*e* töltésből a +*e*-be mutató, őket összekötő vektort jelöljük **a**-val. A

$\mathbf{p} = e\mathbf{a}$ ((19,1). egyenlet)

vektort a dipólusra jellemző mennyiségnek tekintjük, és *dipolmomentumnak* nevezzük. Látni fogjuk, hogy a dipólus elektrosztatikus terét (a távolságfüggésen kívül) a dipolmomentum határozza meg.

30. ábra -



Határozzuk meg a **p** momentumú dipólus elektrosztatikus terét a dipólustól távoli *P* pontban. A tér potenciálja két pontszerű töltés potenciáljának összegeként írható fel:

$$\Phi(P) = e\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = e\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$ ((19,2). egyenlet).

r_1 a negatív, r_2 a pozitív töltés távolsága a *P* ponttól. A megfelelő $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ vektort irányítsuk a töltésektől a *P* pont felé. A dipólus középpontjától a *P* pontig húzott vektort jelöljük **r**-rel. A rajzból látható, hogy fennállnak a következő összefüggések:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}}{2}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{a}}{2}$$ ((19,3). egyenlet).

Ezek négyzetre emelésével kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= r^2 + (\mathbf{r},\mathbf{a}) + \frac{a^2}{4} \\ r_2^2 &= r^2 - (\mathbf{r},\mathbf{a}) + \frac{a^2}{4} \end{aligned}\right\}$$ ((19,4). egyenlet)

Ha a *P* pont messze van a dipólustól, vagy a két töltés igen közel van egymáshoz, akkor az a^2-es tagok elhagyhatók a többi mellett. Ebben a közelítésben írható:

$$r_1^2 = r^2 + (\mathbf{r},\mathbf{a}); \quad r_2^2 = r^2 - (\mathbf{r},\mathbf{a})$$ ((19,5). egyenlet).

$$r_1^2 - r_2^2 = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 2(\mathbf{r},\mathbf{a})$$ ((19,6). egyenlet).

A (19,6)-ból adódó

$$r_1 - r_2 = \frac{2}{r_1 + r_2}(\mathbf{r},\mathbf{a})$$

kifejezést (19,2)-be beírva, kapjuk, hogy

$$\Phi(P) = \frac{e}{r_1 r_2} \cdot \frac{2}{r_1 + r_2}(\mathbf{r},\mathbf{a}) = \frac{2}{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}(\mathbf{p},\mathbf{r})$$.

Vegyük figyelembe itt is, hogy *a* kicsi az r_1-hez és r_2-höz képest. Ekkor $r_1 + r_2 \approx 2r$, $r_1 r_2 \approx r^2$. A dipólus sztatikus terének potenciálja az alkalmazott közelítésben tehát:

$$\Phi(P) = \frac{(\mathbf{p},\mathbf{r})}{r^3}$$ ((19,7). egyenlet).

A (19,7) potenciálképlet levezetésénél használt közelítések annál inkább érvényesek, minél közelebb van a két töltés egymáshoz, vagyis minél kisebb az **a** távolság. Ha a dipólus jellemző adatának a **p** dipolmomentumot tekintjük, és a pontszerű dipólus határesetére térünk át, akkor (19,7) a potenciál pontos kifejezését adja. Könnyen belátható, hogy (19,7) a következő alakba is írható:

$$\Phi = \left(\mathbf{p}, \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)$$ ((19,8). egyenlet),

ahol a grad a dipólus koordinátái szerinti deriváltakat tartalmazza.

A pontszerű dipólus elektrosztatikus terének **E** térerősségét (19,7)-ből gradiensképzéssel kapjuk:

$$E = -\operatorname{grad}\Phi = -\operatorname{grad}\frac{(\mathbf{p},\mathbf{r})}{r^3} = \frac{3(\mathbf{p},\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}$$ ((19,9). egyenlet).

(19,9)-ből látszik, hogy a pontszerű dipólus terének **E** térerőssége a dipólustól mért távolság harmadik hatványával fordítva arányos. A dipólus helyén tehát erősebb szingularitása van, mint a ponttöltés terének.

Kettősréteg

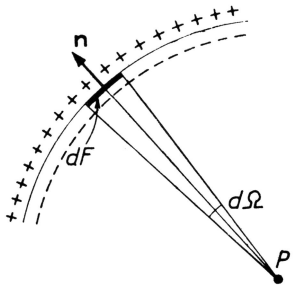
Tekintsünk egy felületet, és tételezzük fel, hogy az egyik oldala pozitív, a másik oldala ugyanolyan nagyságú negatív elektromossággal van bevonva. Az ilyen folytonos töltéseloszlást nevezzük *kettősrétegnek*. A kettősréteg felfogható úgy is, mint folytonos felületi dipóluseloszlás. Az elemi dipólusok momentumának iránya a negatív töltésű oldaltól a pozitív felé mutató felületi normális irányával egyezik meg.

A dipóluseloszlás jellemzésére a felületi *dipolmomentum-sűrűséget* használjuk. Ezt a mennyiséget a Bevezetés (10) egyenletével definiáljuk és **v**-vel jelöljük.

Feladatul tűzzük a kettősréteg elektrosztatikus terének a meghatározását. A kettősréteget $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{v}\Delta F$ momentumú elemi dipólusok felületi eloszlásaként fogjuk fel *(31. ábra)*. A tér potenciálja ezen elemi dipólusok (19,8) potenciáljainak összegezésével állítható elő:

$$\Phi(P) = \sum\left(\Delta\mathbf{p}, \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) = \sum\left(\mathbf{v}, \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)\Delta F$$.

31. ábra -



Ha a felület *ΔF* elemekre való feloszlását minden határon túl finomítjuk, akkor az összegezés a felületre vett integrálba megy át. A folytonos dipóluseloszlás határesetében tehát:

$$\Phi(P) = \int_F \left(\mathbf{v}, \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) dF$$ ((20,1). egyenlet).

(Megjegyezzük, hogy a grad képzése a felületi pontok koordinátái szerint értendő.)

A potenciál (20,1) kifejezését kis átalakítással még egyszerűbb alakra hozhatjuk. Nevezetesen:

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$ ((20,2). egyenlet),

ahol $\frac{\mathbf{r}}{r}$ a *P* ponttól a felületi pont felé mutató egységvektor. A **v** dipolmomentum-sűrűséget írjuk a következő alakba:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{n}$$ ((20,3). egyenlet),

ahol **n** a felület pozitív bevonata felé mutató normális irányú egységvektor.

A (20,2) és (20,3) kifejezéseket (20,1)-be beírva, kapjuk a

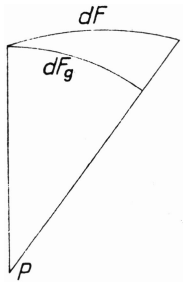
$$\Phi(P) = -\int \frac{v}{r^2} \left(\mathbf{n}, \frac{\mathbf{r}}{r} \right) dF = -\int v \cos(n,r) \frac{dF}{r^2}$$ ((20,4). egyenlet)

összefüggést. Itt cos (*n*, *r*) az **n** és $\frac{\mathbf{r}}{r}$ egységvektorok által bezárt szög cosmusa.

Az értelmezésből következik, hogy cos (*n*, *r*) akkor pozitív, ha a *P* pont a negatív bevonatú oldalon van, és negatív, ha a másikon. A *dF* cos (*n*, *r*) abszolút értéke a *dF* felületelemnek azon gömbfelületre való vetülete, amelynek középpontja a *P* pont, és átmegy a kiszemelt felületi ponton *(32. ábra)*. Tehát

$$dF\left|\cos(nr)\right| = dF_g.$$

32. ábra -



Az r sugarú gömbfelület dF felületeleme r^2-szerese annak a $d\Omega$ térszögnek, amely alatt a dF_g, illetve dF_g a P pontból látszik:

$$dF_g = r^2 d\Omega .$$

Vegyük először azt az esetet, amikor a P pont a negatív bevonatú oldalon van. Ekkor cos (n, r) > 0, ezért dF cos (n, r) = $r^2 d\Omega$. Így a potenciál

$$\Phi(P_-) = -\int v \, d\Omega$$ ((20,5). egyenlet).

Ha a P pont a pozitív bevonatú oldalon van, akkor (n, r) tompaszög, így cos (n, r) < 0, ezért dF cos (n, r) = $-r^2 d\Omega$. Tehát

$$\Phi(P_+) = \int v \, d\Omega$$ ((20,6). egyenlet).

A (20,5) és (20,6) képletek egybefoglalhatók, ha a $d\Omega$ térszögnek előjelet tulajdonítunk. Megállapodunk abban, hogy $d\Omega$-t akkor tekintjük pozitívnak, ha a P pont a pozitív bevonatú oldalon van, és negatívnak, ha a negatív töltésű oldalon. Ekkor a kettősréteg potenciálja így írható:

$$\Phi(P) = \int v \, d\Omega$$ ((20,7). egyenlet).

Homogén kettősréteg esetén v = const, ezért

$$\Phi(P) = v \int d\Omega = v\Omega$$ ((20,8). egyenlet),

ahol Ω az egész felület térszöge a P pontból.

(20,8)-ból látható, hogy homogén zárt kettősréteg potenciálja bármely külső pontban zérus, a belső pontokban pedig állandó, és értéke $\pm 4\pi v$ aszerint, hogy a pozitív vagy a negatív bevonatú oldal van belül.

Vizsgáljuk meg, hogyan változik a kettősréteg potenciálja, ha a *P* pont áthalad a kettősrétegen. Tegyük fel, hogy a felület *P′* pontján halad át. A potenciál *P′*-től távoli felületelemektől származó járuléka folytonosan változik, mert ezekre vonatkozóan az integrandusz reguláris. Ugrásszerű változás csak a *P′* pont közvetlen közeléből eredhet, ezért elég a *P′* pont körüli *dF* felületelem járulékát vizsgálni. Ebben a felületelemben *v* állandónak vehető. Ha a negatív bevonatú oldalról közeledik a *P* pont *P′*-höz, akkor a térszög -2π-hez tart. A felületelemen való áthaladás után *P′* közvetlen közelében a felületelem térszöge $+2\pi$. A potenciál a kettősrétegen való áthaladás során tehát ugrást szenved. Az ugrás nagyságát az áthaladás pontjában érvényes $v(P')$ momentumsűrűség szabja meg:

$$\Phi_+(P') - \Phi_-(P') = 4\pi v(P')$$ ((20,9). egyenlet).

Térfogati dipóluseloszlás (elektrétek) elektrosztatikus tere

Tételezzük fel, hogy a tér valamely *V* térfogatát olyan anyag tölti ki, amelyben elemi dipólusok folytonosan oszlanak el. Ilyen térfogati dipóluseloszlást pl. a következőképpen készíthetünk. Olvasztott gyantát vagy ként homogén elektromos térbe helyezünk. Az elektromos tér hatására az anyag dipolmomentummal rendelkező molekulái beállnak a térerősség irányába. Ezután a gyantát kihűlni hagyjuk, amíg megszilárdul. Ezáltal a molekulán belüli dipólusok a szilárd gyantában rögzítődnek. Az így megszilárdított gyanta vagy kén az elektromos tér kikapcsolása után is megőrzi elektromos dipolmomentumát, amely folytonosan oszlik el az anyagban. Az állandó térfogati dipoleloszlással rendelkező testeket *elektréteknek* nevezzük.

A térfogati dipóluseloszlás jellemzésére a (10) egyenlettel definiált **P**(**r**) dipolmomentum-sűrűséget használjuk. Az általa keltett sztatikus tér potenciálját elemi dipólusok potenciáljainak összegeként állítjuk elő, majd a folytonos eloszlás határesetére áttérve, az összeg térfogati integrálba megy át. A keresett potenciál tehát a következő:

$$\Phi = \int_V \left(\mathbf{P}, \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) dV$$ ((21,1). egyenlet).

[Ez a képlet a (20,1) potenciálképletnek térfogati analogonja.] Az integrálás arra a *V* tartományra terjesztendő ki, ahol **P** zérustól különböző, tehát a térfogati dipóluseloszlással rendelkező anyag térfogatára.

A potenciál (21,1) képlete a

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{P}\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\operatorname{div}\mathbf{P} + \left(\mathbf{P}, \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)$$

vektoranalitikai összefüggés felhasználásával a következő alakba írható:

$$\Phi = -\int_V \frac{\operatorname{div}\mathbf{P}}{r} dV + \int_V \operatorname{div}\left(\mathbf{P}\frac{1}{r}\right) dV$$ ((21,2). egyenlet).

A második integrált Gauss-tétellel felületi integrállá alakítjuk:

$$\Phi = -\int_V \frac{\operatorname{div}\mathbf{P}}{r}\,dV + \int_F \frac{P_n}{r}\,dF$$ ((21,3). egyenlet).

A felületi integrál a *V* tartomány *F* határoló felületére terjesztendő ki. A

$$\varrho_p = -\operatorname{div}\mathbf{P}$$
$$\eta_p = P_n$$

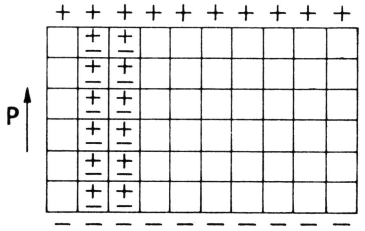
jelölésekkel (21,3) olyan alakra hozható, mint a ϱ_p térfogati és η_p felületi sűrűségű töltéseloszlás potenciálja:

$$\Phi = \int_V \frac{\varrho_p}{r}\,dV + \int_F \frac{\eta_p}{r}\,dF$$ ((21,4). egyenlet).

A térfogati dipoluseloszlással tehát ekvivalens a $\varrho_p = -\operatorname{div}\mathbf{P}$ sűrűségű térfogati és az $\eta_p = P_n$ sűrűségű felületi töltéseloszlás. A ϱ_p, η_p sűrűségeket *polarizációs* töltéssűrűségeknek nevezzük.

Ha a **P** dipolmomentum-sűrűség az anyag belsejében állandó, vagyis a dipoleloszlás homogén, akkor $\operatorname{div}\mathbf{P} = -\varrho_p = 0$. Szemléletesen ez annyit jelent, hogy a homogén dipoleloszlású anyag belsejében minden elemi térfogatban ugyanannyi pozitív töltés van, mint negatív. Az egymáshoz szabályosan illeszkedő elemi dipólusok pozitív és negatív pólusai egymást kompenzálják *(33. ábra)*. A felület mentén marad csak kompenzálatlan pólus, és ezért a felületnek van töltése: a **P** irányával megegyező normálisú felületen pozitív, az ellentétesen negatív a felületi töltés.

33. ábra -



A 12. pontban a Green-tétel felhasználásával elvégzett bizonyítás alapján nyilvánvaló, hogy az elektrét (21,3) potenciálja kielégíti a

$$\Delta\Phi = 4\pi \operatorname{div}\mathbf{P}$$ ((21,5). egyenlet)

egyenletet. A térerősség és a potenciál közötti

$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi$

összefüggést figyelembe véve, látható, hogy fennáll a

$\operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}$ ((21,6). egyenlet)

egyenlet. Az elektromos térerősség az elektréten kívül tehát divergenciamentes, azon belül pedig forrásai vannak ott, ahol $\operatorname{div} \mathbf{P} \neq 0$. A (21,6) írható a következő alakban is:

$\operatorname{div}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 0$ ((21,7). egyenlet).

Az (5,1)–II. Maxwell-egyenlettel összevetve, látható, hogy térfogati dipóluseloszlás esetén a **D** indukcióvektor és az **E** elektromos térerősség között fennáll a

$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ ((21,8). egyenlet)

általános összefüggés. Az elektréten kívül **P** = 0, ezért **D** = **E**.

3. fejezet - ELEKTROSZTATIKA II. ELEKTROSZTATIKUS TÉR SZIGETELŐKBEN. DIELEKTRIKUMOK

Az előző pontokban az elektrosztatikus tér törvényszerűségeit olyan esetekben vizsgáltuk, amikor a teret keltő töltésrendszer vákuumban helyezkedik el. Ekkor a térre jellemző két vektor, az elektromos térerősség (**E**) és az elektromos indukció vektora (**D**) azonosan megegyezik. A gyakorlati életben előforduló problémáknál azonban általában nem ez a helyzet, hanem a teret valamilyen makroszkopikus közeg – a legegyszerűbb esetben pl. levegő – tölti ki. Faraday felismerése óta tudjuk, hogy a közegnek igen lényeges szerepe van az elektromos tér kialakításában. A közeg befolyására az elektromos térerősség megváltozik a vákuumhoz képest. A jelenségek fenomenológiai leírásánál a közeget az anyagra jellemző ún. *anyagi együtthatókkal* vesszük tekintetbe.

A következő pontokban a szigetelőanyagok, az ún. *dielektrikumok* elektromos teret befolyásoló hatását vizsgáljuk. Egyelőre az izotrop testek egyszerűbb esetére korlátozódunk. Izotrop közegek dielektromos együtthatója (ε) skalár, és a legtöbb esetben állandónak tekinthető. Az állandó dielektromos együtthatójú anyagokat homogén izotrop dielektrikumoknak nevezzük. Az általános esetben természetesen ε függhet a helytől és az anyag sűrűségétől.

Izotrop közegekben az elektromos indukció és az elektromos térerősség között a (16) összefüggés áll fenn:

$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$.

Sztatikus tér esetén mind az **E**, mind a **D** vektor a helynek a függvénye: $\mathbf{D} = \mathbf{D}(x, y, z)$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$. Homogén szigetelők esetén ε állandó, inhomogén szigetelőknél pedig ε is a hely függvénye.

Az elektrosztatikus tér alapegyenletei dielektrikumokban

Az elektromos teret leíró alapegyenleteket a Maxwell-egyenletek szolgáltatják:

$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0$ ((22,1). egyenlet),

$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\varrho$ ((22,2). egyenlet).

E differenciálegyenletekhez hozzá kell vennünk a **D** és **E** közötti kapcsolatot megadó

$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ ((22,3). egyenlet)

anyagi egyenletet.

Az elektrosztatika alapfeladata: a (22,1)–(22,3) egyenletek megoldásával meghatározni a megadott $\varrho = \varrho(x, y, z)$ töltéseloszláshoz tartozó $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}(x, y, z)$ vektortereket. A 6. pontban láttuk, hogy a különböző közegekre nyert megoldásokat az egymással érintkező közegek határfelületére érvényes ún. *határfeltételek* segítségével kapcsoljuk össze. E határfeltételek a következők:

$D_{n_2} - D_{n_1} = 4\pi\eta$ ((22,4). egyenlet),

$E_{t_2} - E_{t_1} = 0$ ((22,5). egyenlet).

Az *n*, illetve *t* indexek a normális, illetve tangenciális komponenseket jelölik. Az indukcióvektor tangenciális, valamint a térerősségvektor normális komponenseire vonatkozó határfeltételek a (22,4), (22,5) egyenletekből a (22,3) anyagi egyenlet felhasználásával könnyen felírhatók.

(22,1)-ből látszik, hogy az elektrosztatikus tér dielektrikumokban is rotációmentes, tehát skalár potenciálból származtatható. Eszerint

$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi$ ((22,6). egyenlet).

A problémák megoldása ezáltal jelentősen egyszerűsödik, mert elég a Φ skalárt meghatározni, és ebből a térerősség egyszerű gradiensképzéssel adódik, mint vákuumban. A Φ potenciálra vonatkozó egyenletet (22,6)-nak (22,2)-be való helyettesítésével kapjuk:

$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \Phi) = -4\pi\varrho$ ((22,7). egyenlet).

Ha a közeg homogén, vagyis ε állandó, akkor ε kiemelésével (22,7)-ből a következő egyszerűbb egyenletet kapjuk a Φ potenciálra:

$\Delta\Phi = -4\pi \frac{\varrho}{\varepsilon}$ ((22,8). egyenlet).

A térmennyiségekre vonatkozó (22,4), (22,5) határfeltételek is kifejezhetők a Φ potenciál segítségével. A két közeg dielektromos együtthatóját jelöljük ε_2-vel, illetve ε_1-gyel. így (22,6) és (22,3) tekintetbevételével adódik:

$\varepsilon_2 (\operatorname{grad} \Phi)_{n_2} - \varepsilon_1 (\operatorname{grad} \Phi)_{n_1} = -4\pi\eta$ ((22,9). egyenlet),

$(\operatorname{grad} \Phi)_{t_2} - (\operatorname{grad} \Phi)_{t_1} = 0$ ((22,10). egyenlet).

A (22,8) Poisson-egyenlet megoldása a 12. pontban követett gondolatmenet alapján azonnal felírható:

$$\Phi = \int_V \frac{\varrho}{\varepsilon r} dV$$ ((22,11). egyenlet).

Ha a szigetelőben elektromosan töltött vezetők vannak, az általuk keltett sztatikus tér potenciálja (12,6) és (22,11) mintájára a következő:

$$\Phi = \int_F \frac{\eta}{\varepsilon r} dF$$ ((22,12). egyenlet).

Ismert ϱ, illetve η töltéssűrűségek esetén a sztatikus tér potenciálját a (22,11), (22,12) egyenletek segítségével határozhatjuk meg.

Vezetők esetén η általában nem adható meg egyszerű függvény segítségével. Ilyenkor a vákuumbeli esethez hasonlóan járunk el szigetelők esetében is. A keresett Φ potenciálnak a vezetőkön kívül ki kell elégítenie a

$$\Delta \Phi = 0$$ ((22,13). egyenlet)

egyenletet és a következő feltételeket:

a) Φ a vezetők felületén (és azok belsejében) állandó;

b) az ε grad Φ normális komponensének a vezető felületére vett integrálja a vezető összes töltésének (-4π)-szeresével egyenlő:

$$\oint_F \varepsilon (\operatorname{grad} \Phi)_n \, dF = -4\pi e$$ ((22,14). egyenlet).

A homogén szigetelőben elhelyezett e pontszerű töltés elektrosztatikus terének potenciálja a tér x, y, z koordinátájú P pontjában:

$$\Phi(P) = \frac{e}{\varepsilon r}$$ ((22,15). egyenlet),

ahol

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

a P potenciálpont és az x_0, y_0, z_0 koordinátájú töltés közötti távolság. A térerősség (22,6) alapján (22,15)-ből gradiensképzéssel adódik:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi = \frac{e}{\varepsilon r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$ ((22,16). egyenlet).

$\frac{\mathbf{r}}{r}$ a ponttöltéstől a *P* pont felé mutató egységvektor. A tér gömbszimmetrikus, sugárirányú. Erőssége a vákuumbeli értéknek *ε*-od része.

(22,16)-nak megfelelően a két ponttöltés között ható Coulomb-erő is *ε*-od része a vákuumbelinek:

$|\mathbf{F}| = \frac{1}{\varepsilon}\frac{e_1 e_2}{r^2}$ ((22,17). egyenlet).

A dielektrikum polarizációja

A homogén szigetelőkben elhelyezkedő térfogati eloszlású töltések és töltött vezetők elektrosztatikus potenciálját a (22,11) és a (22,12) képlet adja meg. A szigetelő szerepe formálisan abban jelentkezik, hogy a potenciál értékét a vákuumhoz képest *ε*-od részére csökkenti. Pontosabban szólva, a *ϱ*, illetve *η* sűrűségű töltéseloszlás által homogén szigetelőben keltett tér erőssége olyan, mintha azt *ϱ*/*ε*, illetve *η*/*ε* sűrűségű töltéseloszlás keltette volna. Ahhoz, hogy a szigetelő szerepének mélyebb fizikai értelmét kiderítsük, a potenciál kifejezését átalakítjuk úgy, hogy az a vákuumbeli kifejezés és a szigetelőre jellemző Φ_d potenciál összege legyen. Tehát

$\Phi = \Phi_0 + \Phi_d$ ((23,1). egyenlet).

Itt Φ_0 a vákuumban érvényes potenciált jelenti.

Gondoljuk el, hogy a *V* térfogatot homogén szigetelő tölti ki, amelyben *ϱ* sűrűségű térfogati töltéseloszlás és *F* felületű, *η* sűrűséggel töltött vezető van elhelyezve. Az ilyen töltéseloszlás által keltett sztatikus tér potenciálját a (22,11) és (22,12) összege adja:

$\Phi = \int_V \frac{\varrho}{\varepsilon r} dV + \int_F \frac{\eta}{\varepsilon r} dF$ ((23,2). egyenlet).

A *V* térfogatot tekintsük olyan nagynak, hogy az azt határoló *F′* felületen kívül töltés már ne legyen.

A (23,2) potenciálképlet azonos átalakítással a következő alakba írható:

$\Phi = \int_V \frac{\varrho}{r} dV + \int_F \frac{\eta}{r} dF + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\left[\int_V \frac{\varrho}{r} dV + \int_F \frac{\eta}{r} dF\right]$ ((23,3). egyenlet).

Itt *ε*-t nyugodtan kiemelhettük az integrál elé, mert feltevésünk szerint a szigetelő homogén, tehát *ε* = const. A jobb oldal első két tagja a vákuum esetén érvényes potenciált adja, ezt jelöltük előbb Φ_0-val. A dielektrikum hatása a harmadik és negyedik tagban jelentkezik. A (23,1) és (23,3) képletek összehasonlítása mutatja, hogy

$$\Phi_0 = \int_V \frac{\varrho}{r} dV + \int_F \frac{\eta}{r} dF$$ ((23,4). egyenlet),

$$\Phi_d = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\left[\int_V \frac{\varrho}{r} dV + \int_F \frac{\eta}{r} dF\right]$$ ((23,5). egyenlet).

Vákuum ($\varepsilon = 1$) esetén $\Phi_d = 0$.

Foglalkozzunk most kicsit részletesebben a szigetelő befolyását tartalmazó Φ_d potenciállal. A töltéssűrűségeket fejezzük ki a (22,2) és (22,4) egyenletekből, figyelembe véve, hogy a vezető belsejében nincs elektromos tér. Tehát $D_{n_1} = 0$, ha n_1 a vezető belsejébe mutató normálist jelöli. Ennélfogva írható:

$$\varrho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{D}; \quad \eta = \frac{1}{4\pi} D_n$$ ((23,6). egyenlet).

A (23,6) második képletében D_n-nél elhagytuk a 2-es indexet, és D_n-en a vezető külső normálisa irányába eső komponenst értjük. E kifejezések behelyettesítése után Φ_d a következő alakot veszi fel:

$$\Phi_d = \frac{1-\varepsilon}{4\pi\varepsilon}\left[\int_V \frac{\operatorname{div} \mathbf{D}}{r} dV + \frac{D_n}{r} dF\right]$$ ((23,7). egyenlet).

A térfogati integrált átalakítjuk a

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{r}\mathbf{D}\right) = \frac{1}{r}\operatorname{div}\mathbf{D} + \left(\mathbf{D}, \operatorname{div}\frac{1}{r}\right)$$

vektoranalitikai összefüggés, valamint a Gauss-tétel felhasználásával:

$$\Phi_d = \frac{1-\varepsilon}{4\pi\varepsilon}\left[\int_F \frac{D_n}{r} dF - \int_F \frac{D_n}{r} dF - \int_V \left(\mathbf{D}, \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) dV + \int_F \frac{D_n}{r} dF\right]$$ ((23,8). egyenlet).

A második és negyedik integrál kiejti egymást. Ezért Φ_d a következő:

$$\Phi_d = \frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon}\int_V \left(\mathbf{D}, \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) dV - \frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon}\int_F \frac{D_n}{r} dF$$ ((23,9). egyenlet).

A *V* tartomány *F'* határfelületét toljuk ki a végtelenbe. Ez annyit jelent, hogy az egész végtelen teret az *ε* dielektromos állandójú homogén szigetelő tölti ki. Ebben a határesetben a második integrál zérushoz tart. Ugyanis $F' \to \infty$ esetén az integrandusz $\frac{1}{r^3}$ szerint tart zérushoz, a felületelem pedig r^2 szerint tart végtelenhez. Végeredményben az integrál zérushoz tart. A Φ_d potenciál tehát:

$$\Phi_d = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon}\int_V \left(\mathbf{D}, \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) dV$$ ((23,10). egyenlet).

A **D** = *ε***E** anyagi egyenlet figyelembevételével **D**-t fejezzük ki **E**-vel:

$$\Phi_d = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\int_V \left(\mathbf{E}, \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) dV$$ ((23,11). egyenlet).

A térfogati dipóluseloszlás potenciáljának (21,1) képletével összehasonlítva, látjuk, hogy Φ_d a

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathbf{E}$$ ((23,12). egyenlet)

sűrűségű térfogati dipóleloszlás potenciáljával egyezik meg. Eszerint elektromos tér jelenlétekor a szigetelő úgy tekinthető, hogy abban elemi dipólusok vannak. A dipolmomentum térfogati sűrűsége arányos az elektromos térerősséggel:

$\mathbf{P} = \varkappa\mathbf{E}$ ((23,13). egyenlet),

ahol

$$\varkappa = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}$$ ((23,14). egyenlet)

a szigetelőre jellemző anyagi együttható; neve: elektromos *szuszceptibilitás*. A **P** dipolmomentum-sűrűséget másképpen *polarizációvektornak* is nevezzük.

A térerősséggel arányos dipolmomentum-sűrűség lényegében kétféleképpen állhat elő:

1. Lehetséges, hogy a szigetelőt alkotó molekuláknak már eleve van elektromos dipolmomentumuk. A molekulán belüli töltéseloszlás olyan, hogy a pozitív és negatív töltések súlypontja nem esik egybe. Az elektromos tér nélkül a molekulák dipólusai teljesen rendezetlen eloszlásban vannak, és ezért a szigetelő eredő dipolmomentuma zérus. Az elektromos tér bekapcsolásakor a dipólusok rendeződnek, és igyekeznek beállni a térerősség

irányába. A molekulák állandó hőmozgása e rendeződés ellen hat, ezért az így létrejövő szuszceptibilitás (amit paraelektromos szuszceptibilitásnak nevezünk) fordítva arányos a hőmérséklettel.[1]

2. A második eset az, amikor elektromos tér jelenléte nélkül a molekuláknak vagy atomoknak nincs elektromos dipolmomentumuk. Az elektromos tér jelenléte a molekulán vagy atomon belüli töltéseloszlást megváltoztatja, a pozitív töltés súlypontját a térerősség irányába, a negatívét ellenkező irányba húzza szét. A kétféle töltés szétválása azonban csak a molekulán vagy atomon belül történik meg; ellentétben a vezetőkkel, ahol a tér „megosztó" hatására a két ellentétes töltés a vezető ellentétes felületeire vándorol. Az elektromos tér kis molekuláris dipólusokat hoz tehát létre. Ez az effektus független a hőmérséklettől. A jelenséget dielektromos *polarizációnak* nevezzük.

A dipolmomentum-sűrűség (23,13) képletéből látszik, hogy a szigetelő polározottsága megszűnik, ha az elektromos teret kikapcsoljuk (kivételek az elektrétek!).

Az elmondottakat összefoglalva, megállapíthatjuk, hogy a töltések (ϱ, η) által keltett elektromos teret a szigetelő azáltal befolyásolja, hogy a polarizáció révén kialakult térfogati dipóluseloszlás potenciálja hozzáadódik a vákuumban érvényes potenciálhoz. Végeredményben tehát:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_\mathrm{d} = \int_V \frac{\varrho}{r} dV + \int_F \frac{\eta}{r} dF + \int_V \left(\mathbf{P}, \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) dV$$ ((23,15). egyenlet).

A 21. pontban megmutattuk, hogy a folytonos dipóluseloszlás tere ekvivalens a $\varrho_\mathrm{p} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$, $\eta_\mathrm{p} = P_\mathrm{n}$ polarizációs töltések által keltett térrel. Ennélfogva a szigetelők térmódosító hatását úgy is értelmezhetjük, hogy az elektromos tér a dielektrikum polarizációja révén abban polarizációs töltéseket hoz létre, amelyek tere hozzáadódik az eredeti elektromos térhez. A szigetelő belsejében bármely pontban a töltéssűrűség eszerint két részből tevődik össze: a vezetőbe ágyazott ϱ töltések – amelyek az eredeti teret keltik – és a ϱ_p polarizációs töltések sűrűségéből. Megmutatható, hogy e kettő összege a (22,11) potenciálképletben szereplő ϱ/ε-nal egyenlő:

$$\varrho + \varrho_\mathrm{p} = \varrho - \operatorname{div} \mathbf{P} = \varrho - \varkappa \operatorname{div} \mathbf{E} = \varrho - 4\pi\varkappa \frac{\varrho}{\varepsilon} = \frac{\varrho}{\varepsilon} \left(\varepsilon - 4\pi\varkappa \right) = \frac{\varrho}{\varepsilon}$$ ((23,16). egyenlet).

A vezető felületén levő η felületi töltéssűrűség is ugyanilyen okból csökken ε-od részére:

$$\eta + \eta_\mathrm{p} = \eta + \varkappa E_\mathrm{n},$$

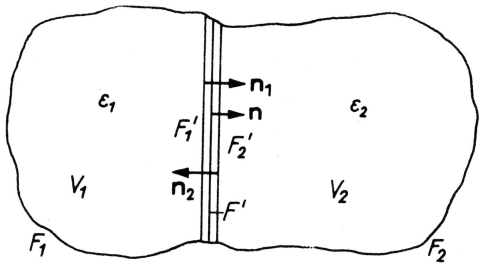
ahol E_n most a szigetelőből kifelé, tehát a vezetőbe mutató normális menti komponens. Az anyagi egyenlet, valamint a (23,6) egyenlet figyelembevételével E_n kifejezhető a felületi töltéssűrűséggel. Az átalakításnál vigyáznunk kell azonban arra, hogy (23,6)-ban a normális irányítása az itteninek éppen ellentétese. Eszerint tehát:

$$\eta + \eta_\mathrm{p} = \eta - 4\pi\varkappa \frac{\eta}{\varepsilon} = \frac{\eta}{\varepsilon} \left(\varepsilon - 4\pi\varkappa \right) = \frac{\eta}{\varepsilon}$$ ((23,17). egyenlet).

[1] A Boltzmann-statisztika alapján történő levezetését lásd Károlyházy–Marx–Nagy: Statisztikus mechanika c. könyv 142. oldalán. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.

Ha a teret nem egy, hanem kettő vagy több szigetelő tölti ki, akkor a két szigetelő határfelületén is kialakul η_p polarizációs felületi töltéssűrűség, amely a két szigetelőre vonatkozó $\mathbf{P}_1$, illetve $\mathbf{P}_2$ polarizációvektor normális komponensének különbségével egyezik meg. Ezt a következőképpen lehet belátni. Gondoljuk el, hogy a V térfogatot két különböző dielektromos együtthatójú szigetelő tölti ki *(34. ábra)*.

34. ábra -



A két szigetelőt elválasztó határfelület legyen *F'*. Az egyik dielektromos együtthatója legyen ε_1, a másiké ε_2. Az általuk kitöltött térfogat V_1, illetve V_2. Tehát, $V_1 + V_2 = V$. A dielektrikum Φ_d potenciálját a

$$\left(\mathbf{P}, \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) = \operatorname{div}\left(\mathbf{P}\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\operatorname{div}\mathbf{P}$$

vektoranalitikai összefüggés felhasználásával átalakítjuk:

$$\Phi_d = \int_V \left(\mathbf{P}\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)dV = \int_V \operatorname{div}\left(\mathbf{P}\frac{1}{r}\right)dV - \int_V \frac{1}{r}\operatorname{div}\mathbf{P}\,dV$$ ((23,18). egyenlet).

A jobb oldali első integrál Gauss-tétellel felületi integrállá alakítható. Mivel a két szigetelőt elválasztó *F'* felület mentén **P**-nek ugrása van, a Gauss-tétel nem alkalmazható minden további nélkül. Az *F'* felületet a vele párhuzamosan haladó F_1', F_2'' felületekkel kizárjuk a V tartományból, majd végül határátmenettel F_1'-t és F_2'-t *F'*-re húzzuk. A szóban forgó térfogati integrál így a következő felületi integrálok összegére bontható:

$$\int_V \operatorname{div}\left(\mathbf{P}\frac{1}{r}\right)dV = \int_{F_1}\frac{P_{1n}}{r}dF + \lim_{F_1'\to F'}\int_{F_1'}\frac{P_{1n}}{r}dF + \int_{F_2}\frac{P_{2n}}{r}dF + \lim_{F_2'\to F'}\int_{F_2'}\frac{P_{2n}}{r}dF$$ ((23,19). egyenlet).

Az $F_1'\to F'$, $F_2'\to F'$ határátmenettel az F_1'-re és F_2'-re vett integrálok az *F'*-re vett integrálokba mennek át. *F'* normális egységvektorát válasszuk úgy, hogy az ε_1 dielektromos állandójú közegből mutasson az ε_2 dielektromos állandójúba. Így (23,19) a következőképpen írható:

$$\int_V \operatorname{div}\left(\mathbf{P}\frac{1}{r}\right)dV = \int_F \frac{P_n}{r}dF + \int_{F'} \frac{P_{1n} - P_{2n}}{r}dF$$ ((23,20). egyenlet).

A jobb oldali első integrál az F_1-re és F_2-re vett integrálok összege, ugyanis $F_1 + F_2 = F$. A szigetelő határán tehát $\eta_p = P_n$ sűrűségű felületi töltés alakul ki, a két szigetelő elválasztó felületén pedig $\eta_p = P_{1n} - P_{2n}$. A határra vonatkozó töltéssűrűség is írható tulajdonképpen $P_{1n} - P_{2n}$ alakba, mert a határfelületet a szigetelő és a vákuum elválasztó felületének fogva fel, $P_{2n} = 0$.

A szigetelők jelenlétében kialakult elektrosztatikus tér (23,15) potenciálja tehát:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_d = \int_V \frac{\varrho + \varrho_p}{r}dV + \int_{F'} \frac{\eta + \eta_p}{r}dF + \int_F \frac{\eta_p}{r}dF + \int_{F'} \frac{\eta_p}{r}dF$$ ((23,21). egyenlet),

ahol

$$\varrho_p = -\operatorname{div}\mathbf{P}$$ ((23,22). egyenlet),

$$\eta_p = P_{1n} - P_{2n}$$ ((23,23). egyenlet)

a polarizációs töltéssűrűség. *F″* a töltött vezetők felülete, *F′* a két szigetelő elválasztó felülete, *F* pedig a szigetelő külső határoló felülete. Ha a szigetelő a végtelen teret kitölti, akkor az *F*-re vett integrál eltűnik.

(23,21) potenciál a 12. pont alapján kielégíti a

$$\Delta\Phi = -4\pi\left(\varrho + \varrho_p\right) = -4\pi\varrho + 4\pi \operatorname{div}\mathbf{P}$$ ((23,24). egyenlet)

egyenletet. Az

E = – grad Φ

összefüggés figyelembevételével ez a következőképpen írható:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\left(\varrho - \operatorname{div}\mathbf{P}\right)$$ ((23,25). egyenlet).

Ebből átrendezéssel adódik, hogy

$\mathrm{div}\left(\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}\right)=4\pi\varrho$ ((23,26). egyenlet).

A (22,2) egyenlettel összehasonlítva, látható, hogy

$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$ ((23,27). egyenlet),

megegyezésben az elektréteknél megismert (21,8) összefüggéssel. Ha (23,27)-be **P** helyébe beírjuk a

P = $\varkappa$**E**

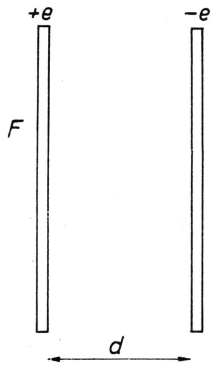
összefüggést, ahol $\varkappa=\frac{\varepsilon-1}{4\pi}$, a **D** = ε**E** anyagi egyenletet kapjuk:

D = **E** + 4π**P** = (1 + 4$\pi\varkappa$)**E** = ε**E**.

A kondenzátor kapacitása

Egyszerűség kedvéért foglalkozzunk síkkondenzátorral. A fegyverzetek közötti teret töltse ki homogén szigetelő, amelynek dielektromos állandóját ε-nal jelöljük. Az egyik fegyverzeten +*e*, a másikon –*e* az elektromos töltés *(35. ábra)*. Ha a *d* távolság kicsi a lapok méreteihez képest, akkor a kondenzátor fegyverzetei közötti tér homogénnek tekinthető. Határozzuk meg a kondenzátor kapacitását.

35. ábra -



A (22,2) alapegyenletből következik, hogy a **D** indukcióvektor ugyanaz, mint vákuumban. **D** nagyságát a felületegységből kilépő *D* vonalak száma adja meg. Mivel az *F* felületen elhelyezkedő +*e* töltésből 4π*e* indukcióvonal indul ki, ezért

$|\mathbf{D}| = \frac{4\pi e}{F}$ ((24,1). egyenlet).

D iránya merőleges a kondenzátorlapokra és a +*e* töltésű fegyverzetből kiindulva, a –*e* töltésű felé mutat. A

D = *ε***E**

anyagi egyenlet alapján (24,1)-ből *ε*-nal való osztással kapjuk az elektromos térerősséget:

$|\mathbf{E}| = \frac{4\pi e}{\varepsilon F}$ ((24,2). egyenlet).

A két fegyverzet közötti potenciálkülönbség:

$\Phi_1 - \Phi_2 = \int_1^2 \mathbf{E}\, d\mathbf{s} = \frac{4\pi e}{\varepsilon F} d$ ((24,3). egyenlet).

A kondenzátor kapacitását (17,2) alapján az *e* töltés és a $\Phi_1 - \Phi_2$ potenciálkülönbség hányadosa adja. Eszerint a szigetelővel kitöltött síkkondenzátor kapacitása:

$C = \frac{\varepsilon F}{4\pi d}$ ((24,4). egyenlet).

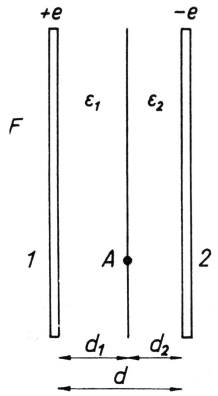
A vákuumbeli esetnek megfelelő (17,5) képlettel összehasonlítva, látjuk, hogy a szigetelő megnöveli a kondenzátor kapacitását; éspedig *ε*-szorosra:

$C = \varepsilon C_{\text{vákuum}}$ ((24,5). egyenlet).

Ez az összefüggés egyúttal lehetőséget ad valamely szigetelő dielektromos állandójának a mérésére. A síkkondenzátor kapacitását kell megmérni úgy, hogy a fegyverzetek között szigetelő van, majd szigetelő nélkül (a levegő dielektromos együtthatója közelítéssel 1-nek vehető), és azután a két kapacitás hányadosát kell képezni.

Módosítsuk most a feladatot úgy, hogy a fegyverzetek között két különböző szigetelő legyen, a fegyverzetekkel párhuzamos elválasztó felülettel. A közegek dielektromos állandója legyen ε_1, illetve ε_2, vastagságuk d_1, illetve d_2 *(36. ábra)*. Határozzuk meg a kondenzátor kapacitását ebben az esetben.

36. ábra -



Az indukcióvektor tere most is ugyanaz, mint vákuumban. Nagysága:

$$|\mathbf{D}| = \frac{4\pi e}{F},$$

iránya merőleges a kondenzátorlapokra, és a +*e* töltésűből a –*e* töltésű felé mutat. Az elektromos tér erőssége a két közegben:

$$|\mathbf{E}_1| = \frac{4\pi e}{\varepsilon_1 F}; \qquad |\mathbf{E}_2| = \frac{4\pi e}{\varepsilon_2 F}$$ ((24,6). egyenlet).

A fegyverzetek közötti potenciálkülönbség:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E}\, d\mathbf{s} = \int_1^A \mathbf{E}_1\, d\mathbf{s} + \int_A^2 \mathbf{E}_2\, d\mathbf{s} = \frac{4\pi e}{\varepsilon_1 F} d_1 + \frac{4\pi e}{\varepsilon_2 F} d_2 = \frac{4\pi e}{F}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)$$ ((24,7). egyenlet).

A kondenzátor kapacitása tehát:

$$C = \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{F}{4\pi\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)}$$ ((24,8). egyenlet).

Az előző pont szerint a két szigetelő határán polarizációs felületi töltés alakul ki. Határozzuk meg ennek sűrűségét. A (23,23) szerint:

$\eta_p = P_{1n} - P_{2n}$ ((24,9). egyenlet).

A felület normális egységvektora mutasson az 1 közegből a 2-be. Mivel az elektromos tér normális irányú, a térerősség normális komponense annak abszolút értékével egyezik meg. Ezért (23,13) és (23,14) felhasználásával kapjuk:

$$\eta_p = \varkappa_1 |\mathbf{E}_1| - \varkappa_2 |\mathbf{E}_2| = \frac{e}{F}\left(\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2}\right) = \frac{e}{F}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)$$ ((24,10). egyenlet).

A felület mentén kialakult polarizációs töltés tehát:

$$e_p = F\eta_p = e\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)$$ ((24,11). egyenlet).

Az $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ határesetben természetesen η_p és e_p eltűnik.

A szigetelő fegyverzetekkel érintkező felületein is kialakul polarizációs felületi töltés. Határozzuk meg ezt is. A pozitív töltésű fegyverzetnél:

$\eta_p = P_{1n}$,

ahol a normális iránya most a szigetelőből kifelé mutat, tehát ellentétes az elektromos térerősség irányával. Ezért:

$$\eta_p = -\frac{e}{F}\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} = -\frac{e}{F}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)$$ ((24,12). egyenlet).

A negatív töltésű fegyverzetnél:

$$\eta_p = \frac{e}{F}\frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} = \frac{e}{F}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)$$ ((24,13). egyenlet).

Mivel (24,12) negatív, a fegyverzet pozitív töltését csökkenti, és ezért az első közegben kialakult teret valójában az $\eta + \eta_p$ töltéssűrűség kelti. Ez pedig a következő:

$$\eta + \eta_p = \frac{e}{F} - \frac{e}{F}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) = \frac{e}{\varepsilon_1 F} = \frac{\eta}{\varepsilon_1}$$ ((24,14). egyenlet).

Hasonlóképpen a másik fegyverzetnél:

$$\eta + \eta_p = -\frac{e}{F} + \frac{e}{F}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = -\frac{e}{\varepsilon_2 F} = -\frac{\eta}{\varepsilon_2}$$ ((24,15). egyenlet).

Ezek a képletek teljes egyezésben vannak a (23,16) és a (23,17) képlettel és az ott kifejtett gondolatokkal.

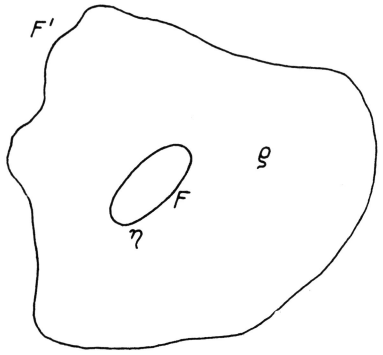
Az elektrosztatikus tér energiája szigetelőkben

Gondoljuk el, hogy az egész teret homogén szigetelő tölti ki. A szigetelőbe legyenek ϱ sűrűségű térfogati töltések és töltött vezetőn folytonosan eloszló felületi töltések beágyazva. Az általuk keltett sztatikus tér energiája (9,10) szerint a következő:

$$U = \frac{1}{8\pi}\int_V (\mathbf{ED})\,dV$$ ((25,1). egyenlet).

A térfogati integrál a vezetőn kívüli térre terjesztendő ki. A vezető felületét jelöljük *F*-fel, az egész töltésrendszert pedig vegyük körül egy nagy *F'* felülettel, amelyen kívül töltés már nincs. A számításunk végén $F' \to \infty$. A *V* térfogat eszerint az *F* és *F'* zárt felületek által határolt térrész (lásd: *37. ábra*).

37. ábra -



A (22,6) összefüggés alapján (25,1) a következőképpen írható:

$$U = \frac{1}{8\pi}\int_V (-\operatorname{grad}\Phi)\mathbf{D}\,dV$$ ((25,2). egyenlet).

A vektoranalizisből ismert

$$\operatorname{div}(\Phi\mathbf{D}) = \Phi \operatorname{div}\mathbf{D} + \mathbf{D}\operatorname{grad}\Phi$$ ((25,3). egyenlet)

képlet alapján (25,2) átalakítható a következőképpen:

$$U = \frac{1}{8\pi}\int_V \left[\Phi \operatorname{div}\mathbf{D} - \operatorname{div}(\Phi\mathbf{D})\right] dV$$ ((25,4). egyenlet).

Az első integrálba a div **D** helyére (22,2) alapján $4\pi\varrho$ írható, a második integrál pedig Gauss-tétellel felületi integrállá alakítható:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \Phi\varrho_e dV + \frac{1}{8\pi}\int_F \Phi D_n\, dF - \frac{1}{8\pi}\int_F \Phi D_n\, dF$$ ((25,5). egyenlet).

Az F-re vett felületi integrálban D_n alatt a vezetőfelület külső normálisa irányában vett komponenst értünk. (23,6) szerint az a felületi töltéssűrűség 4π-szeresével egyenlő:

$D_n = 4\pi\eta$.

Ezt beírva a második integrálba, adódik:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \Phi\varrho\, dV + \frac{1}{2}\int_F \Phi\eta\, dF - \frac{1}{8\pi}\int_F \Phi D_n\, dF$$.

Az F' határoló felületet toljuk ki a végtelenbe. Ebben a határátmenetben a harmadik integrál eltűnik. Ugyanis D_n úgy tart zérushoz, mint $1/r^2$, Φ, mint $1/r$, a felületelem pedig r^2 szerint tart végtelenhez, ezért végeredményben az egész integrál eltűnik. Az elektrosztatikus tér energiájának (25,1) általános képlete tehát a következő alakba írható:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \Phi\varrho\, dV + \frac{1}{2}\int_F \Phi\eta\, dF$$ ((25,6). egyenlet).

E képletnek az a gyakorlati előnye, hogy benne a töltéssűrűségek és a potenciál szerepel csak. Mivel a sztatikus tér meghatározását a legáltalánosabb esetben is visszavezettük a Φ potenciál meghatározására, ezért annak ismeretében (25,6) alapján az energia is közvetlenül kiszámítható. Az elektrosztatikában a (25,1) és a (25,6) képlet matematikailag egyenértékű, de a fizikai értelmezés (25,l)-hez kapcsolódik. Eszerint az elektromos energia folytonosan oszlik el arra a tartományra, ahol a térerősség zérustól különbözik. Erre azért hívjuk fel külön is a figyelmet, mert (25,6)-ból esetleg arra a hibás felfogásra lehetne következtetni, hogy az elektromos energia ott helyezkedik el, ahol a (25,6) integrálok intergranduszai nem zérusok,

tehát a töltések helyén. Az elektromos jelenségek tapasztalattal egyező magyarázatát a Maxwell-elmélet adja, ez pedig a térelméleti felfogáson alapszik, amely szerint az energia hordozója nem a töltés, hanem az elektromágneses tér. Ez természetesen nem zárja ki, hogy az elektrosztatikában a térenergiát a – sokszor egyszerűbb – (25,6) képlettel számítsuk.

(25,6) második tagja – miként azt a 16. pontban megmutattuk – még egyszerűbben is megadható. Nevezetesen:

$$\frac{1}{2}\int_F \Phi\eta\, dF = \frac{e^2}{2C}$$ ((25,7). egyenlet).

Sőt, több vezető esetén

$$U = \frac{1}{2}\int_V \Phi\varrho\, dV + \frac{1}{2}\sum_i\sum_k C_{ik}\Phi_i\Phi_k$$ ((25,8). egyenlet),

ahol a C_{ik} együtthatók az ún. kapacitás-együtthatók [lásd (16,12)-t és (16,13)-at].

A (25,8) energiaképlet első tagja a térfogati töltéseloszlás elektrosztatikus kölcsönhatási energiáját jelenti. Foglalkozzunk ezzel kicsit részletesebben pontszerű töltések esetén. A pontszerű töltés sűrűségét nem lehet folytonos függvénnyel leírni. Ponttöltés esetén ugyanis a tér egy adott pontjában véges nagyságú *e* töltés van, a ponton kívül pedig a töltés zérus. Az ilyen töltéseloszlás sűrűségfüggvénye az illető pontban végtelen, azon kívül pedig mindenütt azonosan zérus. Ilyen tulajdonsággal rendelkezik az ún. Dirac-féle δ függvény, amelyet egy dimenzióban a következőképpen értelmezünk:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ \infty, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$ ((25,9). egyenlet)

továbbá

$$\int_a^b \delta(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{ha az } x = 0 \text{ pont az } (a, b) \text{ intervallumon kívül van} \\ 1, & \text{ha az } (a, b) \text{ intervallum az } x = 0 \text{ pontot belsejében tartalmazza} \end{cases}$$ ((25,10). egyenlet)

A $\delta(x - x_0)$ függvénynek nem az origóban, hanem az $x = x_0$ helyen van szingularitása, tehát

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \neq x_0 \\ \infty, & \text{ha} \quad x = x_0 \end{cases}$$ ((25,9a). egyenlet)

Hasonlóképpen:

$$\int_a^b \delta(x-x_0)\,dx = 1, \quad \text{ha az } x_0 \text{ pont az } (a,b) \text{ intervallum belsejében van;}$$
$$\text{egyébként pedig azonosan zérus az integrál} \qquad \text{((25,10a). egyenlet)}$$

E tulajdonságokból következik az alábbi integrálási szabály:

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$$
((25,11). egyenlet).

