Bevezetés a számításelméletbe I.
6. gyakorlat
2007. március 20.

Borosán Péter
pborosan@cs.bme.hu

1. Legyen A egy olyan mátrix, amelyben minden sorban és minden oszlopban az elemek összege 0, B, pedig egy olyan mátrix, amelynek minden eleme egyenlő. Mi lesz az AB, illetve BA szorzat, ha a szorzás elvégezhető?

2. Az $n \times n$-es A és B mátrixokra teljesül, hogy $AB = A$ és $BA = B$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A^2 = A$ és $B^2 = B$.

3. Számítsuk ki az alábbi mátrixokat:
   a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2007}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2007}$ c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{2007}$
   d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n}$ e) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{n}$ f) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}^{n}$

4. Mennyi a rangja az alábbi mátrixoknak?
   a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & c \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ahol c paraméter.

5. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
   (a) Egy mátrix egy elemét megváltoztatva a rang legfeljebb 1-el változik.
   (b) Bármelyik mátrixban van olyan elem, amelyet alkalmasan módosítva a mátrix rangja megváltozik.
   (c) Ha az A mátrix oszlopai lineárisan függetlenek, akkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldható.
   (d) Ha az A mátrix sorai lineárisan függetlenek, akkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldható.

6. Határozzuk meg az $n \times n$-es A mátrixot, ha tudjuk, hogy $A^2 = E$ és $\det(A - E) \neq 0$.

7. Az A $n \times n$-es mátrixra $A^2 = 0$. Lehet-e A rangja n?

8. Legyen A egy $n \times n$-es invertálható mátrix, B pedig egy olyan $n \times n$-es mátrix, amelyre $AB = 0$ (csupa 0 mátrix). Határozzuk meg a B mátrixot!

9. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzeit, amennyiben léteznek!
   a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$
   f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

10. Igaz-e, hogy ha A, B és C $n \times n$-es mátrixok, $A \neq 0$, valamint $AB = AC$, akkor $B = C$?

11. Legyen A egy 6×5-ös mátrix. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
    a) Ha az első 3 sor lineárisan összefüggő, akkor a bal felső 3×3-as aldeterminánsa 0.
    b) Ha a bal felső 3×3-as aldeterminánsa 0, akkor az első 3 sor lineárisan összefüggő.
    c) Ha az első 3 oszlop lineárisan összefüggő, és az utolsó 3 oszlop szintén, akkor $r(A) \leq 3$.
    d) Ha az első 2 oszlop lineárisan összefüggő, és az utolsó 2 oszlop szintén, akkor $r(A) \leq 3$.