Az egydimenziós *δ* függvénynek természetes általánosítása a háromdimenziós Dirac-féle *δ* függvény:

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \\ \infty, & \text{ha} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \end{cases}$$ ((25,12). egyenlet)

továbbá

$$\int_V \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,dV = \begin{cases} 0, & \text{ha az } \mathbf{r}_0 \text{ helyvektorú pont a } V \text{ tartományon kívül van} \\ 1, & \text{ha az } \mathbf{r}_0 \text{ pontot a } V \text{ tartomány belsejében tartalmazza} \end{cases}$$ ((25,13). egyenlet)

A (25,11) képlet általánosítása:

$$\int_V f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,dV = f(\mathbf{r}_0)$$
((25,11a). egyenlet).

A ponttöltés sűrűsége a *δ* függvény segítségével a következőképpen írható:

$$\varrho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$$ ((25,14). egyenlet).

N ponttöltés esetén:

$$\varrho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} e_i \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$$ ((25,15). egyenlet).

Ha ezt a sűrűségfüggvényt (25,8) első integráljába helyettesítjük, (25,11a) alapján megkapjuk az *N* ponttöltés elektrosztatikus kölcsönhatási energiáját:

$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} e_i \Phi_i$ ((25,16). egyenlet),

ahol Φ_i az *i*-edik töltés helyén érvényes potenciált jelenti. Ez a Φ_i potenciál lényegében két részből áll: a többi töltés által keltett tér potenciálja, és az *i*-edik töltés Φ_i^s ún. sajátpotenciálja. Φ_i^s, mint láttuk, a töltés helyén szinguláris. Ezért a belőle származó energia végtelen. Ez az *i*-edik töltés saját magával való kölcsönhatásának felelne meg. Ettől most eltekintünk.

Ha még figyelembe vesszük, hogy Φ_i ponttöltések potenciáljainak összege

$\Phi_i = \sum_{k \neq i} \frac{e_k}{r_{ik}}$ ((25,17). egyenlet),

akkor az *N* ponttöltés elektrosztatikus kölcsönhatási energiája a következő alakú lesz:

$U = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i \\ i \neq k}} \sum_{k} \frac{e_i e_k}{r_{ik}}$ ((25,18). egyenlet).

r_{ik} az *i*-edik és *k*-adik töltés közötti távolságot jelenti.

Ha egyetlen ponttöltést helyezünk a Φ potenciállal leírt ún. külső (tehát nem a ponttöltéstől származó) sztatikus térbe, akkor annak potenciális energiája (a végtelen sajátenergiától eltekintve):

$U = e\Phi$ ((25,19). egyenlet).

Ugyanis ez az energia azzal a munkával egyezik meg, amelyet a tér által kifejtett erővel szemben végeznünk kell, amikor az *e* ponttöltést a végtelenből a *P* pontba visszük. Tehát:

$$U = -e\int_{\infty}^{P} \mathbf{E}\, d\mathbf{s} = -e\int_{\infty}^{P} (-\operatorname{grad}\Phi)\, d\mathbf{s} = e\int_{\infty}^{P} d\Phi = e\left[\Phi(P) - \Phi(\infty)\right] = e\Phi .$$

Itt figyelembe vettük, hogy a potenciál – korábbi megállapodásunk értelmében – a végtelenben zérus. (25,19)-et (25,16)-tal összehasonlítva, látjuk, hogy hiányzik az 1/2 tényező. Az 1/2 tényező fellépte tulajdonképpen onnan ered, hogy amikor a töltésekre összegezünk (az integrálásnál elemi térfogatokra vett összegezés limeséről van szó), minden töltés kétszer fordul elő [lásd (25,18)-at], ezért így két töltés közötti kölcsönhatási energia kétszeresét kapnánk az 1/2 tényező nélkül.

Határozzuk meg még a pontszerű dipólus elektromos potenciális energiáját a Φ potenciállal leírt külső térben. A dipólust két egymáshoz igen közeli, ellentétes előjelű ponttöltésnek tekintve, energiája az egyes pólusok energiájának összegével egyenlő:

$U_d = e\Phi(\mathbf{r}+\mathbf{a}) - e\Phi(\mathbf{r})$ ((25,20). egyenlet),

ahol **a** a –*e* töltésből a +*e*-be vezető vektor (lásd az 5. ábrát). A $\Phi(\mathbf{r} + \mathbf{a})$ függvényt Taylor-sorba fejtve:

$\Phi(\mathbf{r}+\mathbf{a}) = \Phi(\mathbf{r}) + (\mathbf{a}, \operatorname{grad}\Phi) + \dots$ ((25,21). egyenlet).

Mivel **a** abszolút értéke kicsi, a magasabb rendű deriváltakat elhagyjuk. (25,21) figyelembevételével az U_d energia a következő alakot veszi fel:

$U_d = e(\mathbf{a}, \operatorname{grad}\Phi) = -(\mathbf{p}, \mathbf{E})$ ((25,22). egyenlet),

ahol **p** = *e***a** a dipólus dipolmomentuma. Pontszerű dipólus esetén (25,22) az energia pontos kifejezését adja.

Thomson tétele. Az elektrosztatikai probléma megoldásának egyértelműsége

Tételezzük fel, hogy a végtelen teret szigetelő tölti ki, amelyről most nem tesszük fel, hogy homogén. A szigetelőben legyen $\varrho = \varrho(\mathbf{r})$ sűrűségű térfogati töltéseloszlás és töltött vezetők. Mint korábban mondottuk, az általános esetben csak azt tudjuk előre megadni, hogy mennyi az egyes vezetők össztöltése. Ezek legyenek rendre e_k (k = l, 2, ...). E töltésrendszer által keltett elektrosztatikus tér alapegyenletei a következők:

$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\varrho$ ((26,1). egyenlet),

$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ ((26,2). egyenlet),

$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ ((26,3). egyenlet),

$\int_{F_1} D_n \, dF = 4\pi e_k$ ((26,4). egyenlet).

A (26,2) egyenletből következik, hogy a térnek van potenciálja:

$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi$ ((26,5). egyenlet),

amely a vezetők felületén állandó, tehát

$\Phi(F_k) = c_k$ ((26,6). egyenlet),

továbbá (26,4) alapján kielégíti az

$$\int_{F_k} \varepsilon \left(\operatorname{grad} \Phi\right)_n \, dF = -4\pi e_k$$

((26,7). egyenlet)

mellékfeltételi egyenleteket. A (26,1)–(26,7) egyenleteket kielégítő **E**, **D** megoldásokat nevezzük elektrosztatikai megoldásoknak.

Tételezzük fel, hogy az **E'**, **D'** terek szintén megoldásai a (26,1), (26,3) és (26,4) egyenleteknek, de az előbbitől különböznek. A (26,5) (26,6) egyenletek teljesülését ezektől egyelőre nem követeljük meg. Fennállnak tehát a következő összefüggések:

$\operatorname{div} \mathbf{D}' = 4\pi\varrho$ ((26,1a). egyenlet),

$\mathbf{D}' = \varepsilon \mathbf{E}'$ ((26,3a). egyenlet),

$$\int_{F_k} D'_n \, dF = 4\pi e_k$$

((26,4a). egyenlet).

Az **E'** és **E** térerősségek különbségét jelöljük $\tilde{\mathbf{E}}$ -vel:

$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{E}}$ ((26,8). egyenlet).

Eszerint fennáll a

$\mathbf{D}' = \mathbf{D} + \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}$ ((26,9). egyenlet)

összefüggés is.

A (26,4), (26,4a) és (26,9) egyenletekből következik:

$$\int_{F_k} \varepsilon \tilde{E}_n \, dF = 0$$

((26,10). egyenlet).

A (26,1), (26,1a) és (26,9) alapján pedig érvényes a

$\operatorname{div}\left(\varepsilon \tilde{\mathbf{E}}\right) = 0$ ((26,11). egyenlet)

egyenlet.

Írjuk fel a vesszős tér energiájának kifejezését:

$$U' = \frac{1}{8\pi}\int_V \mathbf{E}'\mathbf{D}'\,dV = \frac{1}{8\pi}\int_V \varepsilon E'^2\,dV = \frac{1}{8\pi}\int_V \left[\varepsilon E^2 + \varepsilon\tilde{E}^2 + 2\varepsilon\left(\mathbf{E},\,\tilde{\mathbf{E}}\right)\right]dV =$$ ((26,12). egyenlet).

A jobb oldali utolsó integrált jelöljük $\mathcal{J}$-vel, és alakítsuk át (26,5) figyelembevételével:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{4\pi}\int_V \varepsilon\left(\mathbf{E},\,\tilde{\mathbf{E}}\right)dV = -\frac{1}{4\pi}\int_V \varepsilon\left(\operatorname{grad}\Phi,\,\tilde{\mathbf{E}}\right)dV$$

.

Mivel a vezetők belsejében grad Φ azonosan zérus, ez az integrál a vezetőkön kívüli térre terjesztendő ki. Az egész rendszert vegyük körül egy nagy F' zárt felülettel, amelyen kívül már nincs sem vezető, sem töltés, és végül F' tartson a végtelenhez. A

$$\left(\operatorname{grad}\Phi,\,\varepsilon\tilde{\mathbf{E}}\right) = \operatorname{div}\left(\Phi\varepsilon\tilde{\mathbf{E}}\right) - \Phi\operatorname{div}\left(\varepsilon\tilde{\mathbf{E}}\right)$$

vektoranalitikai összefüggés alapján $\mathcal{J}$ a következő alakot veszi fel:

$$\mathcal{J} = -\frac{1}{4\pi}\int_V \operatorname{div}\left(\Phi\varepsilon\tilde{\mathbf{E}}\right)dV + \frac{1}{4\pi}\int_V \Phi\operatorname{div}\left(\varepsilon\tilde{\mathbf{E}}\right)dV$$

.

A (26,11) egyenlet miatt a második integrál eltűnik, az első pedig Gauss-tétellel felületi integrállá alakítható:

$$\mathcal{J} = -\frac{1}{4\pi}\int_{F'} \Phi\varepsilon\tilde{E}_n\,dF - \frac{1}{4\pi}\sum_k \int_{F_i} \Phi\varepsilon\tilde{E}_n\,dF$$

.

Ha $F' \to \infty$, az F'-re vett integrál eltűnik, mert Φ az $\frac{1}{r}$ szerint, $\tilde{\mathbf{E}}$ pedig $\frac{1}{r^2}$ szerint tart zérushoz, és az r^2 szerint végtelenhez tartó dF felületelemmel szorozva is zérushoz tart az integrál. Tehát

$$\mathcal{J} = -\frac{1}{4\pi}\sum_k \int_{F_i} \Phi\varepsilon\tilde{E}_n\,dF = -\frac{1}{4\pi}\sum_k \Phi_k \int_{F_i} \varepsilon\tilde{E}_n\,dF$$ ((26,13). egyenlet).

Ez pedig (26,10) szerint zérus. Ennélfogva, az **E'**, **D'** tér energiája:

$U' = U + \frac{1}{8\pi}\int_V \varepsilon \tilde{E}^2 dV$ ((26,14). egyenlet).

Mivel az $\varepsilon \tilde{E}^2$ integrandusz pozitív, az integrál is az. Tehát

$U' > U$ ((26,15). egyenlet).

Ez az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy az elektrosztatikai megoldások energiája a minimális energia. Más szóval: az elektrosztatikai egyensúlyhoz a minimális térenergia tartozik, hasonlóan a mechanikai stabilis egyensúly esetéhez, ahol azt a potenciális energia minimuma jellemzi. Ezt nevezzük *Thomson-tételnek*.

Ha feltesszük, hogy a vesszős tér a (26,5) és (26,6) egyenleteket is kielégíti:

$\mathbf{E}' = -\operatorname{grad}\Phi'$,

$\Phi'(F_k) = c_k'$,

akkor a fenti levezetés megismételhető úgy, hogy **E'**, **D'** és **E**, **D** helyet cserélnek. Így azt kapnánk, hogy

$U' < U$ ((26,16). egyenlet).

A (26,15) és (26,16) közötti ellentmondás csak abban az esetben szűnik meg, ha $\tilde{\mathbf{E}} \equiv 0$, vagyis ha **E' = E**, **D' = D**. Ez pedig annyit jelent, hogy az elektrosztatika (26,1)–(26,6) alapegyenleteinek a megoldása egyértelmű.

Azáltal, hogy a szigetelőt inhomogénnek tekintettük, a különböző szigetelők határaira vonatkozó határfeltételeket figyelmen kívül hagyhattuk. Ezzel tulajdonképpen nem sértettük meg az általánosságot, mert *ε* ugrása jó közelítéssel meredek változással helyettesíthető.

Töltött testekre és szigetelőkre ható erő elektrosztatikus térben

A Bevezetésben tapasztaltra hivatkozva állapítottuk meg a pontszerű *e* töltésre ható erő kifejezését. Eszerint

$\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ ((27,1). egyenlet),

ahol **E** a töltés helyén uralkodó elektromos térerősség. Az elektromos teret próbatöltéssel a (27,1) képlet alapján mérjük ki, és ennek alapján definiáltuk az elektromos térerősséget.

Ha az elektromos töltés a V térfogatban folytonosan oszlik el $\varrho = \varrho(\mathbf{r})$ sűrűséggel, akkor az **E** térerősséggel leírt elektromos tér a töltésrendszerre

$$\mathbf{F} = \int_V \varrho \mathbf{E}\, dV$$ ((27,2). egyenlet)

erőt fejt ki.

A ponttöltésre ható erő (27,1) képlete alapján könnyen megállapítható az az erő is, amelyet az **E** erősségű tér az elektromos dipólusra fejt ki. A dipólust két egymáshoz igen közel levő ellentétes előjelű ponttöltésnek tekintve, a rá ható erő a két pólusra ható erő összegeként írható:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = e\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) - e\mathbf{E}(\mathbf{r})$$ ((27,3). egyenlet),

ahol **E**(**r** + **a**) a pozitív, **E**(**r**) pedig a negatív pólus helyén érvényes térerősséget jelenti. Az **E**(**r** + **a**) térerősséget Taylor-sorba fejtve, és figyelembe véve, hogy **a** kicsi, az **a**-ban lineáris tagokra szorítkozhatunk:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + a_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} + \ldots = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\mathbf{a}, \mathrm{grad})\mathbf{E} + \ldots$$ ((27,4). egyenlet).

Ezt a kifejezést (27,3)-ba helyettesítve, adódik:

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{a}, \mathrm{grad})\mathbf{E} = (\mathbf{p}, \mathrm{grad})\mathbf{E}$$ ((27,5). egyenlet).

Itt már figyelembe vettük, hogy $e\mathbf{a}$ a dipólus **p** dipolmomentuma: $\mathbf{p} = e\mathbf{a}$. Megjegyezzük, hogy az (**a**, grad), illetve (**p**, grad) szimbolikus skalárszorzatnak valójában akkor van értelme, ha az erő komponenseit írjuk fel, mert a gradiens csak skalárra van értelmezve:

$$F_x = (\mathbf{p}, \mathrm{grad}\, E_x)$$
$$F_y = (\mathbf{p}, \mathrm{grad}\, E_y)$$
$$F_z = (\mathbf{p}, \mathrm{grad}\, E_z)$$ ((27,6). egyenlet)

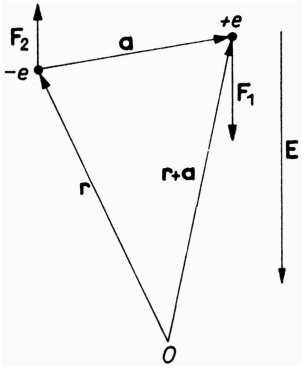
A (27,5) kifejezés a (27,6) erőkomponensek tömörebb, szimbolikus jelölésére szolgál. Ennek ismeretében nyugodtan használhatjuk a fenti jelölést, amely nagyon elterjedt az elméleti fizikai irodalomban.

Visszatérve a dipólusra ható erőhöz, megjegyezzük, hogy pontszerű dipólus esetén (27,5) az erő pontos kifejezését adja. (27,5)-ből látszik, hogy **F** csak akkor különbözik zérustól, ha a tér inhomogén. Homogén erőtérben **F** = 0. Ilyenkor ugyanis a két pólusra ugyanolyan nagyságú, de ellentétes irányú erő hat, és ezek egymás hatását lerontják (erőpár). Homogén erőtérben a dipólus és a tér közötti kölcsönhatás nem transzlációs erőben, hanem forgatónyomatékban jelentkezik.

Határozzuk meg a dipólusra ható erő momentumát azon pontra vonatkoztatva, amelyben a *–e* töltés van. A *38. ábrából* nyilvánvaló, hogy ez a momentum:

$\mathbf{N} = e\left[\mathbf{a} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}+\mathbf{a})\right] = \left[\mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}+\mathbf{a})\right]$ ((27,7). egyenlet).

38. ábra -



Ha a dipólus pontszerű, akkor az **E**(**r** + **a**) kifejezésen a dipólus helyén vett térerősség értendő, és ekkor **N** a dipólus középpontjára vonatkoztatott momentumot jelenti:

$\mathbf{N} = \left[\mathbf{p} \times \mathbf{E}\right]$ ((27,8). egyenlet).

A (27,8) erőmomentum igyekszik a dipólus **p** dipolmomentumát az **E** térerősség irányába forgatni. Természetesen ez az erőmomentum homogén erőtérben is fellép. Ekkor a dipólusra ható erőpár momentumával egyezik meg.

Ezen egyszerűbb töltésrendszerekre ható erő kifejezésének megállapítása után most foglalkozzunk az általánosabb problémával. Gondoljuk el, hogy a térben térfogati töltések és szigetelők vannak jelen. Határozzuk meg azt az erőt, amelyet az elektromos tér ilyen általános fizikai rendszerre kifejt. Pontosabban, célszerű az erő sűrűségét meghatározni, amely természetesen pontról pontra változik, és térfogati integrálja adja a rendszerre kifejtett erőt.

Ha az elektromos tér által kifejtett erő hatására a testek elmozdulnak, akkor az erőtér munkát végez. Ez a munkavégzés a térenergia csökkenésével jár együtt. Ha más energiaváltozás (pl. hő- vagy kémiai energiaváltozás) nem lépett fel, akkor az energiamegmaradás törvénye szerint a végzett munka megegyezik a térenergia csökkenésével:

$\delta L = -\delta U$ ((27,9). egyenlet).

A klasszikus mechanikai értelmezés szerint (27,9)-ben az U térenergia a potenciális energia szerepét játssza. Tételezzük fel, hogy U függ a rendszerre jellemző q_k (k = 1, 2, ..., n) paraméterektől, amelyeket nevezzünk általános koordinátáknak. A munkavégzés során a q_k koordináták megváltoznak, és a végzett munka, illetve az energiacsökkenés ezen δq_k változásokkal kifejezhetők:

$$\delta L = \sum_{k=1}^{n} \Theta_k \delta q_k$$ ((27,10). egyenlet),

$$\delta U = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta q_k$$ ((27,11). egyenlet).

Θ_k-kat a mechanikában általános erőkomponenseknek neveztük. Ha a q_k általános koordináták függetlenek egymástól, akkor (27,9)-ből következik, hogy Θ_k-k a térenergia parciális deriváltjaival egyeznek meg:

$$\Theta_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k}$$ ((27,12). egyenlet).

Az erő kifejezésének meghatározása (27,12) alapján sok esetben igen egyszerű. Ennek bemutatására példaként vegyük a dipólust. Az **E** erősségű külső térben levő dipólus U_d energiája (25,22) szerint a következő:

$$U_d = -(\mathbf{p}, \mathbf{E}) = -pE\cos \vartheta$$ ((27,13). egyenlet),

ahol ϑ a **p** dipolmomentum és az **E** térerősség iránya által bezárt szög. A dipólus energiája a dipólus x, y, z koordinátáinak és a ϑ szögnek a függvénye. A q_k általános koordináták most tehát a következők: $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$, $q_4 = \vartheta$. A q_k-hoz tartozó általános erőkomponensek a mechanika szerint:

$$\Theta_1 = F_x, \quad \Theta_2 = F_y, \quad \Theta_3 = F_z, \quad \Theta_4 = N$$ ((27,14). egyenlet).

Az első három komponens a dipólusra ható transzlációs erő három komponense, a negyedik pedig a forgatónyomaték. Számítsuk ki most ezeket (27,13) és (27,12) alapján konkrétan:

Az első három komponens vektoriális jelöléssel egybefoglalható: **F**(F_x, F_y, F_z).

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U_d = \operatorname{grad} (\mathbf{p}, \mathbf{E})$$ ((27,15). egyenlet).

A skalárszorzat gradiensét a vektoranalízisből ismert (lásd függelék)

grad (**p**, **E**) = (**E**, grad)**p** + (**p**, grad)**E** + (**E** × rot **p**) + (**p** × rot **E**)

összefüggés alapján átalakítjuk. Mivel a **p** dipolmomentum nem függ a helykoordinátáktól, ezért grad p_x = grad p_y = grad p_z = 0, rot **p** = 0. Másrészt, sztatikus tér esetén rot **E** = 0. Ennélfogva:

grad(**p**, **E**) = (**p**, grad)**E**,

tehát

F = (**p**, grad)**E**,

teljes megegyezésben a (27,5) képlettel.

Az általános erő negyedik komponense:

$$\Theta_4 = N = -\frac{\partial U_d}{\partial \blacklozenge} = -pE\sin \blacklozenge$$ ((27,16). egyenlet).

Mivel $\vartheta \leq \pi$, (27,16) jobb oldala negatív. Ha valamelyik erőkomponens negatív, akkor az a hozzá tartozó koordinátát csökkenteni igyekszik. Ennélfogva az **N** erőmomentum csökkenteni igyekszik a **p** dipolmomentum és az **E** térerősség közötti ϑ szöget. Következésképpen az **N** erőmomentum irány és nagyság szerint a következő :

$$\mathbf{N} = (\mathbf{p} \times \mathbf{E})$$ ((27,17). egyenlet),

amely szintén megegyezik a más úton nyert (27,8) képlettel.

Ezek után térjünk vissza az eredetileg felvetett általános problémánkhoz; nevezetesen határozzuk meg az erősűrűség kifejezését a (27,9) képlet alapján. Gondoljuk el, hogy az elektromos tér hatására a térben levő testek (szigetelők) pontjai végtelen kis távolsággal elmozdulnak. Az egyes pontok elmozdulása természetesen a hely szerint más és más lehet. Ezt az infinitezimális elmozdulást egy vektortérrel jellemezzük. Jelölje **q** az elmozdulás vektorát, amely a mondottak szerint a hely függvénye, **q** = **q**(**r**). A **q** elmozdulás során végzett δL munkát a

$$\delta L = \int_V \mathbf{qf}\, dV$$ ((27,18). egyenlet)

képlet írja le. **f** a térfogategységre ható erőt, tehát az *erősűrűséget* jelenti. (27,9) alapján ez a munkavégzés a térenergia csökkenésével egyenlő:

$$-\delta U = \int_V \mathbf{qf}\, dV$$ ((27,19). egyenlet).

Ha az energiacsökkenést sikerül a jobb oldali integrális alakra hoznunk, akkor abból az erősűrűség kifejezése azonnal leolvasható. Ez szolgáltatja a legáltalánosabb módszert az erősűrűség kifejezésének a meghatározására.

Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy vezetők nincsenek jelen. Az elektromos tér energiájára a sztatikában két kifejezés ismeretes:

$$U_1 = \frac{1}{2}\int \varrho \Phi \, dV$$ ((27,20). egyenlet),

és

$$U_2 = \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon E^2 \, dV = \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon \left(\operatorname{grad} \Phi\right)^2 dV$$ ((27,21). egyenlet).

E két kifejezés, mint korábban megmutattuk, egymással megegyezik:

$$U_1 = U_2$$ ((27,22). egyenlet).

Az energia megváltozása is két, egymással ekvivalens alakban írható fel:

$$\delta U_1 = \frac{1}{2}\int \Phi \, \delta\varrho \, dV + \frac{1}{2}\int \varrho \, \delta\Phi \, dV$$ ((27,23). egyenlet).

$$\delta U_2 = \frac{1}{8\pi}\int \left(\operatorname{grad} \Phi\right)^2 \delta\varepsilon \, dV + \frac{1}{4\pi}\int \varepsilon \operatorname{grad} \Phi \, \delta\left(\operatorname{grad} \Phi\right) dV$$ ((27,24). egyenlet),

ahol $\delta\varrho$, $\delta\varepsilon$, $\delta\Phi$ a ϱ, ε, Φ mennyiségeknek a **q** elmozdulás következtében beálló megváltozása. (27,22)-ből következik, hogy az energiaváltozás két kifejezése is megegyezik egymással:

$$\delta U_1 = \delta U_2$$ ((27,25). egyenlet).

A variálás és a differenciálás sorrendje felcserélhető, ezért

$$\delta\left(\operatorname{grad} \Phi\right) = \operatorname{grad}\left(\delta\Phi\right)$$ ((27,26). egyenlet).

Másrészt

$\varepsilon \operatorname{grad} \Phi = -\varepsilon \mathbf{E} = -\mathbf{D}$.

Ezek felhasználásával a (27,24) képlet jobb oldalán álló második integrál integrandusza a következőképpen írható:

$$\varepsilon \operatorname{grad} \Phi \cdot \delta\left(\operatorname{grad} \Phi\right) = -\mathbf{D} \operatorname{grad}\left(\delta\Phi\right) = -\operatorname{div}\left(\mathbf{D}\delta\Phi\right) + \delta\Phi \operatorname{div} \mathbf{D}.$$

Ezt a kifejezést (27,24)-be beírva, kapjuk:

$$\delta U_2 = \frac{1}{8\pi}\int (\operatorname{grad}\Phi)^2\,\delta\varepsilon\,dV - \frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}(\mathbf{D}\delta\Phi)\,dV + \frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}\mathbf{D}\delta\Phi\,dV$$ ((27,27). egyenlet).

A jobb oldali második integrál Gauss-tétellel az egész rendszert magába foglaló *F* zárt felületre vett felületi integrállá alakítható. Ha $F \to \infty$, akkor ez az integrál eltűnik. A harmadik integrál integranduszában div **D** helyére a (22,2) képlet alapján $4\pi\varrho$ írható. Ezek elvégzése után:

$$\delta U_2 = \frac{1}{8\pi}\int (\operatorname{grad}\Phi)^2\,\delta\varepsilon\,dV + \int \varrho\delta\Phi\,dV$$ ((27,28). egyenlet).

A δU energiaváltozás a (27,25) egyenlőség figyelembevételével a következő alakba írható:

$$\delta U = 2\delta U_1 - \delta U_2 = \int \Phi\delta\varrho\,dV - \frac{1}{8\pi}\int (\operatorname{grad}\Phi)^2\delta\varepsilon\,dV = \int \Phi\delta\varrho\,dV - \frac{1}{8\pi}\int E^2\delta\varepsilon\,dV$$ ((27,29). egyenlet).

Ez a képlet azt mutatja, hogy az energiaváltozás két okra vezethető vissza: a **q** elmozdulás során pontról pontra megváltozik a töltéssűrűség és a dielektromos együttható. A δU energiaváltozást tehát úgy számíthatjuk ki, hogy előbb meghatározzuk a sűrűség és a dielektromos együttható megváltozását.

Foglalkozzunk előbb a ϱ sűrűség megváltozásával. A közeg elmozdulásával a tér valamely *P* pontjába olyan ΔV térfogatelem kerül, amely az elmozdulás előtt egy szomszédos *P′* pontban volt. Ez a sűrűség

$$\varrho(P') - \varrho(P) = -\mathbf{q}\operatorname{grad}\varrho$$ ((27,30). egyenlet)

megváltozását eredményezi. Ha az elmozdulás során a ΔV térfogat nagysága nem változna, tehát dilatáció nem lépne fel, akkor (27,30) adná a *P* pontban a tényleges sűrűségeloszlást. Nem zárhatjuk ki azonban azt az esetet, hogy közben a térfogatelem is megváltozik. Ez a sűrűség további megváltozását eredményezi, amit (27,30)-hoz még hozzá kell vennünk. Határozzuk meg ezt a változást is. A *P* pont körüli ΔV térfogatelemben legyen Δe töltés. Az elmozdulás során ΔV megváltozik. A vele együtt járó sűrűségváltozást jelöljük $\delta'\varrho$-val. Nyilvánvaló, hogy érvényes a következő összefüggés:

$$\Delta e = \varrho\Delta V = (\varrho + \delta'\varrho)(\Delta V + \delta' V) = \varrho\Delta V + \delta'\varrho\Delta V + \varrho\delta' V + \delta'\varrho\cdot\delta' V .$$

A $\delta'\varrho\cdot\delta' V$ tagot – mint másodrendű kicsi mennyiséget – elhagyva, ebből adódik:

$$\delta'\varrho = -\varrho\frac{\delta' V}{\Delta V}$$ ((27,31). egyenlet).

Mivel a $\delta'\varrho$ sűrűségváltozást egy adott pontban keressük, (27,31)-nek valójában akkor van értelme, ha annak limesét vesszük a $\Delta V \to 0$ határesetre. Nevezetesen:

$$\delta'\varrho = -\varrho \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\delta' V}{\Delta V}$$ ((27,32). egyenlet).

A $\delta' V$ térfogatváltozás a ΔV-t határoló felület pontjainak elmozdulásából származik:

$$\delta' V = \oint q_n \, dF .$$

Ezt (27,32)-be helyettesítve, továbbá a divergencia definícióját figyelembe véve, kapjuk:

$$\delta'\varrho = -\varrho \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint q_n \, dF = -\varrho \operatorname{div} \mathbf{q}$$ ((27,33). egyenlet).

A P pontban bekövetkező sűrűségváltozás (27,30) és (27,33) összegével egyenlő:

$$\delta\varrho = -\mathbf{q} \operatorname{grad} \varrho - \varrho \operatorname{div} \mathbf{q}$$ ((27,34). egyenlet).

A

$\operatorname{div}(\varrho\mathbf{q}) = \varrho \operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{q} \operatorname{grad} \varrho$

összefüggés felhasználásával átalakítva:

$$\delta\varrho = -\operatorname{div}(\varrho\mathbf{q})$$ ((27,35). egyenlet).

Mivel a dielektromos együttható általában függ a közeg τ tömegsűrűségétől, ezért

$$\delta'\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \delta'\tau$$ ((27,36). egyenlet).

A τ sűrűségre is érvényes a (27,33) összefüggés. Ennélfogva

$$\delta'\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}(-\tau \operatorname{div} \mathbf{q})$$ ((27,37). egyenlet).

A dielektromos együttható megváltozása is két részből tevődik össze. Nevezetesen, a (27,37) és a (27,30) összefüggéssel analóg változás összegével egyezik meg:

$$\delta\varepsilon = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau \operatorname{div}\mathbf{q} - \mathbf{q}\operatorname{grad}\varepsilon$$ ((27,38). egyenlet).

A sűrűség és a dielektromos együttható (27,35), illetve (27,38) megváltozását (27,29)-be beírva, megkapjuk a térenergia megváltozását:

$$\delta U = -\int \Phi \operatorname{div}(\rho\mathbf{q})\,dV + \frac{1}{8\pi}\int E^2\mathbf{q}\operatorname{grad}\varepsilon\,dV + \frac{1}{8\pi}\int E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\operatorname{div}\mathbf{q}\,dV$$ ((27,39). egyenlet).

A jobb oldalon álló első és harmadik integrál integranduszát átalakítjuk:

$$\Phi\operatorname{div}(\rho\mathbf{q}) = \operatorname{div}(\Phi\rho\mathbf{q}) - \rho\mathbf{q}\operatorname{grad}\Phi,$$

$$E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\operatorname{div}\mathbf{q} = \operatorname{div}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\mathbf{q}\right) - \mathbf{q}\operatorname{grad}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right).$$

Ezek (27,39)-be történő beírása után kapott térfogati integrálok között szerepel kettő, amelyek integrandusza egy-egy vektor divergenciája. Ezeket Gauss-tétellel a végtelen távoli felületre vett integrálokká alakíthatjuk, amelyek viszont eltűnnek. Ennélfogva a térenergia megváltozása az **E** = –grad Φ összefüggés figyelembevételével a következő:

$$\delta U = \int \mathbf{q}\left[\frac{1}{8\pi}E^2\operatorname{grad}\varepsilon - \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right) - \rho\mathbf{E}\right]dV$$ ((27,40). egyenlet).

Ezt a kifejezést (27,19)-cel összehasonlítva, megkapjuk az **f** erősűrűség keresett kifejezését:

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} - \frac{1}{8\pi}E^2\operatorname{grad}\varepsilon + \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right)$$ ((27,41). egyenlet).

Az értelmezés szempontjából célszerű az **f** vektort két részre bontani:

$\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ ((27,42). egyenlet),

ahol

$\mathbf{f}_1 = \varrho\mathbf{E}$ ((27,43). egyenlet),

$$\mathbf{f}_2 = -\frac{1}{8\pi}E^2\operatorname{grad}\varepsilon + \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right)$$ ((27,44). egyenlet).

$\mathbf{f}_1$ a szigetelőben levő térfogati töltésekre ható erő sűrűsége. Mint láttuk, éppen ennek alapján definiáltuk az elektromos térerősséget. Alakja ugyanaz szigetelőben, mint vákuumban, de mivel **E** szigetelőben a vákuumbeli érték ε-od része, ezért $\mathbf{f}_1$ is. $\mathbf{f}_2$ csak szigetelőben lép fel, ezért úgy értelmezhető, hogy a szigetelőre kifejtett erő sűrűségét jelenti. A

$$-\frac{1}{8\pi}E^2\operatorname{grad}\varepsilon$$

első tag ott különbözik zérustól, ahol az ε hely szerint változik. Éppen ezért a szigetelő határán vesz fel jelentős értéket; ott a felületre merőleges, a vákuum irányába mutató húzóerőt jelent. Az

$$\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right)$$

második tagnak az ún. *elektrostrikció* jelenségnél van fontos szerepe. Ez a jelenség a következő. Ha töltetlen szigetelőben elektromos tér keletkezik, a tér ezen erő hatására a közeg kis térfogatelemeit elmozdítani igyekszik. A szigetelőben ekkor rugalmas feszültségek ébrednek, és egyensúlyi állapotban ezek kompenzálják a fenti erőt.

Ha a dielektromos együttható τ-tól való függését ismerjük, akkor $\mathbf{f}_2$ konkrétan felírható. Példaként vegyük a gázok esetét, ahol tapasztalat szerint

$\varepsilon - 1 = A_1\tau$ ((27,45). egyenlet).

Az A_1 állandó nem függ a τ tömegsűrűségtől. (27,45) alapján:

$$\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} = \tau A_1 = \varepsilon - 1$$ ((27,46). egyenlet).

Ezt (27,44)-be helyettesítve, kapjuk:

$$\mathbf{f}_2 = -\frac{1}{8\pi}E^2\operatorname{grad}\varepsilon + \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left[E^2(\varepsilon-1)\right] =$$
$$= -\frac{1}{8\pi}E^2\operatorname{grad}\varepsilon + \frac{1}{8\pi}(\varepsilon-1)\operatorname{grad}E^2 + \frac{1}{8\pi}E^2\operatorname{grad}\varepsilon = \frac{\varepsilon-1}{8\pi}\operatorname{grad}E^2$$ ((27,47). egyenlet)

Figyelembe véve az

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad} E^2 = (\mathbf{E}, \operatorname{grad})\mathbf{E} + (\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E})$$

vektoranalitikai összefüggést, valamint azt, hogy a sztatikus tér rotációmentes (rot **E** = 0), $\mathbf{f}_2$ a következő alakra hozható:

$$\mathbf{f}_2 = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}(\mathbf{E}, \operatorname{grad})\mathbf{E} = (\mathbf{P}, \operatorname{grad})\mathbf{E}$$ ((27,48). egyenlet),

ahol

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathbf{E}$$

a polarizáció vektora. (27,48) a **P** momentumsűrűségű dipóluseloszlásra ható elektromos erő sűrűsége.

Szilárd testekben vagy sűrűbb közegekben a (27,45) összefüggés nem érvényes, ezért általában az $\mathbf{f}_2$ (27,44) pontos kifejezését kell használnunk. Ekkor $\mathbf{f}_2$-nek nincs olyan szemléletes jelentése, mint gázok esetén.

4. fejezet - MÁGNESEK SZTATIKUS TERE

A mágnesek olyan testek, amelyek maguk körül mágneses teret keltenek. A testet úgy képzeljük el, hogy abban elemi mágneses momentumok folytonosan oszlanak el. A mágnesezettség jellemzésére a térfogategység mágneses momentumát, a mágneses momentumsűrűséget vagy más szóval a mágneses polarizációs vektort használjuk [lásd a (19) képletet]. Az egész test **m** mágneses momentuma alatt az **M** momentumsűrűség testre vett térfogati integrálját értjük:

$$\mathbf{m} = \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r})\, dV .$$

Ha az **M** nem függ az időtől, csak a helytől, akkor az általa keltett mágneses tér erőssége sem függ az időtől. Az ilyen teret nevezzük sztatikus mágneses térnek. Alapegyenleteit a Maxwell-egyenletek adják azzal a megszorítással, hogy *a)* minden elektromos mennyiség zérus, *b)* a mágneses mennyiségek pedig nem függnek az időtől:

rot **H** = 0; div **B** = 0.

Határfeltételek:

$$H_{t_2} - H_{t_1} = 0; \quad B_{n_2} - B_{n_1} = 0 .$$

Sztatikus mágneses tér vákuumban

Gondoljuk el, hogy a *V* térfogatot **M** momentumsűrűségű mágnes tölti ki. A testen kívül legyen vákuum, tehát **B** = **H**. Tegyük fel, hogy a mágneses momentum eloszlása ismert, vagyis adott függvénye a helynek: **M** = **M**(**r**).

A rot **H** = 0 egyenletből következik, hogy a sztatikus mágneses tér is skalárpotenciálból származtatható:

$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi$ ((28,1). egyenlet).

φ-t mágneses potenciálnak nevezzük.

A mágnes az elektréttel állítható párhuzamba. Ugyanis az elektrét folytonos térfogati dipóluseloszlás, a mágnes pedig folytonos mágneses momentumeloszlás. A mágnes által keltett sztatikus tér *φ* potenciálját ennélfogva az elektrét (21,3) potenciáljához hasonló kifejezés adja meg:

$$\varphi = -\int_V \frac{\operatorname{div} \mathbf{M}}{r} dV + \int_F \frac{M_n}{r} dF$$ ((28,2). egyenlet).

F a mágneses test felületét jelenti.

A 12. pontban elvégzett bizonyítás alapján nyilvánvaló, hogy φ kielégíti a

$\Delta\varphi = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{M}$ ((28,3). egyenlet)

egyenletet. A (28,1) egyenlet divergenciáját képezve, (28,3) figyelembevételével kapjuk:

div **H** = –div grad φ = $-\Delta\varphi$ = -4π div **M**.

Ebből átrendezéssel adódik, hogy

$\operatorname{div}(\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}) = 0$ ((28,4). egyenlet).

(28,4)-et a div **B** = 0 egyenlettel összehasonlítva, látható, hogy a **B** indukcióvektor és a **H** mágneses térerősség között fennáll a

$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$ ((28,5). egyenlet)

alapvető összefüggés. Ez azt mutatja, hogy **H** csak a mágnesen kívül egyezik meg **B**-vel, a mágnes belsejében **B** ≠ **H**.

A **B** vektor divergenciamentessége – amint arra a (4,3) egyenlet után rámutattunk – azt fejezi ki, hogy a mágneses tér forrásai nem töltések, hanem a mágneses momentumok. A természetben „mágneses töltések” nincsenek. Abban az esetben azonban, amikor a mágnesrúd mágnesezettsége homogén, vagyis div **M** = 0, csak a rúd két végén lesz mágneses felületi bevonat, $M_n \neq 0$, és ha a rúd vékony, akkor a két vége mágneses pólusnak tekinthető. Egyik végén $M_n > 0$, a másikon $M_n < 0$. Előbbit „északi”, utóbbit „déli” pólusnak szokás nevezni.

A pontszerű **m** mágneses momentum (kis mágnestű) által keltett sztatikus tér potenciálja és térerőssége – az elektromos dipólus sztatikus teréhez hasonlóan – a következő:

$\varphi = \frac{(\mathbf{m}, \mathbf{r})}{r^3}$ ((28,6). egyenlet),

$\mathbf{H} = \frac{3(\mathbf{m}, \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}$ ((28,7). egyenlet).

r a mágneses momentumtól azon ponthoz mutató vektor, amelyben a potenciált, illetve a térerősséget meghatározzuk.

Az **m** momentumra külső mágneses térben ható transzlációs erő (27,5) analógiájára:

$\mathbf{F} = (\mathbf{m}, \operatorname{grad})\mathbf{H}$ ((28,8). egyenlet).

A **H** mágneses tér a mágneses momentumra forgatónyomatékot is kifejt. Ennek értéke

$\mathbf{N} = (\mathbf{m} \times \mathbf{H})$ ((28,9). egyenlet).

A bevezető részben éppen ennek alapján definiáltuk a **H** térerősséget.

Permeábilis anyagok

Az előző pontban azzal az esettel foglalkoztunk, amikor a mágnes vákuumban van, vagyis a testen kívül **B = H**. Most feltételezzük, hogy a mágnesen kívüli tér nem vákuum, hanem azt anyagi közeg tölti ki. A közeg befolyásolja a mágnesek által keltett mágneses teret. A **B** és **H** vektorok között ekkor a

$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ((29,1). egyenlet)

anyagi egyenlet teremt kapcsolatot, μ az anyagra jellemző együttható, neve: *mágneses permeabilitás*. Általában függvénye a helynek, és csak homogén anyagok esetén állandó. A (29,1) összefüggés azonos átalakítással (28,5) alakra hozható:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathbf{H} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$$ ((29,2). egyenlet),

ahol

$$\mathbf{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathbf{H}$$ ((29,3). egyenlet),

vagy a szokásos alakban:

$$\mathbf{M} = \varkappa \mathbf{H}; \qquad \varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi}$$ ((29,4). egyenlet).

$\varkappa$ az anyag *mágneses szuszceptibilitása*.

Ezek az összefüggések azt mutatják, hogy a mágneses tér hatására a közegben mágneses momentum jön létre a szigetelő polarizációjához hasonlóan. A mágneses momentumsűrűség arányos a mágneses térerősséggel, $\varkappa$ nem függ a térerősségtől, az anyagra jellemző mennyiség.

A (29,4) összefüggéssel jellemzett permeábilis anyagokat két csoportra lehet osztani.

1. Diamágneses anyagok. Ezeknél $\varkappa$ negatív, és a hőmérséklettől független. Értéke mindig nagyon kicsi az 1-hez képest. Ezért a diamágneses polarizáció olyan gyenge, hogy gyakorlatilag nem figyelhető meg, különösen akkor nem, ha az illető anyag még para- vagy ferromágneses is. Néhány diamágneses anyag szuszceptibilitásának értéke:

	$\varkappa$
Hidrogén	$-0,5 \cdot 10^{-9}$
Víz	$-0,77 \cdot 10^{-6}$
Arany	$-3,0 \cdot 10^{-6}$
Bizmut	$-14 \cdot 10^{-6}$

Mivel $\varkappa < 0$, diamágneses anyagban **M** és **H** ellentétes irányú. A diamágnesség értelmezése kívül esik a fenomenológiai elektrodinamika határán, ehhez figyelembe kell vennünk az anyag atomos szerkezetére vonatkozó ismereteket.

2. Paramágneses anyagok. Ezek az anyagok eleve rendelkeznek molekuláris mágneses momentummal, amelyeket a tér igyekszik a saját irányába beállítani. A molekulák hőmozgása azonban ellenszegül ennek a törekvésnek, ezért a paramágneses szuszceptibilitás fordítva arányos a hőmérséklettel, egyenesen arányos az anyag τ sűrűségével:

$$\varkappa = \frac{C}{T}\tau$$ ((29,5). egyenlet).

(29,5) fejezi ki az ún. *Curie-törvényt.*[1] Szobahőmérsékleten a paramágneses szuszceptibilitás is kicsi. Értéke néhány anyagra vonatkozóan (szobahőmérsékleten) a következő:

	$\varkappa$
Oxigén	$0,14 \cdot 10^{-6}$
Platina	$29 \cdot 10^{-6}$
Mangán	$300 \cdot 10^{-6}$

Vannak olyan anyagok is, amelyeknél **M** és **H** nem arányos egymással. Ezeket *ferromágneses* anyagoknak nevezzük. Ilyenek: vas, kobalt, nikkel és a Heusler-féle mangánöntvények. Ezek mágneses szuszceptibilitása már nem állandó. Jellegzetes sajátságuk, hogy egy bizonyos mágneses térerősség sokkal nagyobb polározást idéz elő, mint paramágneses anyagoknál. Ez az érték egyes esetekben milliószoros is lehet. Másik tulajdonságuk, hogy viszonylag kis térerősség mellett beáll a telítettség állapota, vagyis **M** eléri maximális értékét. Pl.

Vasnál	$4\pi M_{max} = 2,2\ \mathrm{T}$
Nikkelnél	$= 0,6\ \mathrm{T}$
Kobaltnál	$= 1,8\ \mathrm{T}$

A ferromágnesség értelmezése is kívül esik a Maxwell-elmélet határain. Ahhoz anyagszerkezeti és kvantummechanikai ismeretek szükségesek. Ezért itt nem foglalkozhatunk vele részletesebben, hanem későbbi tanulmányokra és szakkönyvekre utalunk.[2]

[1] Lásd: Károlyházy–Marx–Nagy: Statisztikus mechanika c. köny 142. oldalán. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.
[2] Novobátzky–Neugebauer: Elektrodinamika c. tankönyv 2. kiadás. Tankönyvkiadó. A. Sommerfeld: Elektrodynamik c. könyv 100. oldalán. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1949.

Mágnesezett anyagokra ható erő

Tételezzük fel, hogy *V* térfogatú, *μ* permeabilitású anyagot helyezünk ismert mágneses térbe. A mágneses tér hatására az anyag polarizálódik, benne a térerősséggel arányos momentumsűrűség alakul ki. A mágneses tér a polározott anyagra – a dielektrikumra kifejtett elektromos erőhöz hasonlóan – erőt fejt ki. Az erő sűrűségét a 27. pontban követett gondolatmenet alapján határozhatjuk meg. Mivel teljes az analógia, ezért a számítást nem végezzük el, hanem csak a végeredményt közöljük.

A közeg térfogategységére kifejtett erő (erősűrűség):

$$\mathbf{f} = \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(H^2\tau\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\right) - \frac{1}{8\pi}H^2\operatorname{grad}\mu$$ ((30,1). egyenlet).

Itt is figyelembe vettük, hogy a *μ* anyagi együttható függhet a közeg *τ* tömegsűrűségétől. Az erősűrűség első tagja,

$$\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(H^2\tau\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\right),$$

az ún. *magnetostrikció* jelenségéről ad számot. A

$$-\frac{1}{8\pi}H^2\operatorname{grad}\mu$$

második tag ott különbözik zérustól, ahol a *μ* mágneses permeabilitás változik a hellyel. Tehát az anyag határán jelentős és a vákuum felé irányuló húzóerőt eredményez.

Paramágneses anyagoknál a (29,5) Curie-törvény szerint

$$\mu - 1 = A_2\tau$$ ((30,2). egyenlet),

ahol A_2 a tömegsűrűségtől független mennyiség. Ebből az összefüggésből következik:

$$\tau\frac{\partial\mu}{\partial\tau} = A_2\tau = \mu - 1$$ ((30,3). egyenlet).

(30,3)-at (30,l)-be helyettesítve, kapjuk, hogy

$$\mathbf{f} = \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left[H^2(\mu-1)\right] - \frac{1}{8\pi}H^2\operatorname{grad}\mu =$$

$$= \frac{\mu-1}{8\pi}\operatorname{grad}H^2 + \frac{1}{8\pi}H^2\operatorname{grad}\mu - \frac{1}{8\pi}H^2\operatorname{grad}\mu = \frac{\mu-1}{8\pi}\operatorname{grad}H^2$$ ((30,4). egyenlet)

Ez a kifejezés az

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad}H^2 = (\mathbf{H},\operatorname{grad})\mathbf{H} + (\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H})$$

vektoranalitikai összefüggés felhasználásával, valamint a sztatikában érvényes rot **H** = 0 egyenlet figyelembevételével a következő alakra hozható:

$$\mathbf{f} = \frac{\mu-1}{4\pi}(\mathbf{H},\operatorname{grad})\mathbf{H} = (\mathbf{M},\operatorname{grad})\mathbf{H}$$ ((30,5). egyenlet),

ahol

$$\mathbf{M} = \frac{\mu-1}{4\pi}\mathbf{H}$$

a mágneses tér által keltett momentumsűrűség. (30,5) a folytonos momentumeloszlásra ható mágneses erő sűrűsége.

5. fejezet - EGYENÁRAMOK

A mozgó elektromos töltéseket nevezzük elektromos áramnak. Ha a töltés vezetőben mozog, akkor vezetési (konduktív) áramról beszélünk. Jellemzésére a (11)-ben definiált *I* áramerősséget, illetve a (12) áramsűrűséget használjuk. Az *F* felületen átfolyó áram *I* erőssége és a **j** áramsűrűség között a (13) összefüggés áll fenn:

$$I = \int_F j_n dF \quad .$$

Eszerint az áramsűrűség felületi integrálja az áramerősséggel egyezik meg.

Ebben a fejezetben csak vezetési árammal foglalkozunk. A **j** áramsűrűséggel jellemzett áram az (5,1) Maxwell-egyenleteknek megfelelő elektromos és mágneses teret kelt. Ha az áramsűrűség és így az általa keltett elektromágneses tér időtől független, akkor az áramot *egyenáramnak* (vagy más szóval stacionárius áramnak) nevezzük. A következőkben az egyenáramok fizikai sajátságait vizsgáljuk. Kiindulunk az (5,1) Maxwell-egyenletekből, az egyenáramokat jellemző egyszerűsítő feltételek figyelembevételével. Eszerint minden mennyiség idő szerinti differenciálhányadosa zérus. Az alapegyenletek tehát a következők:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \quad (\mathrm{I}) \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\varrho \quad (\mathrm{II})$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0 \quad (\mathrm{III}) \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \quad (\mathrm{IV})$$

Mint később látni fogjuk, (I)-ből és (III)-ból következik, hogy a vezetőben egyenáramok esetén zérussal egyenlő a töltés térfogati sűrűsége. Tehát $\varrho = 0$, és ezért a (II) egyenlet valójában a következő:

$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0$ ((II'). egyenlet).

Az (I)–(IV) egyenletekhez hozzá kell még vennünk a

$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ ((V). egyenlet),

$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ((VI). egyenlet),

$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ ((VII). egyenlet)

anyagi egyenleteket, valamint a térmennyiségekre vonatkozó határfeltételeket, amelyek két különböző közeg határán illesztik egymáshoz a megoldásokat (lásd a 6. pontot).

Határfeltétel az áramsűrűség normális komponensére

Gondoljunk el véges keresztmetszetű vezetőt, amelyben **j** sűrűségű áram folyik. A vezetőt a σ vezetőképességgel jellemezzük. Képezzük az (I) egyenlet mindkét oldalának a divergenciáját:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\mathbf{j}.$$

Mivel div rot **H** ≡ 0, ezért

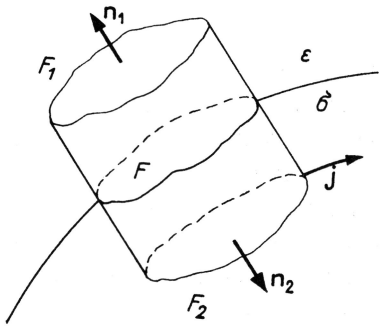
$$\operatorname{div}\mathbf{j}=0$$ ((31,1). egyenlet).

Az egyenáram áramsűrűsége tehát divergenciamentes. Ez azt jelenti, hogy az áramvonalak zárt görbék. Természetesen ez lehet úgy is, hogy a végtelenben záródnak, pl. végtelen hosszú lineáris vezető esetén.

Tekintsünk olyan hasábot, amelynek egy része a vezetőbe nyúlik, másik része pedig a vezetőt körülvevő szigetelőben van a *39. ábra* szerint. A hasáb felső, illetve alsó lapjainak felülete legyen F_1, illetve F_2, a palásté P. A (31,1) egyenletet integráljuk a hasáb térfogatára:

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{j}\,dV=0$$ ((31,2). egyenlet).

39. ábra -



Ezt a térfogati integrált Gauss-tétellel átalakítjuk felületi integrálok összegére:

$$\int_{F_1} j_n\,dF+\int_{F_2} j_n\,dF+\int_P j_n\,dF=0$$ ((31,3). egyenlet).

Most végezzük el azt a határátmenetet, amelynél az F_1 és az F_2 felületet ráhúzzuk a vezető határfelületére, miközben lim $P = 0$. E határátmenetnél a palástra vett harmadik integrál zérushoz tart, mert az integrandusz korlátos, az integrációs tartomány pedig tart zérushoz. Az első két felületi integrál a vezető határából a hasáb által kivágott F felületre vett integrálba megy át. Ha az F felület normális egységvektorát a vezetőből kifelé irányítjuk, akkor (31,3)-ból határátmenettel a következő egyenletet kapjuk:

$$\int_F \left(j_{n_1} - j_{n_2} \right) dF = 0$$ ((31,4). egyenlet).

Mivel az F felület tetszőleges, ezért (31,4)-ből következik, hogy a vezető felületén az áramsűrűség normális komponense folytonosan megy át:

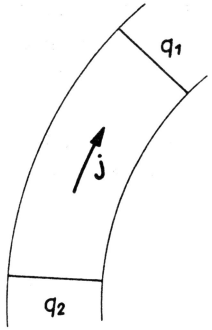
$$j_{n_1} - j_{n_2} = 0, \quad \text{vagy} \quad j_{n_1} = j_{n_2}$$ ((31,5). egyenlet).

Ha a vezető szigetelőbe ágyazott, akkor $j_{n_1} \equiv 0$, és így (31,5)-ből adódik, hogy j_{n_2} is eltűnik a szigetelővel határolt vezető felületén.

Ennek alapján könnyen beláthatjuk, hogy véges keresztmetszetű vezető tetszőleges két keresztmetszetére vonatkozó áramerősség egyenáramoknál megegyezik egymással. Legyen a két keresztmetszet felülete q_1, illetve q_2. A vezetőt szigetelő vegye körül. Integráljuk a (31,1) egyenletet a q_1-gyel és q_2-vel határolt vezető tartományra (lásd *40. ábra*):

$$\int_V \mathrm{div}\, \mathbf{j}\, dV = 0$$ ((31,6). egyenlet).

40. ábra -



A Gauss-tétel segítségével ez a következőképpen írható:

$$\int_{q_1} j_n\, dF - \int_{q_2} j_n\, dF + \int_{\text{palást}} j_n\, dF = 0$$ ((31,7). egyenlet).

Mivel a vezető szigetelővel határolt felületén $j_n = 0$, a palástra vett integrál eltűnik. Az első két integrál pedig a két helyen vett áramerősséggel azonos. Tehát

$I_1 = I_2$ ((31,8). egyenlet).

I_1 a q_1, I_2 a q_2 keresztmetszetre vonatkozó áramerősséget jelenti.

Áramforrások. Általánosított Ohm-törvény

Az Ohm-törvény (5,6) alatti

$$I = \frac{\Delta\Phi}{R}$$

integrális alakjából látszik, hogy a vezetőben addig folyik áram, amíg a két pontja között $\Delta\Phi$ potenciálkülönbség van. Az áram hatására a potenciálkülönbség hamar megszűnik, és ezzel egyidejűleg leáll az elektromos töltés áramlása is, vagyis I zérussá válik. Az áram fenntartásához tehát az kellene, hogy valamilyen „elektromotoros erő" állandó értéken tartsa a potenciálkülönbséget. *Volta* jött rá először (1800-ban), hogy ilyen erők valójában léteznek a természetben. Két különböző test érintkezésekor a kettő között jellegzetes potenciálkülönbség alakul ki, jeléül annak, hogy ott ilyen „elektromotoros erő" lép fel. Ugyanezt tapasztaljuk a galvánelemeknél is, ahol a disszociált elektrolitben koncentrációkülönbségek fordulnak elő. Az elektromos töltéssel rendelkező ionok a nagyobb koncentráció helyéről a kisebb felé diffundálnak, és így töltésmozgást, tehát elektromos áramot eredményeznek. Másik példa a termoelem, amelynek egyik forrasztási helyét melegítve, szintén áram indul meg.

Azokon a helyeken, ahol ezek az elektromotoros erők fellépnek, éppen úgy részt vesznek a töltés mozgatásában, mint a potenciálkülönbséggel kapcsolatos elektromos térerősség. Ezeken a helyeken $\mathbf{E} = 0$ lehet akkor is, ha $\mathbf{j} \neq 0$. Ezért az Ohm-törvényt általánosítanunk kell a következő alakban:

$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}')$ ((32,1). egyenlet),

ahol $\mathbf{E}'$ az elektromotoros erőre jellemző vektor, amely általában a helynek a függvénye. Azokat a helyeket nevezzük áramforrásoknak, ahol $\mathbf{E}' \neq 0$.

Egyenáramok elektromos terének meghatározása

Az egyenáramok alapfeladataiban adott mennyiségek a következők: ismeretes az $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'(\mathbf{r})$ vektor mint a helynek a függvénye (az áramforrások helyén különbözik csak zérustól) és a vezetőkre jellemző $\sigma(\mathbf{r})$ vezetőképesség, amely inhomogén vezetők esetén szintén függ a helytől, és csak homogén vezetőknél állandó. Keressük a $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ árameloszlást és az általa keltett $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ elektromos térerősséget.

A (III) egyenletből következik, hogy az egyenáramok elektromos tere is skalárpotenciálból származtatható:

$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi$ ((33,1). egyenlet).

Az elektromos tér meghatározását tehát itt is visszavezethetjük a $\Phi(x, y, z)$ potenciáltér meghatározására. A Φ-re vonatkozó differenciálegyenletet a következőképpen kapjuk.

A (32,1) és (33,1) összefüggéseket behelyettesítjük a (31,1) egyenletbe:

$\operatorname{div}\left[\sigma\left(\mathbf{E}' - \operatorname{grad} \Phi\right)\right] = 0$ ((33,2). egyenlet).

A Φ potenciált (33,2) megoldásával kapjuk. Homogén vezetőben az áramforráson kívül (**E'** = 0) Φ a

$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi \equiv \Delta \Phi = 0$ ((33,3). egyenlet)

egyenletet elégíti ki. Az elektrosztatika (10,5) egyenletével összehasonlítva, látszik, hogy homogén vezetőben egyenáramok esetén zérus az elektromos töltés ϱ térfogati sűrűsége. Ezt a fémekre vonatkozó anyagszerkezeti ismeretek alapján érthetjük meg. A vezetési áram negatív töltésű elektronok mozgásából áll. A negatív elektronok a pozitív fémionok rácsterében mozognak, és egyenáram esetén minden elemi tartományban ugyanannyi negatív töltés van, mint pozitív.

A (33,2), illetve (33,3) egyenlet megoldásánál figyelembe kell vennünk a vezetők és a szigetelők határára vonatkozó határfeltételi egyenleteket is, amelyek átírhatók a potenciál gradiensének normális, illetve tangenciális komponensére vonatkozó egyenletekké.

Gondoljunk el két különböző vezetőt. Egyik vezetőképessége legyen σ_1, a másiké σ_2. Meghatározzuk a két vezető elválasztó felületére vonatkozó határfeltételeket.

Az elektromos térerősség tangenciális komponensére vonatkozó

$E_{t_1} = E_{t_2}$ ((33,4). egyenlet)

határfeltétel [(6,9) képlet] most is érvényes. A térerősségvektor normális komponensére vonatkozó határfeltételeket pedig (31,5)-ből kapjuk a **j** = σ**E** Ohm-törvény felhasználásával:

$\sigma_1 E_{n_1} = \sigma_2 E_{n_2}$ ((33,5). egyenlet).

A (33,4) és (33,5) határfeltételek a (33,1) összefüggés alapján a potenciál gradiensének megfelelő komponensére is átírhatók. Eszerint a potenciálnak két vezető közeg határán ki kell elégítenie a következő egyenleteket:

$(\operatorname{grad} \Phi)_{t_1} = (\operatorname{grad} \Phi)_{t_2}$ ((33,4′). egyenlet),

$\sigma_1(\text{grad}\,\Phi)_{n_1} = \sigma_2(\text{grad}\,\Phi)_{n_2}$ ((33,5′). egyenlet).

Ezeken kívül természetesen kielégítendők még a különböző szigetelők határára vonatkozó egyenletek is:

$(\text{grad}\,\Phi)_{t_1} = (\text{grad}\,\Phi)_{t_2}$ ((33,6). egyenlet),

$\varepsilon_1(\text{grad}\,\Phi)_{n_1} = \varepsilon_2(\text{grad}\,\Phi)_{n_2}$ ((33,7). egyenlet).

Az így meghatározott *Φ* potenciálból az elektromos térerősséget (33,1) alapján gradiensképzéssel kapjuk. Majd ebből (32,1) felhasználásával adódik a **j** áramsűrűség. A probléma megoldását a bonyolult határfeltételek teszik nehézzé. Egyszerűen megoldhatók azok a feladatok, amelyeknél a vezető végtelen kiterjedésű, mert ilyenkor a határfeltételek nem lépnek fel, vagy ha véges keresztmetszetű végtelen hosszú vezetőről van szó, akkor is könnyen kielégíthetők. (A végtelen hosszú kábel esetét fogjuk majd példaként tárgyalni a 40. pontban.)

Integrális Ohm-törvény zárt áramkörre

Az adott áramforrások és vezetők által meghatározott árameloszlást és térerősséget az előző pont alapján számíthatjuk ki általában. Mint már rámutattunk, az esetek legnagyobb részében ez igen körülményes. A gyakorlatban előforduló egyszerűbb esetekben célszerű **j** helyett az *I* áramerősséget kiszámítani. Erre a kísérletekkel jobban hozzáférhető képletek adódnak.

Gondoljunk el lineáris vezetőből álló zárt áramkört, amelyben egy helyen valamilyen áramforrást (pl. galvánelemet) helyeztünk el. Az áramforrás helyén **E'** ≠ 0. Lineárisnak nevezzük a vezetőt akkor, ha az áramsűrűség iránya megegyezik a *d***s** vonalelem irányával. A vezetőben folyó áram sűrűsége (32,1) szerint függ a vezetőben uralkodó **E** térerősségtől és **E'**-től:

$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}')$ ((34,1). egyenlet).

Az egyenlet mindkét oldalát osszuk el a *σ* vezetőképességgel, szorozzuk a *d***s** vonalelemmel, majd integráljuk a zárt áramkör alkotta görbére:

$$\oint \frac{\mathbf{j}\,d\mathbf{s}}{\sigma} = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{E}')\,d\mathbf{s}$$ ((34,2). egyenlet).

A jobb oldali első integrál az **E** = –grad *Φ* összefüggés miatt zérussal egyenlő:

$$\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{s} = -\oint \text{grad}\,\Phi\,d\mathbf{s} = -\oint d\Phi = 0.$$

Mivel a vezető lineáris, **j** *d***s** = *j ds*. A bal oldali integrálban a számlálót és a nevezőt szorozzuk meg a vezető *q* keresztmetszetével:

$$\oint \frac{j\,ds}{\sigma} = \oint jq\frac{ds}{\sigma q}.$$

A *jq* szorzat az áram *I* erősségével egyezik meg: *I* = *jq*, amely az egész vezető mentén állandó, és ezért kiemelhető az integrál elé. Ennélfogva (34,2) a következőképpen írható:

$$I\oint \frac{ds}{\sigma q} = \oint \mathbf{E}'\,d\mathbf{s}$$ ((34,3). egyenlet).

A bal oldali integrál (5,6) alapján a zárt vezetőkör ohmikus ellenállását jelenti:

$$R = \oint \frac{ds}{\sigma q}$$ ((34,4). egyenlet).

A jobb oldalon levő körintegrált az áramforrás elektromotoros erejének nevezzük és $\mathcal{E}$ -vel jelöljük:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}'\,d\mathbf{s}$$ ((34,5). egyenlet).

A (34,3) egyenlet e jelölésekkel a következőképpen írható:

$$IR = \mathcal{E}$$ ((34,6). egyenlet).

Tehát az áramerősségnek és a zárt kör teljes ellenállásának a szorzata az áramforrás $\mathcal{E}$ elektromotoros erejével egyenlő. (34,6) az Ohm-törvényt adja zárt áramkörre.

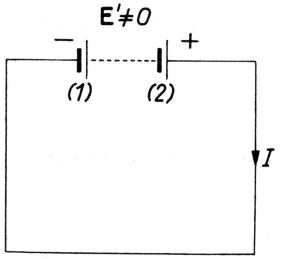
Mivel az áramforráson kívül, a homogén vezetőben **E'** = 0, a (34,5) körintegrál megegyezik az áramforrás két sarka (a galvánelem két kivezetése) közötti vonalintegrállal:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}'\,d\mathbf{s} = \int_1^2 \mathbf{E}'\,d\mathbf{s}.$$

Nyitott elem esetén *(41. ábra)* az elektromotoros erő a két kivezetés közötti potenciálkülönbséggel, az ún. kapocsfeszültséggel egyenlő:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 \mathbf{E}'\,d\mathbf{s}.$$

41. ábra -



(Az integrációs út – természetesen – a galvánelem belsejében értendő.)

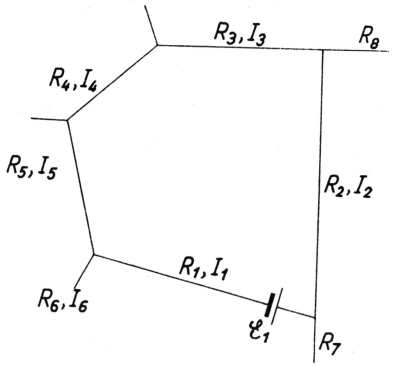
A Kirchhoff-törvények

Gondoljunk el lineáris vezetőkből álló hálózatot *(42. ábra),* amely több zárt áramkörből áll. Feltételezzük, hogy a hálózatban $\mathcal{E}_k$ elektromotoros erejű áramforrások is vannak. Az egyes vezetőszakaszok ellenállását R_k-val, a rajtuk átfolyó áram erősségét I_k-val jelöljük. Kirchhoff első törvénye több vezetődarab találkozási pontjára, az ún. elágazási pontokra vonatkozik. Szemeljünk ki egy elágazási pontot, és vegyük körül egy *F* zárt felülettel. A zárt felület által meghatározott térfogatot jelöljük *V*-vel. A (31,1) egyenletet integráljuk a *V* térfogatra:

$$\int_V \mathrm{div}\,\mathbf{j}\,dV = 0$$

((35,1). egyenlet).

42. ábra -



Ez a térfogati integrál Gauss-tétellel felületi integrállá alakítható:

$$\int_F j_n \, dF = 0$$ ((35,2). egyenlet).

A **j** áramsűrűség az *F* felület mentén csak azokon a helyeken különbözik zérustól, ahol az *F* felületet az egyes vezetőszakaszok átdöfik. Ha az egyes vezetők keresztmetszetét q_1, q_2, ..., q_k-val jelöljük, akkor a (35,2) felületi integrál ezen vezető-keresztmetszetekre vett integrálok összegeként írható fel:

$$\int_F j_n \, dF = \int_{q_1} j_n \, dF + \int_{q_2} j_n \, dF + \ldots + \int_{q_k} j_n \, dF + \ldots = 0$$ ((35,3). egyenlet).

A **j** áramsűrűség normális komponensének a q_k keresztmetszetre vett integrálja a *k*-adik vezetődarabban folyó I_k áramerősséggel egyezik meg. Ezért (35,3) tulajdonképpen azt fejezi ki, hogy az elágazási pontba folyó áramerősségek algebrai összege zérus:

$$\sum_k I_k = 0$$ ((35,4). egyenlet).

A Gauss-tétel alkalmazásánál az *F* felület külső normálisát szoktuk pozitívnak választani, ezért (35,3) alapján az elágazási pontból kifolyó áram erősségét pozitív, a befelé folyót pedig negatív előjellel kell vennünk a (35,4) összegben.

Kirchhoff második törvénye zárt áramkörökre vonatkozik, és tulajdonképpen a (34,6) Ohm-törvény általánosítása arra az esetre, amikor az áramkör nem egyetlen, hanem több vezetőszakaszból áll, és a körben esetleg több áramforrás is van. Ehhez a következő gondolatmenettel jutunk. Kiszemelünk a hálózatban egy zárt áramkört, és arra alkalmazzuk a

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}')$$

általánosított Ohm-törvényt. Ennek az egyenletnek a zárt áramkörre vett vonal menti integrálja az előző pontban követett gondolatmenettel a következő eredményre vezet:

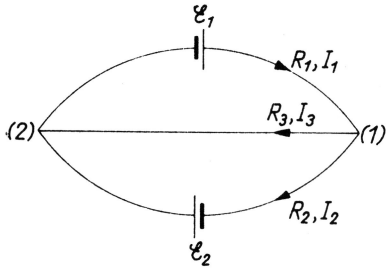
$$\sum_k R_k I_k = \sum_k \mathcal{E}_k$$ ((35,5). egyenlet).

Itt az összegezés a zárt áramkört alkotó vezetőszakaszokra értendő. $\mathcal{E}_k$ a *k*-adik szakaszban levő áramforrás elektromotoros ereje.

A Kirchhoff-törvények segítségével adott R_k és $\mathcal{E}_k$ értékek esetén meghatározhatjuk az I_k áramerősségeket. A (35,4) és (35,5) egyenleteket minden elágazási pontra, illetve minden, a hálózatban levő zárt áramkörre felírva általában több egyenletet kapunk, mint amennyi az ismeretlenek száma. Az így felírt egyenletek tehát nem mind függetlenek egymástól. Konkrét esetekben ki kell választani a független egyenleteket, és azok egyértelműen megadják a probléma megoldását. Erre példaként tekintsük a következő egyszerű hálózatot, amelyben két áramforrás van *(43. ábra)*. Az (1) elágazási pontban

$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$ ((35,6). egyenlet).

43. ábra -



A (2) elágazási pontban:

$I_1 - I_2 - I_3 = 0$ ((35,7). egyenlet).

A három zárt áramkörre alkalmazva (36,5)-öt, kapjuk:

$R_1 I_1 + R_3 I_3 = \mathcal{E}_1$ ((35,8). egyenlet),

$R_1 I_1 + R_2 I_2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ ((35,9). egyenlet),

$R_2 I_2 - R_3 I_3 = \mathcal{E}_2$ ((35,10). egyenlet).

Ebben a problémában ismert az $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ és az R_1, R_2, R_3; ismeretlenek az I_1, I_2, I_3 áramerősségek. Meghatározásukra három független egyenlet elegendő. Ez az öt egyenlet valóban nem mind független, ugyanis (35,7) a (35,6)-nak következménye. Hasonlóan a (35,9) egyenlet a (35,8) és a (35,10) egyenletből már következik. Ennélfogva a három független egyenlet pl. a (35,6), (35,8) és a (35,10). E három egyenlet egyértelműen meghatározza a három áramerősséget.

A Kirchhoff-törvényeknek a gyakorlati elektromosságtani problémáknál van fontos szerepük. Pl. ezekből a törvényekből következnek azok a kísérleti fizikából már ismert szabályok, amelyek a sorba, illetve párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredőjének a kiszámítására vonatkoznak. Továbbá, az áramkörökkel kapcsolatos elektrotechnikai számításoknak ezek képezik az alapját.

Egyenáramok mágneses tere. Biot–Savart-törvény

A Maxwell-egyenletek meghatározásánál már hivatkoztunk arra a tapasztalati tényre, hogy az elektromos áram maga körül mágneses teret kelt. Ennek a mágneses térnek fizikai sajátságait az (I) és (IV) Maxwell-egyenlet írja le. Eszerint az egyenáram által keltett mágneses tér alapegyenletei:

$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ ((36,1). egyenlet).

$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$ ((36,2). egyenlet).

Ha a vezetők nem vákuumban, hanem valamilyen közegben vannak, akkor ezekhez még hozzá kell vennünk a közegre jellemző anyagi egyenletet is, amely izotrop közeg esetén a következő:

$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ((36,3). egyenlet).

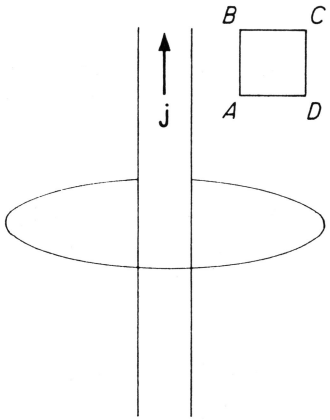
μ a makroszkopikus anyag mágneses permeabilitása.

A **j** áramsűrűséget a hely ismert függvényének tekintjük, tehát **j** = **j**(**r**) adott. Feladatunk az általa keltett mágneses tér meghatározása.

Egyszerűbb esetekben a **H** térerősség a (36,1) egyenlet integrális alakjából könnyen meghatározható. Az általános eset tárgyalása előtt előbb ilyen példát tekintünk.

1. Végtelen egyenes vezető tere

44. ábra -



Gondoljunk el végtelen hosszú, egyenes vezetőt, amelyben *I* erősségű áram folyik. Egyszerű meggondolással belátható, hogy a mágneses tér vonalai a vezetőt körök mentén fogják körül, amelyek középpontjai a vezető tengelyvonalán vannak. A mágneses tér nem lehet radiális irányú, mert akkor a vonalaknak kezdetük volna a vezető tengelyén, ami ellentmondana a (36,2) egyenletnek. Ha a vezető tengelyével párhuzamosan haladnának, akkor pedig a (36,1) egyenlettel kerülnénk ellentmondásba. Ennek belátása végett tételezzük fel egyelőre, hogy **H** a vezető tengelyével párhuzamos. Vegyünk fel a vezetőn kívül egy négyszöget, és integráljuk a (36,1) egyenletet e zárt görbe által meghatározott felületre, továbbá vegyük figyelembe a Stokes-tételt, amely szerint a felületi integrál vonal menti integrállá alakítható:

$$\int_F (\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_n \, dF = \oint \mathbf{H}\, d\mathbf{s} \,,$$

továbbá

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{H}\, d\mathbf{s} + \int_B^C \mathbf{H}\, d\mathbf{s} + \int_C^D \mathbf{H}\, d\mathbf{s} + \int_D^A \mathbf{H}\, d\mathbf{s} = 0 \qquad \text{((36,4). egyenlet).}$$

(36,4) jobb oldala azért zérus, mert a vezetőn kívül van a görbe, ott pedig $\mathbf{j} \equiv 0$. A $B \to C$, illetve $D \to A$ vonalon vett integrálok zérussal egyenlők, mert feltevésünk szerint **H** merőleges az integrációs útra. Marad tehát az első és a harmadik integrál. A vezetőtől távolodva, a mágneses tér erőssége csökken, ezért az *AB* szakaszon vett integrál értéke nagyobb, mint a *CD* szakaszon vett integrálé. Tehát, ha a feltevésünk igaz lenne, akkor

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{H}\, d\mathbf{s} - \int_D^C \mathbf{H}\, d\mathbf{s} > 0$$

lenne, ami ellentmondana a (36,1) alapegyenletnek. Mivel a tér hengerszimmetrikus, más megoldás nem lehet, mint csak az, amelynél a mágneses térerősség vonalai körök formájában fogják körül a vezetőt. Gondoljunk el egy *r* sugarú kört a vezetőn kívül, amelynek középpontja a vezető tengelyén van, és integráljuk a (36,1) egyenletet a kör által meghatározott felületre:

$$\int_F (\mathrm{rot}\, \mathbf{H})_n\, dF = \frac{4\pi}{c} \int_F j_n\, dF$$ ((36,5). egyenlet).

A bal oldali integrál Stokes-tétellel körintegrállá alakítható, a jobb oldali integrál pedig az áram *I* erősségével egyenlő. Tehát

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} I$$ ((36,6). egyenlet).

Mivel a kör kerülete mentén *H* nagysága állandó, ezért kiemelhető az integrál elé, továbbá **H** és *d***s** iránya megegyezik, ezért a **H** *d***s** skalárszorzat a vektorok abszolút értékének szorzatával egyenlő. Tehát:

$$|\mathbf{H}| \oint d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} I$$ ((36,7). egyenlet).

Az integrál a kör kerületét adja, és így (36,7)-ből kapjuk:

$$|\mathbf{H}| \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I$$,

amiből a mágneses tér erősségének nagyságára adódik:

$$|\mathbf{H}| = \frac{2}{c} \frac{I}{r}$$ ((36,8). egyenlet).

A végtelen hosszú egyenes vezetőben folyó *I* erősségű áram által keltett mágneses térerősség iránya azimutális, nagysága pedig fordítva csökken a tengelytől mért távolsággal.

Határozzuk meg a térerősséget a vezető belsejében is. A térerősség ott is azimutális irányú. Integráljuk **H**-t a vezető belsejében levő körre, amelynek középpontja a tengelyen van. (36,I)-ből a Stokes-tétel alapján kapjuk:

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c}\int_F j_n\, dF$$ ((36,9). egyenlet).

A jobb oldali integrál most nem a teljes *I* áramerősséget adja, mert az *F* felület nem azonos a vezető keresztmetszetével. Feltéve, hogy **j** a vezető keresztmetszetében állandó, (36,9)-ből a fenti meggondolásokkal kapjuk, hogy

$$|\mathbf{H}|2\pi r = \frac{4\pi}{c}|\mathbf{j}|\pi r^2$$ ((36,10). egyenlet).

A jobb oldalt átalakítjuk úgy, hogy szorzunk és osztunk a körkeresztmetszetű vezető *R* sugarának négyzetével:

$$|\mathbf{H}| = \frac{2}{cR^2} r |\mathbf{j}| \pi R^2 .$$

Mivel πR^2 a vezető keresztmetszetének területe, $|\mathbf{j}|\pi R^2$ az *I* áramerősséggel egyenlő. Ennélfogva a térerősség abszolút értéke a vezető belsejében a tengelytől *r* távolságra:

$$|\mathbf{H}| = \frac{2I}{cR^2} r$$ ((36,11). egyenlet).

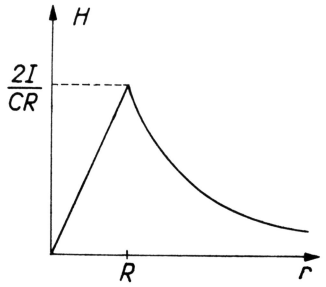
Tehát egyenesen arányos az *r* távolsággal. A (36,8) és a (36,11) eredményt egybefoglalva írhatjuk:

$$|\mathbf{H}| = \begin{cases} \dfrac{2I}{cr}, & \text{ha } r > R \\ \dfrac{2I}{cR^2} r, & \text{ha } 0 < r < R \end{cases}$$ ((36,12). egyenlet)

A vezető határán a külső és belső tér megegyezik és értéke *(45. ábra):*

$$|\mathbf{H}(R)| = \frac{2I}{cR}$$ ((36,13). egyenlet).

45. ábra -

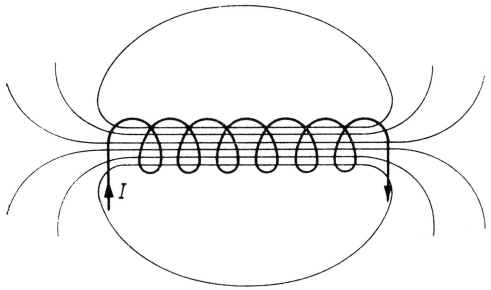


2. A tekercs mágneses tere

Gondoljunk el hosszú és kis keresztmetszetű tekercset. Az általa keltett mágneses tér erővonalrendszerét a *46. ábra* szemlélteti. A mágneses tér a tekercsen kívül gyenge, a tekercs belsejében pedig jó közelítéssel homogénnek tekinthető. Határozzuk meg a tér erősségét a tekercs belsejében. E célból integráljuk a mágneses térerősséget egy erővonal által meghatározott zárt görbére. Stokes-tétellel (36,1) alapján ez a következőképpen írható:

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{s} = \int_F (\mathrm{rot}\, \mathbf{H})_n\, dF = \frac{4\pi}{c} \int_F j_n\, dF$$ ((36,14). egyenlet).

46. ábra -



F-en a zárt görbére – mint határgörbére – illeszkedő felületet értünk. Az áramsűrűség a felület azon helyein különbözik zérustól, ahol a tekercset alkotó vezetők azt átdöfik. Ha a tekercs menetszámát *n*-nel jelöljük, akkor az *F* felületet a vezető *n*-szer szúrja át. Ezért a j_n-nek az *F* felületre vett integrálja a vezető *q* keresztmetszetére vett integrál *n*-szerese:

$$\int_F j_n \, dF = n \int_q j_n \, dF$$ ((36,15). egyenlet).

A *q*-ra vett jobb oldali integrál a vezetőben folyó áram *I* erősségét adja. (36,14) tehát a következő alakba írható:

$$\oint \mathbf{H} \, d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} nI$$ ((36,16). egyenlet).

A bal oldali körintegrált közelítéssel számítjuk ki. Nevezetesen, feltételezzük, hogy a tekercsen kívüli részben olyan gyenge a mágneses tér erőssége, hogy a tőle származó járulék elhanyagolható az integrál kiszámításánál. A zárt görbe helyett tehát csak a tekercs belsejében haladó *l* egyenesszakaszra integrálunk. Mivel itt **H** egyirányú *d***s**-sel, és homogénnek tekinthető, ezért

$$\oint \mathbf{H} \, d\mathbf{s} \approx |\mathbf{H}| l$$ ((36,17). egyenlet).

(36,17)-et (36,16)-ba helyettesítve, a tekercs belsejében uralkodó térerősség nagyságára kapjuk, hogy

$$|\mathbf{H}| = \frac{4\pi}{c} \frac{In}{l}$$ ((36,18). egyenlet).

l a tekercs hosszát, *n* a menetszámát jelenti. A tekercs belsejében a tér annál inkább tekinthető homogénnek, minél nagyobb a tekercs hossza a keresztmetszetéhez képest.

3. A mágneses tér kiszámítása a vektorpotenciál segítségével

Az előbbi két egyszerűbb eset után most rátérünk az általános eset tárgyalására. Tételezzük fel, hogy **j**(**r**) ismert függvény az egész térben. Keressük a mágneses tér erősségét mint a helynek a függvényét. Ehhez a (36,1), (36,2) egyenleteket kell megoldanunk.

A (36,2) egyenlet kielégíthető azáltal, ha a **B** indukcióvektort egy **A** segédvektortér rotációjaként tekintjük. Legyen tehát

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$ ((36,19). egyenlet).

Az **A** = **A**(**r**) vektorteret a mágneses tér vektorpotenciáljának nevezzük. Az **A** vektorpotenciál nem határozza meg egyértelműen a mágneses teret. Ha az **A** vektorpotenciál a (36,19) egyenlet alapján leírja a **B** vektorral jellemzett mágneses teret, az

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi$$ ((36,20). egyenlet)

potenciál, ahol χ tetszőleges függvénye a helynek, ugyanazt a **B** teret írja le. Ugyanis:

$$\mathbf{B}' = \operatorname{rot}\mathbf{A}' = \operatorname{rot}\left(\mathbf{A} + \operatorname{grad}\chi\right) = \operatorname{rot}\mathbf{A} + \operatorname{rot}\operatorname{grad}\chi = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}$$ ((36,21). egyenlet).

Itt figyelembe vettük, hogy gradiens rotációja mindig zérus. Tehát ha az **A** és **A'** potenciálok egy tetszőleges függvény gradiensében különböznek egymástól, akkor ugyanazt a mágneses teret írják le. Ezt a körülményt felhasználhatjuk arra, hogy a vektorpotenciálra egy megszorító kikötést tegyünk. Ezáltal megszüntetjük a határozatlanságot, másrészt alkalmas mellékfeltétellel sikerül a vektorpotenciál differenciálegyenletét egyszerű alakra hozni. Éppen ezért megköveteljük, hogy az **A** vektorpotenciál elégítse ki a

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$$ ((36,22). egyenlet)

egyenletet. A (36,20) transzformáció felhasználásával ez mindig elérhető. Ugyanis ha **A** nem elégítené ki (36,22)-t, a (36,20) alapján bevezethető olyan **A'**, amely már kielégíti, ha χ-t a

$$\triangle\chi = -\operatorname{div}\mathbf{A}$$

egyenlet megoldásaként választjuk. Nyugodtan megkövetelhetjük tehát **A** divergenciamentességét.

A vektorpotenciált meghatározó differenciálegyenletet (36,1)-ből kapjuk a (36,3) anyagi egyenlet felhasználásával. (36,3) és (36,19) alapján

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}$$ ((36,23). egyenlet).

Ezt (36,1)-be helyettesítve:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

Feltételezzük, hogy a közeg homogén, tehát μ állandó. Ekkor kiemelhető a rot alól, és így

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mu\mathbf{j}$$ ((36,24). egyenlet).

A vektoranalízisből ismert

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \triangle\mathbf{A}$$

összefüggés felhasználásával (36,24) a következőképpen írható:

$$\triangle \mathbf{A} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mu \mathbf{j}$$ ((36,25). egyenlet).

Most figyelembe vesszük a (36,22) mellékfeltételt, és ezáltal az **A** vektorpotenciál (36,25) differenciálegyenlete a

$$\triangle \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mu \mathbf{j}$$ ((36,26). egyenlet)

egyszerű alakot veszi fel.

(36,26) az elektrosztatikában megismert Poisson-egyenlet, amelynek megoldása:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{c}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV$$ ((36,27). egyenlet).

r annak a pontnak a helyzetvektora, amelyben a potenciált keressük, **r'** pedig az integrációs futópont helyvektora.

Az elektrosztatikában bebizonyítottuk, hogy (36,27) valóban kielégíti a (36,26) Poisson-egyenletet (lásd a 12. pontot). Most még meg kell mutatnunk, hogy (36,27) a (36,22) mellékfeltételt is kielégíti. Az egyszerűbb írásmód kedvéért vezessük be az $r = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ jelölést. Képezzük (36,27) divergenciáját az **r** vektor (*x*, *y*, *z*) koordinátái szerint:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\mu}{c}\int_V \operatorname{div}_{(\mathbf{r})}\left(\frac{\mathbf{j}}{r}\right)dV = \frac{\mu}{c}\int_V\left[\frac{1}{r}\operatorname{div}_{(\mathbf{r})}\mathbf{j}(\mathbf{r}') + \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \operatorname{grad}_{(\mathbf{r})}\frac{1}{r}\right)\right]dV$$ ((36,28). egyenlet).

Itt felhasználtuk a

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{j}}{r}\right) = \frac{1}{r}\operatorname{div}\mathbf{j} + \left(\mathbf{j}, \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)$$ ((36,29). egyenlet)

vektoranalitikai összefüggést. A jobb oldali integrál első tagjában $\operatorname{div}_{(\mathbf{r})}\mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$, mert **j** az **r'**-től függ, a divergenciát pedig az **r** koordinátái szerint képezzük. A második tagot átalakítjuk annak figyelembevételével, hogy

$$\operatorname{grad}_{(\mathbf{r})}\frac{1}{r} = -\operatorname{grad}_{(\mathbf{r}')}\frac{1}{r}$$ ((36,30). egyenlet).

Ez az összefüggés nyilvánvaló az

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

kifejezés alapján. A (36,30) és a (36,29) képlet felhasználásával írható:

$$\left(\mathbf{j}, \operatorname{grad}_{(\mathbf{r})} \frac{1}{r}\right) = -\left(\mathbf{j}, \operatorname{grad}_{(\mathbf{r}')} \frac{1}{r}\right) = -\operatorname{div}_{(\mathbf{r}')}\left(\frac{\mathbf{j}}{r}\right) + \frac{1}{r}\operatorname{div}_{(\mathbf{r}')}\mathbf{j}(\mathbf{r}')$$

A jobb oldalon levő utolsó tag eltűnik, mert (36,1) szerint $\operatorname{div}_{(\mathbf{r}')}\mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$. Ezért

$$\left(\mathbf{j}, \operatorname{grad}_{(\mathbf{r})} \frac{1}{r}\right) = -\operatorname{div}_{(\mathbf{r}')}\left(\frac{\mathbf{j}}{r}\right)$$ ((36,31). egyenlet).

Ezt (36,28)-ba helyettesítve, adódik:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{\mu}{c}\int_V \operatorname{div}_{(\mathbf{r}')}\left(\frac{\mathbf{j}}{r}\right) dV$$

Gauss-tétellel a jobb oldali térfogati integrál felületi integrállá alakítható:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{\mu}{c}\int_F \frac{j_n}{r} dF$$ ((36,32). egyenlet).

Az *F* felület a vezető határfelülete. Mivel a vezető szigetelőbe ágyazott, (31,5) szerint az áramsűrűség normális komponense a felület mentén eltűnik és ezzel együtt (36,32) jobb oldala is. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a (36,27) vektorpotenciál valóban kielégíti a div **A** = 0 mellékfeltételt is.

Ezek után **A**-ból a **B**, majd abból a **H** vektor egyszerű rotációképzéssel nyerhető. (36,27)-et (36,19)-be helyettesítve, kapjuk:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}_{(\mathbf{r})} \mathbf{A} = \frac{\mu}{c}\operatorname{rot}_{(\mathbf{r})}\int_V \frac{\mathbf{j}}{r} dV = \frac{\mu}{c}\int_V \operatorname{rot}_{(\mathbf{r})}\left(\frac{\mathbf{j}}{r}\right) dV$$ ((36,33). egyenlet).

A rot melletti (**r**) index azt jelenti, hogy a rotációt az **r** helyvektor végpontjának (*x*, *y*, *z*) koordinátái szerint kell képezni. A $\operatorname{rot}_{(\mathbf{r})}\left(\frac{\mathbf{j}}{r}\right)$ kifejezés a vektoranalízisből ismert összefüggés alapján a következő alakba írható:

$$\mathrm{rot}_{(\mathbf{r})}\left(\frac{\mathbf{j}}{r}\right)=\frac{1}{r}\mathrm{rot}_{(\mathbf{r})}\mathbf{j}(\mathbf{r}')+\left(\mathrm{grad}_{(\mathbf{r})}\frac{1}{r}\times\mathbf{j}\right).$$

Mivel **j'**(**r'**) az **r'** vektor végpontjának (*x'*, *y'*, *z'*) koordinátáitól függ, és független (*x*, *y*, *z*)-től:

$$\mathrm{rot}_{(\mathbf{r})}\mathbf{j}(\mathbf{r}')=0.$$

Ezt figyelembe véve (36,33) így írható:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\frac{\mu}{c}\int_V\left(\mathrm{grad}_{(\mathbf{r})}\frac{1}{r}\times\mathbf{j}\right)dV=-\frac{\mu}{c}\int_V\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\times\mathbf{j}}{r^3}dV=\frac{\mu}{c}\int_V\frac{\mathbf{j}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{r^3}dV$$ ((36,34). egyenlet).

Az **r** – **r'** vektor az integrációs térfogatelemtől azon pont felé mutat, amelyben a mágneses teret számítjuk.

A **B** = *μ***H** anyagi egyenlet felhasználásával a **B**-t meghatározó (36,34) egyenletből a **H** mágneses térerősséget *μ*-vel való osztással kapjuk.

$$\mathbf{H}(\mathbf{r})=\frac{1}{c}\int_V\frac{\mathbf{j}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{r^3}dV$$ ((36,35). egyenlet).

Ebből a kifejezésből látszik, hogy a **j'**(**r'**) árameloszlás által keltett mágneses tér **H** erőssége nem függ az áramot körülvevő közegtől, vagyis adott áram ugyanazt a térerősséget hozza létre vákuumban, mint valamilyen közegben. Ez azt jelenti, hogy a mágneses jelenségek elméletében a **H** vektor játssza azt a szerepet, amit a **D** vektor játszik az elektromos jelenségek elméletében. A **H** és **E**, valamint a **D** és **B** vektorok közötti analógia tehát csak formális. Tulajdonképpen a **D** és **H**, valamint a **B** és **E** vektorok állítandók egymással párhuzamba. Ebből egyúttal az is következik, hogy a közeg *ε* dielektromos állandójához hasonló szerep a mágneses jelenségeknél nem a *μ*, hanem az l/*μ* együtthatónak jut. (A relativitáselméletben ez a kapcsolat még szembetűnőbben látszik. A **B** és **E** vektor, valamint a **D** és **H** vektor komponensei képeznek egy-egy antiszimmetrikus tértenzort.)

Lineáris vezetők esetén a (36,35) általános képlet egyszerűbb alakot vesz fel. Lineárisnak nevezzük azt a vezetőt, amelynél az áramsűrűség vektora párhuzamos a *d***s** vonalelemmel. Ekkor **j** *dV* = *I d***s**. Így

$$\mathbf{H}(\mathbf{r})=\frac{1}{c}\int_L\frac{d\mathbf{s}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{r^3}$$ ((36,36). egyenlet).

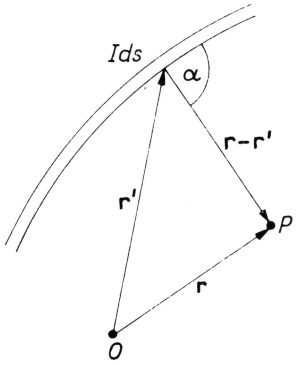
A (36,36) vonalintegrál a lineáris vezetőre értendő. E képlet szerint a lineáris vezető által keltett mágneses tér úgy fogható fel, mint a *d***s** vonalelemek, pontosabban az *I d***s** áramelemek által keltett tér szuperpozíciója *(47. ábra).* Nevezetesebben:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r})=\int d\mathbf{H}$$ ((36,37). egyenlet),

ahol

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{s}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{r^3}$$ ((36,38). egyenlet).

47. ábra -



Az *I d***s** áramelem által a *P* pontban keltett mágneses tér irányát a $d\mathbf{s}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ vektorszorzat iránya adja, ami a rajz szerint a lap síkjára merőlegesen befelé mutat. (A kísérleti fizikában az Ampère- vagy jobbkéz-szabály néven szerepelt.)

A (36,36) vagy a (36,38) képlet *Biot–Savart-törvény* néven ismeretes. Szokásosabb alakja a (36,38) abszolút értékét kifejező

$$dH = \frac{I\sin\alpha\cdot ds}{cr^2}$$

képlet, ahol *α* a *d***s** vonalelem és az **r** – **r'** vektor által bezárt szöget jelenti.

Mágneses kettősréteg

Az előző pontban láttuk, hogy tetszőleges **j**(**r**) árameloszlás mágneses terét az **A**(**r**) vektorpotenciálból származtathatjuk. Mivel az áram által keltett mágneses tér **H** erőssége (36,1) szerint nem rotációmentes, a tér nem írható le skalárpoten- ciállal, mint a permanens mágnesek sztatikus tere (lásd a 28. pontot). A következőkben megmutatjuk, hogy áram által átjárt lineáris vezető mágneses tere nem egyértékű skaláris potenciállal is leírható.

Gondoljunk el vákuumban elhelyezett lineáris vezető kört, amelyben *I* erősségű áram folyik. A vezetőn kívül (36,1) szerint

$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0$ ((37,1). egyenlet),

továbbá mivel $\mu = 1$, (36,2) alapján

$\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0$ ((37,2). egyenlet).

(37,1)-ből következik, hogy az áramkörön kívüli térrészben **H** a φ skaláris potenciálból származtatható:

$\mathbf{H} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ ((37,3). egyenlet).

Ebben a tartományban φ (37,2) alapján kielégíti a

$\triangle\varphi = 0$ ((37,4). egyenlet)

egyenletet.

Képzeljünk el tetszőleges *F* felületet, amely úgy illeszkedik az áramkörre, hogy *F*-nek a lineáris vezetőkör határoló görbéje. A mágneses térerősségnek minden olyan zárt vonal mentén vett integrálja, amely nem metszi az *F* felületet, zérus:

$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{s} = 0$ ((37,5). egyenlet).

(37,3)-at behelyettesítve kapjuk:

$\oint d\varphi = 0$.

Ebben a tartományban a φ skaláris potenciál tehát folytonos egyértékű függvénynek tekinthető. Ha az integrációs út egyszer metszi az *F* felületet, akkor (36,1) szerint

$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{s} = 4\pi \frac{I}{c}$ ((37,6). egyenlet).

A **H** térerősség (37,3) kifejezését behelyettesítve, (37,6) a következőképpen írható:

$-\oint d\varphi = 4\pi \frac{I}{c}$ ((37,7). egyenlet).

Ez az egyenlet úgy értelmezhető, hogy a φ skaláris potenciál nem folytonos a zárt vonal mentén, hanem a felületen való áthaladásnál ugrása van, amelynek nagysága $4\pi\frac{I}{c}$. Jelöljük a görbe és a felület kétoldali metszőpontját P_1-gyel, illetve P_2-vel. Ekkor (37,7)-ből adódik:

$$\varphi(P_2)-\varphi(P_1)=4\pi\frac{I}{c}$$ ((37,8). egyenlet).

Az elektromos kettősréteg elektrosztatikus terének vizsgálatánál a 20. pontban láttuk, hogy a kettősréteg potenciálja a kettősrétegen való áthaladáskor ugrik, és az ugrás nagysága a momentumsűrűség 4π-szerese. A 28. pontban felismert analógia alapján ugyanez igaz a mágneses kettősréteg sztatikus mágneses terének φ potenciáljára is. Nevezetesen:

$$\varphi_+ - \varphi_- = 4\pi\nu_m$$ ((37,9). egyenlet),

ahol ν_m a felületi mágneses momentumeloszlás sűrűsége. A (37,8) és (37,9) képletek összehasonlításából látszik, hogy a lineáris vezető alkotta áramkör a keltett mágneses tér szempontjából olyan mágneses kettősréteggel helyettesíthető, amely az F felületet

$$\nu_m=\frac{I}{c}$$ ((37,10). egyenlet)

állandó momentumsűrűséggel vonja be. Az áramkör mágneses terének nem egyértékű skaláris potenciálja (20,1) alapján a következő képlettel adható meg:

$$\varphi(r)=\frac{I}{c}\int_F\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_n dF$$ ((37,11). egyenlet).

A felület normális egységvektorát a felületi mágneses momentumok irányában vesszük fel. Mivel (37,6) bal oldala akkor pozitív, ha az áram irányába nézve, a vonalat az óramutató járásával egyezően járjuk körül, a (36,6) és (37,9) egybevetéséből következik, hogy a felület normálisa irányába nézve, az áram az óramutató járásával megegyező irányú.

Ha a vezetőt μ permeabilitású közeg veszi körül, és ebben keressük a keltett mágneses tér erősségét valamely **r** pontban, akkor is (37,11) adja a tér skaláris potenciálját, mivel az áram által keltett mágneses tér erőssége független a közegtől. (Lásd az előző pontot.) A kettősréteg momentumsűrűsége azonban akkor $\nu_m=\mu\frac{I}{c}$. Ugyanis az elektrosztatika és magnetosztatika közötti analógia szerint a μ permeabilitású közegben a permanens mágnesek olyan mágneses teret keltenek, mintha momentumuk μ-ed részére csökkenne a vákuumbeli értékhez képest.

Ha az áramkör síkra helyezhető, akkor sík mágneses kettősréteggel helyettesíthető. Ilyenkor az áramkör teljes mágneses momentumát is értelmezhetjük. Ezt az I/c momentumsűrűség és a sík áramkörrel bezárt F felület szorzata adja meg:

$m = \frac{I}{c} F$ ((37,12). egyenlet).

A sík áramvezető mágneses tere a vezetőtől nagyobb távolságban tehát olyan, mintha azt (37,12) momentumú mágnes keltette volna.

A (37,12) képlet tekercsre is alkalmazható. Ha a tekercs menetszáma *n*, és egy menet által bezárt terület *F*, akkor a tekercs teljes mágneses momentuma:

$m = \frac{I}{c} nF$ ((37,13). egyenlet).

Ezt a képletet használjuk például a mágneses tér által forgó tekercses galvanométerre kifejtett forgatónyomaték kiszámításánál.

Egyenáramok mágneses terének energiája. Indukciós együttható

Gondoljunk el tetszőleges alakú vezetőt, amelyben egyenáram folyik. Az árameloszlást a **j**(**r**) áramsűrűség írja le. A keltett mágneses teret a (36,1), (36,2) egyenletek határozzák meg. A mágneses térnek van energiája, amely folytonosan oszlik el arra a tartományra, ahol a **H**(**r**) térerősség zérustól különbözik. A mágneses térenergia sűrűsége:

$u = \frac{1}{8\pi} \mathbf{HB}$ ((38,1). egyenlet).

A teljes térenergiát (38,1) térfogati integrálja adja:

$U = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{HB}\, dV$ ((38,2). egyenlet).

Az integrál arra a tartományra terjesztendő ki, amelyet a mágneses tér kitölt. A térenergia (38,2) általános kifejezése áramok esetén más alakban is felírható. E célból a (**H**, **B**) skaláris szorzatot átalakítjuk a **B** = rot **A** összefüggés, valamint a

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H}$$

vektoranalitikai képlet felhasználásával:

$$\mathbf{HB} = \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H}.$$

A jobb oldali utolsó tagban rot **H** helyére (36,1) alapján beírjuk az áramsűrűség $\frac{4\pi}{c}$ -szeresét:

$$(\mathbf{H}, \mathbf{B}) = \operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \frac{4\pi}{c}(\mathbf{A}, \mathbf{j})$$ ((38,3). egyenlet).

(38,3)-at (38,2)-be helyettesítve, a térenergia a következő alakba írható:

$$U = \frac{1}{8\pi}\int_V \operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H})\, dV + \frac{1}{2c}\int_V (\mathbf{A}, \mathbf{j})\, dV$$ ((38,4). egyenlet).

Az első térfogati integrál a Gauss-tétellel a tekintett fizikai rendszert magába foglaló *F* felületre vett integrállá alakítható:

$$\frac{1}{8\pi}\int_V \operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H})\, dV = \frac{1}{8\pi}\int_F (\mathbf{A} \times \mathbf{H})_n\, dF$$ ((38,5). egyenlet).

Ha az *F* felületet a végtelenbe távolítjuk, akkor a felületi integrál zérussá válik, mert az integrandusz erősebben tart zérushoz, mint a felületelem a végtelenhez. Ezért az energia (38,4) képletében csak a második tag marad meg:

$$U = \frac{1}{2c}\int_V \mathbf{A}\mathbf{j}\, dV$$ ((38,6). egyenlet).

A térenergiának ez a kifejezése az áram és a mágneses tér kölcsönhatási energiájaként értelmezhető.

A gyakorlatban leginkább előforduló lineáris áramok esetén (38,6) tovább egyszerűsödik. Tételezzük fel, hogy a mágneses teret *n* lineáris áramkör kelti. Az áramköröket az 1, 2, ..., *k*, ..., *n* számozással különböztetjük meg egymástól. A bennük folyó áram erőssége legyen I_k (k = 1, 2, ..., n). Mivel a **j** áramsűrűség a vezetőkben különbözik zérustól, a (38,6) térfogati integrál az egyes áramkörökre vett integrálok összegeként írható:

$$U = \frac{1}{2c}\int_V \mathbf{A}\mathbf{j}\, dV = \frac{1}{2c}\sum_{k=1}^{n}\int_{V_k} \mathbf{A}\mathbf{j}\, dV_k$$ ((38,7). egyenlet).

Lineáris áram esetén **j** dV = I d**s**, ezért

$$U = \frac{1}{2c}\sum_{k=1}^{n} I_k \oint_k \mathbf{A}\, d\mathbf{s}_k$$ ((38,8). egyenlet).

Az integrál a *k*-adik vezetőkörre mint zárt görbére terjesztendő ki. A (38,8) körintegrál a Stokes-tétellel felületi integrállá alakítható:

$$\oint_k \mathbf{A}\, d\mathbf{s}_k = \int_{F_k} \left(\mathrm{rot}\ \mathbf{A}\right)_n dF = \int_{F_k} B_n dF = \mathcal{F}_k$$ ((38,9). egyenlet).

F_k a k-adik vezetőkörre illeszkedő felület, amelynek határvonala a k-adik áramkör. $\mathcal{F}_k$ a rajta átmenő indukciófluxus. Ennélfogva a mágneses térenergia az áramerősségek és az indukciófluxusok szorzatának összegével fejezhető ki:

$$U = \frac{1}{2c}\sum_{k=1}^{n} I_k \mathcal{F}_k$$ ((38,10). egyenlet).

Egyetlen lineáris áramkör esetén ez a képlet az

$$U = \frac{1}{2c} I \mathcal{F}$$ ((38,11). egyenlet)

egyszerű alakot veszi fel.

Térjünk vissza az indukciófluxus (38,9) kifejezéséhez. Az integrálban szereplő **A** vektorpotenciált a (36,27) képlet állítja elő. Ebben az integrálás azokra a helyekre terjesztendő ki, ahol áram van, tehát a vezetőkre. n vezetőkörből álló lineáris áramrendszer esetén:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{c}\sum_{i=1}^{n} I_i \oint_i \frac{d\mathbf{s}_i}{r_{ik}}$$ ((38,12). egyenlet),

ahol r_{ik} az i-edik kör $d\mathbf{s}_i$ elemének a k-adik kör $d\mathbf{s}_k$ elemétől mért távolsága. (38,12)-t (38,9)-be helyettesítve és az egyenlet mindkét oldalát osztva c-vel:

$$\frac{1}{c}\mathcal{F}_k = \frac{\mu}{c^2}\sum_{i=1}^{n} I_i \oint_i \oint_k \frac{d\mathbf{s}_i d\mathbf{s}_k}{r_{ik}} = \sum_{i=1}^{n} I_i L_{ki}$$ ((38,13). egyenlet),

ahol

$$L_{ki} = \frac{\mu}{c^2}\oint_i \oint_k \frac{d\mathbf{s}_i d\mathbf{s}_k}{r_{ik}}$$ ((38,14). egyenlet).

Az L_{ki} együttható az i-edik és a k-adik vezető nagyságától, alakjától és helyzetétől függ, és a két áramkör kölcsönös indukció-együtthatójának nevezzük. A (38,13) összeg $i = k$-adik tagja a k-adik áramkörön átmenő indukciófluxusnak azt a részét adja, amely magától a k-adik körtől származik. A megfelelő L_{kk} együttható a k-adik kör önindukciós együtthatója:

$$L_{kk'} = \frac{\mu}{c^2} \oint_k \oint_{k'} \frac{d\mathbf{s}_k d\mathbf{s}'_{k'}}{r_{kk'}}$$ ((38,15). egyenlet).

Itt a kétszeres integrálás ugyanarra a vezetőre értendő. L_{kk} (38,15) alapján történő kiszámításánál a vezető nem tekinthető lineárisnak, mert amikor $d\mathbf{s}_k$ egybeesik $d\mathbf{s}'_k$-vel, a nevező zérussá válik. A vezetőt a valóságnak megfelelően véges keresztmetszetűnek kell tekintenünk. Emiatt a matematikai nehézség miatt L_{kk} csak a legegyszerűbb esetekben számítható ki (38,15)-ből. A gyakorlati problémáknál általában méréssel vagy félempirikus képletekkel szokták meghatározni.

A lineáris vezetők mágneses terének energiája (38,10) és (38,13) alapján az áramerősségek kvadratikus kifejezésével állítható tehát elő:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} L_{ki} I_i I_k$$ ((38,16). egyenlet).

Ha csak egyetlen áramkörről van szó, amelyben I erősségű áram folyik és önindukciós együtthatója L, mágneses terének energiáját az

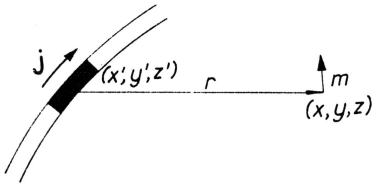
$$U = \frac{1}{2} L I^2$$ ((38,17). egyenlet)

egyszerű képlet adja meg. [Ez a képlet alakra nagyon hasonlít a töltött vezetők elektrosztatikus terének energiáját megadó (25,7) képlethez.]

Az áramra ható erő

Az áram által átjárt vezető mágneses tere révén a közelébe helyezett mágnesre erőt fejt ki. A mechanikai hatás-visszahatás elve (Newton III. axiómája) szerint a mágnes is erőt fejt ki az áramra. Feladatul tűzzük ki ennek az erőnek a meghatározását.

48. ábra -



Képzeljünk el valamilyen **j**(**r**) árameloszlást és a vezető közelében egy **m** momentumú kis mágnest *(48. ábra)*. A vezető térfogategysége által keltett mágneses tér az **m** mágneses momentum helyén (36,34) alapján

$\mathbf{h} = -\frac{1}{cr^3}(\mathbf{r} \times \mathbf{j})$ ((39,1). egyenlet),

ahol **r** a vezető kiszemelt térfogategységétől a mágneshez húzott vektor, $r = |\mathbf{r}|$. A (39,1) mágneses tér a mágneses momentumra (28,8) szerint az

$\mathbf{f}' = (\mathbf{m}, \mathrm{grad})\mathbf{h}$ ((39,2). egyenlet)

erőt fejti ki. A hatás-ellenhatás elve szerint a mágnes **f = –f'** erővel hat a vezető térfogategységében levő áramra. Tehát

$\mathbf{f} = -(\mathbf{m}, \mathrm{grad})\mathbf{h}$ ((39,3). egyenlet).

Mivel **f** a térfogategységre kifejtett erő, ezért erősűrűségnek nevezzük. A térerősség (39,1) kifejezését (39,3)-ba beírva:

$\mathbf{f} = \frac{1}{c}(\mathbf{m}, \mathrm{grad})\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{j}}{r^3}$ ((39,4). egyenlet).

A gradiens a mágnes helyének (*x*, *y*, *z*) koordinátái szerint képzendő. A vezető megfelelő pontjának koordinátái legyenek *x′*, *y′*, *z′*. Számítsuk ki az erősűrűség *x* komponensét.

$$f_x = \frac{1}{c}(\mathbf{m}, \mathrm{grad})\frac{1}{r^3}(\mathbf{r} \times \mathbf{j})_x = \frac{1}{c}(\mathbf{m}, \mathrm{grad})\frac{1}{r^3} \cdot \left[(y - y')j_z - (z - z')j_y\right] =$$
$$= \frac{1}{c}\left(\mathbf{m}, \mathrm{grad}\,\frac{1}{r^3}\right)(\mathbf{r} \times \mathbf{j})_x + \frac{1}{cr^3}(m_y j_z - m_z j_y) =$$
$$= -\frac{3}{cr^5}(\mathbf{m}, \mathbf{r})(\mathbf{r} \times \mathbf{j})_x + \frac{1}{cr^3}(\mathbf{m} \times \mathbf{j})_x = \frac{1}{c}\left[\mathbf{j} \times \left(\frac{3(\mathbf{m}, \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}\right)\right]_x$$

Itt figyelembe vettük, hogy a **j** áramsűrűség az *x′*, *y′*, *z′* koordináták függvénye, tehát az *x*, *y*, *z* koordináták szerint vett differenciálhányadosa zérus.

Hasonló kifejezés adódik az erősűrűség *y* és *z* komponensére is. Az **f** erősűrűség kifejezése tehát

$\mathbf{f} = \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \left(\frac{3(\mathbf{m}, \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}\right)$ ((39,5). egyenlet).

A vektoriális szorzat második tényezője (28,7) szerint az **m** mágneses momentum által keltett mágneses tér **H** erőssége az áram helyén, ha a vezető és mágnes között vákuum van. Ha viszont μ permeabilitású közeg tölti ki a teret, akkor a magnetosztatika és elektrodinamika közötti analógia alapján a fenti zárójel a mágnes által keltett tér **B** vektorát jelenti az áram helyén. Tehát:

$\mathbf{f} = \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ ((39,6). egyenlet).

Az áramra ható erősűrűség (39,6) kifejezésében már semmi sem utal arra, hogy a tér miből származik. Ezt a kifejezést általános érvényűnek fogadjuk el, és a **B**-n bármilyen mágneses teret érthetünk. Eszerint, ha áram által átjárt vezetőt adott mágneses térbe helyezünk, az a vezető térfogategységében folyó áramra a (39,6) erőt fejti ki.

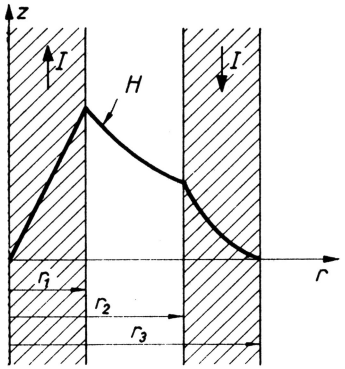
Vákuumban levő vezető esetén az erősűrűség kifejezése:

$\mathbf{f} = \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{H}$ ((39,7). egyenlet).

Az elektromágneses energia áramlása egyenárammal átjárt végtelen vezető mentén (Tengeri kábel)

Képzeljünk el végtelen hosszú, r_1 sugarú, kör keresztmetszetű egyenes vezetőt, amelyet véges vastagságú, végtelen hosszú vezető henger vesz körül koaxiálisan *(49. ábra)*. Legyen a henger belső sugara r_2, a külső r_3. A koordináta-rendszer *z* tengelyét válasszuk a belső vezető drót középvonalának. Tételezzük fel, hogy a vezetőben a +*z* irányban, a hengerben pedig ellentétes irányban folyik *I* erősségű egyenáram. Ezt úgy képzelhetjük el, hogy a vezetőben folyó *I* erősségű áram a végtelenből a hengeren keresztül folyik vissza. Feladatul tűzzük ki az áram által keltett mágneses és elektromos tér meghatározását, valamint az energiaáramlás vizsgálatát.

49. ábra -



Foglalkozzunk előbb a mágneses térrel. A 36. pont 1. szakaszában követett gondolatmenet alapján adódik, hogy a mágneses térerősség vonalai a *z* tengely körüli koncentrikus körök. A térerősség abszolút értéke:

$$|\mathbf{H}| = \frac{2I}{cr_1^2} r, \qquad \text{ha} \quad 0 < r < r_1$$ ((40,1a). egyenlet);

$$|\mathbf{H}| = \frac{2I}{cr}, \qquad \text{ha} \quad r_1 < r < r_2$$ ((40,1b). egyenlet);

$$|\mathbf{H}| = \frac{2I}{cr} \cdot \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2}, \qquad \text{ha} \quad r_2 < r < r_3$$ ((40,1c). egyenlet);

$$|\mathbf{H}| = 0, \qquad \text{ha} \quad r > r_3$$ ((40,1d). egyenlet).

(40,1d) szerint a külső hengeren kívül nincs mágneses tér. Az áram visszavezetésével tehát leárnyékoltuk a drótban folyó áram mágneses terét. A mágneses térerősség abszolút értékét megadó (40,1a)–(40,1d) kifejezéseket – mint *r* függvényét – feltüntettük a *49. ábrán*.

Ha a visszavezető henger végtelen vastag, vagyis $r_3 \to \infty$, akkor (40,1b) és (40,1c) szerint a mágneses térerősség abszolút értéke a dróton kívül const/*r* szerint csökken, és a végtelenben éri el a zérus értéket úgy, mintha a visszavezető henger jelen sem lenne. Tehát:

$$|\mathbf{H}| = \frac{2I}{cr}, \qquad \text{ha} \quad r_2 < r < \infty$$ ((40,2). egyenlet).

A továbbiakban ezzel az esettel foglalkozunk, tehát r_3-at végtelennek tekintjük. Ez az eset megvalósítható pl. tengeri kábelnél, ahol a tenger vize a visszavezető.

Határozzuk meg most az áram által keltett elektromos tér erősségét.

A drót belsejében a térerősség *z* irányú, és nagyságát az Ohm-törvény alapján kaphatjuk meg:

$$|\mathbf{E}| = E_z = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{\sigma \pi r_1^2}, \qquad \text{ha} \quad r \le r_1$$ ((40,3). egyenlet).

A visszavezetőben érvényes térerősséget is az Ohm-törvény szolgáltatja:

$$|\mathbf{E}| = \frac{\mathbf{j}}{\sigma_1} = 0, \qquad \text{ha} \quad r_2 \le r < \infty$$ ((40,4). egyenlet).

σ_1 a visszavezető (pl. a tenger vizének) vezetőképessége. A térerősség azért zérus ebben a tartományban, mert itt az áramsűrűség eltűnik: **j** = 0.

A drót és a visszavezető közötti szigetelőben uralkodó elektromos teret a 33. pont alapján határozzuk meg. Az elektromos térerősség (33,1) szerint skalárpotenciálból származtatható, tehát:

$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi$ ((40,5). egyenlet).

A Φ potenciált a (33,3) egyenletből határozzuk meg:

$\Delta \Phi = 0$ ((40,6). egyenlet).

(40,6) megoldásának ki kell elégítenie az elektromos térerősség tangenciális komponensére vonatkozó (33,4) határfeltételt a drót és a szigetelő, valamint a szigetelő és a visszavezető határán. Nevezetesen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -E_z = \begin{cases} -\dfrac{I}{\sigma \pi r_1^2} & \text{az } r = r_1 \text{ helyen} \\ 0 & \text{az } r = r_2 \text{ helyen} \end{cases}$$ ((40,7). egyenlet)

Mivel a feladat hengerszimmetrikus, a (40,6) egyenlet megoldását célszerű hengerkoordinátákban keresni. Ugyanis a szimmetria miatt Φ nem függ a χ azimuttól, vagyis csak az r és z változó függvénye: $\Phi = \Phi(r, z)$. A (40,7) határfeltétel szerint $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ független a z-től. Ebből arra lehet következtetni, hogy Φ a z változónak lineáris függvénye. Ezért (40,6) megoldását a

$\Phi(r, z) = \Psi(r) z$ ((40,8). egyenlet)

alakban keressük. A (40,6) egyenletet felírjuk hengerkoordinátákban, és figyelembe vesszük, hogy Φ a χ-től nem függ, az r és a z változót pedig (40,8) alakban tartalmazza:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{z}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Psi}{dr}\right) = 0$$ ((40,9). egyenlet).

A $\Psi(r)$ függvénynek tehát ki kell elégítenie a

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Psi}{dr}\right) = 0$$ ((40,10). egyenlet)

egyenletet. (40,10)-et kétszer integrálva, adódik a keresett $\Psi(r)$ függvény:

$\Psi(r) = a \ln r + b$ ((40,11). egyenlet),

ahol *a* és *b* integrációs állandók. Ezeket a (40,7) határfeltételekből határozzuk meg. Eszerint

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{r=r_1} = \Psi(r_1) = a \ln r_1 + b = -\frac{I}{\sigma \pi r_1^2}$$
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{r=r_2} = \Psi(r_2) = a \ln r_2 + b = 0$$

Ezekből adódik:

$$a = -\frac{I}{\sigma \pi r_1^2 \ln \frac{r_1}{r_2}}; \quad b = \frac{I \ln r_2}{\sigma \pi r_1^2 \ln \frac{r_1}{r_2}}$$ ((40,12). egyenlet).

Az integrációs állandók (40,12) értékét (40,11)-be, majd azt (40,8)-ba beírva, megkapjuk az elektromos tér $\Phi(r, z)$ potenciálját:

$$\Phi(r,z) = -\frac{Iz}{\sigma \pi r_1^2} \cdot \frac{\ln \frac{r}{r_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$ ((40,13). egyenlet).

Az elektromos térerősséget ebből gradiensképzéssel kapjuk. Írjuk fel az **E** térerősség *z* és *r* komponensét:

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{I}{\sigma \pi r_1^2} \cdot \frac{\ln \frac{r}{r_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$ ((40,14). egyenlet),

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{Iz}{\sigma \pi r_1^2 r \ln \frac{r_1}{r_2}}$$ ((40,15). egyenlet).

Látható, hogy a vezetőt körülvevő szigetelőben az elektromos térerősség már nem *z* irányú, mint a vezetőben, hanem van radiális komponense is.

A vezető határán E_r-nek és ezzel együtt D_r-nek (amik most normális komponensek) ugrása van. Ez azt jelenti, hogy a vezető felületét töltés vonja be. A töltés sűrűsége:

$$\eta = \frac{1}{4\pi} D_r(r_1) = \frac{1}{4\pi} \varepsilon E_r(r_1) = \frac{\varepsilon I z}{\sigma 4\pi^2 r_1^3 \ln \frac{r_1}{r_2}}$$ ((40,16). egyenlet).

Mivel $\ln \frac{r_1}{r_2} < 0$, negatív *z* értékekre $\eta > 0$, pozitív *z* értékekre $\eta < 0$. Szemléletesen szólva: a felületi töltéssűrűség az áram irányában haladva, a $-\infty$-től a $+\infty$-ig változik. A töltés zéruspontja a $z = 0$ helyen van, amely tetszőlegesen választható. A vezetőből kiinduló térerősségvonalak a visszavezető felületen végződnek, ott tehát ellentétes előjelű töltésbevonat alakul ki.

A térerősség-komponensek és a felületi töltéssűrűség kifejezéseinek nevezőjében a vezető σ vezetőképessége szerepel, amely igen nagy érték. Ezért a vezető felületi töltése és az általa keltett elektromos tér erőssége nagyon kicsi.

Mivel az elektromos térerősség radiális komponense nem zérus, a vezető és a visszavezető között véges potenciálkülönbség van:

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \int_{\eta}^{\eta} d\Phi = \int_{\eta}^{\eta} \operatorname{grad} \Phi \, d\mathbf{s} = \int_{\eta}^{\eta} E_r \, dr = \frac{Iz}{\sigma \pi r_1^2 \ln \frac{r_1}{r_2}} \left[\ln r \right]_{r_2}^{r_1} = \frac{Iz}{\sigma \pi r_1^2}$$ ((40,17). egyenlet).

Ha a vezető hosszegységére eső $e = 2\pi r_1 \eta$ töltést a (40,17) potenciálkülönbséggel elosztjuk, a vezető és a visszavezető alkotta hengerkondenzátor hosszegységének kapacitását kapjuk:

$$C = \frac{e}{\Phi_2 - \Phi_1} = \frac{\varepsilon}{2 \ln \frac{r_1}{r_2}}$$ ((40,18). egyenlet).

Most megvizsgáljuk az egyenáram által szállított energia áramlását. Látni fogjuk, hogy az energia nem az áramvezetőben, hanem a körülötte levő szigetelőben áramlik az áramforrástól a fogyasztóhoz.

Az energia áramsűrűségét a (9,19) egyenlettel definiált Poynting-vektor adja:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$ ((40,19). egyenlet).

Mivel a vezető belsejében az elektromos térerősség a $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ Ohm-törvény értelmében *z* irányú, **H** pedig azimutális, **S**-nek nincs *z* irányú komponense a vezetőn belül.

Ott az **S** vektor radiális irányú, és a felületre merőlegesen befelé mutat. Ez azt jelenti, hogy a vezetőben az áram irányában nem történik energiaáramlás. Tehát nem a vezető szállítja az energiát a fogyasztóhoz.

Vizsgáljuk meg az **S** energiaáramsűrűség-vektort a vezetőn kívüli szigetelőben. Bontsuk fel **E**-t két összetevőre:

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_z + \mathbf{E}_r$ ((40,19a). egyenlet).

$\mathbf{E}_Z$ a *z* tengely irányába, $\mathbf{E}_r$ pedig a növekvő *r* irányába mutató vektor. Az **S** vektor (40,19)-nek megfelelően két vektor összegeként áll elő:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}_z \times \mathbf{H}) + \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}_r \times \mathbf{H})$$ ((40,20). egyenlet).

$\mathbf{S}_1$ a vezető felé irányuló radiális energiaáramlást, $\mathbf{S}_2$ pedig *z* irányú energiaáramlást ír le. Az energia tehát a drót körüli szigetelőben áramlik, amelynek egy része (az $\mathbf{S}_1$ komponens) folytonosan beáramlik a vezetőbe. Számítsuk ki, hogy 1 s alatt mennyi energia áramlik be a vezető *l* hosszúságú felületén. Ezt az **S** vektor normális komponensének (tehát $\mathbf{S}_1$-nek) az *l* hosszúságú palástra vett integrálja adja meg:

$$\int S_n \, dF = \int S_1 \, dF = \frac{c}{4\pi} \int |\mathbf{E}_z \times \mathbf{H}| \, dF .$$

Mivel $\mathbf{E}_Z$ a határon $\frac{\mathbf{j}}{\sigma}$-val egyenlő, ezért

$$\int S_1 \, dF = \frac{c}{4\pi} \int \frac{j}{\sigma} H \, dF$$ ((40,21). egyenlet).

Az integrandusz állandó, ezért kiemelhető az integrál elé:

$$\int S_1 \, dF = \frac{c}{4\pi} \frac{j}{\sigma} H(r_1) \int dF = \frac{c}{4\pi} \frac{j}{\sigma} H(r_1) 2\pi r_1 l .$$

Feltéve, hogy ***j*** az egész vezetőben állandó, $I = j\pi r_1^2$, amiből

$$j = \frac{I}{\pi r_1^2}$$ ((40,22). egyenlet).

Az áramsűrűség (40,22), $H(r_1)$ (40,1a)-ból adódó kifejezését beírva kapjuk:

$$\int S_1 \, dF = I^2 \frac{l}{\sigma q}$$ ((40,23). egyenlet),

ahol $q = \pi r_1^2$ a vezető keresztmetszete. A (40,23) egyenlet jobb oldalán álló $\frac{1}{\sigma q}$ tényező a vezető *l* hosszúságú szakaszának ohmikus ellenállása:

$R_l = \frac{l}{\sigma q}$ ((40,24). egyenlet).

Ezt (40,23)-ba beírva, kapjuk:

$\int S_1 \, dF = I^2 R_l$ ((40,25). egyenlet).

(40,25) jobb oldalán a vezető *l* hosszúságú darabjában 1 s alatt keletkezett Joule-hő kifejezése áll. A (40,25) egyenlet tehát azt fejezi ki, hogy az *l* hosszúságú vezetőszakaszba 1 s alatt beáramlott elektromágneses energia a benne időegység alatt keletkezett Joule-hővel egyezik meg. A vezetőbe beáramló energia tehát Joule-hővé alakul.

A vezető belsejében:

$\mathbf{S}_1 = \frac{c}{4\pi\sigma}\left[\mathbf{j} \times \mathbf{H}(\mathbf{r})\right]$ ((40,26). egyenlet).

A vezető közepe felé áramló energia a középvonal felé közeledve (40,1a) szerint lineárisan csökken az *r* távolsággal, és a vezető közepén, *r* = 0-nál, az energia-áramsűrűség zérussá válik.

A szigetelőben *z* irányban áramló energiát $\mathbf{S}_2$ írja le:

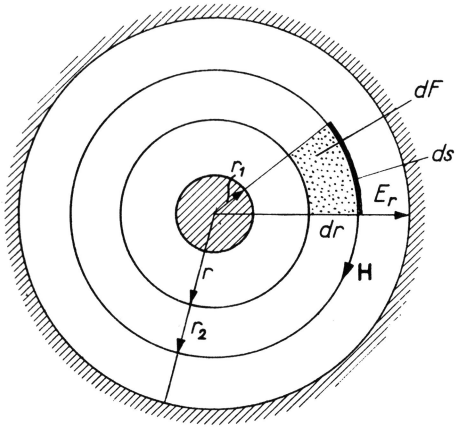
$\mathbf{S}_2 = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}_r \times \mathbf{H}$ ((40,27). egyenlet).

Mivel $\mathbf{E}_r$ és **H** (40,15), illetve (40,1b) alapján $\frac{1}{r}$ szerint csökken a távolsággal, $\mathbf{S}_2$ a vezetőtől távolodva $\frac{1}{r^2}$ szerint csökken. Ennélfogva az energia a vezető közvetlen közelében áramlik gyakorlatilag.

Számítsuk ki azt az energiát, amely a vezető és a visszavezető között a *z* = const síkon 1 s alatt átáramlik. Szemeljük ki a *z* = const síkkal való metszetet *(50. ábra)*. Az áram iránya mutasson a lapra merőlegesen a lap mögé. Az 1 s alatt átáramló energia az $\mathbf{S}_2$ vektornak az r_1-től r_2-ig terjedő körgyűrűre vett felületi integrálja:

$\int S_2 \, dF = \frac{c}{4\pi}\int \left|\mathbf{E}_r \times \mathbf{H}\right| dF$.

50. ábra -



A felületelemnek válasszuk az *50. ábrán* pontozással bejelölt tartományt:

$dF = dr\,ds$.

A *z* = const metszeten 1 s alatt átáramló energia tehát:

$$\int S_2\,dF = \frac{c}{4\pi}\int E_r H\,dF = \frac{c}{4\pi}\int\int E_r H\,dr\,ds$$ ((40,28). egyenlet).

Integráljunk először *s* szerint. $E_r dr$ a két szomszédos mágneses erővonal közötti potenciálkülönbség, amely a mágneses erővonal mentén történő integrálásnál állandó, ezért (40,28) a következőképpen írható:

$$\int S_2\,dF = \frac{c}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2} E_r\,dr \oint H\,ds$$ ((40,29). egyenlet).

A jobb oldali első integrál (40,17) alapján a vezető és a visszavezető közötti $\Phi_1 - \Phi_2$ potenciálkülönbséggel egyenlő. A második integrál pedig az áramerősség $\frac{4\pi}{c}$ -szerese. Tehát:

$$\int S_2\,dF = I(\Phi_1 - \Phi_2)$$ ((40,30). egyenlet).

Ez az energia áramlik a fogyasztó felé, és szolgáltatja annak $I(\Phi_1 - \Phi_2)$ teljesítményét. A mi példánkban $\Phi_1 - \Phi_2$ a $z > 0$ részben a $+\infty$-től, a $z < 0$ részben $-\infty$-től kezdve folyton csökken a $z = 0$ felé haladva, a $z = 0$-nál pedig zérussá válik. Az energia (40,20) szerint a végtelenből áramlik a $z = 0$ hely felé, és fokozatosan elfogy, mert egy része folytonosan beáramlik a vezetőbe, és Joule-hővé alakul.

Felvetődik a kérdés, hogy honnan áramlik az elektromágneses energia, más szóval, hogy hol van az energia forrása. Megmutatjuk, hogy az áramforrás egyúttal az energia forrása is. E célból képzeljük el, hogy a végtelen egyenes vezetőben valahol áramforrás van. Az áramforrás helyén $\mathbf{E'} \neq 0$, ezért ebben az esetben a vezetőben érvényes térerősségre nem a $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, hanem a $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E'})$ Ohm-törvényt kell alkalmaznunk. Ennélfogva:

$$E_z = \frac{j}{\sigma} - E'$$ ((40,31). egyenlet).

Számítsuk ki most (40,31) felhasználásával a vezető l hosszúságú szakaszába 1 s alatt beáramló energiát. Feltesszük, hogy az áramforrás a vezetőszakaszon van, vagyis $\mathbf{E'} \neq 0$ ebben a tartományban. Ezt az energiát (40,20) alapján a következő kifejezés írja le:

$$\int S_1 \, dF = \frac{c}{4\pi}\int |\mathbf{E}_z \times \mathbf{H}| \, dF = \frac{c}{4\pi}\int \left(\frac{j}{\sigma} H - E' H\right) dF$$ ((40,32). egyenlet).

A jobb oldali integrál első tagja – amint (40,21)–(40,25)-ig megmutattuk – a vezetőszakaszban időegység alatt keletkezett Joule-hőt adja. A második tag (40,21)-hez hasonlóan számítható ki, és eredményül a következőt kapjuk:

$$-\frac{c}{4\pi}\int E'H \, dF = -IE'l$$ ((40,33). egyenlet).

Az l hosszúságú vezetőszakasz határán 1 s alatt beáramló energia tehát:

$$\int S_1 \, dF = I^2 R_i - IE'l$$ ((40,34). egyenlet),

ahol $\mathbf{E'} \neq 0$, vagyis az áramforrás helyén a jobb oldali második tag nagyobb az elsőnél, ezért ezen a helyen nem energiaelnyelés, hanem energiakiáramlás lép fel. Áramkörben az áramforrás tehát egyúttal energiaforrás szerepét játssza.

Összefoglalva a következőket mondhatjuk. Az elektromágneses energia az áramforrásból kiindulva a vezetőt körülvevő szigetelőben áramlik a fogyasztó felé. Ennek az energiának egy része beáramlik a vezetőbe, és Joule-hővé alakul, a többi pedig eljut a fogyasztóhoz, és annak $I(\Phi_1 - \Phi_2)$ teljesítményét szolgáltatja. A gyakorlatban azért alkalmaznak kis ellenállású vezetőket, hogy az energiának csak jelentéktelen kis része alakuljon át hővé, és lehetőleg minél nagyobb rész eljusson a fogyasztóhoz.

A mi idealizált példánkban az energia a végtelenből áramlik a $z = 0$ hely felé, és – mivel fogyasztó nincs beiktatva – közben a teljes energia hővé alakul. Példánkban az áramforrás tehát a végtelenbe képzelendő.

6. fejezet - KVÁZISTACIONÁRIUS ÁRAMOK

Az elektrotechnikában igen elterjedt az olyan áramok használata, amelyeket időben változó elektromotoros erő hoz létre. A gyakorlati életben előforduló esetek nagy többségében azonban az ilyen áramforrások által vezetőkben keltett konduktív áram sűrűségének abszolút értéke sokkal nagyobb, mint az elektromos tér időbeli változását jellemző $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ mennyiség nagysága. Ezért az ilyen áramok fizikai sajátságainak tanulmányozásánál és a konkrét technikai alkalmazásoknál az I. Maxwell-egyenlet jobb oldalán **j** mellett az $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ mennyiség jó közelítéssel elhagyható. Arról, hogy ez az egyszerűsítő feltevés valóban megtehető, a következőképpen győződhetünk meg. Tételezzük fel, hogy az áramforrás által keltett áram elektromos tere időben periodikusan változik a frekvenciával:

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$.

A $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ anyagi egyenlet alapján:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon\omega}{4\pi}\mathbf{E}_0 \cos \omega t = \frac{\varepsilon\nu}{2}\mathbf{E}_0 \cos \omega t ,$$

ahol $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$.

A konduktív áram sűrűsége pedig az Ohm-törvény szerint:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}_0 \sin \omega t .$$

Hasonlítsuk össze a fenti két mennyiség abszolút értékének a maximális értékét:

$$\frac{|\mathbf{j}|_{max}}{\frac{1}{4\pi}\left|\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right|_{max}} = \frac{2\sigma}{\varepsilon\nu} .$$

A vezetők ε dielektromos állandója 1 nagyságrendű, σ vezetőképessége pedig $\approx \left(10^{16} - 10^{17}\right) s^{-1}$. Ezért

$$\frac{2\sigma}{\varepsilon\nu} \approx \frac{10^{16}\ s^{-1}}{\nu} .$$

Ebből a képletből látszik, hogy az elektrotechnikában (és rádiótechnikában) előforduló összes frekvenciára:

$$\frac{2\sigma}{\varepsilon\nu} \gg 1 ,$$

ami azt jelenti, hogy ilyen frekvenciatartományban vezetőben az $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ mennyiség nyugodtan elhagyható a konduktív áram sűrűsége mellett. Az olyan – időben változó – áramokat, amelyekre ez a feltétel érvényes, *kvázistacionárius* áramoknak nevezzük.

Alapegyenletek

A kvázistacionárius áramok fizikai sajátságait leíró alapegyenleteket az (5,1) Maxwell-egyenletből kapjuk az $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ tag elhagyásával:

$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ ((I). egyenlet).

$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\varrho$ ((II). egyenlet).

$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ((III). egyenlet).

$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$ ((IV). egyenlet).

A (III) egyenlet jobb oldalán álló $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ tagot természetesen nem lehet elhagynunk, mert egyedül áll a jobb oldalon és igen fontos jelenséget, az elektromágneses indukciót fejezi ki.

Az (I)–(IV) alapegyenletekhez járulnak a

$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ ((Va). egyenlet),

$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ((Vb). egyenlet),

$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}')$ ((Vc). egyenlet)

anyagi egyenletek, valamint a 6. pontban megállapított határfeltételek, amelyek a két különböző közegre vonatkozó megoldásokat illesztik az érintkező felület mentén. (Vc) az Ohm-törvényt fejezi ki arra az esetre, amikor áramforrás is van a térben.

Az alapegyenletekben szereplő fizikai mennyiségek – az egyenáramokkal ellentétben – függnek az időtől is.

Az (I) egyenletből következik, hogy

$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ ((41,1). egyenlet).

Az áramsűrűség divergenciamentességéből a 31. pontban követett gondolatmenettel adódik, hogy a szigetelőbe ágyazott vezető felületén **j** normális komponense eltűnik: $j_n \equiv 0$.

Ennek alapján könnyen belátható, hogy véges keresztmetszetű vezető bármely két keresztmetszetére vett áramerősség kvázistacionárius áramok esetén is megegyezik egymással. Jelöljük a két keresztmetszetet q_1-gyel, illetve q_2-vel. Integráljuk (41,1)-et a q_1 és q_2 által bezárt vezetőszakaszra. A Gauss-tétel alapján írható:

$$\int_{q_1} j_n\,dF - \int_{q_2} j_n\,dF + \int_{\text{palást}} j_n\,dF = 0$$ ((41,2). egyenlet).

Mivel a vezetőt szigetelő veszi körül, az előbb mondottak szerint a harmadik integrálban $j_n = 0$, ezért

$$\int_{q_1} j_n\,dF = \int_{q_2} j_n\,dF$$.

Ezek az integrálok pedig a két helyen vett I_1, illetve I_2 áramerősséggel egyenlők. Tehát:

$I_1 = I_2$ ((41,3). egyenlet).

Az (I)–(IV) differenciálegyenletek az (Va–c) anyagi egyenletekkel és határfeltételekkel együtt szolgálnak a kvázistacionárius áramok elektromágneses terének a meghatározására. Adott vezetők és áramforrások esetén belőlük határozható meg a **j** árameloszlás és az elektromos, illetve mágneses térerősség mint a helynek és az időnek a függvénye. A technikában előforduló egyszerűbb alkalmazásoknál azonban célszerűbb az integrális mennyiségekre vonatkozó egyenleteket használni. Ezért most meghatározzuk – a gyakorlatban legtöbbször előforduló – lineáris vezetőkörökre vonatkozó alapegyenleteket.

Gondoljunk el lineáris vezetőkből álló áramköröket. Tételezzük fel, hogy az egyes körökben áramforrások is lehetnek, amelyek elektromotoros erejét $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \cdots$ jelöli. A *k*-adik kör $\mathcal{E}_k$ elektromotoros erejét (34,5) szerint az

$$\mathcal{E}_k = \oint_k \mathbf{E}' \, d\mathbf{s}$$ ((41,4). egyenlet)

körintegrállal értelmezzük.

Az (Vc) Ohm-törvényből fejezzük ki az **E** térerősséget, és írjuk be az indukciótörvényt kifejező (III) Maxwell-egyenletbe:

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{j} - \mathbf{E}'\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$ ((41,5). egyenlet).

Integráljuk a (41,5) egyenlet mindkét oldalát a *k*-adik áramkörre mint határvonalra illeszkedő felületre:

$$\int_k \mathrm{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{j} - \mathbf{E}'\right) d\mathbf{F} = -\frac{1}{c}\int_k \frac{\partial B_n}{\partial t} dF$$ ((41,6). egyenlet).

A bal oldali integrál a Stokes-tétellel a vezetőkörre vett vonal menti integrállá alakítható. Tegyük fel, hogy a vezetők által meghatározott felületek időben nem változnak. Ekkor a jobb oldali integrálban az idő szerinti differenciálás jele az integráljel elé emelhető. Így (4l,6)-ból adódik:

$$\oint_k \frac{\mathbf{j}\, d\mathbf{s}}{\sigma} - \oint_k \mathbf{E}' \, d\mathbf{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_k B_n \, dF$$ ((41,7). egyenlet).

Mivel lineáris vezetőkről van szó, **j** *d***s** = *j ds*. A bal oldali első integrálban a számlálót és a nevezőt szorozzuk meg a vezető *q* keresztmetszetével. Ekkor írható:

$$\oint_k \frac{jq\, ds}{\sigma q} - \oint_k \mathbf{E}' \, d\mathbf{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_k B_n \, dF$$ ((41,8). egyenlet).

Az $I_k = jq$ áramerősség az egész vezetőkor mentén állandó, ezért az integráljel elé emelhető:

$$I_k \oint_k \frac{ds}{\sigma q} - \oint_k \mathbf{E}' \, d\mathbf{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_k B_n \, dF$$ ((41,9). egyenlet).

A (41,9) egyenlet jobb oldalán álló felületi integrál a *k*-adik vezetőkörön átmenő $\mathcal{F}$ mágneses indukciófluxus. A bal oldali első integrál pedig a *k*-adik kör *R* ohmikus ellenállása. Ezért (41,9) a (41,4) jelölés felhasználásával a következőképpen írható:

$$I_k R_k = \mathcal{E}_k - \frac{1}{c}\frac{d\,\mathcal{F}_k}{dt}$$ ((41,10). egyenlet).

Ugyanilyen egyenlet érvényes a többi áramkörre is. A (41,10)-ben a *k* index tehát felveszi a *k* = l, 2, 3, ... értékeket. Ez az egyenlet az egyenáramoknál megismert (34,6) integrális Ohm-törvény általánosítása kvázistacionárius áramok esetére. A $-\frac{1}{c}\frac{d\mathcal{F}_k}{dt}$ tag az elektromágneses indukció következménye. Ez az ún. *indukált elektromotoros erő* hozzáadódik (negatív előjellel) az áramkörbe beiktatott áramforrás $\mathcal{E}_k$ elektromotoros erejéhez.

Az $\mathcal{F}_k$ indukciófluxus (38,13) szerint az egyes körökben folyó I_i áramerősségek lineáris kifejezése:

$$\mathcal{F}_k = c\sum_{i=1}^{n} I_i L_{ki}$$ ((41,11). egyenlet),

ahol

$$L_{ki} = \frac{\mu}{c^2}\oint_i\oint_k \frac{d\mathbf{s}_i\, d\mathbf{s}_k}{r_{ik}}$$ ((41,12). egyenlet).

$i \neq k$ esetén az *i*-edik és *k*-adik vezetőkör kölcsönös indukciós együtthatója, L_{kk} pedig a *k*-adik kör önindukciós együtthatója (*n* az áramkörök számát jelöli).

Az $\mathcal{F}_k$ indukciófluxus tehát a többi áramkör ($i \neq k$) által keltett mágneses tértől és a saját ($i = k$) mágneses tértől származik. (Feltéve, hogy a térben mágnesek nincsenek, vagyis csak az áramok keltik a mágneses teret.)

Az indukciófluxus (41,11) kifejezését (41,10)-be beírva, az áramkörök alapegyenletét kapjuk:

$$I_k R_k + \sum_{i=1}^{n} L_{ki}\dot{I}_i = \mathcal{E}_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$ ((41,13). egyenlet).

(Az $\dot{I} = \frac{dI}{dt}$ jelölést használjuk.)

A (41,13) egyenletekből az áramkörökre jellemző R_k ellenállások és L_{ki} indukciós együtthatók, valamint az $\mathcal{E}_k$ elektromotoros erők ismeretében az adott kezdőfeltételekhez tartozó I_i áramerősségek kiszámíthatók.

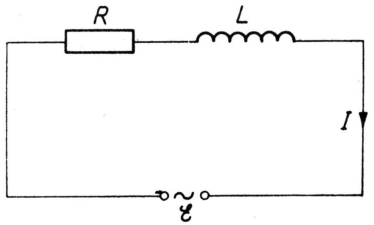
Áramkör ellenállással és önindukcióval

Gondoljunk el egyetlen áramkört, amelyben *R* ohmikus ellenállás és *L* önindukciós együtthatójú tekercs van *(51. ábra)*. Tételezzük fel, hogy *t* = 0-kor bekapcsolunk a körbe egy $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ állandó elektromotoros erejű áramforrást. A *t* = 0 időpillanatban tehát zérus az áram erőssége: *I*(0) = 0.

Határozzuk meg, hogy az $\mathcal{E}_0$ elektromotoros erő hatására kialakult *I*(*t*) áramerősség milyen függvénye az időnek. Az áramerősséget meghatározó differenciálegyenletet (41,13)-ból kapjuk, ha azt egyetlen áramkörre írjuk fel:

$IR + L\dot{I} = \mathcal{E}_0$ ((42,1). egyenlet).

51. ábra -



Megoldandó tehát ez a differenciálegyenlet az *I*(0) = 0 kezdőfeltétellel.

Mivel $\mathcal{E}_0$ állandó, (42,1) a következő alakba írható:

$$\frac{d}{dt}\left(I - \frac{\mathcal{E}_0}{R}\right) + \frac{R}{L}\left(I - \frac{\mathcal{E}_0}{R}\right) = 0$$ ((42,2). egyenlet).

Az $y = I - \frac{\mathcal{E}_0}{R}$ jelöléssel (42,2) a

$$\frac{dy}{dt} + \frac{R}{L}y = 0$$ ((42,3). egyenlet)

alakot veszi fel. A (42,3) differenciálegyenlet megoldása:

$y = Ce^{-\frac{R}{L}t}$ ((42,4). egyenlet).

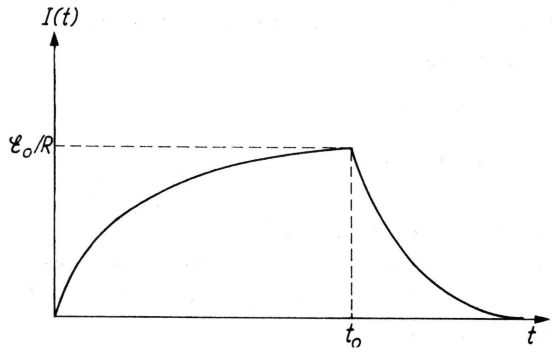
A *C* integrációs állandót az *I*(0) = 0 kezdőfeltételből határozzuk meg. Ebből *C*-re a $C = -\mathcal{E}_0/R$ érték adódik. Az állandó $\mathcal{E}_0$ elektromotoros erő hatására kialakult áram erőssége tehát:

$I(t)=\frac{\mathcal{E}_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ ((42,5). egyenlet).

Az áram erőssége a t = 0-kor érvényes zérus értékről fokozatosan nő fel az $\mathcal{E}_0/R$ értékre. Mennél nagyobb az L önindukciós együttható az R ellenálláshoz képest, annál lassabban alakul ki az $\mathcal{E}_0/R$ erősségű állandó áram.

Most vizsgáljuk meg, hogyan változik az áramerősség, ha a $t = t_0$ időpillanatban kikapcsoljuk az áramforrást *(52. ábra)*.

52. ábra -



A $t > t_0$ időben $\mathcal{E} = 0$. A megoldandó differenciálegyenlet tehát:

$RI + L\frac{dI}{dt} = 0$ ((42,6). egyenlet).

Ennek megoldása:

$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ ((42,7). egyenlet).

Az I_0 integrációs állandó értékét a $t = t_0$-ra vonatkozó $I(t_0) = \mathcal{E}_0/R$ kezdőfeltételből kapjuk:

$\frac{\mathcal{E}_0}{R} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t_0}$.

Tehát:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{\frac{R}{L} t_0}$$ ((42,8). egyenlet).

A (42,8)-at (42,7)-be beírva, az *I* áramerősségre adódik:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-\frac{R}{L}(t - t_0)}$$ ((42,9). egyenlet).

Az áramforrás kikapcsolása után az áramerősség a $t = t_0$-hoz tartozó $\mathcal{E}_0 / R$ értékről exponenciálisan csökken zérusra. A csökkenés annál gyorsabb, minél kisebb az *L* önindukciós együttható az *R* ellenálláshoz képest.

Azt látjuk tehát, hogy az áramforrás bekapcsolásakor csak fokozatosan alakul ki az állandó $I = \mathcal{E}_0 / R$ áramerősség, a kikapcsoláskor pedig fokozatosan szűnik meg. Ezt a jelenséget *tranziens jelenségnek* nevezzük. Okát a $-\frac{1}{c}\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ indukált elektromotoros erő felléptében látjuk. Az önindukció révén ez az elektromotoros erő ellentétes irányú áramot indukál, mint a be-, illetve kikapcsolt $\mathcal{E}_0$ elektromotoros erő. Ezért a bekapcsoláskor csökkenti annak hatását, a kikapcsoláskor pedig még egy ideig fenntartja az áramot.

Foglalkozzunk most azzal az esettel, amikor az áramkörbe bekapcsolt áramforrás elektromotoros ereje az időnek periodikus függvénye:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$.

Az áramerősség időfüggését meghatározó differenciálegyenlet a következő:

$$RI + L\frac{dI}{dt} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$ ((42,10). egyenlet).

A $t = 0$ időpillanatban legyen az áramerősség zérus: $I(0) = 0$.

A (42,10) típusú differenciálegyenlet megoldásánál célszerű az

$$Ry + L\frac{dy}{dt} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$$ ((42,11). egyenlet)

komplex egyenletből kiindulni. Könnyen belátható, hogy a (42,11) egyenlet megoldásának valós része megoldása a (42,10) egyenletnek. Tegyük fel, hogy *y* megoldása a (42,11) egyenletnek. Akkor *y* komplex konjugáltja, az y^* kielégíti a (42,11) egyenlet komplex konjugáltját:

$$Ry^* + L\frac{dy^*}{dt} = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$$ ((42,12). egyenlet).

Képezzük a (42,11) és a (42,12) egyenlet összegének a felét:

$$R\frac{y+y^*}{2} + L\frac{d}{dt}\left(\frac{y+y^*}{2}\right) = \mathcal{E}_0\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2} = \mathcal{E}_0\cos\omega t$$ ((42,13). egyenlet).

Az $\frac{y+y^*}{2}$ a (42,10) eredeti egyenletünket elégíti ki. Mivel az $\frac{y+y^*}{2}$ az $y(t)$ komplex függvény valós része, ezért a megoldandó (42,10) egyenlet $I(t)$ megoldását a (42,11) komplex egyenletet kielégítő $y(t)$ függvény valós része adja:

$$I(t) = \mathrm{Re}\left(y(t)\right)$$ ((42,14). egyenlet).

A (42,11) egyenlet inhomogén, állandó együtthatós, lineáris, elsőrendű differenciálegyenlet. Ennek általános megoldását úgy kapjuk, hogy a megfelelő homogén egyenlet általános megoldásához hozzáadjuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását. Utóbbit az

$$y_p = Ae^{i\omega t}$$ ((42,15). egyenlet)

alakban keressük. Tegyük fel, hogy y_p kielégíti a (42,11) egyenletet. Tehát behelyettesítésével a következőt kapjuk:

$$\left(R + i\omega L\right)Ae^{i\omega t} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$$ ((42,16). egyenlet).

Ebből az A együtthatóra adódik:

$$A = \frac{\mathcal{E}_0}{R + i\omega L}$$ ((42,17). egyenlet).

A partikuláris megoldás tehát:

$$y_p = \frac{\mathcal{E}_0}{R + i\omega L}e^{i\omega t}$$ ((42,18). egyenlet).

A homogén egyenlet megoldása:

$$y_h = Be^{-\frac{R}{L}t}$$ ((42,19). egyenlet).

A (42,11) egyenlet általános megoldását – a mondottak szerint – (42,18) és (42,19) összege adja meg:

$$y = y_{\mathrm{p}} + y_{\mathrm{h}} = \frac{\mathscr{E}_0}{R + i\omega L} e^{i\omega t} + Be^{-\frac{R}{L}t}$$ ((42,20). egyenlet).

Az $I(t)$ áramerősség (42,11) szerint y valós részével egyenlő:

$$\begin{aligned} I(t) &= \mathrm{Re}\left\{ \frac{\mathscr{E}_0}{R + i\omega L}(\cos\omega t + i\sin\omega t) + Be^{-\frac{R}{L}t} \right\} = \\ &= \mathrm{Re}\left\{ \mathscr{E}_0 \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}(\cos\omega t + i\sin\omega t) + Be^{-\frac{R}{L}t} \right\} = \\ &= \frac{\mathscr{E}_0}{R^2 + \omega^2 L^2}(\mathrm{R}\cos\omega t + \omega L\sin\omega t) + \frac{B + B^*}{2} e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$ ((42,21). egyenlet)

A B integrációs állandó meghatározásához vegyük figyelembe a kezdeti feltételt. Mivel $I(0) = 0$,

$$\frac{B + B^*}{2} = \frac{\mathscr{E}_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2}$$ ((42,22). egyenlet).

Az áramerősség (42,21) kifejezését egyszerűbb alakba írhatjuk az

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \cos\delta, \qquad \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \sin\delta$$ ((42,23). egyenlet)

jelölések bevezetésével. (Az $\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$; $\frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ kifejezések felfoghatók egy δ szög cosinusának, illetve sinusának, mert négyzetösszegük 1.)

A (42,22) és (42,23) alapján az áramerősség a következő alakba írható:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}(\cos\delta\cos\omega t + \sin\delta\sin\omega t) - \frac{\mathscr{E}_0 R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-\frac{R}{L}t} = \\ &= \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\left[\cos(\omega t - \delta) - \cos\delta e^{-\frac{R}{L}t} \right] \end{aligned}$$ ((42,24). egyenlet)

A szögletes zárójeles kifejezés második tagja – a homogén egyenlet megoldása – a fentebb tárgyalt tranziens jelenséget írja le, amely az idővel exponenciálisan zérushoz tart. Az *R* ellenállás és *L* önindukciós együttható viszonyától függően ez a második tag elég hamar eltűnik. (Elméletileg a $t \to \infty$ esetén, de gyakorlatilag igen gyorsan.)

Olyan *t* időtartományban, amikor a második tagtól már eltekinthetünk, az áramerősség az időnek tiszta periodikus függvénye:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \delta) = I_0 \cos(\omega t - \delta)$$ ((42,25). egyenlet).

Az I_0 amplitúdót és a δ fázisszöget a vezetőkörre jellemző *R*, *L* állandók és az áramforrás elektromotoros erejének $\mathcal{E}_0$ amplitúdója, valamint ω körfrekvenciája határozza meg:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$ ((42,26). egyenlet).

$$\delta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L}{R}$$ ((42,27). egyenlet).

(42,25)-ből látszik, hogy az áramerősség ugyanakkora frekvenciával rezeg, mint az elektromotoros erő, de az áramerősség δ fázisszöggel késik az elektromotoros erőhöz képest. Ez azt jelenti, hogy az áramerősség $\frac{\delta}{\omega}$ idővel később veszi fel maximumát, mint az elektromotoros erő.

Az áramerősség (42,25) kifejezése az egyenáramoknál megismert $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ Ohm-törvényhez hasonló alakra is hozható:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0 \cos \omega\left(t - \frac{\delta}{\omega}\right)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{\mathcal{E}\left(t - \frac{\delta}{\omega}\right)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$ ((42,28). egyenlet).

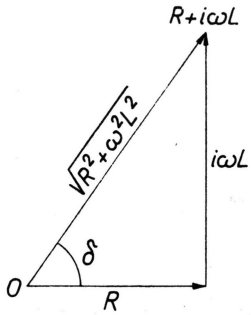
A nevezőben az *R* ohmikus ellenállás helyett a $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ kifejezés áll. Ez a mennyiség a vezetőkörre jellemző *R*-en és *L*-en kívül függ az elektromotoros erő (és az áramerősség) frekvenciájától is. A $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ mennyiséget *impedanciának* nevezzük. A gyök alatt az ohmikus ellenállás négyzete mellett az *ωL induktív ellenállás* négyzete szerepel.

Az elektrotechnikában szokás az itt szereplő ellenállásokra komplex írásmódot használni. Az *R* ohmikus ellenállás valós, az *ωL* induktív ellenállás helyett pedig az *iωL* képzetes mennyiséget tekintjük. A kettőből képzett *R* + *iωL* komplex szám abszolút értéke az impedancia, argumentuma pedig a δ fázisszög:

$R+i\omega L=\sqrt{R^2+\omega^2L^2}e^{i\varepsilon}$.

Az *53. ábra* a komplex síkon való szemléltetést mutatja.

53. ábra -



Befejezésül vizsgáljuk meg az energiaviszonyokat és az áram teljesítményét. Induljunk ki az

$RI+L\dot{I}=\mathcal{E}$

alapegyenletből. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát *I*-vel:

$RI^2+L\dot{I}I=\mathcal{E}I$ ((42,29). egyenlet).

Kis átalakítással ez a következő alakba írható:

$\mathcal{E}I=RI^2+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right)$ ((42,30). egyenlet).

A bal oldalon az áramforrás elektromotoros erejének 1 s-ra eső munkája, vagyis a teljesítmény áll. Ez a teljesítmény fedezi az ellenállásban időegység alatt keletkezett Joule-hőt $\left(RI^2\right)$ és szolgáltatja a mágneses energia növekedését $\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{2}LI^2\right)$. A (42,30) egyenlet tehát az energiaegyenlet, amely az energiamegmaradás törvényét fejezi ki *RL* kör esetén.

Számítsuk ki az $\mathcal{E}I$ teljesítményt periodikusan változó elektromotoros erő esetén:

$\mathcal{E}I = \mathcal{E}_0 I_0 \cos\omega t \cos(\omega t - \delta)$ ((42,31). egyenlet).

Gyakorlati szempontból a teljesítmény időbeli középértéke az érdekesebb, mert a pillanatnyi teljesítmény az időben gyorsan változik. Határozzuk meg (42,31) egy periódusra vett középértékét (amelyet felülhúzással jelölünk):

$$\overline{\mathcal{E}I} = \mathcal{E}_0 I_0 \frac{1}{T}\int_0^T \cos\omega t \cos(\omega t - \delta)\, dt =$$

$$= \mathcal{E}_0 I_0 \frac{1}{T}\int_0^T \left(\cos^2 \omega t \cos\delta + \cos\omega t \sin\omega t \sin\delta\right) dt =$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{T}\cos\delta \int_0^T \cos^2 \omega t\, dt + \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{T}\sin\delta \int_0^T \cos\omega t \sin\omega t\, dt$$

Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2 \omega t\, dt = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos\omega t \sin\omega t\, dt = 0.$$

Ezért:

$$\overline{\mathcal{E}I} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0 I_0 \cos\delta = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}\frac{I_0}{\sqrt{2}}\cos\delta$$ ((42,32). egyenlet).

Az $\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$ mennyiség megegyezik az $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos\omega t$ elektromotoros erő négyzetének középértékéből képzett négyzetgyökkel:

$$\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\overline{\mathcal{E}^2}} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_0^2}{T}\int_0^T \cos^2 \omega t\, dt}$$ ((42,33). egyenlet).

Hasonlóképpen $\frac{I_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\overline{I^2}}$. A $\sqrt{\overline{\mathcal{E}^2}}$, illetve a $\sqrt{\overline{I^2}}$ mennyiséget az elektromotoros erő, illetve az áramerősség effektív értékének nevezzük:

$\mathcal{E}_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{\mathcal{E}^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}; \qquad I_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{I^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ ((42,34). egyenlet).

A teljesítmény középértéke az effektív elektromotoros erővel és effektív áramerősséggel a következőképpen fejezhető ki:

$\overline{\mathcal{E}I} = \mathcal{E}_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\delta$ ((42,35). egyenlet).

Eszerint a teljesítmény középértéke arányos a fáziskésés cosinusával. Ha $\delta \to \pi/2$, akkor $\overline{\mathcal{E}I} \to 0$. A (42,30) egyenletből következik, hogy

$\overline{\mathcal{E}I} = \overline{RI^2}$ ((42,36). egyenlet).

Így a $\delta \to \pi/2$ határesetben a Joule-hő is eltűnik.

A (42,27) egyenlet szerint a $\delta \to \pi/2$ határeset kétféleképpen érhető el. 1. Az *ωL* mennyiség rögzített értéke mellett $R \to 0$. Ebben az esetben a Joule-hő azért tűnik el, mert a kör ohmikus ellenállása tart zérushoz. 2. Az ohmikus ellenállás állandó értéke mellett az $\omega L \to \infty$. Ebben az esetben a $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ impedancia is végtelenhez tart, így (42,26) szerint $I_0 \to 0$, és a Joule-hő ezért tűnik el. Ekkor az effektus középértéke nemcsak a cos *δ* miatt, hanem az $I_{\text{eff}} \to 0$ miatt is zérushoz tart. A $\pi/2$ szög közelében az effektus középértéke *I*-hez képest tehát másodrendű kicsi. Az ilyen áramot nevezzük „wattnélküli” áramnak. Ennek energiafogyasztása gyakorlatilag zérusnak tekinthető. Csengőinduktorban vagy terheletlen transzformátorban ilyen áram folyik.

Két induktíve csatolt áramkör. Transzformátor

Tekintsünk két egymás közelében levő áramkört, amelyekben ellenállások és tekercsek vannak. Tételezzük fel, hogy az első körbe időben periodikusan változó elektromotoros erő van beiktatva:

$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ ((43,1). egyenlet).

Az egyik kör mágneses folyama a két áramkör kölcsönös helyzetétől függően részben vagy egészben átmegy a másik körön. A (43,1) elektromotoros erő az első körben időben periodikus áramerősséget kelt. Ennek időben változó mágneses tere az indukciótörvény értelmében a második körben áramot indukál. Mivel az I_1 áramerősség frekvenciája megegyezik az elektromotoros erő frekvenciájával (lásd előző pontot), az általa keltett mágneses tér és így a második körben indukált I_2 áram is *ω* frekvenciával rezeg. A két áramkörben kialakult áramerősségeket (41,3) alapján a következő differenciálegyenletekből lehet meghatározni:

$$L_{11}\dot{I}_1 + L_{12}\dot{I}_2 + R_1 I_1 = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$$
$$L_{12}\dot{I}_1 + L_{22}\dot{I}_2 + R_2 I_2 = 0 \qquad \text{((43,2). egyenlet)}$$

Az I_1, I_2 áramerősségek – az előző pont alapján – az időnek periodikus függvényei, de az amplitúdójuk és fáziskésésük különbözhet egymástól:

$$I_1 = I_1^0 e^{j(\omega t - \varepsilon_1)}$$
$$I_2 = I_2^0 e^{j(\omega t - \varepsilon_2)} \qquad \text{((43,3). egyenlet)}$$

Feladatunk az I_1^0, I_2^0 amplitúdók és a δ_1, δ_2 fáziskésések meghatározása. E célból helyettesítsük be a (43,3) próbakifejezéseket a (43,2) egyenletekbe. Az $e^{i\omega t}$ közös tényező elhagyása után kapjuk:

$$i\omega L_{11} I_1^0 e^{-i\varepsilon_1} + i\omega L_{12} I_2^0 e^{-i\varepsilon_2} + R_1 I_1^0 e^{-i\varepsilon_1} = \mathcal{E}_0 \qquad \text{((43,4a). egyenlet),}$$

$$i\omega L_{12} I_1^0 e^{-i\varepsilon_1} + i\omega L_{22} I_2^0 e^{-i\varepsilon_2} + R_2 I_2^0 e^{-i\varepsilon_2} = 0 \qquad \text{((43,4b). egyenlet).}$$

Vezessük be az

$$a_1 = R_1 + i\omega L_{11}, \qquad a_2 = R_2 + i\omega L_{22}, \qquad b = i\omega L_{12}$$

jelöléseket. Ezekkel a (43,4a) és a (43,4b) egyenlet a következő alakot veszi fel:

$$a_1 I_1^0 e^{-i\varepsilon_1} + b I_2^0 e^{-i\varepsilon_2} = \mathcal{E}_0 \qquad \text{((43,5a). egyenlet),}$$

$$b I_1^0 e^{-i\varepsilon_1} + a_2 I_2^0 e^{-i\varepsilon_2} = 0 \qquad \text{((43,5b). egyenlet).}$$

Ezekből egyszerűen adódik:

$$I_1^0 e^{-i\varepsilon_1} = \mathcal{E}_0 \frac{a_2}{a_1 a_2 - b^2} \qquad \text{((43,6). egyenlet),}$$

$$I_2^0 e^{-i\varepsilon_2} = -\mathcal{E}_0 \frac{b}{a_1 a_2 - b^2} \qquad \text{((43,7). egyenlet).}$$

Ha a két egyenlet mindkét oldalán szétválasztjuk a valós és képzetes részeket, négy algebrai egyenletet kapunk az I_1^0, I_2^0, δ_1, δ_2 valós mennyiségekre. Ezeket itt nem számítjuk ki (gyakorlásként az olvasóra bízzuk), hanem helyette az I_1^0, I_2^0 amplitúdók viszonyát és a $\delta_2 - \delta_1$ fáziskülönbséget határozzuk meg. A (43,7) egyenletet a (43,6)-tal elosztva kapjuk:

$$\frac{I_2^0}{I_1^0} e^{-i(\varepsilon_2-\varepsilon_1)} = -\frac{b}{a_2}$$ ((43,8). egyenlet).

Válasszuk szét az egyenlet mindkét oldalán a valós és képzetes részt:

$$\frac{I_2^0}{I_1^0}\left[\cos(\delta_2-\delta_1) - i\sin(\delta_2-\delta_1)\right] = -\frac{i\omega L_{12}}{R_2 + i\omega L_{22}} = -\frac{\omega L_{12}}{R_2^2+\omega^2 L_{22}^2}(\omega L_{22} + iR_2).$$

A valós részeket a valóssal, a képzetes részeket a képzetessel egyenlővé téve, adódik:

$$\frac{I_2^0}{I_1^0}\cos(\delta_2-\delta_1) = -\frac{\omega^2 L_{12}L_{22}}{R^2+\omega^2 L_{22}^2}$$ ((43,9). egyenlet),

$$-\frac{I_2^0}{I_1^0}\sin(\delta_2-\delta_1) = -\frac{\omega L_{12}R_2}{R_2^2+\omega^2 L_{22}^2}$$ ((43,10). egyenlet).

E két egyenlet négyzetre emelésével és összeadásával, majd gyökvonással kapjuk a két amplitúdó hányadosát:

$$\frac{I_2^0}{I_1^0} = -\frac{\omega L_{12}}{\sqrt{R_2^2+\omega^2 L_{22}^2}}$$ ((43,11). egyenlet).

A (43,10) egyenletet (43,9)-cel elosztva, a $\delta_2 - \delta_1$ fáziskülönbség tangensét kapjuk:

$$\operatorname{tg}(\delta_2-\delta_1) = -\frac{R_2}{\omega L_{22}}$$ ((43,12). egyenlet).

(43,11)-ből lászik, hogy a második körben indukált áram amplitúdója az első körben folyó áram amplitúdójához képest annál nagyobb, mennél nagyobb a két áramkör L_{12} kölcsönös indukciós együtthatója, tehát mennél szorosabb a két kör csatolása, valamint mennél kisebb a második kör $\sqrt{R_2^2+\omega^2 L_{22}^2}$ impedanciája. A (43,12) egyenlet pedig a két áramerősség $\delta_2 - \delta_1$ fáziskülönbségére ad felvilágosítást. Mivel $\operatorname{tg}(\delta_2-\delta_1) < 0$, a $\delta_2 - \delta_1$ fáziskülönbség a (π/2, π) intervallumba esik. Ha $R_2 \ll \omega L_{22}$, akkor $\delta_2 - \delta_1 \approx \pi$, vagyis

$$I_2 = I_2^0 \cos(\omega t - \delta_2) \approx I_2^0 \cos(\omega t - \delta_1 - \pi) = -I_2^0 \cos(\omega t - \delta_1) = -\frac{I_2^0}{I_1^0} I_1 .$$

Ebben a határesetben a két áram tehát ellentétes irányú.

A szoros csatolás esete valósul meg a transzformátornál. Itt a két tekercs közös lamellált vasgyűrűn helyezkedik el, és így az összes indukciófluxus mindkét tekercsen áthalad. Legyen az első (ún. primer) tekercs menetszáma n_1, a másodiké (az ún. szekunder tekercsé) n_2. A közös vasmag keresztmetszetén áthaladó indukcióvonalak számát jelöljük $\mathcal{F}$-fel. Az első tekercsen áthaladó indukcióvonalak száma $n_1\mathcal{F}$, a másodikon áthaladó pedig $n_2\mathcal{F}$. Tehát:

$$\Phi_1 = n_1\mathcal{F}; \qquad \Phi_2 = n_2\mathcal{F}$$ ((43,13). egyenlet).

Mivel a két körben folyó áram erőssége között $\delta_2 - \delta_1$ fáziskülönbség van, kiszemelhetjük azt a pillanatot, amikor $I_1 \neq 0$, $I_2 = 0$. Ekkor a (41,11) egyenlet szerint fennállnak a következő egyenletek:

$$\Phi_1 = cL_{11}I_1, \qquad \Phi_2 = cL_{12}I_1$$ ((43,14). egyenlet).

A (43,13) és (43,14) egyenletek egybevetéséből kapjuk:

$$\frac{L_{11}}{L_{12}} = \frac{n_1}{n_2}$$ ((43,15). egyenlet).

Most szemeljük ki azt az időpillanatot, amikor $I_1 = 0$, $I_2 \neq 0$. Ekkor (41,11) szerint:

$$\Phi_1 = cL_{12}I_2, \qquad \Phi_2 = cL_{22}I_2$$ ((43,16). egyenlet).

A (43,13) és (43,16) egyenletekből adódik:

$$\frac{L_{12}}{L_{22}} = \frac{n_1}{n_2}$$ ((43,17). egyenlet).

A (43,15) és a (43,17) egyenlet egybevetéséből, illetve összeszorzásából kapjuk:

$$L_{12} = \sqrt{L_{11}L_{22}}; \qquad \frac{L_{11}}{L_{22}} = \frac{n_1^2}{n_2^2}$$ ((43,18). egyenlet).

A transzformátor primer körét a kis hőveszteség miatt általában úgy méretezik, hogy az ellenállás elhanyagolhatóan kicsi legyen. Számításunkban tegyük fel, hogy $R_1 = 0$. Ekkor (43,7) szerint:

$$I_2^0 e^{-i\varepsilon_2} = -\mathcal{E}_0 \frac{i\omega L_{12}}{i\omega L_{11}\left(R_2 + i\omega L_{22}\right) + \omega^2 L_{12}^2} = -\mathcal{E}_0 \frac{L_{12}}{L_{11}R_2 + i\omega\left(L_{11}L_{22} - L_{12}^2\right)}.$$

A (43,18) és (43,15) összefüggések figyelembevételével ez a következő alakba írható:

$$I_2^0 e^{-i\varepsilon_2} = -\frac{\mathcal{E}_0}{R_2}\cdot\frac{n_2}{n_1} = \frac{\mathcal{E}_0}{R_2}\cdot\frac{n_2}{n_1}e^{i\pi}$$ ((43,19). egyenlet).

A szekunder körben indukált áram erősségének amplitúdója:

$$I_2^0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R_2}\cdot\frac{n_2}{n_1}$$ ((43,20). egyenlet),

a primer kör $\mathcal{E}$ elektromotoros erejéhez viszonyított δ_2 fáziskésése pedig $-\pi$. A szekunder kör áramerőssége tehát ellentétes fázisú az elektromotoros erőhöz képest.

A (43,20) egyenlet Ohm-törvénye szerint azt fejezi ki, hogy a szekunder körben olyan erősségű áram indukálódik, mintha abban $\frac{n_2}{n_1}\mathcal{E}$ elektromotoros erő lenne. A transzformátor a primer kör $\mathcal{E}$ elektromotoros erejét $\frac{n_2}{n_1}$-szeresére transzformálja. A valóságban $n_2 \gg n_1$, ezért a szekunder körben indukált elektromotoros erő általában sokszorosa a primer körbe kapcsolt elektromotoros erőnek. A transzformátorok alkalmazása az elektrotechnikában igen elterjedt.

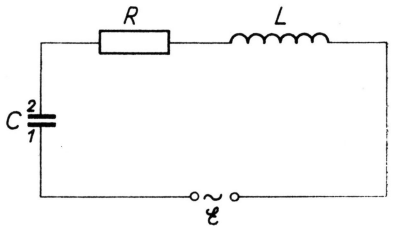
Nem szabad szem elől tévesztenünk, hogy az itteni tárgyalásban L_{22} a transzformátor szekunder tekercsének önindukciós együtthatóját jelentette. Ezért eredményeink csak arra az esetre vonatkoznak, amikor a fogyasztókörbe csak ohmikus ellenállások vannak bekapcsolva.

Áramkör önindukcióval és kapacitással

Az áramkörök (41,13) alapegyenleteinek a levezetésénél nem vettük tekintetbe azokat a gyakorlatilag fontos eseteket, amikor az áramkörökben kondenzátorok is vannak. Az áramkörökre vonatkozó fejtegetéseinket most kiegészítjük a kondenzátorok figyelembevételével.

Gondoljunk el olyan vezető kört, amelyben az *R* ohmikus ellenálláson és *L* önindukciós együtthatójú tekercsen kívül *C* kapacitású kondenzátor is van. A körbe bekapcsolt áramforrás elektromotoros ereje legyen $\mathcal{E}$. Az ilyen áramkörben egyenáram nem alakul ki, mert a kondenzátor azt nem engedi át. Az időben változó elektromotoros erő azonban ilyen körben is létesít áramot.

54. ábra -



Először meghatározzuk a kondenzátort is tartalmazó áramkör alapegyenletét. E célból szorozzuk meg az Ohm-törvényt kifejező

$$\frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \mathbf{E} + \mathbf{E}'$$

egyenlet mindkét oldalát skalárisan a *d***s** vonalelemmel, és integráljunk a vezetőkör mentén a kondenzátor két fegyverzetét jelző (1) és (2) pontok között:

$$\int_1^2 \mathbf{j}\frac{d\mathbf{s}}{\sigma} = \int_1^2 \mathbf{E}\,d\mathbf{s} + \int_1^2 \mathbf{E}'\,d\mathbf{s}$$ ((44,1). egyenlet).

Feltételezzük, hogy a vezető lineáris, ezért a (41,7) egyenlet utáni gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$IR = \mathcal{E} + \int_1^2 \mathbf{E}\,d\mathbf{s}$$ ((44,2). egyenlet),

ahol *R* a vezető kör ohmikus ellenállása, *I* az áram erőssége, $\mathcal{E}$ pedig az áramforrás elektromotoros ereje, amelyet a (44,1) egyenlet jobb oldalán álló utolsó integrállal definiáltunk. Az **E** elektromos térerősség a (III) Maxwell-egyenlet szerint kvázistacionárius áramoknál nem rotációmentes, ezért nem származtatható skalárpotenciálból gradiensképzéssel, mint az egyenáramoknál.

A

div **B** = 0

Maxwell-egyenlet kielégíthető az **A** vektorpotenciái bevezetésével:

$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ ((44,3). egyenlet),

$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$ ((44,4). egyenlet).

A (44,3) összefüggést a (III) Maxwell-egyenletbe beírva, kapjuk:

$$\mathrm{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$ ((44,5). egyenlet).

Ebből az egyenletből látszik, hogy most az $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ vektor rotációmentes, ezért ez fejezhető ki egy Φ skalárfüggvény negatív gradienseként:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\,\Phi$$ ((44,6). egyenlet).

Tehát:

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$ ((44,7). egyenlet).

Írjuk be az elektromos térerősség ezen kifejezését a (44,2) egyenletbe:

$$IR = \mathcal{E} - \int_1^2 \mathrm{grad}\,\Phi\, d\mathbf{s} - \frac{1}{c}\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\, d\mathbf{s}$$ ((44,8). egyenlet).

A jobb oldalon álló első integrál könnyen kiszámítható, és eredményül a kondenzátorfegyverzetek közötti $\Phi_2 - \Phi_1$ potenciálkülönbséget kapjuk. Foglalkozzunk most a második integrállal. Mivel a vezetőkör nyugalomban van, az idő szerinti differenciálás jele az integrál elé emelhető:

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\, d\mathbf{s} = \frac{d}{dt}\int_1^2 \mathbf{A}\, d\mathbf{s}$$ ((44,9). egyenlet).

A vektorpotenciál folytonos függvénye a helynek, ezért, mivel a kondenzátorlapok közötti távolság kicsi az integrációs tartományt jelentő vezetőszakaszhoz képest, az integrál jó közelítéssel zárt áramkörre kiterjeszthető:

$$\int_1^2 \mathbf{A}\, d\mathbf{s} \sim \oint \mathbf{A}\, d\mathbf{s}$$ ((44,10). egyenlet).

A jobb oldali integrál pedig az áramkörön átmenő $\mathcal{F}$ indukciófluxussal egyenlő. Ugyanis:

$$\mathcal{F} = \int_F B_n \, dF = \int_F \left(\mathrm{rot}\, \mathbf{A}\right)_n \, dF = \oint \mathbf{A}\, d\mathbf{s}$$ ((44,11). egyenlet).

Itt felhasználtuk a (44,3) összefüggést és a Stokes-tételt.

A (44,9)–(44,11) egyenletek figyelembevételével (44,8) a következő alakba írható:

$$IR = \mathcal{E} - \left(\Phi_2 - \Phi_1\right) - \frac{1}{c}\frac{d\mathcal{F}}{dt}$$ ((44,12). egyenlet).

A kondenzátorlapok közötti $\Phi_2 - \Phi_1$ potenciálkülönbség a fegyverzetek *e* töltésével és a *C* kapacitással kifejezhető:

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \frac{e}{C}$$ ((44,13). egyenlet).

Az indukciófluxus idő szerinti differenciálhányadosa (44,11) szerint a következőképpen írható:

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = L\dot{I}$$ ((44,14). egyenlet).

Ezeket az összefüggéseket (44,12)-be beírva és rendezve, kapjuk:

$$L\dot{I} + RI + \frac{e}{C} = \mathcal{E}$$ ((44,15). egyenlet).

A kondenzátorlapok feltöltését az áram végzi, ezért az *e* töltés az idő függvénye, és az áramerősséggel a következő kapcsolatban áll:

$$e\left(t\right) = \int_0^t I\left(t'\right)dt'$$,

ha a $t = 0$ időpillanatban kapcsoltuk be az áramforrást. Ezt (44,15)-be beírva, adódik:

$$L\dot{I} + RI + \frac{1}{C}\int_0^t I\left(t'\right)dt' = \mathcal{E}$$ ((44,16). egyenlet).

Könnyebben kezelhető egyenletet kapunk, ha (44,16) mindkét oldalát differenciáljuk az idő szerint:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{\mathcal{E}}$$ ((44,17). egyenlet).

Ez az egyenlet az ún. *RLC* kör alapegyenlete, amelyből meghatározhatjuk az áramerősséget mint az idő függvényét, adott *R*, *L*, *C* és adott $\mathcal{E}$ elektromotoros erő esetén.

Példaként foglalkozzunk azzal az esettel, amikor az áramforrás elektromotoros ereje időben periodikusan változik:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$ ((44,18). egyenlet).

Az áramerősséget meghatározó (44,17) diíferenciálegyenlet ekkor a következő alakot veszi fel:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = -\omega \mathcal{E}_0 \sin \omega t$$ ((44,19). egyenlet).

A 42. pontban követett eljáráshoz hasonlóan, a (44,19) egyenlet helyett az

$$L\frac{d^2y}{dt^2} + R\frac{dy}{dt} + \frac{1}{C}y = i\omega \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$$ ((44,20). egyenlet)

komplex egyenletet oldjuk meg. Könnyen belátható itt is, hogy a (44,20) egyenlet megoldásának valós része megoldása a (44,19) egyenletnek. Tehát:

$$I(t) = \mathrm{Re}\left[y(t)\right]$$ ((44,21). egyenlet).

A megoldandó (44,20) egyenlet a mechanikában megismert kényszerrezgések differenciálegyenletéhez teljesen hasonló szerkezetű.[1] Általános megoldását a (44,20) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának és a megfelelő homogén egyenlet általános megoldásának összegeként kapjuk.

Foglalkozzunk előbb a partikuláris megoldással. A kényszerrezgések analógiája alapján keressük a megoldást az

$$y_p = Ae^{i\omega t}$$ ((44,22). egyenlet)

alakban, y_p-t (44,20)-ba helyettesítve, *A*-ra a következő egyenletet kapjuk:

$$A\left(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}\right) = i\omega \mathcal{E}_0 .$$

[1] Budó Ágoston: Mechanika, 88. oldal. Tankönyvkiadó, Budapest, 1964.

Ebből adódik:

$$A=\frac{\mathcal{E}_0}{R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}=\frac{\mathcal{E}_0}{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\left[R-i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right]=$$

$$=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\left(\cos\delta-i\,\sin\delta\right)=\frac{\mathcal{E}_0 e^{-i\delta}}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$ ((44,23). egyenlet)

ahol

$$\cos\delta=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}},\qquad \sin\delta=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

vagyis

$$\delta=\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$$ ((44,24). egyenlet).

A (44,20) differenciálegyenlet partikuláris megoldása tehát:

$$y_p=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}e^{i(\omega t-\delta)}$$ ((44,25). egyenlet).

A megfelelő homogén differenciálegyenlet:

$$L\frac{d^2y}{dt^2}+R\frac{dy}{dt}+\frac{1}{C}y=0$$ ((44,26). egyenlet).

Ez állandó együtthatós, homogén másodrendű lineáris közönséges differenciálegyenlet. Általános megoldása:

$y_h=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$ ((44,27). egyenlet),

ahol

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}}$$ ((44,28). egyenlet),

c_1 és c_2 integrációs állandók. A (44,26) differenciálegyenlet a mechanikában tárgyalt csillapított rezgőmozgás differenciálegyenletéhez teljesen hasonló szerkezetű. A megoldás időbeli viselkedését a (44,28)-ban szereplő négyzetgyökös kifejezés szabja meg. Aszerint, hogy

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL} \gtreqless 0,$$

háromféle megoldás létezik. Ezeket itt nem részletezzük, hanem a megfelelő mechanikai tanulmányokra hivatkozunk.[2] Ezekből ismeretes, hogy két esetben időben exponenciálisan lecsengő aperiodikus megoldást, egyik esetben pedig exponenciálisan csökkenő amplitúdójú, ún. csillapított rezgést kapunk. A homogén egyenlet általános megoldása tehát hosszabb idő elteltével eltűnik. Ezért a problémák stacionárius megoldását a (44,25) partikuláris megoldás valós része adja:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t - \delta) = \frac{\mathcal{E}\left(t - \frac{\delta}{\omega}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$ ((44,29). egyenlet).

A periodikusan változó elektromotoros erő hatására az *RLC* körben is időben periodikus áramerősség keletkezik. Az áramerősség I_0 amplitúdója:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$ ((44,30). egyenlet),

frekvenciája megegyezik az elektromotoros erő frekvenciájával. Ha a δ fáziskülönbség > 0, vagyis $\omega > \frac{1}{\sqrt{LC}}$, akkor az áramerősség fázisa késik, ha $\delta < 0$, vagyis $\omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}$, akkor siet az $\mathcal{E}$ elektromotoros erőhöz képest. *RL* kör esetén az áramerősség határozottan késik $\mathcal{E}$-hez képest. Olyan vezetőkörben, ahol $L = 0$, ott $\delta < 0$, és ezért az áramerősség megelőzi az elektromotoros erőt. Az *RLC* körben az áramerősség és elektromotoros

[2] Budó Ágoston: Mechanika, 84. oldal. Tankönyvkiadó, Budapest, 1964.

erő fázisa közötti különbség az önindukció okozta késésből és a kapacitástól származó sietésből tevődik össze. Ennek mértékét – mint láttuk – az ωL és $\frac{1}{\omega C}$ viszonya szabja meg.

Az $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ esetben $\delta = 0$, tehát nincs fáziskülönbség $I(t)$ és $\mathcal{E}(t)$ között. Ekkor a

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

impedancia az R ohmikus ellenállással egyezik meg, és az áramerősség I_0 amplitúdója az $\mathcal{E}_0 / R$ maximális értéket veszi fel. Ez az eset akkor következik be, ha az áramforrás elektromotoros erejének a frekvenciája megegyezik az áramkör $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ún. sajátfrekvenciájával:

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ ((44,31). egyenlet).

Az elektrotechnikában *RLC* körök esetén is használjuk a komplex írásmódot. Az R ohmikus ellenállás valós, az ωL induktív ellenállás helyett az $i\omega L$, a $-\frac{1}{\omega C}$ kapacitív ellenállás helyett pedig a $-i\frac{1}{\omega C}$ mennyiséget használjuk. Az impedanciát most az $R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ komplex szám abszolút értéke adja, argumentuma pedig a δ fáziskülönbség:

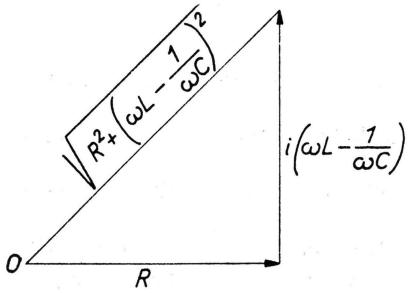
$$R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{i\delta}$$ ((44,32). egyenlet).

A $Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ jelöléssel *(55. ábra)* az $\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ komplex elektromotoros erő és komplex áramerősség (y) között az

$y = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}}{Z}$ ((44,33). egyenlet)

összefüggés áll fenn. A (44,33) egyenletet a komplex mennyiségekre felírt Ohm-törvénynek nevezhetjük. A komplex elektromotoros erő, áramerősség és ellenállás bevezetése formálisan megkönnyíti az időben periodikusan változó áramú körök tárgyalását. Az elektrotechnikában ezért terjedt el ez az írásmód. Alkalmazásakor azonban nem szabad megfeledkeznünk arról, hogy fizikai jelentése a megfelelő valós részeknek, illetve a komplex ellenállás abszolút értékének és argumentumának van.

55. ábra -



Vizsgáljuk meg most röviden a körbe betáplált teljesítményt. E célból szorozzuk meg a (44,16) egyenlet mindkét oldalát az *I* áramerősséggel:

$$\mathcal{E}I = L\dot{I}I + \frac{1}{C}eI + RI^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2 + \frac{e^2}{2C}\right) + RI^2$$ ((44,34). egyenlet).

A jobb oldalon álló $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}\frac{e^2}{C}\right)$ tag az áram mágneses és a kondenzátor elektromos térenergiájának időegységre eső növekedését jelenti. Az $\mathcal{E}I$ teljesítmény tehát a térenergia növekedését és az ellenállásban időegység alatt keletkezett Joule-hőt fedezi.

Ha az $\mathcal{E}$ elektromotoros erőt egy *t* pillanatban kikapcsoljuk, akkor az *I* áramerősség idővel exponenciálisan esik le zérusra. Ekkor (44,24)-ből adódik

$$RI^2 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2 + \frac{e^2}{2C}\right)$$ ((44,35). egyenlet).

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy az áramforrás kikapcsolása után a Joule-hő a térenergiát fogyasztja el.

Periodikus elektromotoros erő esetén a teljesítmény középértéke:

$$\overline{\mathcal{E}I} = \overline{RI^2}$$ ((44,36). egyenlet).

A vezetőkörbe betáplált $\overline{\mathcal{E}I}$ közepes teljesítmény az ellenállásban keletkezett hőt fedezi. Az önindukció és kapacitás középértékben nem fogyaszt energiát. Velük a feszültséget teljesítménymentesen lehet szabályozni.

A teljesítmény középértéke (42,25)-höz hasonlóan:

$\overline{\mathcal{E}I} = \mathcal{E}_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\delta$ ((44,37). egyenlet),

ahol

$$\mathcal{E}_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{\mathcal{E}^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}, \qquad I_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{I^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

az elektromotoros erő, illetve az áramerősség effektív értéke.

7. fejezet - VÁLTOZÓ ELEKTROMÁGNESES TEREK. ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK

Az elektromágneses tér alaptörvényeinek megismerése után a II–V. fejezetekben egyszerűbb elektromos és mágneses terek speciális tulajdonságait tanulmányoztuk. Először az időben állandó tereket vizsgáltuk, majd a kvázistacionárius áramoknál foglalkoztunk változó terekkel, de itt is figyelmen kívül hagytuk az elektromos tér időbeli változásának hatását a mágneses térre. A következőkben az általános esetet tekintjük, nevezetesen az időben és térben változó elektromágneses tér sajátságait tanulmányozzuk.

Mint az 5. pontban megismertük, a tetszőleges töltés- és árameloszlás által keltett elektromos és mágneses teret a Maxwell-egyenletek írják le:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{i} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \operatorname{div}\mathbf{D} &= 4\pi\varrho \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0 \end{aligned}\right\}$$ ((VI.1). egyenlet).

ahol **i** a konduktív és konvektív áramsűrűség összege:

i = **j** + ϱ**v**.

A (VI.1) differenciálegyenletek kiegészülnek a közegre jellemző, ún. anyagi egyenletekkel és a 6. pontban megismert határfeltételekkel. Izotrop közeg esetén az anyagi egyenletek:

D = ε**E**, **B** = μ**H**, **j** = σ(**E** + **E'**).

A fenti differenciálegyenletek a fenomenológiai elektrodinamika keretein belül a legáltalánosabb elektromágneses terek törvényszerűségeit helyesen írják le.

Az elektromágneses potenciálok

Tételezzük fel, hogy **i** = **i**(**r**, *t*) és ϱ = ϱ(**r**, *t*) ismert függvényei a helynek és időnek. Feladatul tűzzük a térmennyiségek – tehát a térerősségek – meghatározását.

A negyedik Maxwell-egyenlet kielégíthető, ha **B**-t egy **A**(**r**, *t*) vektortér rotációjaként vesszük fel:

$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ ((45,1). egyenlet).

Írjuk be ezt a kifejezést a harmadik Maxwell-egyenletbe:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

A helykoordináták szerinti és az idő szerinti differenciálhányadosok felcserélésével (feltesszük, hogy ennek feltételei teljesülnek) ez az egyenlet a következő alakba írható:

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$ ((45,2). egyenlet).

Ebből az egyenletből következik, hogy az $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ vektor egy $\Phi(\mathbf{r}, t)$ skalártér negatív gradienseként állítható elő:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\Phi.$$

Átrendezéssel ez a következőképpen írható:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$ ((45,3). egyenlet).

Az **A** vektort vektorpotenciálnak, a Φ skalárt skalárpotenciálnak, **A**-t és Φ-t együtt *elektromágneses potenciáloknak* nevezzük.

Ha az elektromágneses potenciálokat sikerül az áram- és töltéseloszlásból meghatároznunk, akkor a (45,1), (45,3) és az anyagi egyenletek alapján a térerősségek egyszerű differenciálással adódnak.

Mielőtt az elektromágneses potenciálok meghatározására szolgáló differenciálegyenleteket felírnánk, megmutatjuk, hogy a **B**, **E**, valamint az **A**, Φ között fennálló (45,1) és (45,3) egyenletek nem teremtenek egyértelmű kapcsolatot. Nevezetesen az

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad}\chi, \qquad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}$$ ((45,4). egyenlet)

transzformációval bevezetett **A'**, Φ' potenciálok ugyanazt a **B**-t, illetve **E**-t adják, mint az **A**, illetve Φ. A $\chi = \chi(\mathbf{r}, t)$ skalár tetszőleges függvénye a koordinátáknak és az időnek. Az **A'**-höz és a Φ'-höz tartozó vektorokat jelöljük **B'**-vel és **E'**-vel. Könnyen belátható, hogy **B'** = **B**, **E'** = **E**.

B' = rot **A'** = rot (**A** + grad χ) = rot **A** + rot grad χ = rot **A** = **B**.

Hasonlóképpen:

$$\mathbf{E}' = -\operatorname{grad}\Phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\operatorname{grad}\left(\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \operatorname{grad}\chi) = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E},$$

mivel az idő és helykoordináták szerint képezett differenciálások felcserélhetők.

A (45,1) és (45,3) kifejezésekkel bevezetett elektromágneses potenciálok tehát csak a (45,4) transzformáció erejéig vannak meghatározva. Ezt a körülményt felhasználjuk majd arra, hogy olyan potenciálokat vezetünk be, amelyekkel a lehető legegyszerűbb alakra hozhatók a potenciálokat meghatározó differenciálegyenletek. A (45,4) transzformációt *mértéktranszformációnak* nevezzük. Mivel ez a transzformáció a térerősségeket nem változtatja meg, a Maxwell-egyenletek vele szemben invariánsak.

A III. és IV. Maxwell-egyenletet az elektromágneses potenciálok bevezetésével már kielégítettük. Hátra van még az első két Maxwell-egyenlet. Ezek szolgáltatják a potenciálok differenciálegyenleteit. Tételezzük fel, hogy a közeg homogén, tehát $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, és helyettesítsük be a **B** és **E** (45,1), illetve (45,3) kifejezését az első két Maxwell-egyenletbe. Az anyagi egyenletek felhasználásával kapjuk a következő két egyenletet:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mu\mathbf{i} - \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$$ ((45,5). egyenlet),

$$\operatorname{div}\left(-\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \frac{4\pi\varrho}{\varepsilon}$$ ((45,6). egyenlet).

A

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A},$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = \Delta\Phi$$

vektoranalitikai összefüggések figyelembevételével a (45,5), (45,6) egyenletek a következő alakba írhatók:

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\mu\mathbf{i}$$ ((45,7). egyenlet),

$$\Delta\Phi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\varrho$$ ((45,8). egyenlet).

Ezek az egyenletek egyszerűbb alakot vesznek fel akkor, ha a (45,4) mértéktranszformációval olyan potenciálokat vezetünk be, amelyek kielégítik a

$$\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$$ ((45,9). egyenlet)

feltételi egyenletet. Utóbbit *Lorentz-feltételnek* nevezzük.

A (45,9)-et kielégítő potenciálok differenciálegyenlete:

$$\Delta\mathbf{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\mu\mathbf{i}$$ ((45,10). egyenlet),

$$\Delta\Phi-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\varrho$$ ((45,11). egyenlet).

Az adott áram- és töltéseloszlás elektromágneses terének a meghatározását az elektromágneses potenciálok bevezetésével visszavezettük a potenciálok meghatározására. Utóbbiakat a (45,10), (45,11) és (45,9) differenciálegyenletek megoldásával nyerjük. A potenciálok (45,10), (45,11) egyenletei a Lorentz-feltétellel együtt tehát ekvivalensek a Maxwell-egyenletekkel.

A (45,4) transzformációval kapcsolatban megjegyezzük, hogy a Lorentz-feltétel nem invariáns vele szemben. Ugyanis, ha **A**, Φ kielégítik a (45,9) feltételi egyenletet, a transzformált **A'**, Φ' a

$$\operatorname{div}\mathbf{A}'+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\Phi'}{\partial t}=\Delta\chi-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}$$ ((45,12). egyenlet)

egyenletet elégíti ki. A (45,12) egyenlet jobb oldala tetszőleges χ függvény esetén általában nem zérus. Azonban, ha olyan χ-t választunk, amely a

$$\Delta\chi-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0$$

egyenlet megoldása, akkor a transzformált potenciálok is eleget tesznek a Lorentz-feltételnek.

Ha a Lorentz-feltételt nem kötjük ki, akkor az elektromágneses potenciálokat a (45,7) és (45,8) egyenletekből kell meghatároznunk. A Lorentz-feltételnek tehát nincs fizikai jelentése, csupán a feladat megoldását teszi egyszerűbbé, mert ezzel a potenciálok egyenletei a könnyebben megoldható (45,10), (45,11) alakot veszik fel.

Retardált és avanzsált potenciálok

Az $\mathbf{i}=\mathbf{i}(\mathbf{r}, t)$ és $\varrho=\varrho(\mathbf{r}, t)$ áram-, illetve töltéseloszlás által keltett elektromágneses tér meghatározását az előző pontban visszavezettük az **A**, Φ elektromágneses potenciálok meghatározására. Keressük tehát a (45,10), (45,11) egyenletek olyan megoldását, amely kielégíti a (45,9) feltételt.

Stacionárius esetben ezek az egyenletek az egyenáramok mágneses terének kiszámításánál bevezetett vektorpotenciálra vonatkozó

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mu \mathbf{j}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$ ((46,1). egyenlet)

egyenletekbe, valamint az elektrosztatikus potenciál Poisson-egyenletébe mennek át:

$$\Delta \Phi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\varrho$$ ((46,2). egyenlet).

A 36. és 12. pontokban láttuk, hogy (46,1) és (46,2) megoldását integrálalakban elő lehet állítani [lásd a (12,7) és (36,27) képleteket]:

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{c}\int \frac{\mathbf{j}(x', y', z')}{r} dV'$$ ((46,3). egyenlet),

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\varrho(x', y', z')}{r} dV'$$ ((46,4). egyenlet),

ahol $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$; $dV' = dx'\,dy'\,dz'$.

A (45,10) és (45,11) d'Alembert típusú differenciálegyenletek megoldási módszereit itt nem ismertetjük, hanem csupán igazoljuk, hogy a megoldások a (46,3)-hoz és a (46,4)-hez hasonló alakban írhatók fel. Nevezetesen:

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{c}\int \frac{\mathbf{i}\left(x', y', z', t - \frac{r}{v}\right)}{r} dV'$$ ((46,5). egyenlet),

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\varrho\left(x', y', z', t - \frac{r}{v}\right)}{r} dV'$$ ((46,6). egyenlet),

ahol

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$ ((46,7). egyenlet).

Ezek a kifejezések a következőképpen értelmezhetők: az elektromágneses potenciálok értékét az *x*, *y*, *z* pontban, a *t* időpillanatban az egyes térfogatelemekben levő áram- és töltéssűrűségeknek *nem* a *t* időponthoz tartozó értékei szabják meg, hanem a korábbi $t-\frac{r}{v}$ időben felvett értékei. A $t-\frac{r}{v}$ idő annyival korábbi, mint amennyi szükséges egy v sebességgel terjedő hatásnak ahhoz, hogy a töltéselemtől az *x*, *y*, *z* koordinátájú pontig eljusson, vagyis befussa az *r* távolságot. A töltés- és árameloszlás mozgásállapotában bekövetkezett változás tehát nem azonnal érezhető a potenciálpontban, hanem véges sebességgel terjedő hatás közvetítésével jut el oda. Ezek a potenciálok tehát kifejezik az elektromágneses kölcsönhatás véges sebességgel való terjedését. (46,7) szerint a terjedési sebesség $v=c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, amely vákuumban ($\varepsilon = \mu = 1$) a *c* fénysebességgel egyezik meg. Később látni fogjuk, hogy v az elektromágneses hullámok terjedési sebessége. A (46,5), (46,6) elektromágneses potenciálokat *retardált* potenciáloknak nevezzük.

Most megmutatjuk, hogy a retardált potenciálok kielégítik a (45,10), (45,11) d'Alembert-egyenleteket és a (45,9) Lorentz-feltételt. Foglalkozzunk előbb a Φ skalárpotenciállal. Az *x*, *y*, *z* koordinátájú pontot vegyük körül egy végtelen kis r_0 sugarú gömbfelülettel. A (46,6) integrációs tartományt ezáltal két részre bontjuk: a V_1 térfogatú gömbre és az azon kívül eső *V* térfogatú, ún. külső térrészre. A Φ ennek megfelelően két tag összege lesz:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

ahol

$$\Phi_1 = \frac{1}{\varepsilon}\int_{V_1}\frac{\varrho\left(x', y', z', t-\frac{r}{v}\right)}{r}dV' \qquad \text{((46,8). egyenlet),}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{\varepsilon}\int_{V_2}\frac{\varrho\left(x', y', z', t-\frac{r}{v}\right)}{r}dV' \qquad \text{((46,9). egyenlet).}$$

Képezzük $\Delta\Phi_2$-t az *x*, *y*, *z* koordináták szerint. Φ_2 kifejezése ezeket a koordinátákat csak *r*-ben tartalmazza. A differenciálást elvégezhetjük az integráljelen belül, ha az integrandusz második deriváltja véges és folytonos az integrációs tartományban. Mivel $r > r_0$, ez a feltétel itt teljesül, ezért

$$\Delta\Phi_2 = \frac{1}{\varepsilon}\int_{V_2} \Delta\left(\frac{\varrho\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}\right)dV' =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{V_2} \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\varrho\left(t-\frac{r}{v}\right)dV' = \frac{1}{\varepsilon}\int_{V_2}\frac{1}{2}\varrho''\left(t-\frac{r}{v}\right)\frac{1}{v^2}dV'$$

ahol ϱ'' a $t-\frac{r}{v}$ argumentum szerint vett második differenciálhányadost jelenti. Mivel az argumentumban a *t* független változó együtthatója 1, ezért az argumentum szerint vett differenciálhányados megegyezik a *t* szerinti parciális differenciálhányadossal: $\varrho' = \frac{\partial\varrho}{\partial t}$, $\varrho'' = \frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}$. Ezért – mivel *r* és *t* független változók – $\Delta\Phi_2$ a következő alakba írható:

$$\Delta\Phi_2 = \frac{1}{\varepsilon}\int_{V_2}\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\varrho\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}\right)dV' = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{\varepsilon}\int_{V_2}\frac{\varrho\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}dV' = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2}.$$

Tehát

$$\Delta\Phi_2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2} = 0$$ ((46,10). egyenlet).

Továbbá:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2\varepsilon}\int_{V_1}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varrho\left(x', y', z', t-\frac{r}{v}\right)}{\partial t^2}dV'.$$

Az *x*, *y*, *z* koordinátájú *P* pont körüli r_0 sugarú gömböt, tehát a V_1 tartományt húzzuk össze a *P* pontra. Mivel $\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}$ véges, az integrál zérushoz tart. Ugyanis az integrál határértékét az $\int_{V_1}\frac{1}{r}dV'$ viselkedése szabja meg. Ennek határértéke pedig zérus:

$$\lim_{r_0\to 0}\int_{V_1}\frac{1}{r}dV' = 4\pi\lim_{r_0\to 0}\int_0^{r_0} r\,dr = 4\pi\lim_{r_0\to 0}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{r_0} = 0$$

Ennélfogva a (45,11) egyenlet bal oldala a következő:

$$\Delta\Phi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \Delta\Phi_1 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} + \Delta\Phi_2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2} = \Delta\Phi_1$$ ((46,11). egyenlet).

$\Delta\Phi_1$ kiszámításánál nem járhatunk el úgy, mint $\Delta\Phi_2$-nél tettük, mivel most az integrációs tartomány az $r = 0$ pontot is tartalmazza, és ezért az integrandusz második deriváltja $r = 0$-nál végtelenné válna. $\Delta\Phi_1$ kiszámítását ezért a vektoranalízisből ismert

$$\Delta\Phi_1 = \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi_1 = \lim_{V\to 0}\frac{\oint \operatorname{grad}\Phi_1\, d\mathbf{F}}{V}$$ ((46,12). egyenlet)

képlet alapján végezzük el. Itt F annak a V térfogatnak a zárt felülete, amely belsejében tartalmazza a $P(x, y, z)$ pontot, amelyben a div grad Φ értékét meghatározzuk. Képezzük előbb grad Φ_1-et a (46,8) egyenletből:

$$\operatorname{grad}\Phi_1 = \frac{1}{\varepsilon}\int_{V_1}\operatorname{grad}\frac{\varrho}{r}dV' = \frac{1}{\varepsilon}\int_{V_1}\left(\frac{1}{r}\operatorname{grad}\varrho + \varrho\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)dV' =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{V_1}\left(-\frac{\varrho'}{vr}\operatorname{grad} r - \frac{\varrho}{r^2}\operatorname{grad} r\right)dV' = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{V_1}\left(\frac{\varrho'}{vr}\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\varrho}{r^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\right)dV'$$

ahol **r** az x', y', z' ponttól a dF felületelemig húzott vektor. Mivel ϱ' véges, az $r_0 \to 0$ határátmenetnél a jobb oldali első integrál zérushoz tart. Tehát:

$$\oint\operatorname{grad}\Phi_1\, d\mathbf{F} = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{V_1}\oint\frac{\varrho\mathbf{r}}{r^3}\,d\mathbf{F}\,dV'$$

Annál a határátmenetnél, amikor mind a V_1 térfogat, mind az F felület végtelen kicsivé válik, a $\varrho\left(x', y', z', t - \frac{r}{v}\right)$ függvény r-től való függése elhagyható. Ekkor viszont $\varrho(x', y', z', t)$ kiemelhető a felületi integrálból:

$$\oint\operatorname{grad}\Phi_1\, d\mathbf{F} = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{V_1}\varrho\oint\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,d\mathbf{F}\,dV'$$

Az $\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ vektor normális komponensének zárt felületre vett integrálja 4π vagy zérus aszerint, hogy az x', y', z' pont az *F* felülettel körülfogott *V* térfogat belsejében van, vagy azon kívül. A mi esetünkben V_1 a *V* belsejében van, ezért a felületi integrál 4π-vel egyenlő. Tehát:

$$\oint \operatorname{grad} \Phi_1 \, d\mathbf{F} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \int \varrho(x', y', z', t') \, dV'$$ ((46,13). egyenlet).

Ebből az egyenletből (46,11) és (46,12) alapján adódik:

$$\Delta \Phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \varrho_P$$ ((46,14). egyenlet),

ahol ϱ_p a $\varrho(x, y, z, t)$ függvény értéke a $P(x, y, z)$ pontban. (46,14) megegyezik a (45,11) egyenlettel. A (46,6) integrálkifejezés tehát kielégíti a Φ skalárpotenciál (45,11) differenciálegyenletét.

Hasonlóképpen bizonyítható, hogy (46,5) megoldása a vektorpotenciálra vonatkozó (45,10) egyenletnek.

Most megmutatjuk, hogy a (46,5), (46,6) retardált potenciálok kielégítik a Lorentz-feltételt is.

Az egyszerűbb írásmód kedvéért vezessük be a $t' = t - r/v$ jelölést. Képezzük a vektorpotenciál divergenciáját a (46,5) integrálkifejezés alapján. A differenciálás az integráljel alatt elvégezhető:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\mu}{c} \int \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{i}(x', y', z', t')}{r} \right) dV'$$ ((46,15). egyenlet).

Foglalkozzunk külön az integrandusszal.

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{i}(x', y', z', t')}{r} = \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathbf{i} + \mathbf{i} \operatorname{grad} \frac{1}{r}.$$

Mivel **i** csak az *r*-en keresztül függ *x*, *y*, *z*-től,

$$\operatorname{div} \mathbf{i}(x', y', z', t') = -\frac{1}{v} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t'} \operatorname{grad} r.$$

Tehát

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{i}}{r}\right)=-\frac{1}{vr}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t'}\operatorname{grad} r+\mathbf{i}\operatorname{grad}\frac{1}{r}$$ ((46,16). egyenlet).

Az $r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ összefüggés alapján belátható, hogy

grad r = –grad′ r,

ahol grad′ az x', y', z' koordináták szerint képzett gradienst jelenti. Ennek alapján (46,16) a következő alakba írható:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{i}}{r}\right)=\frac{1}{vr}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t'}\operatorname{grad}' r+\mathbf{i}\operatorname{grad}'\frac{1}{r}$$ ((46,17). egyenlet).

A vesszős koordináták szerinti divergenciára érvényes a következő képlet:

$$\operatorname{div}'\left(\frac{\mathbf{i}}{r}\right)=\left(\operatorname{div}'\frac{\mathbf{i}}{r}\right)_{t'=\text{áll.}}+\frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t'}\operatorname{grad}' t'=$$
$$=\mathbf{i}\operatorname{grad}'\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\left(\operatorname{div}'\mathbf{i}\right)_{t=\text{áll.}}-\frac{1}{vr}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t'}\operatorname{grad}' r$$ ((46,18). egyenlet)

A (46,17) és a (46,18) egyenlet egybevetéséből adódik:

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{i}}{r}=-\operatorname{div}'\frac{\mathbf{i}}{r}+\frac{1}{r}\left(\operatorname{div}'\mathbf{i}\right)_{t=\text{áll.}}$$ ((46,19). egyenlet).

Ezt a kifejezést (46,15)-be beírva, kapjuk:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=-\frac{\mu}{c}\int\operatorname{div}'\frac{\mathbf{i}}{r}dV'+\frac{\mu}{c}\int\frac{\left(\operatorname{div}'\mathbf{i}\right)_{t'=\text{áll.}}}{r}dV'.$$

Az első integrál Gauss-tétellel felületi integrállá alakítható:

$$\int_V\operatorname{div}'\frac{\mathbf{i}}{r}dV'=\oint\frac{i_n}{r}dF.$$

Ha az integrációs tartománynak az egész végtelen teret tekintjük, akkor a felületi integrál zérussá válik, mert a végtelenben az áram zérus.

Tehát:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{\mu}{c}\int\frac{\left(\operatorname{div}'\mathbf{i}\right)_{t'=\text{áll.}}}{r}dV'$$ ((46,20). egyenlet).

A (7,2) kontinuitási egyenlet szerint:

$$\operatorname{div}'\mathbf{i}\left(x',y',z',t'\right)_{t'=\text{áll.}}=-\frac{\partial\varrho\left(x',y',z',t'\right)}{\partial t'}.$$

Ennek alapján (46,20) a következőképpen írható;

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=-\frac{\mu}{c}\int\frac{1}{r}\frac{\partial\varrho}{\partial t'}dV'$$ ((46,21). egyenlet).

Mivel $t'=t-\frac{r}{v}$, ezért $\frac{\partial\varrho}{\partial t'}=\frac{\partial\varrho}{\partial t}$. Ennélfogva (46,6) figyelembevételével írható:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=-\frac{\mu}{c}\int\frac{1}{r}\frac{\partial\varrho}{\partial t}dV'=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\varrho\left(x',y',z',t'\right)}{r}dV'=$$
$$=-\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\varrho\left(x',y',z',t'\right)}{r}dV'=-\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$ ((46,22). egyenlet)

Ez az egyenlet pedig éppen a (45,9) Lorentz-feltétel. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a (46,5), (46,6) retardált potenciálok kielégítik a Lorentz-feltételt is.

Az előzőekben követett gondolatmenettel belátható, hogy az elektromágneses potenciálok differenciálegyenleteit az

$$\mathbf{A}\left(x,y,z,t\right)=\frac{\mu}{c}\int\frac{\mathbf{i}\left(x',y',z',t+\frac{r}{v}\right)}{r}dV'$$ ((46,23). egyenlet),

$$\Phi\left(x,y,z,t\right)=\frac{1}{\varepsilon}\int\frac{\varrho\left(x',y',z',t+\frac{r}{v}\right)}{r}dV'$$ ((46,24). egyenlet)

integrálkifejezések is kielégítik. Ezek olyan megoldásokat jelentenek, amelyek szerint a potenciálok értékét az *x*, *y*, *z* pontban, *t* időpillanatban nem a *t*-hez, hanem egy későbbi, a $t+\frac{r}{v}$ időponthoz tartozó áram- és töltéseloszlás határozza meg. A (46,23), (46,24) megoldásokat *avanzsált potenciáloknak* nevezzük. Ezeknek nincs olyan világos fizikai értelmezésük, mint a retardált potenciáloknak, ezért alkalmazásuk is sokkal ritkább.

Mivel az elektromágneses potenciálok differenciálegyenletei inhomogén lineáris egyenletek, azok általános megoldását a homogén egyenletek általános megoldásának és az inhomogén egyenlet tetszőleges partikuláris megoldásának összege adja. Egyértelmű megoldást akkor kapunk, ha megadjuk a konkrét probléma kezdő- és határfeltételeit is. Mind az elméleti, mind az alkalmazásoknál előforduló problémák legtöbbjénél általában a retardált megoldások játszanak szerepet.

Pontszerű elektromos dipólus elektromágneses tere

Gondoljunk el **p** momentumú elektromos dipólust az **r** = $\mathbf{r}_0$ pontban. Tételezzük fel, hogy a **p** dipolmomentum az időnek folytonos függvénye. Feladatul tűzzük ki a dipólus általános elektromágneses terének a meghatározását. Tegyük fel, hogy $\varepsilon=\mu=1$. A teret leíró Maxwell-egyenletekben adott mennyiségnek tekintjük a

$$\mathbf{p}(t)=\int_V \mathbf{P}(\mathbf{r},t)\,dV$$ ((47,1). egyenlet)

egyenlettel definiált **P**(**r**, *t*) dipolmomentum-sűrűséget. A Maxwell-egyenletek ebben az esetben a következőképpen írhatók:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t};\quad \operatorname{div}\mathbf{E}=-4\pi\operatorname{div}\mathbf{P}$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t};\qquad \operatorname{div}\mathbf{H}=0$$

Ezek az egyenletek az $\mathbf{i}_p=\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$ polarizációs áramsűrűség és a ϱ_p = – div **P** töltéssűrűség időben változó elektromágneses terét határozzák meg.

A (45,I)-hez és (45,3)-hoz hasonlóan itt is bevezetjük az elektromágneses potenciálokat:

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$
$$\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$$ ((47,2). egyenlet)

Ezek a kifejezések a harmadik és negyedik Maxwell-egyenletet kielégítik. Az elsőbe és másodikba beírva, az elektromágneses potenciálok inhomogén differenciálegyenleteit kapjuk:

$$\Delta\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$$ ((47,3). egyenlet),

$$\Delta\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=4\pi\,\mathrm{div}\,\mathbf{P}$$ ((47,4). egyenlet),

és a Lorentz-feltétel:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$$ ((47,5). egyenlet).

A (47,3)–(47,5) egyenletek retardált megoldásai (46,5) és (46,6) alapján:

$$\mathbf{A}(x,y,z,t)=\frac{1}{c}\int\frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{P}\left(x',y',z',t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}dV'$$ ((47,6). egyenlet),

$$\Phi(x,y,z,t)=-\int\frac{1}{r}\mathrm{div}'\,\mathbf{P}\left(x',y',z',t-\frac{r}{c}\right)_{t-\frac{r}{c}=\text{áll.}}dV'$$ ((47,7). egyenlet).

(47,7) integranduszában a divergenciát az *x′*, *y′*, *z′* koordináták szerint képezzük állandó retardált idő mellett. A (46,19)-hez hasonló

$$\mathrm{div}\frac{\mathbf{P}}{r}=-\mathrm{div}'\frac{\mathbf{P}}{r}+\frac{1}{r}\left(\mathrm{div}'\,\mathbf{P}\right)_{r'=\text{áll.}}$$

összefüggés felhasználásával írható:

$$\Phi(x,y,z,t)=-\int\mathrm{div}'\frac{\mathbf{P}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}dV'-\int\mathrm{div}\frac{\mathbf{P}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}dV$$ ((47,8). egyenlet).

A jobb oldali első integrál a Gauss-tétellel felületi integrállá alakítható, és a végtelen felületre kiterjesztve eltűnik, mert ott $\mathbf{P}\equiv 0$. A második integrálban a divergenciát az *x*, *y*, *z* koordináták szerint kell képezni. Ez a divergenciaképzés az integrálással felcserélhető; tehát:

$$\Phi(x,y,z,t) = -\operatorname{div}\int \frac{\mathbf{P}\left(x',y',z',t-\frac{r}{c}\right)}{r}dV'$$ ((47,9). egyenlet).

A (47,6) integrálból hasonlóképpen kiemelhető az idő szerinti parciális differenciálás jele:

$$\mathbf{A}(x,y,z,t) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\mathbf{P}\left(x',y',z',t-\frac{r}{c}\right)}{r}dV'$$ ((47,10). egyenlet).

E két kifejezésből látható, hogy az elektromágneses potenciálokat a

$$\mathbf{Z}(x,y,z,t) = \int \frac{\mathbf{P}\left(x',y',z',t-\frac{r}{c}\right)}{r}dV'$$ ((47,11). egyenlet)

integrál, az ún. *Hertz-vektor* meghatározza az

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}, \qquad \Phi = -\operatorname{div}\mathbf{Z}$$ ((47,12). egyenlet)

képletek alapján. A Hertz-vektort kell tehát kiszámítanunk az adott **P**(**r**, *t*) dipolmomentum-eloszlásból, és ezután az elektromágneses potenciálok, majd a térerősségek a (47,12), illetve a (47,2) szerint egyszerű differenciálással adódnak.

A továbbiakban a pontszerű dipólus terével foglalkozunk. Ebben az esetben a tér teljes pontossággal meghatározható. A pontszerű dipólus momentumsűrűségét a Dirac-féle *δ*-függvénnyel fejezhetjük ki:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \mathbf{p}(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$$ ((47,13). egyenlet).

Ezt a kifejezést (47,13)-ba beírva és az integrálást elvégezve, adódik:

$$\mathbf{Z}(x,y,z,t) = \frac{\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}$$ ((47,14). egyenlet),

ahol $r = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$. Az elektromos és mágneses tér erősségét (47,2) és (47,12) alapján kapjuk:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{Z} + \Delta\mathbf{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2}$$ ((47,15). egyenlet).

A (47,3), (47,4) és (47,12) egyenletekből következik, hogy a Hertz-vektor kielégíti a

$$\Delta\mathbf{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -4\pi\mathbf{P}$$ ((47,16). egyenlet)

egyenletet. A dipóluson kívül (47,13) szerint $\mathbf{P} \equiv 0$, ezért a pontszerű elektromos dipólus elektromos terének erőssége:

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{Z} = \frac{3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{p})}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{1}{c}\left[\frac{3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{p}')}{r^4} - \frac{\mathbf{p}'}{r^2}\right] + \frac{1}{c^2}\left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{p}'')}{r^3} - \frac{\mathbf{p}''}{r}\right]$$ ((47,17). egyenlet)

ahol **p'**, illetve **p"** a **p** vektor első, illetve második differenciálhányadosa a $t' = t - r/c$ argumentum szerint:

$$\mathbf{p}' = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t'}, \qquad \mathbf{p}'' = \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t'^2}.$$

Hasonlóképpen:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{Z} = -\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{p}'}{r^3} - \frac{1}{c}\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{p}''}{r^2}$$ ((47,18). egyenlet).

Az elektromos térerősség (47,17) szerint három részből tevődik össze; az első két tag az $\frac{1}{c}$-vel és az $\frac{1}{c^2}$-tel arányos tagok. Az első két tag $\left|\frac{\mathbf{p}}{r^3}\right|$ nagyságrendű, és ez megfelel a **p** momentumú dipólus elektrosztatikus terének. Ugyanis ha **p** nem függ *t*-től, akkor (**p'** = **p"** = 0) az elektromos térerősség kifejezésének többi tagja eltűnik. Az elektrosztatikában a Dipólus elektrosztatikus tere című pontban éppen ezt a teret határoztuk meg. A három rész távolságfüggésének összevetéséből látszik, hogy a dipólus közvetlen környezetében ez a tér dominál. Ezt a tartományt éppen ezért sztatikus zónának nevezzük. Ennek a mágneses térben nincs megfelelője, ugyanis elektromos dipólusnak nincs sztatikus mágneses tere.

Az elektromos térerősség $\frac{1}{c}$-vel arányos két tagja az ún. középső zónában (tehát a dipólustól nem nagyon távol) jelentős. Ennek a térnek már van megfelelő mágneses tere: a (47,18) képlet első tagja. Ez éppen a **p'** polarizációs áram Biot–Savart-törvény által leírt mágneses tere.

Az elektromos dipólus terének legérdekesebb része a (47,17), illetve (47,18) képlet utolsó tagja által leírt elektromágneses tér. A dipólustól nagyon távol ez a tér észlelhető. Mint a későbbi részletesebb vizsgálatból kiderül, a térnek ez a része leválik a dipólusról, és elektromágneses hullám formájában kisugárzódik. Ezért azt a tartományt, ahol már csak ez a tér észlelhető, *hullámzónának* nevezzük.

Az elektromos és mágneses térerősség (47,17), illetve (47,18) kifejezése általános érvényű; nevezetesen, a dipolmomentum tetszőleges időfüggése esetén is érvényesek. Az alkalmazások szempontjából különösen fontosak azok az esetek, amelyeknél a dipolmomentum időben periodikusan változik:

$\mathbf{p}(t)=\mathbf{p}_0 e^{i\omega t}$ ((47,19). egyenlet),

ahol $\mathbf{p}_0$ állandó vektor, az ún. amplitúdóvektor. Az elektromágneses térre jellemző (47,17) Hertz-vektor ebben az esetben a következő:

$$\mathbf{Z}(x,y,z,t)=\mathbf{p}_0\frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}$$ ((47,20). egyenlet).

Az idő szerint képzett differenciálhányadosok ekkor kiszámíthatók, és a tér konkrétan felírható. Ezt mi csak a hullámzónára végezzük el, de előbb megbecsüljük **E** nagyságrendjét az egyes zónákban.

E nagyságrendje a sztatikus zónában: $\left|\frac{\mathbf{p}}{r^3}\right|=\frac{p_0}{r^3}$,

a középső zónában: $\left|\frac{\mathbf{p}'}{cr^2}\right|=\frac{\omega p_0}{cr^2}$,

a hullámzónában: $\left|\frac{\mathbf{p}''}{c^2 r}\right|=\frac{\omega^2 p_0}{c^2 r}$.

Az elektromos térerősség három tagjának aránya tehát adott *r* távolságban a dipólustól a következő:

$$\frac{p_0}{r^3}:\frac{\omega p_0}{cr^2}:\frac{\omega^2 p_0}{c^2 r}=\frac{1}{r^2}:\frac{\omega}{cr}:\frac{\omega^2}{c^2}=\frac{1}{r^2}:\frac{2\pi}{\lambda r}:\frac{(2\pi)^2}{\lambda^2},$$

ahol $\lambda=2\pi\frac{c}{\omega}$ a hullámhosszat jelenti. Az egyes tagok nagyságrendje a megelőzőeknek $2\pi r/\lambda$-szorosa. Ezért a dipólustól nagy távolságra gyakorlatilag csak a hullámzóna érvényesül. Pl. λ = 500 m hullámhosszra *r* = 50 km távolságban a hullámzónára jellemző tag két nagyságrenddel erősebb a megelőzőnél, ugyanis ekkor $2\pi r/\lambda\approx 600$.

A következőkben a hullámzónával foglalkozunk részletesebben. Ebben a tartományban a térerősségeket a (47,17), illetve a (47,18) képlet utolsó tagja írja le:

$$\mathbf{E}=\frac{1}{c^2}\left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{p}'')}{r^3}-\frac{\mathbf{p}''}{r}\right]$$ ((47,21). egyenlet),

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{p}''\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{c^2r^2}$$ ((47,22). egyenlet).

Könnyű belátni, hogy az elektromos térerősség a következőképpen is írható:

$$\mathbf{E}=\mathbf{H}\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{r}$$ ((47,23). egyenlet).

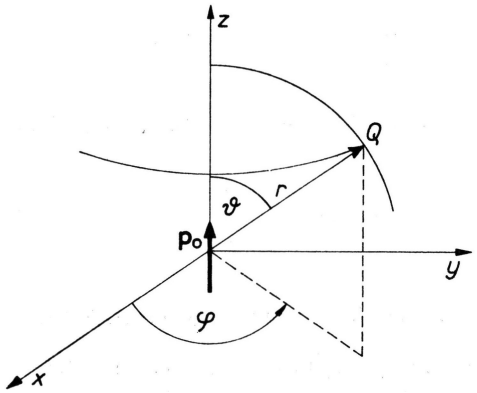
A (47,22) és (47,23) képletekből látszik, hogy a térerősségek merőlegesek egymásra is és az $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ vektorra is:

$$\mathbf{E},\mathbf{H}\perp\mathbf{r}-\mathbf{r}_0;\qquad \mathbf{E}\perp\mathbf{H}.$$

Tételezzük fel, hogy a dipólus dipolmomentumának iránya megegyezik a *z* tengely irányával: $\mathbf{p}_0(0, 0, p_0)$, a dipólus az origóban van *(56. ábra):*

$$\mathbf{r}_0=0.$$

56. ábra -



Ebben az esetben:

$$E_0 = \frac{\omega^2 p_0}{c^2 r} \sin \vartheta e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$

$$E_r = E_\varphi = 0 \qquad \text{((47,24). egyenlet),}$$

$$H_\varphi = \frac{\omega^2 p_0}{c^2 r} \sin \vartheta e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$

$$H_r = H_\vartheta = 0 \qquad \text{((47,25). egyenlet),}$$

Az elektromos térerősség az **r** helyvektorral megadott *Q* ponton átmenő délkör délre mutató érintője, a mágneses térerősség pedig a szélességi kör érintője a növekvő *φ* irányában.

A (47,24), (47,25) képletek olyan elektromágneses teret írnak le, amely időben periodikusan változik, a rezgés fázisa adott időpillanatban az *r* = áll. sugarú gömbfelület mentén állandó, és a térnek ez az állapota időben a sugár irányában *c* sebességgel terjed tova. Az ilyen haladó hullámot nevezzük gömbhullámnak. A rezgődipólus elektromágneses tere a hullámzónában tehát gömbhullám. A térerősségek amplitúdója a gömbhullámoknál megismert[1] távolságfüggést mutatja: fordítva arányos a dipólustól mint hullámforrástól mért távolsággal. Az elektromos és mágneses térerősség abszolút értéke arányos a $p \sin \vartheta$-val, vagyis a dipolmomentumnak a sugárra merőleges síkra vett vetületével. Ennélfogva a rezgésirányban (*z* tengely mentén) mind az **E**, mind a **H** eltűnik. Maximálisak a térerősségek a $\vartheta = \pi/2$ irányokban, vagyis az egyenlítő síkjában. A tér tehát nem gömbszimmetrikus, a gömbhullám amplitúdója függ a ϑ szögtől is.

A dipolmomentum periodikus időfüggését (47,19)-ben az $e^{i\omega t}$ komplex függvénnyel fejeztük ki. Ennek következtében kaptunk komplex kifejezéseket a térerősségekre. Mint tudjuk, fizikai jelentésük azok valós részének van. Tehát

$$E_\vartheta = \frac{\omega^2 p_0}{c^2 r} \sin \vartheta \cos \omega\left(t-\frac{r}{c}\right), \qquad E_\vartheta = E_\varphi = 0 \qquad \text{((47,24′). egyenlet),}$$

$$H_\varphi = \frac{\omega^2 p_0}{c^2 r} \sin \vartheta \cos \omega\left(t-\frac{r}{c}\right), \qquad H_r = H_\vartheta = 0 \qquad \text{((47,25′). egyenlet).}$$

Ez az elektromágneses tér gömbhullám formájában kisugárzódik. Számítsuk ki az 1 s alatt kisugárzott energiát. Ezt az energia-áramsűrűség olyan gömbfelületre vett integrálja adja meg, amely körülfogja a dipólust. Határozzuk meg előbb az energia-áramsűrűség kifejezését, az ún. Poynting-vektort:

[1] Budó Ágoston: Mechanika, 286. oldal. Tankönyvkiadó, Bpest, 1964.

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{H}$$.

A (47,22) és (47,23) képletekből következik, hogy **S** sugárirányú, tehát

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{r}}{r}|\mathbf{S}|$$ ((47,26). egyenlet).

Mivel

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$$,

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi}|\mathbf{E}||\mathbf{H}| = \frac{c}{4\pi}\frac{p_0^2\omega^4}{c^4 r^2}\sin^2 \mathrm{j} \cos^2 \omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$ ((47,27). egyenlet).

E kifejezésből látszik, hogy

$$|\mathbf{S}| \approx \sin^2 \mathrm{j}$$,

a sugárzás kibocsátása tehát nem izotrop, hanem függ a j szögtől. A dipolmomentum irányában nincs sugárzás, az egyenlítő síkjában pedig maximális.

A dipólustól *r* távolságban a sugárra merőlegesen elhelyezett 1 cm^2 felületen az időegység alatt átlagosan áthaladó energia:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\mathbf{S}|\,dt = \frac{p_0^2\omega^4}{4\pi c^3 r^2}\sin^2 \mathrm{j} \cdot \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2 \omega\left(t - \frac{r}{c}\right)dt$$.

Az integrál könnyen kiszámítható, értéke: *T*/2. Ezért:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\mathbf{S}|\,dt = \frac{p^2\omega^4}{8\pi c^3 r^2}\sin^2 \mathrm{j}$$.

A dipólus által az időegység alatt átlagosan kisugárzott energiát ebből az *r* sugarú gömbfelületre történő integrálással kapjuk:

$$U_{1s} = \frac{p_0^2\omega^4}{8\pi c^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = \frac{p_0^2\omega^4}{4c^3}\int_0^{\pi}\sin^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= \frac{p_0^2\omega^4}{4c^3}\int_{-1}^{1}\sin^2\vartheta\,d(\cos\vartheta) = \frac{p_0^2\omega^4}{4c^3}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \frac{p_0^2\omega^4}{3c^3}$$ ((47,28). egyenlet)

Az elektromos dipólus sugárzására kapott (47,28) képlet alkalmazható *l* hosszúságú botantenna sugárzásának kiszámítására. Az antennát dipólusnak tekintve $p_0 = e_0 l$, ahol e_0 az időben periodikusan változó elektromos töltés amplitúdója: $e = e_0\cos\omega t$. Az antennára azonban nem a p_0 momentum, hanem a benne folyó áram erősségének effektív értéke a jellemző. Ezért p_0-t ezzel fejezzük ki. Az áram erőssége:

$$I = \frac{de}{dt} = -\omega e_0\sin\omega t = \omega e_0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

ahol $I_0 = \omega e_0$. Ennélfogva

$$p_0 = \frac{I_0 l}{\omega}$$ ((47,29). egyenlet).

(47,29)-et (47,28)-ba behelyettesítve, megkapjuk az *l* hosszúságú botantenna által az időegység alatt átlagosan kisugárzott energiát:

$$U_{1s} = \frac{\omega^4}{3c^3}\cdot\frac{I_0^2 l^2}{\omega^2} = \frac{2\omega^2}{3c^3}\left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 l^2 = \frac{2\omega^2}{3c^3} I_{\text{eff}}^2 l^2$$ ((47,30). egyenlet).

Ez a kifejezés a Joule-törvényhez hasonló

$$U_{1s} = R_s I_{\text{eff}}^2$$ ((47,31). egyenlet)

alakra hozható. R_s annak az ohmikus ellenállásnak az értékével egyezne meg, amely időegység alatt U_{1s}-mal egyenlő energiaveszteséget hozna létre Joule-hő révén. Az így értelmezett

$$R_s = \frac{2\omega^2}{3c^3} l$$ ((47,32). egyenlet)

mennyiséget nevezzük *sugárzási ellenállásnak*. A valóságban Joule-hő is keletkezik az antennában, ezért az elektromos rezgést keltő generátor átlagos teljesítménye az időegység alatt átlagosan keletkezett Joule-hő és a kisugárzott energia összegével egyenlő:

$$\overline{\text{Teljesítmény}} = (R + R_s) I_{\text{eff}}^2$$ ((47,33). egyenlet),

ahol *R* az antenna ohmikus ellenállása.

A mágneses momentum elektromágneses tere és sugárzása

Tekintsünk **m**(*t*) momentumú mágnest, amelyben az elemi mágneses momentumok eloszlását az

$$\mathbf{m}(t)=\int_V \mathbf{M}(\mathbf{r},t)\,dV$$ ((48,1). egyenlet)

képletben szereplő **M**(**r**, *t*) sűrűségfüggvény írja le. Feltételezzük, hogy a mágnesen kívül $\varepsilon=\mu=1$. Az **M**(**r**, *t*) mágneses momentumeloszlás által keltett elektromágneses teret a Maxwell-egyenletek határozzák meg:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E}=0$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H}=-4\pi\operatorname{div}\mathbf{M}$$

Feladatul tűzzük ki az elektromos és a mágneses térerősség meghatározását. Itt is az elektromágneses potenciálok segítségével oldjuk meg a problémát. A div **E** = 0 egyenletet kielégíthetjük az

$$\mathbf{E}=-\operatorname{rot}\mathbf{A}$$ ((48,2). egyenlet)

kifejezéssel. (48,2)-t az első Maxwell-egyenletbe beírva, kapjuk:

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{H}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0$$.

Ebből adódik:

$$\mathbf{H}=-\operatorname{grad}\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$ ((48,3). egyenlet).

A (48,2) és (48,3) képletekkel bevezetett **A**, Φ elektromágneses potenciálok differenciálegyenleteit a harmadik és negyedik Maxwell-egyenlet szolgáltatja. Ha a

$$\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$$ ((48,4). egyenlet)

Lorentz-feltételt kikötjük, akkor **A**-ra és Φ-re a következő egyenleteket kapjuk:

$$\Delta\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t}$$ ((48,5). egyenlet),

$$\Delta\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=4\pi\ \mathrm{div}\,\mathbf{M}$$ ((48,6). egyenlet).

Az elektromágneses potenciálok (48,4)–(48,6) egyenletei alakilag teljesen megegyeznek az elektromos dipólusnál bevezetett potenciálok differenciálegyenleteivel. A különbség mindössze annyi, hogy **P** helyett **M** szerepel az egyenletekben. Ez a felismerés megkönnyíti a probléma megoldását; ugyanis a mágneses momentumeloszlás terét az elektromos dipóluseloszlás teréből egyszerű helyettesítéssel megkaphatjuk. A mondottak alapján, valamint a (48,2), (48,3) és a (47,2) összefüggések egybevetéséből következik:

$$\mathbf{E}=-\mathbf{H}_e(\mathbf{P}\to\mathbf{M})$$ ((48,7). egyenlet),

$$\mathbf{H}=\mathbf{E}_e(\mathbf{P}\to\mathbf{M})$$ ((48,8). egyenlet),

ahol $\mathbf{H}_e(\mathbf{P}\to\mathbf{M})$, illetve $\mathbf{E}_e(\mathbf{P}\to\mathbf{M})$ az elektromos dipólus mágneses, illetve elektromos térerősségének kifejezését jelenti azzal a változtatással, hogy benne **P** helyére **M** írandó.

Mivel itt is a hullámzóna érdekel bennünket elsősorban, ezért csak a hullámzónában érvényes térerősségeket írjuk fel részletesen. Az origóban levő pontszerű mágneses momentum esetén:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r},t)=\mathbf{m}(t)\delta(\mathbf{r})$$ ((48,9). egyenlet),

$$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{m}''}{c^2r^2}$$ ((48,10). egyenlet),

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c^2}\left[\frac{\mathbf{r}(\mathbf{r},\mathbf{m}'')}{r^3}-\frac{\mathbf{m}''}{r}\right]$$ ((48,11). egyenlet).

Foglalkozzunk azzal az esettel, amikor a mágneses momentum időben periodikusan változik:

$$\mathbf{m}(t)=\mathbf{m}_0e^{i\omega t}$$ ((48,12). egyenlet),

és tételezzük fel, hogy a mágneses momentum *z* tengely irányú: $\mathbf{m}_0(0, 0, m_0)$;

$$E_\varphi = -\frac{\omega^2 m_0}{c^2 r}\sin \mathrm{j}\, e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$
$$E_r = E_\mathrm{j} = 0 \qquad \text{((48,13). egyenlet)}$$

$$H_\mathrm{j} = \frac{\omega^2 m_0}{c^2 r}\sin \mathrm{j}\, e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$
$$H_r = H_\mathrm{j} = 0 \qquad \text{((48,14). egyenlet)}$$

A (48,13) és (48,14) kifejezések fizikai jelentéssel bíró valós részeire áttérve:

$$E_\varphi = -\frac{\omega^2 m_0}{c^2 r}\sin \mathrm{j}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right), \qquad E_r = E_\mathrm{j} = 0 \qquad \text{((48,15). egyenlet),}$$

$$H_\mathrm{j} = \frac{\omega^2 m_0}{c^2 r}\sin \mathrm{j}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right), \qquad H_r = H_\mathrm{j} = 0 \qquad \text{((48,16). egyenlet).}$$

A mágneses momentum elektromágneses tere is gömbhullám a hullámzónában, de a térerősségek iránya más, mint az elektromos dipólusnál. Az elektromos térerősség az **r** helyvektorral megadott *Q* ponton átmenő szélességi kör érintője a csökkenő *φ* irányában, a mágneses térerősség pedig a *Q* ponton átmenő délkör délre mutató érintője. Mivel a térerősségek nagysága $\sin \mathrm{j}$-val arányos, a *z* tengely irányában mind az **E**, mind a **H** eltűnik, és az egyenlítő síkjában $(\mathrm{j}=\pi/2)$ veszik fel a maximális értéküket.

Az egységnyi felületen az időegység alatt kisugárzott elektromágneses energiát a Poynting-vektor adja meg, amely a $\mathbf{P}\to\mathbf{M}$ helyettesítéstől eltekintve, ugyanaz, mint az elektromos dipólusnál:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \frac{c}{4\pi}(-\mathbf{H}_\mathrm{e}\times\mathbf{E}_\mathrm{e})_{\mathbf{P}\to\mathbf{M}} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}_\mathrm{e}\times\mathbf{H}_\mathrm{e})_{\mathbf{P}\to\mathbf{M}} = \mathbf{S}_\mathrm{e}(\mathbf{P}\to\mathbf{M}) \qquad \text{((48,17). egyenlet).}$$

A mágneses momentum által az időegység alatt átlagosan kisugárzott energiát (47,28)-hoz hasonlóan az

$$U_{\mathrm{ls}} = \frac{m_0^2\omega^4}{3c^3} \qquad \text{((48,18). egyenlet)}$$

képlet adja meg.

Ez a képlet alkalmazható az időben periodikus áram által átjárt köráram (tekercs) sugárzásának kiszámítására. Mivel $I = I_0\cos\omega t$,

$$m = \frac{IF}{c} = \frac{I_0 F}{c}\cos\omega t$$ ((48,19). egyenlet).

Tehát ebből:

$$m_0 = \frac{I_0 F}{c}$$ ((48,20). egyenlet).

Ennélfogva:

$$U_{ls} = \frac{m_0^2\omega^4}{3c^3} = \frac{\omega^4 F^2}{3c^5} I_0^2 = \frac{2\omega^4 F^2}{3c^5}\left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2\omega^4 F^2}{3c^5} I_{\text{eff}}^2$$ ((48,21). egyenlet).

Az áramkör sugárzási ellenállása:

$$R_s = \frac{2\omega^4 F^2}{3c^5}$$ ((48,22). egyenlet).

A (48,21)-et (47,30)-cal összevetve látható, hogy az

$$l = \frac{\omega F}{c} = \frac{2\pi\nu F}{c} = \frac{2\pi F}{\lambda}$$

hosszúságú botantenna ugyanannyi energiát sugároz ki az időegység alatt átlagosan, mint az *F* felületű köráram, ha az áramerősségek effektív értéke a két esetben megegyezik.

Elektromágneses síkhullámok homogén izotrop szigetelőben

Az előző két pontban láttuk, hogy ha az elektromos dipolmomentum vagy mágneses momentum idő szerinti második differenciálhányadosa nem zérus, akkor elektromágneses gömbhullám keletkezik, amely leszakad a hullámforrásról (dipólusról vagy mágneses momentumról), és elektromágneses energiát szállít a térben. (Általánosan megmutatható, hogy az elektromágneses dipolsugárzás akkor lép fel, ha a töltésrendszer gyorsulással mozog. Ugyanis a dipolmomentum idő szerinti második differenciálhányadosa arányos a mozgó töltés gyorsulásával.)

A következőkben az elektromágneses tér terjedésének problémáját tanulmányozzuk végtelen kiterjedésű homogén izotrop szigetelőben. Tehát ε = áll., μ = áll. és $\sigma = 0$. Feltételezzük továbbá, hogy a térben töltések nincsenek jelen. Az elektromágneses teret a Maxwell-egyenletek írják le, amelyek töltések és áramok nélküli esetben a következő alakot veszik fel:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \end{aligned}\right\}$$ ((49,1). egyenlet)

(Itt felhasználtuk a **D** = *ε***E**, **B** = *μ***H** anyagi egyenleteket, és figyelembe vettük, hogy *ε*, *μ* állandók.)

Képezzük az első egyenlet rotációját:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{E}$$ ((49,2). egyenlet).

A $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{H} - \Delta\mathbf{H}$ vektoranalitikai összefüggés alapján ez az egyenlet a következőképpen írható:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{H} - \Delta\mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{E}$$ ((49,3). egyenlet).

rot **E** kifejezését a harmadik Maxwell-egyenletből behelyettesítve, majd a div **H** = 0 egyenletet figyelembe véve, adódik:

$$\Delta\mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$ ((49,4). egyenlet).

Hasonló eljárással kapjuk az elektromos térerősségre:

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$ ((49,5). egyenlet).

Az elektromos és a mágneses térerősségvektor tehát kielégíti a hullámegyenletet. A (49,4), (49,5) hullámegyenletek azonban csak részleges következményei a (49,1) alapegyenleteknek, és nem egyenértékűek azokkal. Ezért a hullámegyenletek megoldásaitól külön meg kell követelnünk a (49,1) Maxwell-egyenletek kielégítését. Ez – mint látni fogjuk – a hullámegyenletek megoldásaira külön megszorítást jelent.

Keressük először (49,4) és (49,5) síkhullám-megoldását. Elektromágneses síkhullámon olyan megoldást értünk, amelynél az elektromos és a mágneses térerősségvektor adott időpillanatban ugyanazt az értéket veszi fel egy sík minden pontjában, és a térnek ez az állapota a sík normálisa irányában állandó sebességgel terjed tova. Ha a sík normális irányú egységvektorát **n**-nel jelöljük, akkor a sík egyenletét

nr = áll.

alakban írhatjuk. Ezért az elektromágneses síkhullám térerősségvektorai a *t* időt és az **r** helyvektort a $t \mp \frac{\mathbf{nr}}{v}$ alakban tartalmazzák:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}\left(t \mp \frac{\mathbf{nr}}{v}\right); \qquad \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}\left(t \mp \frac{\mathbf{nr}}{v}\right)$$ ((49,6). egyenlet).

v egy állandó mennyiség, amelyről kiderül, hogy a hullám terjedési sebességét jelenti. (49,6)-ról valóban szembeszökően látszik, hogy rögzített *t* esetén **E** és **H** az **nr** = áll. síkban ugyanazt az értéket veszi fel.

Jelöljük a sík egyenletében szereplő állandót *d*-vel, vagyis: **nr** = *d*. Az analitikus geometriából ismeretes, hogy *d* a síknak az origótól mért merőleges távolságát jelenti. Azt a körülményt, hogy az elektromágneses térnek egy adott állapota a sík normálisa irányában állandó sebességgel terjed, a következőképpen fejezhetjük ki. Legyen egy kiszemelt állapot t_1 időpontban a d_1 állandójú sík mentén. A későbbi t_2 időpontban ugyanez az állapot az előbbivel párhuzamos, d_2 távolságú sík mentén lesz. A térerősségek a t_2 időpontban d_2 távolságú sík mentén akkor veszik fel a t_1 időpillanathoz és d_1-hez tartozó értéküket, ha a két argumentum megegyezik egymással :

$$t_1 \mp \frac{d_1}{v} = t_2 \mp \frac{d_2}{v}$$ ((49,7). egyenlet).

Ebből átrendezéssel adódik:

$$d_1 - d_2 = \pm v(t_2 - t_1)$$ ((49,8). egyenlet).

$|d_2 - d_1|$ a két sík közötti távolságot jelenti. Ezt a szakaszt az elektromágneses tér kiszemelt állapota $t_2 - t_1$ idő alatt futotta be. Ennélfogva (49,8) alapján v az elektromágneses síkhullám terjedési sebességét jelenti. A (49,8) jobb oldalán a + jel akkor érvényes, ha az argumentumban a – jel szerepel és megfordítva. Az előbbi esetben a hullám a sík pozitív normálisának irányában, az utóbbiban azzal ellentétes irányban halad.

Most meg kell arról győződnünk, hogy (49,6) kielégíti a (49,4), (49,5) hullámegyenleteket. Nézzük pl. az elektromos térerősségre:

$$\Delta\mathbf{E} \equiv \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial z^2} = \mathbf{E}'' \frac{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}{v^2} = \mathbf{E}'' \frac{1}{v^2};$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{E}'',$$

ahol vesszővel az egész argumentum szerinti differenciálhányadost jelöltük. Ezeket (49,5)-be behelyettesítve, látjuk, hogy (49,6) akkor elégíti ki a (49,5) hullámegyenletet, ha

$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$ ((49,9). egyenlet).

Hasonlóképpen adódik **H**-ra is. Az elektromágneses síkhullám terjedési sebességét a közeg (49,9) szerint befolyásolja. Vákuumban $v = c$.

A (49,6) síkhullámok a (49,9) terjedési sebességgel tehát megoldásai a hullámegyenleteknek. Mivel alapegyenleteink a Maxwell-egyenletek, most meg kell vizsgálnunk, hogy a síkhullámok milyen feltételek mellett elégítik ki a Maxwell-egyenleteket is. Nézzük először a div **E** = 0 egyenletet. Képezzük a (49,6) alakban felírt elektromos térerősség divergenciáját:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \mp \frac{1}{v}\left(E'_x n_x + E'_y n_y + E'_z n_z\right) = \mp \frac{1}{v}\left(\mathbf{E}', \mathbf{n}\right)$$ ((49,10). egyenlet).

A jobb oldal akkor tűnik el, ha

$\left(\mathbf{E}', \mathbf{n}\right) = 0$ ((49,11). egyenlet).

Ebből a teljes argumentum szerinti integrálással adódik:

$\left(\mathbf{E}, \mathbf{n}\right) = C'$ ((49,12). egyenlet).

A jobb oldalon levő *C* integrációs állandó írható a következőképpen:

$C = (\mathbf{E}_0, \mathbf{n})$,

ahol $\mathbf{E}_0$ egy sztatikus, homogén elektromos tér erősségét jelenti. Mivel bennünket most a hullámmegoldás érdekel, ettől a homogén, sztatikus tértől eltekintünk: $\mathbf{E}_0 = 0$, és így $C = 0$. A (49,6) síkhullám tehát akkor elégíti ki a div **E** = 0 Maxwell- egyenletet, ha

$\left(\mathbf{E}, \mathbf{n}\right) = 0$ ((49,13). egyenlet).

Hasonlóképpen adódik a mágneses térerősségre is:

$\left(\mathbf{H}, \mathbf{n}\right) = 0$ ((49,14). egyenlet).

A (49,13) és (49,14) egyenletek azt fejezik ki, hogy az elektromágneses síkhullám esetén az elektromos és a mágneses térerősségvektor a terjedési irányra merőleges síkban fekszik. Az ilyen hullámokat nevezzük transzverzális hullámoknak. Az elektromágneses síkhullámok tehát transzverzálisak.

Hátra van még az első és a harmadik Maxwell-egyenlet kielégítése. Nézzük pl. az elsőt. Képezzük a (49,6) mágneses térerősség rotációját, majd az elektromos térerősség idő szerinti differenciálhányadosát.

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mp \frac{1}{v}(\mathbf{n} \times \mathbf{H}'),$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{E}'.$$

Ezeket az első Maxwell-egyenletbe helyettesítve, kapjuk:

$$\mp \frac{1}{v}(\mathbf{n} \times \mathbf{H}') = \frac{\varepsilon}{c}\mathbf{E}'.$$

Ebből az argumentum szerint integrálva és a homogén, sztatikus tértől eltekintve, adódik:

$$\pm \frac{1}{v}(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) = \frac{\varepsilon}{c}\mathbf{E}$$ ((49,15). egyenlet).

Hasonló eljárással kapjuk a harmadik Maxwell-egyenletből:

$$\mp \frac{1}{v}(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = -\frac{\mu}{c}\mathbf{H}$$ ((49,16). egyenlet).

A (49,15) és (49,16) összefüggésekből látszik, hogy az elektromos és a mágneses térerősség nemcsak az **n**-re, hanem egymásra is merőleges. Az **n** egységvektor irányában haladó síkhullámoknál az **n**, **E**, **H** vektorok úgy helyezkednek el, mint a jobbsodrású koordináta-rendszer *x*, *y*, *z* tengelyei.

A terjedési sebesség (49,9) értékét beírva, (49,15), illetve (49,16) a következőképpen írható;

$$\mp \sqrt{\mu}(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) = \sqrt{\varepsilon}\mathbf{E}$$ ((49,15′). egyenlet),

$$\mp \sqrt{\varepsilon}(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = -\sqrt{\mu}\mathbf{H}$$ ((49,16′). egyenlet).

A (49,15′), illetve (49,16′) egyenletek mindkét oldalának abszolút értékét képezve, adódik:

$$\sqrt{\varepsilon}|\mathbf{E}| = \sqrt{\mu}|\mathbf{H}|$$ ((49,17). egyenlet).

Ebből az összefüggésből következik, hogy vákuumban ($\varepsilon = \mu = 1$) haladó elektromágneses síkhullámban az elektromos és a mágneses térerősség abszolút értéke megegyezik egymással.

Az elektromágneses síkhullám térenergia-sűrűsége:

$$u = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB}) = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon\mathbf{E}^2 + \mu\mathbf{H}^2\right).$$

A (49,17) összefüggés alapján látszik, hogy az elektromos és a mágneses energiasűrűség megegyezik egymással, ezért a síkhullám energiasűrűsége az elektromos energiasűrűség kétszeresével egyenlő:

$$u = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon\mathbf{E}^2 + \mu\mathbf{H}^2\right) = \frac{1}{4\pi}\varepsilon\mathbf{E}^2$$ ((49,18). egyenlet).

Az elektromágneses síkhullám energiát szállít magával a térben. Az energiaáramlást az energia-áramsűrűség, az ún. Poynting-vektor jellemzi. Számítsuk ki a Poynting-vektort.

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \frac{c}{4\pi}\mathbf{n}|\mathbf{E}\times\mathbf{H}| = \frac{c}{4\pi}\mathbf{n}|\mathbf{E}||\mathbf{H}| =$$
$$= \frac{c}{4\pi}\mathbf{n}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{E}^2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\mathbf{n}\frac{1}{4\pi}\varepsilon\mathbf{E}^2$$ ((49,19). egyenlet)

A (49,9) és a (49,18) összefüggés alapján ez a következőképpen írható:

$\mathbf{S} = \mathbf{n}vu$ ((49,19′). egyenlet).

A $\mathbf{v} = \mathbf{n}v$ jelöléssel:

$\mathbf{S} = u\mathbf{v}$ ((49,19″). egyenlet).

(49,19″)-ből következik, hogy homogén izotrop szigetelőben a síkhullám fázissebessége[2] egyúttal az energia terjedési sebessége is. Az energia-áramsűrűségre ugyanolyan összefüggést kaptunk, mint a kontinuumok mechanikájában az áramló anyag áramsűrűségére. Nevezetesen: energia-áramsűrűség = energiasűrűség szorozva az energia terjedési sebességével.

Térjünk vissza a (49,6) síkhullám-megoldásokhoz. Mint fentebb láttuk, az $\mathbf{E}\left(t - \frac{\mathbf{nr}}{v}\right)$ az **n** normális irányába, az $\mathbf{E}\left(t + \frac{\mathbf{nr}}{v}\right)$ pedig a vele ellentétes irányba haladó síkhullámot ír le. Az alapegyenletek általános megoldása két ilyen partikuláris megoldás összege:

[2] Fázissebességen a hullám fázisának terjedési sebességét értjük. A (49,18) egyenlettel értelmezett sebesség tulajdonképpen a fázissebesség. Az egyszerűbb szóhasználat miatt gyakran egyszerűen a hullám terjedési sebességének nevezzük. Megjegyezzük, hogy abban az esetben, amikor a fázissebesség függ a hullámhossztól, tehát diszperzió lép fel, az energiasebesség különbözik a fázissebességtől.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_1\left(t-\frac{\mathbf{nr}}{v}\right)+\mathbf{E}_2\left(t+\frac{\mathbf{nr}}{v}\right)$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mathbf{H}_1\left(t-\frac{\mathbf{nr}}{v}\right)+\mathbf{H}_2\left(t+\frac{\mathbf{nr}}{v}\right)$$ ((49,20). egyenlet)

A síkhullámoknál a térerősségek tehát a $t\mp\frac{\mathbf{nr}}{v}$ alakban tartalmazzák az időt és a helykoordinátákat. A függvény konkrét alakja a hullámforrás mozgásállapotától függ. A gyakorlatban előforduló legfontosabb esetekben a hullámforrás időben periodikus mozgást végez. Ennek megfelelően a térerősségek is periodikus függvényei az időnek. Legegyszerűbb a monokromatikus síkhullám. Ekkor a térerősségek egyszerűen cosinus- vagy sinusfüggvénnyel írhatók le:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_{01}\cos\omega\left(t-\frac{\mathbf{nr}}{v}\right)+\mathbf{E}_{02}\cos\omega\left(t+\frac{\mathbf{nr}}{v}\right)$$ ((49,21a). egyenlet).

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mathbf{H}_{01}\cos\omega\left(t-\frac{\mathbf{nr}}{v}\right)+\mathbf{H}_{02}\cos\omega\left(t+\frac{\mathbf{nr}}{v}\right)$$ ((49,21b). egyenlet).

A továbbiakban foglalkozzunk az **n** egységvektor irányába haladó monokromatikus síkhullámmal, tehát

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0\cos\omega\left(t-\frac{\mathbf{nr}}{v}\right)$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mathbf{H}_0\cos\omega\left(t-\frac{\mathbf{nr}}{v}\right)$$ ((49,22). egyenlet)

Az $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ amplitúdóvektorok függetlenek az időtől és a helytől.

A monokromatikus síkhullámoknál beszélünk rezgésidőről és hullámhosszról. Ezeket a következőképpen értelmezzük. *Rezgésidőn* egy rezgés T időtartamát értjük. Ezalatt a hullám $\varphi=\omega t-\frac{\omega}{v}\mathbf{nr}$ fázisa egy rögzített helyen 2π-vel változik meg: $\varphi(t+T)=\varphi(t)+2\pi$. A T rezgésidő egyszerű kapcsolatban van az ω körfrekvenciával, illetve a ν frekvenciával $\omega=2\pi\nu$.

$$\omega(t+T)-\frac{\omega}{v}\mathbf{nr}=\omega t-\frac{\omega}{v}\mathbf{nr}+2\pi.$$

Ebből következik, hogy

$\omega T = 2\pi$,

vagyis

$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad \nu = \frac{1}{T}$ ((49,23). egyenlet).

A frekvencia vagy rezgésszám tehát az időegységre eső rezgések számát jelenti. *Hullámhosszon* azt a λ hosszúságot értjük, amely mentén rögzített idő alatt a φ fázis 2π-vel változik meg. Nevezetesen:

$$\omega t - \frac{\omega}{v}(\mathbf{nr} + \lambda) = \omega t - \frac{\omega}{v}\mathbf{nr} - 2\pi .$$

Ebből következik:

$\frac{\omega}{v}\lambda = 2\pi$ ((49,24). egyenlet),

amely (49,23) felhasználásával így is írható:

$\frac{\nu}{v}\lambda = 1; \qquad \lambda = \frac{v}{\nu} = vT$ ((49,25). egyenlet).

A hullámhossz bevezetésével a φ fázist (49,24) alapján a következő szokásos alakba írjuk:

$$\varphi = \omega t - \omega\frac{\mathbf{nr}}{v} = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{nr} .$$

A

$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{n}$ ((49,26). egyenlet)

vektort *hullámszámvektornak* nevezzük. Ennek $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ abszolút értéke megadja a hosszegységre eső hullámok számának 2π-szeresét. A fázis ezek után a következő alakot veszi fel:

$\varphi = \omega t - \mathbf{kr}$ ((49,27). egyenlet).

A monokromatikus elektromágneses síkhullám térerősségeit (49,27) felhasználásával a szokásos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0\cos(\omega t-\mathbf{kr})$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mathbf{H}_0\cos(\omega t-\mathbf{kr}) \quad \text{((49,28). egyenlet)}$$

alakba írhatjuk.

A valóságban általában nem tiszta monokromatikus hullámok fordulnak elő. A hullámforrásból véges hosszúságú hullámvonulatok emittálódnak. Azonban az ilyen ún. *hullámcsomagok* is mindig felbonthatók különböző frekvenciájú monokromatikus hullámok szuperpozíciójára Fourier-sor vagy Fourier-integrál alakjában. A monokromatikus hullámoknak a fizikában azért van igen fontos szerepük, mert végső soron az összetettebb gyakorlati problémákban is ilyenek szuperpozíciójával van dolgunk.

A (49,1) Maxwell-egyenleteknek speciális megoldásai a síkhullámok. Ezek mellett fontos szerepe van az ún. gömbhullám-megoldásnak is. Ilyenekkel találkoztunk az előző két pontban is. A gömbhullám hullámfelületei a hullámforrást koncentrikusan körülvevő gömbfelületek; az elektromágneses tér állapota valamely rögzített időpillanatban egy gömbfelület mentén ugyanaz, és ez az állapot a sugár irányában terjed véges sebességgel tova. A részletesebb vizsgálat nélkül itt csupán felírjuk az elektromágneses gömbhullám elektromos és mágneses térerősségének kifejezését monokromatikus hullám esetére:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{\mathbf{E}_0}{r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\frac{\mathbf{H}_0}{r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{v}\right) \quad \text{((49,29). egyenlet)}$$

ahol $r=|\mathbf{r}|$. A hullám amplitúdója a távolsággal fordított arányban csökken.

A cosinus- vagy sinusfüggvény szerint változó periodikus elektromágneses hullámokra gyakori a komplex írásmód. A (49,28) síkhullámok így írhatók:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0 e^{i(\omega t-\mathbf{kr})}$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mathbf{H}_0 e^{i(\omega t-\mathbf{kr})} \quad \text{((49,30). egyenlet)}$$

Fizikai jelentése természetesen ezek valós részének van, mert a térerősségek valósak.

Az elektromágneses hullámok polarizációja

Tekintsünk homogén izotrop szigetelőben haladó elektromágnesess síkhullámot, amelynek térerősségeit a (49,30) komplex függvényekkel írjuk le. Mivel az **E** és a **H** egyforma alakú, foglalkozzunk az elektromos térerősséggel. Ebben az írásmódban általában az $\mathbf{E}_0$ amplitúdó is komplex:

$E_{0x} = a_1 e^{i\delta_1}, \quad E_{0y} = a_2 e^{i\delta_2}, \quad E_{0z} = a_3 e^{i\delta_3}$ ((50,1). egyenlet).

Az a_1, a_2, a_3 amplitúdók és a δ_1, δ_2, δ_3 kezdeti fázisok már valósak. Az elektromos térerősség komponensei tehát:

$$E_x = a_1 e^{i(\omega t - \mathbf{kr} + \delta_1)}$$
$$E_y = a_2 e^{i(\omega t - \mathbf{kr} + \delta_2)}$$
$$E_z = a_3 e^{i(\omega t - \mathbf{kr} + \delta_3)}$$ ((50,2). egyenlet)

Az E_x, E_y, E_z térerősség-komponensek valós részét jelöljük rendre ξ, η, ζ-val.

$\xi = \mathrm{Re}(E_x), \quad \eta = \mathrm{Re}(E_y), \quad \zeta = \mathrm{Re}(E_z)$ ((50,3). egyenlet).

A ξ, η, ζ koordináták tehát a Re(**E**) vektor végpontjának koordinátái:

$$\xi = a_1 \cos(\varphi + \delta_1)$$
$$\eta = a_2 \cos(\varphi + \delta_2)$$
$$\zeta = a_3 \cos(\varphi + \delta_3)$$ ((50,4). egyenlet)

ahol

$\varphi = \omega t - \mathbf{kr}$.

Az (50,4) egyenletrendszer a Re(**E**) vektor végpontja által leírt görbe paraméteres egyenletrendszere a φ paraméterrel. Alakítsuk át ezt az egyenletrendszert a következőképpen :

$\frac{\xi}{a_1} = \cos\varphi \cos\delta_1 - \sin\varphi \sin\delta_1$ ((50,4a). egyenlet),

$\frac{\eta}{a_2} = \cos\varphi \cos\delta_2 - \sin\varphi \sin\delta_2$ ((50,4b). egyenlet),

$\frac{\zeta}{a_3} = \cos\varphi \cos\delta_3 - \sin\varphi \sin\delta_3$ ((50,4c). egyenlet).

Szorozzuk meg az (50,4a) egyenletet sin ($\delta_2 - \delta_3$)-mal, (50,4b)-t sin ($\delta_3 - \delta_1$)-gyel, (50,4c)-t sin ($\delta_1 - \delta_2$)-vel, majd adjuk össze az így kapott három egyenletet. Eredményül a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{\sin(\delta_2-\delta_3)}{a_1}\xi+\frac{\sin(\delta_3-\delta_1)}{a_2}\eta+\frac{\sin(\delta_1-\delta_2)}{a_3}\zeta=0$$ ((50,5). egyenlet).

A geometriából ismeretes, hogy (50,5) egy síknak az egyenlete. A Re(**E**) vektor – tehát az elektromos térerősség – végpontja síkgörbét ír le. Ez a síkgörbe különböző alakú lehet. A görbe alakja határozza meg a hullám polarizációját.

Válasszunk olyan koordináta-rendszert, amelynek (x, y) síkja egybeesik a fenti görbe által meghatározott síkkal. Az így választott (x, y, z) koordináta-rendszerben az elektromos térerősségvektor végpontja az (x, y) síkban mozog. Az általa leírt görbe paraméteres egyenletrendszere ebben a koordináta-rendszerben:[3]

$$\xi = a_1\cos(\varphi+\delta_1)$$
$$\eta = a_2\cos(\varphi+\delta_2)$$
$$\zeta = 0$$ ((50,6). egyenlet)

Határozzuk meg az (50,6) paraméteres egyenletrendszerrel leírt görbe alakját. E célból kiküszöböljük a φ paramétert. (50,6) első egyenletéből kapjuk:

$$\varphi = \arccos\frac{\xi}{a_1}-\delta_1$$.

Ezt behelyettesítjük (50,6) második egyenletébe:

$$\frac{\eta}{a_2}=\cos\left[\arccos\frac{\xi}{a_1}+(\delta_2-\delta_1)\right]=\frac{\xi}{a_1}\cos(\delta_2-\delta_1)-\sin\left(\arccos\frac{\xi}{a_1}\right)\sin(\delta_2-\delta_1)=$$
$$=\frac{\xi}{a_1}\cos(\delta_2-\delta_1)-\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a_1^2}}\sin(\delta_2-\delta_1)$$ ((50,7). egyenlet)

Vezessük be a

$$\delta = \delta_2 - \delta_1$$

jelölést, és rendezzük át (50,7)-et a következőképpen:

[3] Megjegyezzük, hogy itt ugyanazokat a jelöléseket használtuk, mint (50,4)-ben, de a megfelelő állandók nem egyeznek meg az ottanival. A későbbiekben ez az azonos jelölés nem okoz semmi zavart.

$$\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a_1^2}}\sin\delta=\frac{\xi}{a_1}\cos\delta-\frac{\eta}{a_2}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve és átrendezve, adódik:

$$\frac{\xi^2}{a_1^2}+\frac{\eta^2}{a_2^2}-2\frac{\cos\delta}{a_1a_2}\xi\eta=\sin^2\delta$$ ((50,8). egyenlet).

Mivel $\xi\le a_1$, $\eta\le a_2$, az (50,8) által leírt másodrendű görbe nem lehet sem hiperbola, sem parabola, mivel ezeknek van végtelen távoli pontjuk. Az elektromos térerősségvektor végpontja általában ellipszist ír le, amely $\delta=\delta_2-\delta_1$ fáziskülönbségtől függően speciális esetekben körré vagy egyenessé fajulhat.

Az (50,2) elektromágneses síkhullám tehát általában *elliptikusan polarizált*. Az (50,8) ellipszisegyenlet nem kanonikus alakú, ezért az ellipszis tengelyei általában nem esnek egybe az *x*, *y* koordinátatengelyekkel. Az ellipszis féltengelyeinek nagyságát, valamint azok irányát elemi úton kifejezhetnénk az a_1, a_2, valamint a δ állandókkal. A féltengelyek nagyságát a $\varrho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ mennyiség két szélső értéke adja meg.

Ha a δ fáziskülönbség $\delta=\pi/2$, vagy $\delta=(2m+1)\frac{\pi}{2}$, ahol m = ±1, ±2, ... egész szám, akkor sin δ = ±1, cos δ = 0, és az (50,8) egyenlet a

$$\frac{\xi^2}{a_1^2}+\frac{\eta^2}{a_2^2}=1$$ ((50,9). egyenlet)

alakot veszi fel. Ebben az esetben a_1 és a_2 megegyeznek az ellipszis féltengelyeivel, és azok iránya a koordinátatengelyekkel egyirányú.

Az $a_1 = a_2 = a$, $\delta=\pi/2$, vagy $\delta=(2m+1)\frac{\pi}{2}$ – ahol m egész szám – speciális esetben az ellipszis körré fajul, amelynek egyenlete:

$$\xi^2+\eta^2=a^2$$ ((50,10). egyenlet).

Az ilyen hullámot *cirkulárisan polarizáltnak* nevezzük.

Az elektromos térerősségvektor végpontja a φ fázis növekedésekor végigfut a fenti síkgörbén. A térerősségvektor forgásának iránya függ a δ fáziskülönbségtől. Ha a forgás – a hullámterjedés irányából szemlélve – jobbra történik, akkor *jobbra,* ha balra, akkor *balra poláros* hullámról beszélünk. Fogalmazzuk meg ezt a szabályt kvantitatíven. Jelöljük az **E** vektor valós részét $\tilde{\mathbf{E}}$-vel: $\tilde{\mathbf{E}}=\mathrm{Re}(\mathbf{E})$. Az $\tilde{\mathbf{E}}'=\frac{d\tilde{\mathbf{E}}}{d\varphi}$ vektor az $\tilde{\mathbf{E}}$ vektor

változásának a sebességét jelenti. Az előző pontban láttuk, hogy $\tilde{\mathbf{E}}$ az **n**-re merőleges síkban van. Ugyanebben a síkban fekszik az **E'** vektor is. Ennélfogva a fentiek alapján

$\mathbf{n}\left(\tilde{\mathbf{E}}\times\tilde{\mathbf{E}}'\right)>0$, ha balra

$\mathbf{n}\left(\tilde{\mathbf{E}}\times\tilde{\mathbf{E}}'\right)<0$, ha jobbra

poláros a hullám.

Az itt használt koordináta-rendszerben az **n** egységvektor a *z* tengely irányába mutat, **n**(0, 0, 1) ezért

$$\mathbf{n}\left(\tilde{\mathbf{E}}\times\tilde{\mathbf{E}}'\right)=\xi\eta'-\eta\xi'=-a_1a_2\left[\cos\left(\varphi+\delta_1\right)\sin\left(\varphi+\delta_2\right)-\cos\left(\varphi+\delta_2\right)\sin\left(\varphi+\delta_1\right)\right]=$$
$$=-a_1a_2\sin\left(\delta_2-\delta_1\right)=-a_1a_2\sin\delta$$

((50,11). egyenlet).

(50,11)-ből következik, hogy balra poláros hullámnál sin $\delta < 0$, jobbra polárosnál viszont sin $\delta > 0$. A $\delta=2\pi m+\delta'$ (ahol $m=0,\pm1,\pm2,\cdots$) jelöléssel ezt így is megfogalmazhatjuk:

$0 < \delta' < \pi$ esetén jobbra,

$\pi < \delta' < 2\pi$ esetén balra

poláros a hullám.

A jobbra cirkulárisan polározott hullámra $\delta'=\pi/2$, a balra cirkulárisan polárosra $\delta'=3/2\pi$.

Ha a δ fáziskülönbség zérus vagy π-nek egész számú többszöröse ($\delta = 0$, vagy $\delta = m\pi$, ahol $m=0,\pm1,\pm2,\cdots$), akkor $\sin\delta=0$, és az (50,8) egyenlet egyenes egyenletévé fajul:

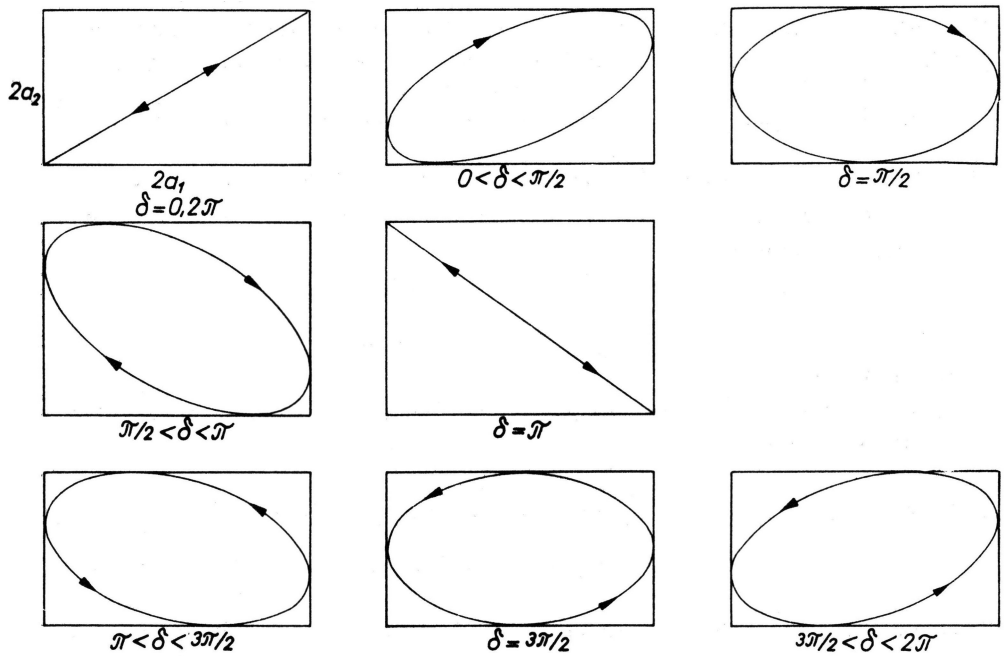
$$\frac{\xi}{a_1}\pm\frac{\eta}{a_2}=0$$

((50,12). egyenlet).

A pozitív előjel páratlan *m*-re, a negatív előjel páros *m*-re érvényes. Ebben az esetben a hullámot *lineárisan polarizáltnak* nevezzük. Ekkor az elektromos térerősség végpontja egy rögzített egyenes mentén mozog.

A levezetéseket itt az elektromos térerősségre végeztük el. Természetesen ugyanezek igazak a mágneses térerősségre is. Vagyis a mágneses térerősség végpontja is ellipszisen mozog általában. Az előbbi két speciális esetben körön, illetve egy rögzített egyenesen. A korábbi megállapodásnak megfelelően az **n** és a $\tilde{\mathbf{H}}$ vektor által meghatározott síkot nevezzük a *polarizáció síkjának*, a $\tilde{\mathbf{H}}$ irányát pedig a *polarizáció irányának*.

57. ábra -



A polarizáció fajtáját meghatározó feltételeket a következőképpen is megfogalmazhatjuk. Nevezetesen, kifejezhetjük a komplex elektromos térerősség *y* és *x* komponensének a hányadosával:

$$p=\frac{E_y}{E_x}=\frac{E_{0y}}{E_{0x}}=\frac{a_2}{a_1}e^{i(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}=\frac{a_2}{a_1}e^{i\delta}=\frac{a_2}{a_1}(\cos\delta+i\sin\delta)=\alpha\pm i\beta$$ ((50,13). egyenlet).

Elliptikusan poláros hullám esetén *p* általában komplex szám. A pozitív előjel a $\sin\delta>0$ esetnek, tehát a jobbra elliptikusan poláros hullámnak, a negatív előjel ($\sin\delta<0$) a balra elliptikusan polárosnak felel meg. Elliptikusan poláros a hullám akkor is, ha *p* tiszta képzetes, de egynél nagyobb abszolút értékű. Ebben az esetben az ellipszis tengelyei a koordinátatengelyek irányával megegyeznek.

Cirkulárisan poláros hullámra: $a_1 = a_2$, $\cos\delta = 0$, $\sin\delta = \pm 1$, vagyis

$p=\pm i$ ((50,14). egyenlet).

$p = +i$ a jobbra, $p = -i$ a balra cirkulárisan poláros hullám esetén.

A lineárisan polarizált hullámra sin $\delta = 0$, tehát p valós szám.

Elektromágneses hullámok homogén vezető közegben

E pontban megvizsgáljuk az elektromágneses hullámok terjedését végtelen kiterjedésű homogén vezető közegben. Feltételezzük tehát, hogy a közeg anyagi együtthatói állandók: ε = áll., μ = áll., σ = áll. Mivel most $\sigma \neq 0$, elektromos tér jelenlétekor a $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ Ohm-törvény értelmében áram folyik a vezetőben. Ez, mint látni fogjuk, módosítani fogja a hullámterjedést a szigetelőknél megismert esethez képest.

Induljunk ki itt is a Maxwell-egyenletrendszerből:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma}{c}\mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \end{aligned}\right\}$$ ((51,1). egyenlet)

Feltételezzük, hogy az elektromos és a mágneses térerősség periodikus függvénye az időnek:

$$\mathbf{E} \sim e^{i\omega t}, \qquad \mathbf{H} \sim e^{i\omega t}$$ ((51,2). egyenlet).

Az (51,2) időfüggés miatt a térerősségek idő szerinti differenciálhányadosai:

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = i\omega\mathbf{E}, \qquad \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = i\omega\mathbf{H}$$ ((51,3). egyenlet).

Mivel a σ vezetőképesség az első Maxwell-egyenletben lép fel explicite, foglalkozzunk először ezzel az egyenlettel. Az elektromos térerősség idő szerinti differenciálhányadosának (51,3) kifejezését helyettesítsük be ebbe az egyenletbe.

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \left(\frac{4\pi\sigma}{c} + i\frac{\omega\varepsilon}{c}\right)\mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\varepsilon'\mathbf{E}$$ ((51,4). egyenlet),

ahol

$$\varepsilon' = \varepsilon\left(1 - i\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$ ((51,5). egyenlet),

vagy a $\tau = \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}$ jelöléssel:

$\varepsilon' = \varepsilon(1 - i\tau)$ ((51,5′). egyenlet).

Képezzük az (51,4) egyenlet rotációját:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{i\omega}{c}\varepsilon' \operatorname{rot}\mathbf{E} = -i\frac{\omega\varepsilon'\mu}{c^2}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\omega^2\varepsilon'\mu}{c^2}\mathbf{H}.$$

Ez az egyenlet a

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{H} - \Delta\mathbf{H}$$

vektoranalitikai összefüggés, valamint a negyedik Maxwell-egyenlet alapján a következőképpen írható:

$$\Delta\mathbf{H} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'\mu\mathbf{H} = 0$$ ((51,6). egyenlet).

Hasonló eljárással adódik az elektromos térerősségre:

$$\Delta\mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'\mu\mathbf{E} = 0$$ ((51,7). egyenlet).

Az (51,6), (51,7) hullámegyenletek síkhullám-megoldása:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\omega\sqrt{\varepsilon'\mu}}{c}\mathbf{nr}\right)}$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\omega\sqrt{\varepsilon'\mu}}{c}\mathbf{nr}\right)}$$ ((51,8). egyenlet)

Az $\omega\frac{\sqrt{\varepsilon'\mu}}{c}\mathbf{n}$ vektort jelöljük **m**-mel:

$$\mathbf{m} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon'\mu}}{c}\mathbf{n}$$ ((51,9). egyenlet).

A (49,26) hullámszámvektor helyébe most a komplex **m** mennyiség lép, amelyet *komplex hullámszámvektornak* nevezünk. Ennek négyzete:

$$m^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'\mu = \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}(1 - i\tau)$$ ((51,10). egyenlet).

Az *m* komplex számot írjuk a következő alakba:

$$m = k - il$$ ((51,11). egyenlet).

Ezzel az (51,10) egyenlőség a következőképpen írható:

$$k^2 - 2ikl - l^2 = \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}(1 - i\tau)$$.

A két oldal valós részét a valóssal, képzetes részét a képzetessel egyenlővé téve, kapjuk:

$$k^2 - l^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu$$ ((51,12). egyenlet),

$$2kl = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu\tau = \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}$$ ((51,13). egyenlet).

Ebből a két algebrai egyenletből *k* és *l* kiszámítható. Eredményül adódik:

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \tau^2}\right)}$$ ((51,14). egyenlet),

$$l = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \tau^2} - 1\right)} = \frac{\omega}{c}\varkappa$$ ((51,15). egyenlet).

A *k***n** = **k** vektort *valós hullámszámvektornak*, *ϰ*-t pedig *extinkciós együtthatónak* nevezzük.

Ezek után felírhatjuk az (51,8) megoldásokat a következő alakban:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{\omega}{c}\varkappa\mathbf{n}\mathbf{r}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 e^{-\frac{\omega}{c}\varkappa\mathbf{n}\mathbf{r}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$$ ((51,16). egyenlet)

Mint látjuk, a vezetőkben haladó síkhullámok amplitúdója exponenciálisan csökken az **nr** = *d* távolság növekedésével. Ennek az a magyarázata, hogy az elektromos tér jelenléte a vezetőben áramot hoz létre; az áram Joule-hőt termel, és ezáltal fogyasztja az elektromágneses térenergiát, ami a térerősségek csökkenését eredményezi. Az amplitúdó csillapodása arányos a hullám frekvenciájával és az extinkciós együtthatóval. Következésképpen, a kisebb frekvenciájú hullámok kevésbé csillapodnak, tehát mélyebbre hatolnak a vezetőbe. Az ω/c mennyiség fordítva arányos a hullám λ_0 vákuumbeli hullámhosszával:

$$\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda_0}.$$

Ezért az $e^{-\frac{4\pi\varkappa}{c}\mathbf{nr}}$ csillapodási tényező így is írható: $e^{-\frac{2\pi\varkappa}{\lambda_0}\mathbf{nr}}$. Ebből következik, hogy a $\lambda_0/\varkappa$ út megtétele után a hullám amplitúdója eredeti értékének $e^{2\pi}$-ed részére csökken. A $\lambda_0/\varkappa$ távolságot *behatolási mélységnek* nevezzük.

Az (51,8) megoldásokat a div **E** = 0, illetve a div **H** = 0 egyenletbe behelyettesítve, látható, hogy a hullámok vezetőben is transzverzálisak, vagyis

$(\mathbf{E},\mathbf{n})=0, \quad (\mathbf{H},\mathbf{n})=0$ ((51,17). egyenlet).

Az első és a harmadik Maxwell-egyenletbe való behelyettesítés pedig az alábbi egyenleteket adja:

$-\sqrt{\mu}(\mathbf{n}\times\mathbf{H})=\sqrt{\varepsilon'}\mathbf{E}$ ((51,18a). egyenlet),

$\sqrt{\varepsilon'}(\mathbf{n}\times\mathbf{E})=\sqrt{\mu}\mathbf{H}$ ((51,18b). egyenlet).

Ezekből az összefüggésekből látszik, hogy **E** és **H** nemcsak **n**-re, hanem egymásra is merőlegesek. Az **n**, **E**, **H** vektorok úgy helyezkednek el, mint a jobbsodrású koordináta-rendszer *x*, *y*, *z* tengelyei.

Mivel $\sqrt{\varepsilon'}$ komplex, az elektromos és a mágneses térerősség fázisa különbözik egymástól. Határozzuk meg a fáziskülönbséget. (51,18b)-ből adódik:

$$\mathbf{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}}(\mathbf{n}\times\mathbf{E})$$ ((51,18c). egyenlet).

A $\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}}$ tényező (51,9) és (51,11) alapján a következő alakba írható.

$$\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}} = \frac{c}{\omega\mu}(k - il) = \frac{c}{\omega\mu}\sqrt{k^2 + l^2}\,e^{-i\gamma},$$

ahol

$\gamma = \operatorname{arc\,tg}\frac{l}{k}$ ((51,19). egyenlet).

Ezeket (51,18c)-be beírva, kapjuk:

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\omega\mu}\sqrt{k^2 + l^2}\,(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0)\,e^{-\frac{\omega}{c}\varkappa \mathbf{n}\mathbf{r}}\,e^{i(\omega t - k\mathbf{n}\mathbf{r} - \gamma)}$$ ((51,20). egyenlet).

Az **E** és a **H** fázisa közötti különbséget az l/k hányados arcus tangense adja meg.

Nézzük most eredményeinket a jó vezetők határesetére. Ekkor

$$\tau = \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$$ ((51,21). egyenlet),

ezért (51,14)-ben és (51,15)-ben τ mellett az 1 elhanyagolható. Így adódik, hogy

$$k = l = \frac{1}{c}\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}$$ ((51,22). egyenlet).

Ebben a határesetben a γ fáziskülönbség (51,19) alapján 45°, azaz $\gamma = \pi/4$.

Az itt alkalmazott közelítés csak bizonyos frekvenciahatárig érvényes. Pl. $\lambda = 10^{-4}$ cm hullámhosszra (ultravörös tartomány) jól alkalmazható. Ugyanis ilyen hullámhosszon vörösrézre $\left(\sigma = 5{,}14 \cdot 10^{17}\ \mathrm{s}^{-1}\right)$ $\frac{2\sigma}{\nu} \approx 3400$, és mivel a réz dielektromos állandója egy nagyságrendű $\tau \approx 3400$, ami valóban sokkal nagyobb 1-nél. Hasonló egyszerű becsléssel meggyőződhetünk róla, hogy ultraibolya vagy röntgenhullámok tartományában már nem érvényes az (51,21) feltevés.

Az itteni fejtegetéseinkben a közeg σ vezetőképességét állandónak, a frekvenciától függetlennek tekintettük. Bizonyos hullámhosszig ez a feltevés helytálló, de kisebb hullámhosszakra (vagy nagyobb frekvenciákra) már nem. Ugyanis ekkor σ már függ a hullám frekvenciájától. Hogy ez valóban így van, a következő példa mutatja. Az itt közölt elmélet szerint minden szigetelőnek átlátszónak kellene lennie, mert $\sigma = 0$ esetén $\varkappa = 0$, a

vezetőknek pedig átlátszatlannak, hisz $\varkappa \neq 0$. Ezzel szemben a jól szigetelő ebonit átlátszatlan, a jól vezető konyhasóoldat átlátszó. A látható fény frekvenciatartományában tehát σ nem tekinthető függetlennek a frekvenciától.

Határozzuk meg a vezetőben haladó elektromágneses hullám térenergiájának sűrűségét. Ez – mint tudjuk – az elektromos és a mágneses energiasűrűség összege:

$$u = u_e + u_m = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[\mathrm{Re}(\mathbf{E})\right]^2 + \frac{\mu}{8\pi}\left[\mathrm{Re}(\mathbf{H})\right]^2$$ ((51,23). egyenlet).

Mivel a térerősségek időben periodikusan változnak, u értéke is pillanatról pillanatra változik a tér bármely helyén. Számítsuk ki ezért az időbeli középértéket.

$$\bar{u} = \bar{u}_e + \bar{u}_m = \frac{\varepsilon}{8\pi}\overline{\left[\mathrm{Re}(\mathbf{E})\right]^2} + \frac{\mu}{8\pi}\overline{\left[\mathrm{Re}(\mathbf{H})\right]^2}$$ ((51,24). egyenlet).

Mivel a két tag teljesen azonos típusú, foglalkozzunk egyelőre csak az elsővel.

$$\mathrm{Re}(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*\right),$$

$$\left[\mathrm{Re}(\mathbf{E})\right]^2 = \frac{1}{4}\left[(\mathbf{E},\mathbf{E}) + \left(\mathbf{E}^*,\mathbf{E}^*\right) + 2\left(\mathbf{E},\mathbf{E}^*\right)\right].$$

$\mathbf{E} - e^{i\omega t}$, $\mathbf{E}^* - e^{-i\omega t}$, ezért a jobb oldal első tagja az $e^{2i\omega t}$, a második tagja az $e^{-2i\omega t}$ időtől függő tényezőt tartalmazza.[4] Ezek időbeli középértéke zérus. A harmadik tag időtől független, ezért

$$\overline{\left[\mathrm{Re}(\mathbf{E})\right]^2} = \frac{1}{2}|\mathbf{E}|^2$$ ((51,25). egyenlet).

Ennélfogva

$$\bar{u} = \frac{1}{16\pi}\left(\varepsilon|\mathbf{E}|^2 + \mu|\mathbf{H}|^2\right)$$ ((51,24′). egyenlet).

Számítsuk ki a mágneses és az elektromos energiasűrűség középértékének az arányát.

[4] A ~ jel itt arányosságot jelent.

$$\frac{\overline{u}_m}{\overline{u}_e} = \frac{\mu |\mathbf{H}|^2}{\varepsilon |\mathbf{E}|^2} .$$

Az (51,18c) és az (51,5′) összefüggés felhasználásával ez a következőképpen írható:

$$\frac{\overline{u}_m}{\overline{u}_e} = \frac{\mu |\mathbf{H}|^2}{\varepsilon |\mathbf{E}|^2} = \frac{|\varepsilon'|}{\varepsilon} = \sqrt{1+\tau^2}$$ ((51,26). egyenlet).

Szigetelőkben $\tau = 0$, ezért $u_m = u_e$ a (49,18) összefüggéssel megegyezésben. Vezetőkben $\tau \neq 0$, és ezért a mágneses energiasűrűség mindig nagyobb az elektromosnál. Jó vezetők esetén [az (51,21) közelítésben]

$$\frac{\overline{u}_m}{\overline{u}_e} = \tau ,$$

amely a $\lambda = 10^{-4}$ cm hullámhosszra vörösrézben ≈ 3400, mint előbb láttuk. Nagyobb hullámhosszakra ez a hányados még nagyobb. Az elektromágneses térenergia tehát gyakorlatilag mágneses természetű.

Elektromágneses síkhullámok törése és visszaverődése két különböző szigetelő határfelületén

Gondoljunk el két különböző homogén, izotrop szigetelőt, amelyeket sík felület választ el egymástól. Az egyik dielektromos állandója, illetve mágneses permeabilitása legyen ε_1, illetve μ_1, a másiké ε_2, μ_2. Tételezzük fel, hogy az első közegben elektromágneses síkhullám terjed a $\mathbf{k}_0$ hullámszámvektor által meghatározott irányban. A két közeg határfelületén a hullám megtörve folytatja útját a második közegben a $\mathbf{k}_2$ hullámszámvektor irányában. Megvizsgáljuk, hogy milyen törvény szerint viselkedik az elektromágneses síkhullám az elválasztó sík mentén. A beeső síkhullám térerősségeit

$$\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0^{(0)} e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})}$$
$$\mathbf{H}^{(0)}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}_0^{(0)} e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})}$$ ((52,1). egyenlet)

alakban, a második közegbeli megoldásokat pedig

$$\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0^{(2)} e^{i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})}$$
$$\mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}_0^{(2)} e^{i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})}$$ ((52,2). egyenlet)

alakban vesszük fel. Az (52,1) és (52,2) megoldások között a térerősségekre vonatkozó határfeltételek teremtenek kapcsolatot. Ezek szerint az elektromos és mágneses térerősségek tangenciális komponense a határon megegyezik:

$$E_t\left(1\,\text{közegben}\right) = E_t\left(2\,\text{közegben}\right) \quad \text{a határon}$$
$$H_t\left(1\,\text{közegben}\right) = H_t\left(2\,\text{közegben}\right) \quad \text{a határon} \qquad \text{((52,3). egyenlet)}$$

Ismertek a beeső hullám térerősségei, és a határfeltételek alapján szeretnénk meghatározni a második közegbeli (52,2) megoldások jellemző adatait. Ez hat ismeretlen mennyiséget jelent: az $\mathbf{E}^{(2)}$ és a $\mathbf{H}^{(2)}$ térerősség hat komponensét. Ez a hat komponens azonban nem független egymástól, hiszen a Maxwell-egyenletek szerint fennáll közöttük a következő négy feltételi egyenlet:

$$\left(\mathbf{k}_2, \mathbf{E}^{(2)}\right) = 0 \qquad \text{((52,4). egyenlet),}$$

$$\mathbf{H}^{(2)} = \frac{c}{\omega_2 \mu_2}\left(\mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}^{(2)}\right) \qquad \text{((52,5). egyenlet).}$$

A két független komponens meghatározására szolgálnak az (52,3) határfeltételi egyenletek, amelyek valójában négy egyenletet jelentenek a komponensekre. [Ha pl. a koordináta-rendszert úgy vesszük fel, hogy az (*x*, *y*) sík egyúttal az elválasztó határfelület, akkor a tangenciális komponensek az E_x, E_y, H_x, H_y.] Eszerint az egyenletek száma több, mint az ismeretleneké. Egyértelmű megoldást akkor kapunk, ha feltételezzük, hogy a határon a hullám nemcsak megtörik, hanem egy része visszaverődik az *1* közegbe. Az első közegben tehát a beeső hullámon kívül létezik egy visszavert hullám is, amelynek térerősségei:

$$\mathbf{E}^{(1)}\left(\mathbf{r}, t\right) = \mathbf{E}_0^{(1)} e^{i\left(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}\right)}$$
$$\mathbf{H}^{(1)}\left(\mathbf{r}, t\right) = \mathbf{H}_0^{(1)} e^{i\left(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}\right)} \qquad \text{((52,6). egyenlet)}$$

A visszavert hullám hat térerősség-komponense között szintén csak kettő a független, mert ezekre is érvényesek az (52,4)-hez, (52,5)-höz hasonló összefüggések:

$$\left(\mathbf{k}_1, \mathbf{E}^{(1)}\right) = 0 \qquad \text{((52,7). egyenlet),}$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = \frac{c}{\omega_1 \mu_1}\left(\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}^{(1)}\right) \qquad \text{((52,8). egyenlet).}$$

Így ugyanannyi az ismeretlenek száma, mint az egyenleteké. Az (52,3) határfeltételek tehát pontosan a következők:

$E_{0t}^{(0)} e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})} + E_{0t}^{(1)} e^{i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})} = E_{0t}^{(2)} e^{i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})}$ ((52,9). egyenlet);

$H_{0t}^{(0)} e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})} + H_{0t}^{(1)} e^{i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})} = H_{0t}^{(2)} e^{i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})}$ ((52,10). egyenlet).

Foglalkozzunk az elektromos térerősségre vonatkozó (52,9) egyenlettel. Ez a következő egyszerűbb alakba írható:

$ae^{i\omega_0 t} + be^{i\omega_1 t} = ce^{i\omega_2 t}$ ((52,11). egyenlet),

ahol *a*, *b*, *c* az időtől független mennyiségek. Differenciáljuk (52,11) mindkét oldalát az idő szerint:

$i\omega_0 ae^{i\omega_0 t} + i\omega_1 be^{i\omega_1 t} = i\omega_2 ce^{i\omega_2 t}$ ((52,12). egyenlet).

Ezen egyenlet jobb oldalán levő mennyiség helyére írjuk be az (52,11)-ből adódó értéket. Átrendezéssel kapjuk:

$ia(\omega_0 - \omega_2)e^{i\omega_0 t} + ib(\omega_1 - \omega_2)e^{i\omega_1 t} = 0$ ((52,13). egyenlet).

Mivel az $e^{i\omega_0 t}$ és az $e^{i\omega_1 t}$ tényezők együtthatói állandók, ezért az (52,13) egyenlet lineáris összefüggést jelent az exponenciális függvények között, amelynek azonosan ki kell elégülnie a határoló sík minden pontjában, minden *t*-re. Ez azonban csak akkor teljesül, ha az exponenciális függvények kitevői megegyeznek, tehát

$\omega_0 = \omega_1$ ((52,14). egyenlet).

Ha az (52,12) bal oldalán levő mennyiség helyére az (52,11)-ből adódó értéket helyettesítjük, a következő egyenletet kapjuk:

$ia(\omega_0 - \omega_1)e^{i\omega_0 t} + ic(\omega_1 - \omega_2)e^{i\omega_2 t} = 0$.

Az első tag (52,14) alapján eltűnik, ezért az egyenlet *t* minden értékére csak akkor áll fenn, ha a második tag együtthatója is azonosan zérus, vagyis

$\omega_1 = \omega_2$ ((52,15). egyenlet).

Az (52,14) és az (52,15) összefüggések azt jelentik, hogy az elektromágneses hullámok visszaverődésekor és törésekor a hullám frekvenciája nem változik meg:

$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 \equiv \omega$ ((52,16). egyenlet).

Megmutatjuk továbbá, hogy a beeső, a visszavert és a megtört hullám $\mathbf{k}_0$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ hullámszámvektorai egy síkban fekszenek. Ezt úgy mondjuk, hogy a beeső, a visszavert és a megtört sugár egy síkban van. Az (52,9) határfeltételi egyenletben **r** az elválasztó felület valamely pontjának a helyzetvektorát

jelenti. Koordináta-rendszerünket válasszuk úgy, hogy annak origója egyezzen meg az elválasztó sík valamely pontjával. Ebben az esetben az (52,9) egyenletben szereplő **r** vektor teljesen rajta van az elválasztó síkon. Az (52,9) egyenlet a következő alakban írható:

$Ae^{-i\mathbf{k}_0\mathbf{r}} + Be^{-i\mathbf{k}_1\mathbf{r}} = Ce^{-i\mathbf{k}_2\mathbf{r}}$ ((52,17). egyenlet),

ahol az *A*, *B*, *C* mennyiségek **r**-től függetlenek. Képezzük az egyenlet mindkét oldalának gradiensét, majd szorozzuk végig **r**-rel skalárisan:

$-iA(\mathbf{k}_0,\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}_0\mathbf{r}} - iB(\mathbf{k}_1,\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}_1\mathbf{r}} = -iC(\mathbf{k}_2,\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}_2\mathbf{r}}$ ((52,18). egyenlet).

A jobb oldalon levő $Ce^{-i\mathbf{k}_2\mathbf{r}}$ mennyiség helyére írjuk be az (52,17) egyenletből adódó értéket:

$iA\left[(\mathbf{k}_0,\mathbf{r}) - (\mathbf{k}_2,\mathbf{r})\right]e^{-i\mathbf{k}_0\mathbf{r}} + iB\left[(\mathbf{k}_1,\mathbf{r}) - (\mathbf{k}_2,\mathbf{r})\right]e^{-i\mathbf{k}_1\mathbf{r}} = 0$ ((52,19). egyenlet).

Ez az összefüggés fennáll az elválasztó síkban fekvő minden **r** vektorra, ezért az (52,13) után követett gondolatmenet alapján adódik, hogy

$(\mathbf{k}_0,\mathbf{r}) = (\mathbf{k}_1,\mathbf{r})$ ((52,20). egyenlet).

Ha a $Be^{-i\mathbf{k}_1\mathbf{r}}$ mennyiséget helyettesítjük az (52,17)-ből adódó értékével, akkor hasonló eljárással kapjuk:

$(\mathbf{k}_1,\mathbf{r}) = (\mathbf{k}_2,\mathbf{r})$ ((52,21). egyenlet).

Az (52,20) és az (52,21) összefüggések egybevetéséből látszik, hogy

$(\mathbf{k}_1,\mathbf{r}) = (\mathbf{k}_2,\mathbf{r}) = (\mathbf{k}_0,\mathbf{r})$ ((52,22). egyenlet).

Ebből viszont már következik, hogy a $\mathbf{k}_0$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ hullámszámvektorok egy síkban fekszenek. Ugyanis az **r** vektor az elválasztó síkban fekvő tetszőleges vektor, ezért úgy választható, hogy valamelyik hullámszámvektorra, pl. a $\mathbf{k}_0$-ra merőleges legyen. Ekkor viszont (52,22)-ből következik, hogy

$(\mathbf{k}_0,\mathbf{r}) = (\mathbf{k}_1,\mathbf{r}) = (\mathbf{k}_2,\mathbf{r}) = 0$ ((52,23). egyenlet),

ami azt jelenti, hogy a $\mathbf{k}_1$ és a $\mathbf{k}_2$ vektor is merőleges **r**-re, vagyis ugyanabban a síkban vannak, mint a $\mathbf{k}_0$. Ezzel megmutattuk, hogy a beeső, a visszavert és a megtört sugár egy síkban van.

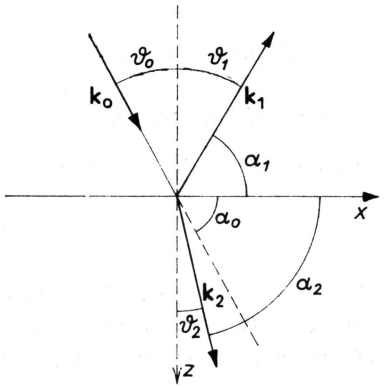
Most határozzuk meg a visszavert és a megtört sugár irányát a beesőéhez viszonyítva. A koordináta-rendszer kezdőpontját vegyük fel az elválasztó sík azon pontjában, amelyben a beeső sugár a felületet metszi *(58. ábra)*. Az (*x*, *z*) sík essen egybe azzal a síkkal, amelyen fekszik a $\mathbf{k}_0$, a $\mathbf{k}_1$ és a $\mathbf{k}_2$ hullámszámvektor, a *z* tengely legyen merőleges az elválasztó felületre, az *x* tengely pedig legyen rajta az *58. ábrának* megfelelő irányítással. Ekkor

$(\mathbf{k}_0, \mathbf{r}) = k_0 r \cos\alpha_0$,

$(\mathbf{k}_1, \mathbf{r}) = k_1 r \cos\alpha_1$,

$(\mathbf{k}_2, \mathbf{r}) = k_2 r \cos\alpha_2$.

58. ábra -



Ezeket a kifejezéseket (52,22)-be beírva, adódik:

$k_0 \cos\alpha_0 = k_1 \cos\alpha_1 = k_2 \cos\alpha_2$ ((52,24). egyenlet).

A beeső, a visszavert és a megtört hullám terjedési sebességét jelöljük v_0-val, v_1-gyel és v_2-vel. Ezek a sebességek a k_0, k_1, k_2 hullámszámokkal a következő kapcsolatban vannak:

$k_0 = \frac{\omega}{v_0}, \quad k_1 = \frac{\omega}{v_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{v_2}$ ((52,25). egyenlet).

Mivel a beeső és a visszavert hullám ugyanabban a közegben terjed, ezért $v_0 = v_1$, tehát $k_0 = k_1$. Az (52,24) egyenlőség első részéből így következik, hogy

cos α_0 = cos α_1, vagyis $\alpha_0 = \alpha_1$,

ami az ábra alapján azt is jelenti, hogy

$\beta_0 = \beta_1$ ((52,26). egyenlet).

A β_0-t beesési szögnek, β_1-et visszaverődési szögnek nevezzük. Az (52,26) egyenlőség szavakkal kifejezve tehát azt jelenti, hogy a beesési szög megegyezik a visszaverődési szöggel.

Az (52,24) egyenlőség két széléből (52,25) figyelembevételével adódik:

$$\frac{\cos\alpha_0}{v_0} = \frac{\cos\alpha_2}{v_2}$$ ((52,27). egyenlet).

Az ábrából leolvasható, hogy $\cos\alpha_0 = \sin\beta_0$ és $\cos\alpha_2 = \sin\beta_2$, ezért (52,27) a következőképpen is írható:

$$\frac{\sin\beta_0}{\sin\beta_2} = \frac{v_0}{v_2}$$ ((52,28). egyenlet).

A sebességek hányadosa (49,9) alapján kifejezhető a két közegre jellemző anyagi együtthatókkal:

$$\frac{\sin\beta_0}{\sin\beta_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}}.$$

A beesési szög sinusának és a törési szög sinusának hányadosa csupán a két érintkező közeg sajátságaitól függ. A $\sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}}$ mennyiséget a második közegnek az elsőre vonatkoztatott *törésmutatójának* nevezzük és n_{12}-vel jelöljük. Eszerint

$$\frac{\sin\beta_0}{\sin\beta_2} = n_{12}$$ ((52,29). egyenlet).

Az (52,29) összefüggést nevezzük *Snellius–Descartes-törvénynek*. Megállapíthatjuk tehát, hogy az elektromos és a mágneses térerősségre vonatkozó (52,9), illetve (52,10) határfeltételből egyszerűen következnek az elektromágneses hullámok visszaverődésének és törésének geometriai törvényei, teljes megegyezésben a fényhullámokra vonatkozó megfelelő törvényekkel.

A határfeltételek részletesebb tanulmányozásával összefüggések nyerhetők a beeső, a visszavert és a megtört hullám amplitúdójának négyzete között is. Ezek az összefüggések megegyeznek a beeső, visszavert és megtört fényhullámok intenzitásviszonyaira vonatkozó ún. *Fresnel-féle*

képletekkel. Itt mi csak a legegyszerűbb esetre, a merőleges beesés esetére vezetjük le ezeket az összefüggéseket. A beeső hullám terjedésének iránya ekkor megegyezik az *58. ábrán* választott koordináta-rendszer *z* tengelyével. Mivel a $\mathbf{k}_0$, $\mathbf{E}^{(0)}$, $\mathbf{H}^{(0)}$ vektorok jobbsodrású koordináta-rendszert képeznek, $\mathbf{E}^{(0)}$ az *x* tengely, $\mathbf{H}^{(0)}$ pedig az *y* tengely irányába mutat. Tehát:

$$E_x^{(0)} = E_{0x}^{(0)} e^{i(\omega t - k_0 z)}, \quad E_y^{(0)} = E_z^{(0)} = 0$$ ((52,30). egyenlet),

$$H_y^{(0)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{0x}^{(0)} e^{i(\omega t - k_0 z)}, \quad H_x^{(0)} = H_z^{(0)} = 0$$ ((52,31). egyenlet).

Az (52,31) összefüggésben figyelembe vettük a mágneses és elektromos térerősség amplitúdója közötti (49,17) kapcsolatot.

Mivel merőleges beesésnél a második közegben haladó hullám is a *z* irányban terjed, a visszavert pedig a –*z* tengely mentén, továbbá a **k**, **E**, **H** vektorok iránya mindegyik hullámnál olyan, mint a jobbsodrású koordináta-rendszer *x*, *y*, *z* tengelyeié, a visszavert, illetve a második közegben haladó hullám (amely most törés nélkül megy tovább) térerősségei a következők:

$$E_x^{(1)} = E_{0x}^{(1)} e^{i(\omega t - k_0 z)}, \quad E_y^{(0)} = E_z^{(1)} = 0$$ ((52,32). egyenlet),

$$H_y^{(1)} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{0x}^{(1)} e^{i(\omega t - k_0 z)}, \quad H_x^{(1)} = H_z^{(1)} = 0$$ ((52,33). egyenlet),

$$E_x^{(2)} = E_{0x}^{(2)} e^{i(\omega t - k_2 z)}, \quad E_y^{(2)} = E_z^{(2)} = 0$$ ((52,34). egyenlet),

$$H_y^{(2)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_{0x}^{(2)} e^{i(\omega t - k_2 z)}, \quad H_x^{(2)} = H_z^{(2)} = 0$$ ((52,35). egyenlet).

Az elektromos és a mágneses térerősség tangenciális komponensére vonatkozó határfeltételek a két közeget elválasztó *z* = 0 síkon:

$$E_{0x}^{(0)} + E_{0x}^{(1)} = E_{0x}^{(2)}$$ ((52,36). egyenlet),

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{0x}^{(0)} - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{0x}^{(1)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_{0x}^{(2)}$$ ((52,37). egyenlet).

A második határfeltétel egyszerűbb alakot vesz fel, ha figyelembe vesszük, hogy szigetelőknél jó közelítéssel $\mu_1 = \mu_2 = 1$:

$\sqrt{\varepsilon_1}E_{0x}^{(0)} - \sqrt{\varepsilon_1}E_{0x}^{(1)} = \sqrt{\varepsilon_2}E_{0x}^{(2)}$ ((52,37′). egyenlet).

Most ismerjük a beeső hullám $E_{0x}^{(0)}$ amplitúdóját, és keressük a visszavert, illetve a második közegbe behatoló hullám $E_{0x}^{(1)}$, illetve $E_{0x}^{(2)}$ amplitúdóját. Ezeket az (52,36) és az (52,37′) algebrai egyenletből számítjuk ki.

$$E_{0x}^{(1)} = \frac{1-n_{12}}{1+n_{12}}E_{0x}^{(0)}$$ ((52,38). egyenlet),

$$E_{0x}^{(2)} = \frac{2}{1+n_{12}}E_{0x}^{(0)}$$ ((52,39). egyenlet),

ahol $n_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ a második közegnek az elsőre vonatkoztatott törésmutatója. Az (52,33) és (52,35) összefüggésekből látszik, hogy ezzel a mágneses térerősségeket is meghatároztuk.

Határozzuk meg a beeső, a visszavert és a második közegbe behatolt hullám által szállított energia áramsűrűségét. Mivel az energia a hullámterjedés irányában áramlik, elég csak a Poynting-vektor abszolút értékét kiszámítani. A (49,19) összefüggés alapján ezek a következők:

$$S^{(0)} = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\varepsilon_1}\left[\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}^{(0)}\right)\right]^2$$ ((52,40). egyenlet),

$$S^{(1)} = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\varepsilon_1}\left[\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}^{(1)}\right)\right]^2$$ ((52,41). egyenlet),

$$S^{(2)} = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\varepsilon_2}\left[\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}^{(2)}\right)\right]^2$$ ((52,42). egyenlet).

Mivel ezek a mennyiségek időben periodikusan változnak, az időbeli középértéküket számítjuk ki. Ezt a mennyiséget nevezzük a *hullám intenzitásának*. (51,25), valamint (52,38) és (52,39) alapján

$$\overline{S}^{(0)} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_1}E_{0x}^{(0)2}$$ ((52,43). egyenlet),

$$\overline{S}^{(1)} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_1}E_{0x}^{(1)2} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_1}\left(\frac{1-n_{12}}{1+n_{12}}\right)^2 E_{0x}^{(0)2}$$ ((52,44). egyenlet),

$$\overline{S}^{(2)} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_2}E_{0x}^{(2)2} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_2}\left(\frac{2}{1+n_{12}}\right)^2 E_{0x}^{(0)2}$$ ((52,45). egyenlet),

ahol az $E_{0x}^{(0)}$, $E_{0x}^{(1)}$, $E_{0x}^{(2)}$ amplitúdók valósak. A visszavert és a második közegben haladó hullám intenzitása az (52,43)–(52,45) képletek alapján kifejezhető a beeső hullám intenzitásával:

$$\overline{S}^{(1)} = \left(\frac{1-n_{12}}{1+n_{12}}\right)^2 \overline{S}^{(0)}$$ ((52,46). egyenlet),

$$\overline{S}^{(2)} = \frac{4n_{12}}{(1+n_{12})^2}\overline{S}^{(0)}$$ ((52,47). egyenlet).

A visszavert és a beeső hullám intenzitásának a viszonyát *visszaverődési együtthatónak* (reflexiókoefficiensnek) nevezzük, és *r*-rel jelöljük, amely az (52,46) alapján a következő kifejezéssel egyenlő:

$$r = \frac{\overline{S}^{(1)}}{\overline{S}^{(0)}} = \left(\frac{1-n_{12}}{1+n_{12}}\right)^2$$ ((52,48). egyenlet).

A második közegbe behatolt hullám intenzitásának a beesőével való viszonyát *áteresztési együtthatónak* nevezzük, és *d*-vel jelöljük. (52,47)-ből adódik, hogy

$$d = \frac{\overline{S}^{(2)}}{\overline{S}^{(0)}} = \frac{4n_{12}}{(1+n_{12})^2}$$ ((52,49). egyenlet).

Mint látjuk, ezek az együtthatók a két közeg relatív törésmutatójától függnek.

Az (52,46), (52,47) összefüggésekből következik:

$$\overline{S}^{(1)} + \overline{S}^{(2)} = \overline{S}^{(0)}$$ ((52,50). egyenlet).

Ez az összefüggés azt jelenti, hogy a beeső hullám intenzitása teljesen átalakul a visszavert és a második közegbe behatolt hullám intenzitásává. A két szigetelő határán történő visszaverődésnél és törésnél az elektromágneses tér energiája nem alakul át másfajta energiává.

(52,50)-ből következik, hogy a visszaverődési és az áteresztési együttható összege 1:

$$r + d = 1$$ ((52,51). egyenlet).

Az (52,46), (52,47) képletek a már említett Fresnel-képletek merőleges beesés esetén.

E pontban megmutattuk, hogy az elektromágneses térelmélet (a Maxwell-egyenleteken alapuló elektrodinamika) nemcsak az elektromágneses hullámok létezéséről, hanem azok visszaverődéséről és töréséről is számot ad. A törés és visszaverődés itt tárgyalt törvényeit már az elektromágneses térelmélet kiépítése előtt ismerték fényhullámokra. A fizikai megismerés fejlődésével kiderült, hogy a fény elektromágneses hullám. Az elektromágneses hullámok terjedési sebessége, azok törésének és visszaverődésének törvényszerűségei, a megtört és visszavert hullámok intenzitásviszonyaira kapott összefüggések mind megegyeznek a korábban fényhullámokra kapott összefüggésekkel. Ezek azt mutatják, hogy a Maxwell-elmélet kidolgozása után a fénytan nem külön fejezete a fizikának, hanem a Maxwell-féle elektromágneses térelméletnek, a klasszikus elektrodinamikának egy része. Tulajdonképpen Maxwell legnagyobb érdeme abban van, hogy az $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ eltolódási áram bevezetésével felismerte, hogy az időben változó elektromos tér – az indukciótörvény duálisaként – változó mágneses teret kelt. Ez tette lehetővé az egész fénytannak az elektrodinamikába való beépítését és azt a felismerést, hogy a fény elektromágneses hullám. Meg lehetne mutatni, hogy nemcsak a fénytörés és fényvisszaverődés törvényei következnek a Maxwell-elméletből, hanem a teljes visszaverődés, az interferencia, a fényelhajlás jelenségei is. Ezek tárgyalására azonban a tantervben előírt óraszámban nincs lehetőségünk, ezért könyvünkben sem térünk ki ezekre, hanem a megfelelő szakkönyvekre utalunk.

Az (52,28), (52,29) törési törvény levezetésénél láttuk, hogy a fénytanból már ismert törvénnyel akkor kapunk teljes azonosságot, ha a közeg relatív törésmutatóját a dielektromos állandók négyzetgyökének viszonyával azonosítjuk. A közeg vákuumra vonatkoztatott, ún. abszolút törésmutatója eszerint

$n = \sqrt{\varepsilon}$ ((52,52). egyenlet).

A Maxwell-féle elektrodinamika tehát a közeg törésmutatóját a dielektromos állandóval hozza kapcsolatba az (52,52) összefüggés szerint. Néhány dielektrikumra (pl. levegőre, CO-ra, benzolra stb.) a tapasztalat ezt megerősítette, azonban sok anyagra vonatkozóan ez az összefüggés nem egyezik a mérési eredményekkel. Pl. víz esetén n = 1,33, $\sqrt{\varepsilon}$ = 9,0. Ez az eltérés egyúttal rámutat a Maxwell-elmélet alkalmazhatósági határára is. Nevezetesen, mivel a törésmutatót a $\sqrt{\varepsilon}$-nal azonosítja, nem tud számot adni a törésmutató frekvenciafüggéséről, az ún. diszperzióról sem. E jelenségek értelmezésére a fenomenológiai elektrodinamika már nem képes. Itt figyelembe kell vennünk az anyag szerkezetére vonatkozó ismereteinket, és a makroszkopikus térelmélet helyett az ún. mikroszkopikus elméletet kell alapul vennünk, amely az anyagot atomokból, molekulákból felépítettnek tekinti. Ezek szintén túlhaladják könyvünk kereteit, és más tantárgy (az ún. anyagszerkezet) keretében kerül sor ezek tanulmányozására.

Az elektromágneses síkhullámok visszaverődése fémeken

Az elektromágneses hullámok fémfelületről való visszaverődésének a jelensége összetettebb, mint az előző pontban tárgyalt szigetelők határfelületén való visszaverődés. Ezért itt csak az egyszerűbb esettel, a merőlegesen beeső hullám visszaverődésével foglalkozunk.

Feltételezzük, hogy a fémfelület sík, és a hullám vákuumból esik rá merőlegesen. Koordináta-rendszerünket ugyanúgy választjuk, mint előbb: az (*xy*) sík egybeesik a felülettel, a *z* tengely arra merőlegesen a vezetőbe mutat. A vezető felületére eső hullám egy része visszaverődik, másik része pedig behatol a fémbe. A beeső és a visszaverődött hullám térerősségei (52,30)–(52,33) alapján:

$$E_x^{(0)} = H_y^{(0)} = E_{0x}^{(0)} e^{i(\omega t - k_0 z)}$$
$$E_y^{(0)} = E_x^{(0)} = H_x^{(0)} = H_z^{(0)} = 0 \quad \text{((53,1). egyenlet)}$$

$$E_x^{(1)} = -H_y^{(1)} = E_{0x}^{(1)} e^{i(\omega t + k_0 z)}$$
$$E_y^{(1)} = E_z^{(1)} = H_x^{(1)} = H_z^{(1)} = 0 \quad \text{((53,2). egyenlet)}$$

A vezetőbe behatolt hullám térerősségei (51,16) és (51,20) szerint a következők:

$$E_x^{(2)} = E_{0x}^{(2)} e^{-\frac{\omega}{c}\varkappa z} e^{i(\omega t - kz)}$$
$$H_y^{(2)} = \frac{c}{\omega}\sqrt{k^2 + l^2}\, E_{0x}^{(2)} e^{-\frac{\omega}{c}\varkappa z} e^{i(\omega t - kz - \gamma)} \quad \text{((53,3). egyenlet)}$$

ahol a vezető mágneses permeabilitását egynek vettük.

A fémfelület mentén – tehát a $z = 0$ síkban – ki kell elégítenünk a határfeltételeket; nevezetesen a térerősségek tangenciális komponensének a folytonosságát:

$$E_{0x}^{(0)} + E_{0x}^{(1)} = E_{0x}^{(2)} \quad \text{((53,4). egyenlet),}$$

$$E_{0x}^{(0)} - E_{0x}^{(1)} = \frac{c}{\omega}\sqrt{k^2 + l^2}\, e^{-i\gamma} E_{0x}^{(2)} \quad \text{((53,5). egyenlet).}$$

Az (53,5) egyenlőség jobb oldalán levő $\frac{c}{\omega}\sqrt{k^2 + l^2}\, e^{-i\gamma}$ tényező helyére írjunk egyelőre (51,19) alapján $\sqrt{\varepsilon'}$ -t.

$$E_{0x}^{(0)} - E_{0x}^{(1)} = \sqrt{\varepsilon'} E_{0x}^{(2)} \quad \text{((53,5′). egyenlet).}$$

Az (53,4), (53,5′) egyenletekből $E_{0x}^{(1)}$ és $E_{0x}^{(2)}$ kifejezhető a beeső hullám $E_{0x}^{(0)}$ amplitúdójával. Egyszerűen adódik, hogy

$$E_{0x}^{(1)} = \frac{1-n'}{1+n'} E_{0x}^{(0)}$$ ((53,6). egyenlet),

és

$$E_{0x}^{(2)} = \frac{2}{1+n'} E_{0x}^{(0)}$$ ((53,7). egyenlet),

ahol

$$n' = \sqrt{\varepsilon'}$$ ((53,8). egyenlet)

a vezető közeg *komplex törésmutatója*.

Mivel *n'* komplex szám, a visszavert és a fémbe behatolt hullám fázisa különbözik a beeső hullámétól. A fáziskülönbségeket az $\frac{1-n'}{1+n'}$, illetve az $\frac{1}{1+n'}$ komplex szám argumentuma adja:

$$\frac{1-n'}{1+n'} = \left|\frac{1-n'}{1+n'}\right| e^{-i\alpha}, \qquad \frac{1}{1+n'} = \frac{1}{|1+n'|} e^{-i\beta}$$ ((53,9). egyenlet).

Az elektromos térerősségek kifejezései tehát a következőképpen írhatók:

$$E_x^{(0)} = E_{0x}^{(0)} e^{i(\omega t - k_0 z)}$$ ((53,10). egyenlet),

$$E_x^{(1)} = \left|\frac{1-n'}{1+n'}\right| E_{0x}^{(0)} e^{i(\omega t + k_0 z - \alpha)}$$ ((53,11). egyenlet),

$$E_x^{(2)} = \frac{2}{|1+n'|} E_{0x}^{(0)} e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z} e^{i(\omega t - kz - \beta)}$$ ((53,12). egyenlet).

Az (52,43), (52,44) kifejezésekhez hasonlóan adódnak a beeső és a visszavert hullám energia-áramsűrűségének középértékei:

$$\overline{S}^{(0)} = \frac{c}{8\pi} E_{0x}^{(0)2}$$ ((53,13). egyenlet),

$$\bar{S}^{(1)} = \frac{c}{8\pi}\left|\frac{1-n'}{1+n'}\right|^2 E_{0x}^{(0)2} = \left|\frac{1-n'}{1+n'}\right|^2 \bar{S}^{(0)}$$ ((53,14). egyenlet).

A fémfelület visszaverődési együtthatóját ezekből egyszerűen megkapjuk:

$$r = \frac{\bar{S}_1}{\bar{S}^{(0)}} = \left|\frac{1-n'}{1+n'}\right|^2$$ ((53,15). egyenlet).

Az (51,10) és (51,11) összefüggések figyelembevételével a jobb oldal könnyen kiszámítható, és eredményül adódik:

$$r = \frac{1-2\frac{c}{\omega}k+\frac{c^2}{\omega^2}\left(k^2+l^2\right)}{1+2\frac{c}{\omega}k+\frac{c^2}{\omega^2}\left(k^2+l^2\right)}$$ ((53,16). egyenlet).

Ideális vezetőre $\sigma = \infty$ és ennek megfelelően $k = l = \infty$, tehát $r = 1$. Az ideális vezető a ráeső elektromágneses hullámot teljesen visszaveri.

Most nézzük a nem ideális, de jó vezetők határesetét. Ekkor (51,22) szerint

$$k = l = \frac{1}{c}\sqrt{2\pi\sigma\omega},$$

és így

$$r = \frac{1-2\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}+2\frac{\sigma}{\nu}}{1+2\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}+2\frac{\sigma}{\nu}} \approx 1-2\sqrt{\frac{\nu}{\sigma}}$$ ((53,17). egyenlet).

Hagen és *Rubens* mérései szerint a visszaverődési együtthatónak ez a közelítő képlete az ultravörös hullámtartományban ($\lambda \approx 25\cdot 10^4$ cm) elég jól egyezik a tapasztalattal. Magas frekvenciákon – mint már említettük – nem helytálló az (51,21) közelítés, ezért a visszaverődési együttható (53,17) képlete sem. A visszaverődési együttható lényegesen kisebbnek adódik nála. Az anyagszerkezeti felfogás alapján ez jól megérthető. Az elektronok tehetetlenségük miatt nem tudják teljesen követni a gyorsan változó teret, az elektromos áram sűrűsége nem éri el minden pillanatban a $\sigma\mathbf{E}$ értéket. Úgy tűnik, mintha a vezetőnek kisebb lenne a σ vezetőképessége. Ezt a körülményt fogalmaztuk úgy az (51,22) utáni megfontolásokban, hogy σ frekvenciafüggővé válik. Még szembetűnőbb ez a jelenség az elektrolitoknál; sztatikusan jól vezetnek, ezzel szemben teljesen átlátszóak. Ennek az a magyarázata, hogy elektrolitokban a töltés hordozói az ionok, s ezek több ezerszer nehezebbek az elektronnál, és így sokkal nagyobb a tehetetlenségük. Ezért viselkednek az elektrolitok a nagyfrekvenciájú elektromágneses hullámok terével szemben úgy, mintha szigetelők lennének.

Elektromágneses hullámok terjedése homogén, anizotrop közegben. A kristályoptika alapjai

Tételezzük fel, hogy az egész végtelen teret homogén anizotrop közeg tölti ki. Ilyen közegben az elektromos indukcióvektor és az elektromos térerősség között a

$$D_x = \varepsilon_{11}E_x + \varepsilon_{12}E_y + \varepsilon_{13}E_z$$
$$D_y = \varepsilon_{21}E_x + \varepsilon_{22}E_y + \varepsilon_{23}E_z$$
$$D_z = \varepsilon_{31}E_x + \varepsilon_{32}E_y + \varepsilon_{33}E_z \quad \text{((54,1). egyenlet)}$$

anyagi egyenletek érvényesek. A dielektromos együttható most nem skalár, hanem tenzor. Az energiaegyenlet alapján megmutatható, hogy az

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad \text{((54,2). egyenlet)}$$

ún. *dielektromos tenzor* szimmetrikus, vagyis

$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$ ((54,3). egyenlet).

A matematikából ismeretes, hogy szimmetrikus tenzor főtengelyre transzformálható, azaz választhatunk olyan koordináta-rendszert, amelyben az ε_{ik} tenzor vegyes indexű elemei eltűnnek: $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ és csak a főátlóban állók különböznek zérustól. Ezekre az $\varepsilon_{11} = \varepsilon_1$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_2$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_3$ jelölést használjuk. Ebben az ún. *dielektromos főtengelyrendszerben* az (54,1) anyagi egyenletek a következő alakot veszik fel:

$D_x = \varepsilon_1 E_x, \qquad D_y = \varepsilon_2 E_y, \qquad D_z = \varepsilon_3 E_z$ ((54,4). egyenlet).

Mivel általában $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$, anizotrop közegben az elektromos indukcióvektor iránya nem esik egybe az elektromos térerősségvektor irányával.

Ebben a pontban megvizsgáljuk a homogén anizotrop közegben terjedő elektromágneses síkhullámok sajátságait. Alapegyenleteink a Maxwell-egyenletek

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \quad \text{((54,5). egyenlet)}$$

és az (54,4) anyagi egyenletek. Feltételeztük, hogy a közeg mágneses permeabilitása $\mu = 1$, tehát **B** = **H**. Keressük az (54,4), (54,5) egyenletrendszer síkhullám-megoldását. A térerősségeket tehát

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$$
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$$
$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$$ ((54,6). egyenlet)

alakban vesszük fel, és megnézzük, hogy ezek milyen feltételek mellett elégítik ki alapegyenleteinket.

A div **D** = 0 és div **H** = 0 egyenletekből következik:

$$(\mathbf{k}, \mathbf{D}) = 0, \qquad (\mathbf{k}, \mathbf{H}) = 0$$ ((54,7). egyenlet).

Az elektromos indukcióvektor és a mágneses térerősség merőleges a hullámterjedés irányára.

Ha az (54,6) síkhullám-megoldásokat az első és a harmadik Maxwell-egyenletekbe helyettesítjük, a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\mathbf{D} = -\frac{c}{\omega}(\mathbf{k} \times \mathbf{H})$$ ((54,8). egyenlet),

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\omega}(\mathbf{k} \times \mathbf{E})$$ ((54,9). egyenlet).

Ezekből az egyenletekből közvetlenül látszik, hogy (54,6) akkor megoldásai a Maxwell-egyenleteknek, ha

$$\mathbf{D} \perp \mathbf{H}, \qquad \mathbf{D} \perp \mathbf{k}$$
$$\mathbf{H} \perp \mathbf{E}, \qquad \mathbf{H} \perp \mathbf{k}$$ ((54,10). egyenlet)

de **E** nem merőleges **k**-ra.

A hullám által szállított elektromágneses energia áramsűrűsége, az ún. Poynting-vektor (54,9) alapján:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{c^2}{4\pi\omega}\left[\mathbf{k}E^2 - \mathbf{E}(\mathbf{k}, \mathbf{E})\right]$$ ((54,11). egyenlet).

Ebből következik, hogy

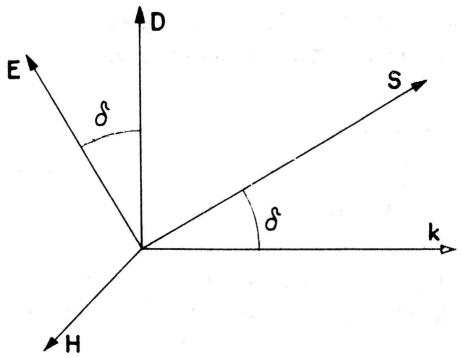
$\mathbf{S} \perp \mathbf{E}, \quad \mathbf{S} \perp \mathbf{H}$ ((54,12). egyenlet),

de – az izotrop közegben terjedő hullámoktól eltérően – **S** nem egyirányú **k**-val. Az elektromágneses energia tehát nem a hullámterjedés irányában áramlik.

Az (54,10) és (54,12) összefüggésekből következik, hogy az **E**, **D**, **S**, **k** vektorok a **H** mágneses térerősségre merőleges síkban vannak, és ebben a síkban $\mathbf{D} \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{E} \perp \mathbf{S}$, tehát az **E**, **D**, illetve **S**, **k** vektorok egymással ugyanakkora szöget zárnak be. A vektorok irányát az *59. ábra* szemlélteti. Számítsuk ki (54,8) és (54,9) alapján a hullám elektromágneses energiasűrűségét:

$$u = \frac{1}{8\pi}\left[(\mathbf{E}, \mathbf{D}) + \mathbf{H}^2\right] = \frac{c^2}{4\pi\omega^2}\left[k^2 E^2 - (\mathbf{k}, \mathbf{E})^2\right]$$ ((54,13). egyenlet).

59. ábra -



Az (54,11) és (54,13) képletek egybevetéséből következik:

$$u = \frac{1}{\omega}(\mathbf{k}, \mathbf{S}) = \frac{k}{\omega}|\mathbf{S}| \cos\delta$$ ((54,14). egyenlet),

amely a $k = \frac{\omega}{v}$ összefüggés figyelembevételével így is írható:

$$u = |\mathbf{S}|\frac{\cos\delta}{v}$$ ((54,15). egyenlet).

Itt v a hullám terjedési sebességét, az ún. fázissebességet jelenti. (54,15)-ből látszik, hogy az elektromágneses energia nem a fázissebességgel terjed. Az energiaterjedés sebességét a

$$\mathbf{v}_s = \frac{\mathbf{S}}{u}$$ ((54,16). egyenlet)

képlettel definiáljuk. Az energiasebesség **S** irányú, abszolút értéke pedig $\frac{|\mathbf{S}|}{u}$. Az (54,15) és (54,16) képletekből következik:

$$v_s = \frac{v}{\cos\delta}$$ ((54,17). egyenlet).

Mivel anizotrop közegekben δ általában zérustól különböző, ezért az energiasebesség általában nagyobb a fázissebességnél. (Később látni fogjuk, hogy speciális irányokban $\delta = 0$.) A fázissebesség az energiasebességnek a hullám terjedési irányára való vetületével egyezik meg.

Izotrop közegekben a hullám fázissebességét a $v = c/\sqrt{\varepsilon}$ egyszerű képlet határozza meg. Kristályokban nem ilyen egyszerű a sebesség és a dielektromos együtthatók közötti összefüggés, az anizotrópia miatt a fázissebesség függ a terjedési iránytól is. Sőt – mint látni fogjuk – minden terjedési irányhoz két különböző sebességérték tartozik. Ahhoz, hogy ezt belássuk, induljunk ki az (54,8) összefüggésből, amely (54,9) felhasználásával a következő alakba írható:

$$\mathbf{D} = -\frac{c}{\omega}(\mathbf{k}\times\mathbf{H}) = -\frac{c^2}{\omega^2}\left[\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E})\right] = \frac{c^2}{\omega^2}\left[\mathbf{E}k^2 - \mathbf{k}(\mathbf{k},\mathbf{E})\right]$$ ((54,18). egyenlet).

A **k** hullámszámvektor

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{v}\mathbf{n}$$ ((54,19). egyenlet)

kifejezését beírva (**n** a hullám terjedési irányába mutató egységvektor):

$$\mathbf{D} = \frac{c^2}{v^2}\left[\mathbf{E} - \mathbf{n}(\mathbf{n},\mathbf{E})\right]$$ ((54,20). egyenlet).

Ebből egyszerű átalakítással adódik:

$$D_x = c^2\frac{n_x(\mathbf{n},\mathbf{E})}{v_1^2 - v^2}$$ ((54,21a). egyenlet),

$$D_y = c^2 \frac{n_y(\mathbf{n}, \mathbf{E})}{v_{II}^2 - v^2}$$ ((54,21b). egyenlet),

$$D_z = c^2 \frac{n_z(\mathbf{n}, \mathbf{E})}{v_{III}^2 - v^2}$$ ((54,21c). egyenlet),

ahol

$$v_I = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}, \qquad v_{II} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}}, \qquad v_{III} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_3}}$$ ((54,22). egyenlet).

Szorozzuk meg az (54,21a)–(54,21c) egyenleteket rendre n_x-szel, n_y-nal és n_z-vel, és az így nyert egyenleteket adjuk össze:

$$D_x n_x + D_y n_y + D_z n_z = c^2(\mathbf{n}, \mathbf{E})\left[\frac{n_x^2}{v_I^2 - v^2} + \frac{n_y^2}{v_{II}^2 - v^2} + \frac{n_z^2}{v_{III}^2 - v^2}\right]$$ ((54,23). egyenlet).

Mivel $\mathbf{D} \perp \mathbf{n}$, ezért (54,23) bal oldala zérus, tehát

$$\frac{n_x^2}{v_I^2 - v^2} + \frac{n_y^2}{v_{II}^2 - v^2} + \frac{n_z^2}{v_{III}^2 - v^2} = 0$$ ((54,24). egyenlet).

Ezt az egyenletet az anizotrop közegben haladó elektromágneses hullám fázissebességére vonatkozó *Fresnel-féle egyenletnek* nevezzük. Ez v-re negyedfokú algebrai egyenlet, amelynek megadott **n**(n_x, n_y, n_z) terjedési irányhoz két pozitív valós megoldása van. Következésképpen anizotrop közegekben minden terjedési irányhoz két fázissebesség, tehát két különböző sebességgel haladó hullám tartozik. Eszerint ha homogén izotrop szigetelőből vagy vákuumból elektromágneses hullám esik kristályra, akkor a kristályba behatoló, ún. megtört hullám két különböző sebességgel terjedő hullámra esik szét. Ezt a jelenséget nevezzük a kristályoptikában *kettőstörésnek*.

Tegyük fel, hogy a hullám az *x* tengely irányában terjed: $n_x = 1$, $n_y = n_z = 0$. Az (54,24)-ből következik, hogy ebben az esetben $v_{II}^2 - v^2 = 0$, $v_{III}^2 - v^2 = 0$, vagyis a két megoldás:

$$v_1 = v_{II} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}}, \qquad v_2 = v_{III} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_3}}.$$

Hasonlóképpen kapjuk az *y*, illetve a *z* tengely irányába haladó hullámok sebességeire:

$$v_1 = v_I = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}, \qquad v_2 = v_{III} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_3}};$$

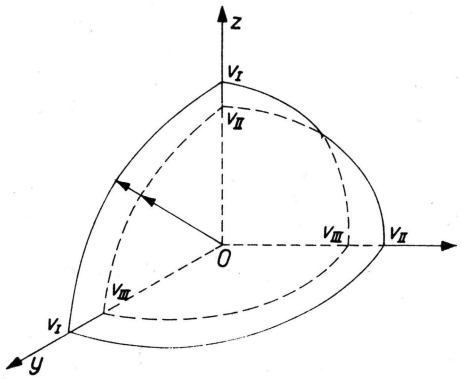
illetve

$$v_1 = v_I = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}, \qquad v_2 = v_{II} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}}.$$

A v_I, v_{II}, v_{III} mennyiségek tehát a főtengelyek irányába haladó hullámok terjedési sebességeit jelentik. Ezeket *fősebességeknek* nevezzük.

A továbbiakban a részletesebb matematikai tárgyalás helyett a hullámfelületek ábrázolásával próbáljuk érthetővé tenni a hullámterjedés jelenségét anizotrop közegben. E célból tételezzük fel, hogy a kristály belsejében levő pontszerű forrásból indul ki a hullám. Az *O* pontból kiinduló különböző sebességgel terjedő két hullám hullámfelületét szemlélteti a *60. ábra* valamely *t* időpontban. E felületek (*xy*), (*xz*), (*yz*) koordinátasíkokkal való metszetét mutatja a *61. ábra*. v_I, v_{II}, v_{III} a fősebességek értékeit jelentik. Az *00'* és *00"* irányokban a két hullám fázissebessége megegyezik. Ezeket az irányokat nevezzük a kristály *optikai tengelyeinek*. Az általános esetben tehát két optikai tengely van. Az ilyen kristályokat *kéttengelyű kristályoknak* nevezzük. Vannak olyan kristályok, amelyekben e két tengely egybeesik, ezek az ún. *egytengelyű kristályok.* Ha a *z* tengelyt választjuk optikai tengelynek, akkor ilyen kristályokban $v_I = v_{II}$. Ha az *x* tengely az optikai tengely, akkor $v_{II} = v_{III}$.

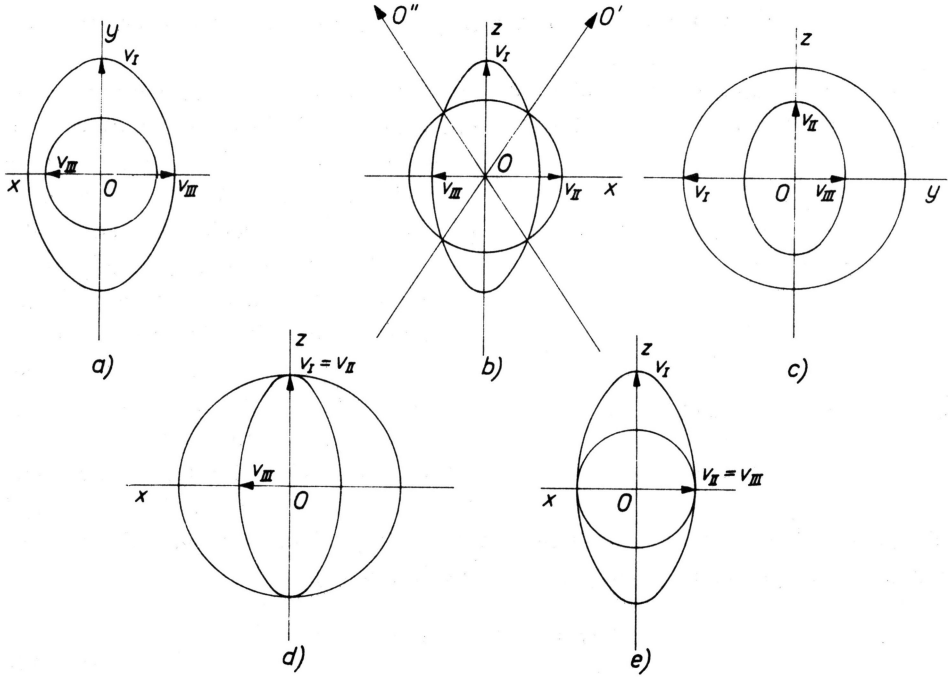
60. ábra -



Az egytengelyű kristályoknál az egyik hullámfelület gömb, a másik pedig forgási ellipszoid. Az első hullám terjedési sebessége nem függ a terjedési iránytól, a másiké függ tőle. Az előbbit rendes (ordinárius), a másikat különleges (extraordinárius) hullámnak nevezzük. A megfelelő

fázissebességeket v_o-val, illetve v_e-vel jelöljük; ahol v_o = állandó. Ha $v_o > v_e$, akkor az egytengelyű kristályt *pozitívnak (61. ábra),* ha $v_o < v_e$, akkor *negatívnak* nevezzük *(61/e ábra).*

61. ábra -



A kéttengelyű kristályban mindkét hullám különleges (extraordinárius). A két optikai tengelyen átmenő sík az ún. *főmetszet*. Egytengelyű kristályokban az optikai tengelyen és a sugárirányon (**S** vektor irányán) átmenő síkot nevezzük főmetszetnek. Ilyen végtelen sok van. A rendes hullám elektromos térerősségének iránya mindig merőleges a főmetszetre, következésképpen az optikai tengelyre is.

A hullámterjedésnek itt vázolt képéből következik, hogy az egytengelyű kristályokon való fénytörésnél a rendes sugár az izotrop esetnek megfelelően törik meg, mivel v_o = áll; a különleges sugár törése ettől eltérő, mert ennek v_e sebessége függ a terjedési iránytól. A kristály törésmutatóját az

$$n_o = \frac{c}{v_o}, \qquad n_e = \frac{c}{v_e}$$ ((54,25). egyenlet)

képletekkel értelmezzük. A fent mondottak értelmében n_o állandó, n_e pedig függ a terjedési iránytól.

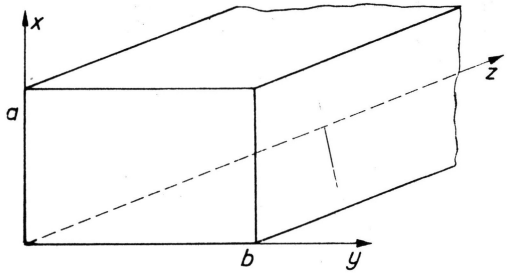
E pontban csupán vázlatosan ismertettük az elektromágneses hullámok anizotrop közegben való terjedésének fontosabb sajátságait azzal a céllal, hogy a közeg anizotrópiájának hatását érzékeltessük. A részletek iránt érdeklődő olvasó figyelmét felhívjuk a kimondottan optikával foglalkozó szakkönyvekre.

Elektromágneses hullámok terjedése hullámvezetőben

A mikrohullámú elektrotechnika fejlődésével az utolsó másfél-két évtizedben igen nagy gyakorlati jelentőségűvé váltak az ún. hullámvezetők. Ezek a nagyfrekvenciájú elektromágneses hullámok vezetésére szolgáló fémcsövek. Egy négyszög keresztmetszetű, ideális vezetőfallal ellátott hullámvezető tanulmányozásával rövid tájékoztatást adunk az ilyen hullámok terjedéséről és azok sajátságairól *(62. ábra).* A koordináta-rendszerünk *z* tengelyét válasszuk a cső tengelyével párhuzamosnak; a cső keresztmetszetének élei legyenek *a*, illetve *b*; $0 < x < a$, $0 < y < b$. A *z* tengely irányában haladó *ω* frekvenciájú monokromatikus hullámot vizsgálunk. Az elektromos és a mágneses térerősség alakja tehát a következő:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(x, y)e^{i(\omega t - kz)}$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(x, y)e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{((55,1). egyenlet)}$$

62. ábra -



Megvizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett elégítik ki ezek a függvények a Maxwell-egyenleteket és a határfeltételeket. Mivel a cső fala ideális vezető, a belső fal mentén el kell tűnniük az elektromos térerősség tangenciális komponenseinek és a mágneses térerősség normális komponenseinek.

E hullámoknak megvan az a különleges tulajdonságuk, hogy a térmennyiségeknek mindig van longitudinális komponensük. Ennek megfelelően a megoldásoknak két fajtáját különböztetjük meg aszerint, hogy a mágneses vagy az elektromos térerősségnek van-e longitudinális komponense. Előbbit *H* típusú, a másodikat *E* típusú hullámnak nevezzük.

Foglalkozzunk előbb a *H* típusú hullámokkal. Ekkor az elektromos térerősség transzverzális, vagyis $E_z = 0$. A határfeltételek miatt az E_x komponensnek az $y = 0$, és az $y = b$ helyen, az E_y komponensnek pedig az $x = 0$ és az $x = a$ helyen el kell tűnnie. Ezért

$$E_x = f(x)\sin\frac{m\pi y}{b}e^{i(\omega t - kz)}$$

$$E_y = g(y)\sin\frac{n\pi x}{a}e^{i(\omega t - kz)}$$

$$E_z = 0 \qquad \text{((55,2). egyenlet)}$$

ahol *m* és *n* egész szám. A hullám mágneses térerősségét az

$$\frac{i\omega}{c}\mathbf{H} = -\mathrm{rot}\,\mathbf{E}$$

Maxwell-egyenletből számíthatjuk ki. A következő megfontolásokban azonban erre nem lesz szükségünk.

Az (55,2) függvényeknek ki kell elégíteniük a div **E** = 0 egyenletet. Ebbe behelyettesítve kapjuk:

$$f'(x)\sin\frac{m\pi y}{b} + g'(y)\sin\frac{n\pi x}{a} = 0 .$$

Ez az egyenlet akkor áll fenn a változók minden értékére a tekintett intervallumokban, ha

$$f'(x) = -A\sin\frac{n\pi x}{a} \qquad \text{((55,3). egyenlet),}$$

$$g'(y) = A\sin\frac{m\pi y}{b} \qquad \text{((55,4). egyenlet),}$$

ahol *A* állandó. Ezekből egyszerű integrálással adódik:

$$f(x) = f_0 + A\frac{a}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{a} \qquad \text{((55,5). egyenlet),}$$

$$g(y) = g_0 - A\frac{b}{m\pi}\cos\frac{m\pi y}{b} \qquad \text{((55,6). egyenlet).}$$

Könnyen belátható, hogy az (55,5), (55,6) függvényekkel felírt (55,2) térerősség-komponensek akkor elégítik ki a

$$\triangle \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$ ((55,7). egyenlet)

hullámegyenletet, ha $f_0 = g_0 = 0$ és

$$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$ ((55,8). egyenlet).

Az *n*, *m* egész számok (55,8) szerint meghatározzák a *k* hullámszámot; minden (*n*, *m*) számpárhoz tartozik *k*-nak egy értéke. Az így meghatározott *k* értékekkel most már végleges alakba írhatjuk a *H* típusú hullámok elektromos térerősségének komponenseit:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= A\frac{a}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}e^{i(\omega t - kz)} \\ E_y &= -A\frac{b}{m\pi}\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}e^{i(\omega t - kz)} \\ E_z &= 0 \end{aligned}\right\}$$ ((55,9). egyenlet).

Vizsgáljuk most az *E* típusú hullámokat. Most a mágneses térerősség transzverzális, tehát $H_z = 0$. Mivel a cső fala ideális vezető, a H_x komponensnek az $x = 0$ és az $x = a$ helyen, a H_y komponensnek pedig az $y = 0$ és az $y = b$ helyen el kell tűnnie. Ezért

$$H_x = G(y)\sin\frac{n\pi x}{a}e^{i(\omega t - kz)}$$ ((55,10). egyenlet),

$$H_y = F(x)\sin\frac{m\pi y}{b}e^{i(\omega t - kz)}$$,

$$H_z = 0$$.

A div **H** = 0 Maxwell-egyenlet és a $\triangle \mathbf{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$ hullámegyenlet kielégítése az előbbihez hasonlóan megköveteli, hogy a $G(y)$, $F(x)$ függvények a következők legyenek:

$$G(y) = B\frac{m\pi}{b}\cos\frac{m\pi y}{b}$$
$$F(x) = -B\frac{n\pi}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}$$ ((55,11). egyenlet)

A hullámszámot itt is az (55,8) egyenlet határozza meg. Az *E* típusú hullám elektromos térerősségét az

$$\frac{i\omega}{c}\mathbf{E} = \mathrm{rot}\,\mathbf{H}$$

Maxwell-egyenletből lehet kiszámítani. Ezt most is mellőzzük.

Az *E* típusú hullám mágneses térerősségének végleges alakja:

$$H_x = B\frac{m\pi}{b}\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}e^{i(\omega t - kz)}$$
$$H_y = -B\frac{n\pi}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}e^{i(\omega t - kz)}$$
$$H_z = 0 \qquad \text{((55,12). egyenlet)}$$

A *k* hullámszámot meghatározó (55,8) egyenletből látszik, hogy *k* akkor lesz valós, ha az *ω* frekvencia nagyobb az

$$\omega_k = c\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \qquad \text{((55,13). egyenlet)}$$

ún. *kritikus frekvenciánál*; vagy más szóval, a hullámhossz kisebb, mint a

$$\lambda_k = \frac{2\pi c}{\omega_k} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}} \qquad \text{((55,14). egyenlet)}$$

kritikus hullámhossz. Ez azt jelenti, hogy a hullámvezetőben nem terjednek tetszőleges frekvenciájú hullámok, hanem csak olyanok, amelyek frekvenciája nagyobb a vezető cső méreteitől függő (55,13) kritikus frekvenciánál.

Határozzuk meg azt a legkisebb frekvenciát, amilyen frekvenciájú hullámot még szállítani képes az *a*, *b* élű négyszög keresztmetszetű vezető. *H* típusú hullám esetén ω_k legkisebb értékét az $n = 1$, $m = 0$ egész számok adják, ha $a \geq b$. Ekkor

$$\omega_k = c\frac{\pi}{a}, \qquad \lambda_k = 2a \qquad \text{((55,15). egyenlet).}$$

Ezt a hullámot *alaphullámnak* nevezzük. Térerősségének komponensei, az *A* tetszőleges állandót *Cm* alakba írva:

$$E_x = E_z = 0; \qquad E_y = C' \sin\frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - kz)}$$ ((55,16). egyenlet),

ahol $C' = C\frac{b}{\pi}$.

Ha $a \le b$, akkor az *m* = l, *n* = 0 egész számokhoz tartozik a legkisebb kritikus frekvencia $\omega_k = c\frac{\pi}{b}$, és ebben az esetben az alaphullám elektromos térerősségének komponensei az *A* = *Cn* választással:

$$E_x = C'' \sin\frac{\pi y}{b} e^{i(\omega t - kz)}$$
$$E_y = E_z = 0$$ ((55,17). egyenlet)

ahol $C'' = C\frac{a}{\pi}$.

E típusú hullám esetén (55,12) szerint zérustól különböző megoldás csak akkor létezik, ha mind az *n*, mind az *m* nagyobb zérusnál. A kritikus frekvencia legkisebb értékét tehát az *n* = l, *m* = l egész számok adják:

$$\omega_k = c\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}}, \qquad \lambda_k = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ ((55,18). egyenlet).

Különbség van tehát a kétfajta hullámok lehetséges számában; a *H* típusúak száma nagyobb, mint az *E* típusúaké. Ennek okát abban látjuk, hogy H_z-re semmilyen korlátozó határfeltétel nincs, viszont E_z-nek a cső falán el kell tűnnie, mert ott E_z tangenciális komponens, és az folytonosan viselkedik.

A *k* hullámszámot kifejezhetjük az (55,13), (55,14) kritikus frekvenciával, illetve kritikus hullámhosszal:

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^2}$$ ((55,19). egyenlet).

A hullám fázissebessége:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2}}$$ ((55,20). egyenlet).

E képletből látszik, hogy v mindig nagyobb a *c* vákuumbeli fénysebességnél, és az $\omega \to \infty$ határesetben éri azt el.

A

$$w = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}}$$ ((55,21). egyenlet)

képlettel definiált *csoportsebesség* viszont mindig kisebb *c*-nél. Ugyanis:

$$w = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2}$$ ((55,22). egyenlet).

Az (55,20) és (55,22) képletek egybevetéséből következik:

$$vw = c^2$$ ((55,23). egyenlet).

Az itt bevezetett csoportsebesség fogalmát kicsit szemléletesebbé akarjuk tenni. E célból gondoljunk el egy hullámcsoportot, amely az ω_0 frekvencia közvetlen közelében levő frekvenciájú hullámok szuperpozíciója. A térmennyiségek komponensei arányosak a

$$\Psi(z,t) = \int f(\omega) e^{i[\omega t - k(\omega)z]}\, d\omega$$ ((55,24). egyenlet)

mennyiséggel. Az $f(\omega)$ függvény a mondottak értelmében csak az ω_0 közvetlen környezetében különbözik zérustól. ω-t írjuk az $\omega = \omega_0 + \alpha$ alakba és $k(\omega)$-t fejtsük sorba, figyelembe véve, hogy α kicsi értékeire szorítkozhatunk, mert $f(\omega)$ ebben az intervallumban különbözik zérustól:

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} \alpha$$ ((55,25). egyenlet).

Ennek alapján (55,24) a következő alakba írható:

$$\Psi(z,t) = e^{i[\omega_0 t - k(\omega_0)z]} \int f(\omega_0 + \alpha) e^{i\alpha\left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} z\right]}\, d\alpha$$ ((55,26). egyenlet).

Az (55,26)-ban előállított $\Psi(z, t)$ olyan alakú, mint egy síkhullám, de az

$$A(z,t)=\int f(\omega_0+\alpha)e^{i\alpha\left[t-\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}z\right]}d\alpha$$

amplitúdó nem állandó, hanem a $t-\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}z$ mennyiség függvénye. Ezt nevezzük *hullámcsomagnak* vagy *hullámcsoportnak*. Az amplitúdó $w=\frac{1}{\frac{dk}{d\omega}}$ terjedési sebessége az ún. csoportsebesség.

Az elektromágneses tér impulzusa. Fénynyomás

Az elektromágneses tér energiája című pontban megmutattuk, hogy az energiamegmaradás törvénye akkor érvényes, ha az elektromágneses térnek is van energiája. A térenergia

$$u=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{ED}+\mathbf{HB})$$

sűrűséggel folytonosan oszlik el a térben. Látni fogjuk, hogy az elektromágneses térnek nemcsak energiája, hanem impulzusa is van.

Tekintsünk *V* térfogatot, amelyet elektromágneses tér tölt ki, és az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy $\varepsilon=\mu=1$. A térfogatban legyenek jelen elektromos töltések. Az elektromágneses tér kölcsönhatásban áll a töltésekkel, azokra erőt fejt ki:

$\mathbf{F}=\int\mathbf{f}\,dV$ ((56,1). egyenlet),

ahol

$\mathbf{f}=\varrho\mathbf{E}+\frac{1}{c}(\varrho\mathbf{v}\times\mathbf{H})$ ((56,2). egyenlet)

az erő sűrűsége; **v** a mozgó töltések sebessége. Az erősűrűség (56,2) kifejezését a

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\varrho\mathbf{v}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},\qquad \mathrm{div}\,\mathbf{E}=4\pi\varrho$$

Maxwell-egyenletek segítségével a következő alakba írhatjuk:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H} - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{H} =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left[\mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + \mathrm{rot}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) + \frac{1}{c}\mathbf{E}\times\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right]$$ ((56,3). egyenlet).

Mivel div **H** = 0, (56,3) kiegészíthető a **H** div **H** taggal, továbbá $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ helyébe a

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

indukciótörvény alapján –rot **E** írható. Ezek után az erősűrűség kifejezése a következő alakot veszi fel:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi}\left[\mathbf{E}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + \mathbf{H}\,\mathrm{div}\,\mathbf{H} + \mathrm{rot}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H} + \mathrm{rot}\,\mathbf{E}\times\mathbf{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\right]$$ ((56,4). egyenlet).

Vegyük most pl. az erősűrűség *x* komponensét:

$$f_x = \frac{1}{4\pi}\left[E_x\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + H_x\,\mathrm{div}\,\mathbf{H} + (\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H})_x + (\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\times\mathbf{E})_x - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_x\right] =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left[E_x\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) + H_x\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}\right) + \right.$$
$$+\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)H_z - \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)H_y +$$
$$\left. +\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)E_z - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)E_y - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_x\right] =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(E_xE_x + H_xH_x - \frac{1}{2}\left(E^2 + H^2\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(E_xE_y + H_xH_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(E_xE_z + H_xH_z\right)\right] - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_x$$ ((56,5). egyenlet).

Az egyenlet jobb oldalán álló $\frac{1}{4\pi}[\ldots]$ kifejezés – mint látható – a

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[E_i E_k + H_i H_k - \delta_{ik}\frac{1}{2}\left(E^2 + H^2\right)\right]$$ ((56,6). egyenlet)

tenzor (i, k = x, y, z) első tenzordivergenciája, vagyis

$$f_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)_x$$ ((56,7). egyenlet).

Hasonlóképpen adódik:

$$f_y = \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)_y$$ ((56,8). egyenlet),

$$f_z = \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)_z$$ ((56,9). egyenlet).

Vezessük be a $\mathbf{T}_x\left(T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}\right)$, $\mathbf{T}_y\left(T_{yx}, T_{yy}, T_{yz}\right)$, $\mathbf{T}_z\left(T_{zx}, T_{zy}, T_{zz}\right)$ segédvektorokat. Ezek segítségével az (56,7)–(56,9) egyenletek a következőképpen írhatók:

$$f_x = \operatorname{div}\mathbf{T}_x - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)_x$$ ((56,7′). egyenlet),

$$f_y = \operatorname{div}\mathbf{T}_y - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)_y$$ ((56,8′). egyenlet),

$$f_z = \operatorname{div}\mathbf{T}_z - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)_z$$ ((56,9′). egyenlet).

Képezzük most az (56,1) erő x komponensét (56,7′) figyelembevételével:

$$F_x = \int_V f_x\, dV = \int_V \operatorname{div}\mathbf{T}_x\, dV - \frac{1}{4\pi c}\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)_x dV$$ ((56,10). egyenlet).

Mivel a V térfogat rögzített, a jobb oldal utolsó tagjából az idő szerinti differenciálhányados jele az integrál elé emelhető:

$$F_x = \int_V \operatorname{div} \mathbf{T}_x \, dV - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_x \, dV$$ ((56,11). egyenlet).

Az első integrál Gauss-tétellel felületi integrállá alakítható:

$$F_x = \int_F T_{xn} \, dF - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_x \, dV$$ ((56,12). egyenlet).

Hasonlóképpen írható az erő *y* és *z* komponense is:

$$F_y = \int_F T_{yn} \, dF - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_y \, dV$$ ((56,13). egyenlet),

$$F_z = \int_F T_{zn} \, dF - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_z \, dV$$ ((56,14). egyenlet).

Az **F** erő a *V* térfogatban levő töltésekre hat, és azok impulzusát növeli. Ha a töltésrendszer összimpulzusát $\mathbf{G}^{\mathrm{M}}$-mel jelöljük, akkor a mechanikából ismert mozgásegyenlet szerint

$$\frac{d\mathbf{G}^{\mathrm{M}}}{dt} = \mathbf{F}$$ ((56,15). egyenlet).

Ennek az egyenletnek *x* komponense (56,12) alapján a következőképpen írható:

$$\frac{d}{dt}\left[G_x^{\mathrm{M}} + \int_V \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_x \, dV \right] = \int_F T_{xn} \, dF = F_x^{(\mathrm{fel})}$$ ((56,16). egyenlet),

ahol $F_x^{(\mathrm{fel})}$ a tekintett térfogat felületére ható erő *x* komponense. Ha a fizikai rendszerünk zárt, akkor a felületen a térerősségek eltűnnek, és ebben az esetben a felületi erő eltűnik. Zárt fizikai rendszer esetén tehát a

$$\frac{d}{dt}\left(G_x^{\mathrm{M}} + \int_V \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_x \, dV \right) = 0$$

egyenlet érvényes. Ugyanilyen alakú egyenlet áll fenn az *y* és *z* komponensre is. Ezeket vektoriális alakban írva, kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{G}^{\mathrm{M}}+\int_V \frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})dV\right)=0$$ ((56,17). egyenlet).

Az (56,17)-ből következik, hogy a töltésrendszer mechanikai impulzusa elektromágneses tér jelenlétekor zárt rendszer esetén nem állandó. Az impulzus megmaradásának tétele csak akkor igaz zárt rendszerre, ha az elektromágneses térnek is tulajdonítunk impulzust, éspedig

$$\mathbf{G}=\int_V \frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})dV$$ ((56,18). egyenlet)

nagyságút. Eszerint (56,17) alapján a töltésrendszer $\mathbf{G}^{\mathrm{M}}$ mechanikai impulzusának és az elektromágneses tér **G** impulzusának az összege állandó:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{G}^{\mathrm{M}}+\mathbf{G}\right)=0;\qquad \mathbf{G}^{\mathrm{M}}+\mathbf{G}=\text{áll.}$$ ((56,19). egyenlet).

A töltések és az elektromágneses tér együtt alkot zárt fizikai rendszert.

Mivel az elektromágneses tér folytonosan oszlik el a *V* térfogatban, (56,18)-at úgy értelmezhetjük, hogy az elektromágneses térimpulzus is folytonosan tölti ki a térfogatot,

$$\mathbf{g}=\frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$ ((56,20). egyenlet)

impulzussűrűséggel.

Az energia-áramsűrűség

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

képletével összevetve, kapjuk az impulzussűrűség és az energia-áramsűrűség között fennálló ún. Planck-féle összefüggést:

$$\mathbf{g}=\frac{1}{c^2}\mathbf{S}$$ ((56,21). egyenlet).

Példaként számítsuk ki a (49,6) síkhullám impulzussűrűségét:

$$\mathbf{g}=\frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{n}\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{1}{4\pi c^2}\varepsilon E^2=\mathbf{n}w\frac{u}{c^2}$$ ((56,22). egyenlet),

ahol $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ a hullám fázissebessége,

$$u = \frac{1}{4\pi}\varepsilon E^2$$

pedig energiasűrűsége.

Az izotrop közegben terjedő elektromágneses síkhullám impulzussűrűsége tehát a terjedés irányába mutat.

A mechanikában megtanultuk, hogy a test impulzusa annak tehetetlen tömegével van kapcsolatban a **p** = *m***v** összefüggés alapján; az impulzussűrűség pedig a tehetetlen tömeg ϱ_m sűrűségével: $\mathbf{g} = \varrho_m \mathbf{v}$. A síkhullám impulzussűrűsége is arányos a terjedési sebességgel, ezért az u/c^2 arányossági tényezőt a hullám elektromágneses tehetetlen tömegsűrűségeként értelmezhetjük: $\varrho_m = u/c^2$.

Ha elektromágneses hullám esik vákuumból fémfelületre (tegyük fel, hogy ideális vezetőre) vagy tükörre, akkor arról teljesen visszaverődik. A visszaverődésnél megváltozik a hullám iránya és ezzel együtt impulzusa is. Az impulzusváltozás – mint tudjuk – erőhatással kapcsolatos: a tükör erőt fejtett ki a hullámra. A hatás és ellenhatás elve alapján a hullám is erőt fejt ki a tükörre. Az egységnyi felületre kifejtett erőt nevezzük fénynyomásnak. Számítsuk ki a fénynyomást merőlegesen beeső síkhullámra. Az 1 cm^2 felületű tükröt 1 s alatt

$G = gc$

impulzus éri. Mivel a hullám teljesen visszaverődik, az 1 s alatti impulzusváltozás, tehát a fénynyomás (mert 1 cm^2-ről van szó):

$p = 2G = 2gc$ ((56,23). egyenlet).

Az impulzussűrűség (56,22) kifejezését behelyettesítve, adódik:

$p = 2u$ ((56,24). egyenlet),

ahol *u* a hullám energiasűrűsége.

Ha a hullám nem tükörre, hanem olyan testre esik, amely azt teljesen elnyeli, akkor az 1 s-ra eső impulzusváltozás a hullám *gc* impulzusával egyezik meg. Ekkor a fénynyomás az (56,24) érték fele:

$p = u$ ((56,25). egyenlet).

A fénynyomást kísérletileg először Lebegyev mutatta ki.

A geometriai optika mint a hullámoptika határesete. Fermat-elv

A korlátlan hullámfronttal rendelkező elektromágneses hullámok (mint pl. a végtelen hullámfrontú síkhullám vagy a gömbhullám) a hullámfelület normálisa irányában terjednek. A hullámfelület normálisait *fénysugaraknak* tekinthetjük, és a fényterjedést e sugarak formájában írhatjuk le. A kísérleti fizikai tanulmányainkból tudjuk, hogy az ún. *geometriai optika* használja ezt a leírásmódot. Az említett esetekben (végtelen síkhullám vagy gömbhullám) a fény egyenes vonalban terjed. Véges hullámfrontú hullámok esetén általában nem írható le a hullámterjedés sugarakkal, mert ekkor *elhajlás* lép fel. (Mint már korábban említettük, az elhajlás jelensége a hullámoptika, tehát a Maxwell-féle fényelmélet alapján tárgyalható.) Inhomogén, izotrop közegekben a sugarak nem egyenesek, hanem görbék. Bizonyos feltételek mellett azonban inhomogén közegekben is alkalmazható a fénysugarakkal való leírásmód véges hullámfrontú hullámok terjedésére. Tehát meghatározott feltételek teljesülésekor alkalmazhatók a gyakorlat számára egyszerűbb, geometriai optikai törvények. A következőkben megmutatjuk, hogy a Maxwell-féle fényelmélet általános érvényű törvényei helyett milyen esetekben használhatók a geometriai optikai törvények.

Feltételezzük, hogy az elektromágneses hullám izotrop, de inhomogén szigetelőben terjed. Ebben az esetben a terjedési sebesség és az amplitúdó nem állandó, hanem függ a helytől. Az elektromos és mágneses térerősség komponensei, amelyeket most egyszerűség kedvéért az $f(x, y, z)$ függvénnyel jelölünk, kielégítik a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2(x,y,z)\Delta f = 0$$ ((57,1). egyenlet)

hullámegyenletet, $v(x, y, z)$ a hullám terjedési sebessége az *x*, *y*, *z* koordinátájú pontban. Legyen a hullám monokromatikus, vagyis:

$$f = f_0(x,y,z)e^{i\omega t}$$ ((57,2). egyenlet),

ahol $f_0(x, y, z)$ a rezgés amplitúdója az *y*, *x*, *z* koordinátájú pontban, *ω* a körfrekvencia. (57,2)-t (57,l)-be beírva, kapjuk az f_0 amplitúdóra vonatkozó hullámegyenletet:

$$\Delta f_0 + \frac{\omega^2}{v^2(x,y,z)} f_0 = 0$$ ((57,3). egyenlet).

Keressük ennek megoldását az

$$f_0 = a(x,y,z)e^{-ikL(x,y,z)}$$ ((57,4). egyenlet)

alakban. Az $L(x, y, z)$ függvényt a fénysugár *optikai úthosszának* nevezzük; $k = 2\pi/\lambda$, ahol *λ* a vákuumbeli hullámhossz. Az

$$n(x,y,z)=\frac{\omega}{kv(x,y,z)}$$ ((57,5). egyenlet)

képlettel definiált *n* törésmutató bevezetésével (57,3) a következő alakba írható:

$$\Delta f_0+n^2(x,y,z)k^2f_0=0$$ ((57,6). egyenlet).

Az (57,4) kifejezést (57,6)-ba beírva, adódik:

$$k^2a\left[n^2-|\operatorname{grad}L|^2\right]-ik\left[2(\operatorname{grad}a)(\operatorname{grad}L)+a\Delta L\right]+\Delta a=0$$ ((57,7). egyenlet).

Most tételezzük fel, hogy *k* igen nagy, vagy ami ugyanazt jelenti, hogy *λ* igen kicsi. Ebben az esetben (57,7)-ben a második és harmadik tag elhanyagolható a sokkal nagyobb első tag mellett. E feltétellel adódik:

$$|\operatorname{grad}L|^2=n^2,$$

amely tulajdonképpen a következőt jelenti:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2=n^2$$ ((57,8). egyenlet).

A közegre jellemző $n(x,y,z)$ törésmutatót ismertnek tekintjük. Az (57,8) egyenlet megoldásával $L(x,y,z)$ meghatározható. Az $L(x,y,z)$ függvényt *eikonálnak*, az (57,8) egyenletet *eikonál-egyenletnek* nevezzük. Ez az egyenlet a geometriai optika alapegyenlete. Az *L* eikonál határozza meg a különböző fázisú felületeket. Ezek normálisai megegyeznek a fénysugarak irányával.

A geometriai optika alapfeladata tehát a következő: megoldjuk az eikonál-egyenletet és képezzük az $L(x,y,z)=\text{const}$ felületek normálisait (ortogonális trajektóriáit), ezek adják a fénysugarak irányát.

A geometriai optika törvényeit elméletileg a $\lambda\to 0$ határesetben kapjuk. Ebben a határesetben a hullámoptika átmegy a geometriai optikába. Azonban nézzük meg azokat a feltételeket, amelyek teljesülésekor a geometriai optika törvényei gyakorlatilag alkalmazhatók, vagyis amikor az (57,7) egyenlet második és harmadik tagja elhagyható az első mellett. Ebben az esetben fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\left.\begin{aligned} kan^2 &\gg 2(\operatorname{grad}a)(\operatorname{grad}L)\\ kn^2 &\gg \Delta L\\ k^2n^2a &\gg \Delta a \end{aligned}\right\}$$ ((57,9). egyenlet)

Az első egyenlőtlenségnek fenn kell állnia akkor is, ha a jobb oldali mennyiségek abszolút értékeit vesszük:

$$kan^2 \gg 2|\operatorname{grad} a||\operatorname{grad} L|.$$

Mivel $|\operatorname{grad} L| = n$, ezért $kan \gg |\operatorname{grad} a|$. Az első egyenlőtlenség tehát a következőképpen írható:

$$\lambda' |\operatorname{grad} a| \ll \pi a$$ ((57,10). egyenlet),

ahol $\lambda' = \lambda / n$ a közegben mért hullámhossz.

A második egyenlőtlenségben *L* második differenciálhányadosai szerepelnek, amelyek a felület görbültségével vannak kapcsolatban. Ha $L = f(x)$ síkgörbe, akkor görbületét az

$$R = \frac{\frac{d^2 L}{dx^2}}{\left(1 + \frac{dL}{dx}\right)^{3/2}}$$ ((57,11). egyenlet)

képlet fejezi ki. Mivel a mi esetünkben $\left|\frac{\partial L}{\partial x}\right| \approx n$, ezért

$$R = \frac{\frac{d^2 L}{dx^2}}{(1+n)^{3/2}}$$ ((57,12). egyenlet).

A felület ϱ_L görbületi sugara *R* reciprok értékével egyenlő. Tekintettel arra, hogy $\Delta L \approx \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}$, (57,9) második egyenlőtlensége a következőképpen írható:

$$\frac{1}{\varrho_L} \ll \frac{kn^2}{(1+n)^{3/2}}$$ ((57,13). egyenlet).

Azonban $n^2/(1+n)^{3/2} \approx \frac{1}{2}$, ezért

$\varrho_L \gg \frac{\lambda}{\pi}$ ((57,14). egyenlet).

(57,9) harmadik egyenlőtlensége a másodikhoz hasonló alakú, ezért (57,14)-hez hasonlóan a különböző amplitúdójú $a(x, y, z) = \text{const}$ felületek ϱ_a görbületi sugarával fejezhető ki:

$\frac{2\pi\varrho_a}{\lambda'} \gg \frac{\lambda'}{2\pi a}$ ((57,15). egyenlet).

Végül figyelembe kell vennünk, hogy a gyakorlatban a hullámfront mindig véges. Hogy az elhajlási jelenségektől eltekinthessünk, a hullámfront *D* lineáris méretének sokkal nagyobbnak kell lennie a hullámhossznál:

$D \gg \lambda'$ ((57,16). egyenlet).

Az itt kapott egyenlőtlenségeket összefoglalva, megállapíthatjuk, hogy a geometriai optika törvényei a következő feltételek fennállása esetén alkalmazhatók:

a) az amplitúdó változása a hullámhosszal szorozva sokkal kisebb, mint maga az amplitúdó;

b) a hullámfelület görbületi sugara sokkal nagyobb a hullámhossznál;

c) az amplitúdófelület görbületi sugarának és a hullámhossznak viszonya sokkal nagyobb a hullámhossz és az amplitúdó viszonyánál;

d) a hullámfront lineáris méretei sokkal nagyobbak a hullámhossznál.

Ezek a feltételek nem érvényesek a fény és árnyék határán – mert ott az amplitúdó ugrásszerűen változik –, továbbá fényforrások és fókuszpontok közelében.

Térjünk vissza az (57,8) eikonál-egyenlethez. Mivel a **k** vektor izotrop közegben a fénysugarak irányába mutat, és merőleges az $L(x, y, z) = \text{const}$ felületekre, az (57,8) egyenlet a következő alakba is írható:

$\text{grad}\, L = \frac{\mathbf{k}}{k} n(x, y, z)$ ((57,17). egyenlet).

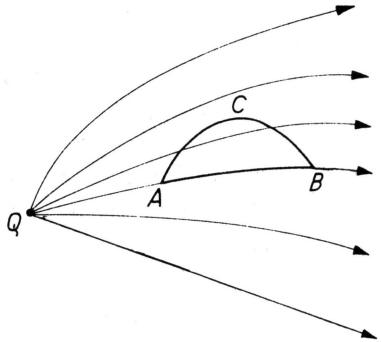
Képezzük az *n***k** vektor tetszőleges zárt görbére vett integrálját;

$\oint_i n\mathbf{k}\, d\mathbf{s} = k \oint_i \text{grad}\, L\, d\mathbf{s} = 0$ ((57,18). egyenlet).

Az *l* zárt görbét válasszuk úgy, hogy annak egy része egyezzen meg az *A* és *B* pontok között terjedő fénysugár útjával, a másik része pedig legyen tetszőleges görbe (lásd a *63. ábrát*). Ebben az esetben az (57,18) vonalintegrál két integrál összegére bontható:

$$\int_{ACB} n\mathbf{k}\,d\mathbf{s} + \int_{BA} nk\,ds = 0$$ ((57,19). egyenlet).

63. ábra -



A második integrálban a **k** és a *d***s** vektor egyirányú, ezért a skalárszorzat az abszolút értékek szorzatával egyenlő. Most vegyük figyelembe a következő egyenlőtlenséget:

$$\left|\int_{ACB} n\mathbf{k}\,d\mathbf{s}\right| \le \int_{ACB} nk\,ds$$.

Ennélfogva (57,19)-ből következik, hogy a törésmutatónak az *AB* fényútra vett integrálja kisebb vagy egyenlő az *ACB* útra vett integrálnál:

$$\int_{\text{fényútra}} n\,ds \le \int_{ACB} n\,ds$$ ((57,20). egyenlet).

Ez az összefüggés azt jelenti, hogy az

$$\mathcal{F} = \int n\,ds$$

integrál a fénysugár mentén minimális értéket vesz fel:

$$\int_{\text{fényút}} n\,ds = \min$$ ((57,21). egyenlet).

Az (57,21) képlettel kifejezett törvényszerűséget nevezzük *Fermat-elvnek*.[5]

Az $n = c/v$ összefüggés alapján (57,21) a következő alakba is írható:

$$t = \int_{\text{fényút}} \frac{ds}{v(x, y, z)} = \min$$ ((57,22). egyenlet),

ahol *t* azt az időtartamot jelenti, amely alatt a fény *A*-ból *B*-be jut. (57,22) a Fermat-elvnek egy másik matematikai megfogalmazása. Eszerint a fény két pont között azon az úton halad, amely megtételéhez a legrövidebb idő szükséges.

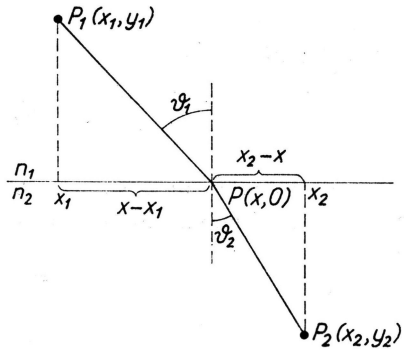
Az (57,21) vagy (57,22) Fermat-elv segítségével könnyen megállapíthatók a fénysugarakra vonatkozó geometriai törvények ismert törésmutatójú közegben.

Példaként vezessük le a fénytörés törvényeit a Fermat-elvből. Tekintsünk két homogén közeget, amelyeket sík felület választ el egymástól *(64. ábra).* A törésmutatók legyenek n_1 = áll., illetve n_2 = áll. Határozzuk meg, hogy milyen úton jut el a fény a felső közeg $P_1(x_1, y_1)$ pontjából az alsó közegben levő $P_2(x_2, y_2)$ pontba. Mivel mindkét közeg törésmutatója állandó, a fénysugarak egyenes vonalban terjednek a két közegben, de a határon megtörnek. A törési pontot jelöljük $P(x, 0)$-val. Képezzük az $\mathcal{F}$ integrált a P_1PP_2 útra:

$$\mathcal{F} = \int_{P_1}^{P_2} n\,ds = n_1\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} + n_2\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}\,.$$

[5] Fermat erre a felismerésre 1657-ben jutott.

64. ábra -



Az $\mathcal{S}$ értéke függ *x*-től. A Fermat-elv szerint a fény azon az úton halad, amelyre $\mathcal{S}(x)$ a minimális értéket veszi fel. Tehát

$$\frac{d\mathcal{S}}{dx} = \frac{n_1(x-x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2}} - \frac{n_2(x_2-x)}{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}} = n_1 \sin \mathrm{j}_1 - n_2 \sin \mathrm{j}_2 = 0 \,,$$

amiből adódik, hogy

$$\frac{\sin \mathrm{j}_1}{\sin \mathrm{j}_2} = \frac{n_2}{n_1} \,.$$

Ez éppen a Snellius–Descartes-féle törvény. Hasonlóképpen kapjuk a visszaverődés törvényét is.