Szélsőérték-számítás

Jelölések

A következő jelölések mind az f függvény x szerinti parciális deriváltját jelentik:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f_x$$

Ugyanígy az f függvény y szerinti parciális deriváltja:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_y f = f_y$$

A második deriváltakra:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{yx} f \\ \partial_{xy} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Bármelyik verziót lehet használni. A következőkben én a pirossal jelölteket fogom használni, mert azt a legegyszerűbb leírni.

Pozitív definit vagy negatív definit-e egy mátrix? (erre majd szükségünk lesz...)

Ezt a kérdést vizsgálhatjuk a "főminorok" segítségével. Egy mátrix főminorjai a bal felső négyzetes részmátrixok determinánsai.

Nézzük a következő mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ \boxed{4 & 5} & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Az A mátrix főminorjai:

$$\begin{aligned} D_1 &= 1 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \ldots = 0 \end{aligned}$$

Ha minden főminor pozitív, akkor a mátrix pozitív definit. $\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & \ldots \\ + & + & + & + & \ldots \end{array}\right)$

Ha a főminorok váltakozó előjelűek, és negatívval kezdődnek, akkor a mátrix negatív definit. $\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \end{array}\right)$

Monostory V. / 110.

Számold ki a függvény lokális szélsőértékeit!

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$$

Először ki kell számolni a parciális deriváltakat:

$$f_x = 2x - y + 3$$
$$f_y = -x + 2y - 2$$

Ott lehet a függvénynek szélsőértéke, ahol mindkét parciális derivált $= 0$. Így fel tudunk írni egy egyenletrendszert:

$$\left.\begin{array}{rcl} f_x = 2x - y + 3 & = & 0 \\ f_y = -x + 2y - 2 & = & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = 2x + 3$$

A második egyenletbe beírva az y-t:

$$\begin{array}{rcl} -x + 2(2x+3) - 2 & = & 0 \\ 3x + 4 & = & 0 \\ x & = & -\frac{4}{3} \end{array}$$

$$y = 2x + 3 = 2\left(-\frac{4}{3}\right) + 3 = \frac{1}{3}$$

Tehát az f függvénynek csak a $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ pontban lehet szélsőértéke.

Most meg kell nézni, hogy minimum vagy maximum van-e. Ehhez ki kell számítani a második deriváltat. A második derivált egy mátrix lesz, Hesse-mátrixnak nevezik:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Kiszámoljuk egyenként a mátrix elemeit:

$$f_{xx} = 2 \quad (\text{az } f_x\text{-et deriváljuk az } x \text{ szerint})$$
$$f_{xy} = -1 \quad (\text{az } f_x\text{-et deriváljuk az } y \text{ szerint})$$
$$f_{yx} = f_{xy} = -1 \quad (\text{a Hesse-mátrix szimmetrikus})$$
$$f_{yy} = 2 \quad (\text{az } f_y\text{-t deriváljuk az } y \text{ szerint})$$

A Hesse-mátrix tehát

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Most meg kell nézni a Hesse-mátrix értékét a lehetséges szélsőérték helyeken, azaz azokban a pontokban amik a megoldás első részében kijöttek. Most csak egy ilyen pontunk volt, a $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

$$H\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Általában a $H(x,y)$ függ az x-től és y-tól. Most nem ez a helyzet, a $H(x,y)$ egy konstans mátrix, minden (x,y) pontban ugyanúgy néz ki.)

A szélsőérték fajtája a $H\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ mátrix definitségétől függ:

- Ha a $H\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ mátrix pozitív definit, akkor a $\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ pont lokális minimum
  (Pozitív definit $\rightarrow$ "mosolygó száj"$\rightarrow$ minimum).
- Ha a $H\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ mátrix negatív definit, akkor a $\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ pont lokális maximum
  (Negatív definit $\rightarrow$ "szomorú száj" $\rightarrow$ maximum).

Nézzük a H főminorjait:

$$\begin{aligned} D_1 &= 2 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1=3 \end{aligned}$$

Mindkettő főminor pozitív, ezért a $H\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ mátrix pozitív definit, vagyis a $\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ pont lokális minimumhelye az f függvénynek.

Példa háromváltozós függvényre

Számold ki a következő függvény lokális szélsőértékeit!

$$f(x,y,z) = 2x^2y + 2xy - 3y^2 - 10z^2$$

I. A parciális deriváltak kiszámítása és az egyenletrendszer megoldása:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} f_x &=& 4xy+2y &=& 0 \\ f_y &=& 2x^2+2x-6y &=& 0 \\ f_z &=& -20z &=& 0 \end{array}\right\}$$

A harmadik egyenletből látszik, hogy $z=0$.

A második egyenletből ki lehet fejezni az y-t:

$$y = \frac{x^2+x}{3}$$

Ezt beírva az első egyenletbe:

$$\begin{aligned} (4x+2)y &= 0 \\ (4x+2)\frac{x^2+x}{3} &= 0 \qquad / \cdot 3,\ :2 \\ (2x+1)(x^2+x) &= 0 \\ (2x+1)x(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Az utolsó sor akkor teljesül, ha a szorzat valamelyik tagja egyenlő 0-val, vagyis:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2} \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

A hozzájuk tartozó y-ok:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1^2 + x_1}{3} = -\frac{1}{12} \\ y_2 &= \frac{x_2^2 + x_2}{3} = 0 \\ y_3 &= \frac{x_3^2 + x_3}{3} = 0 \end{aligned}$$

A z mindig $= 0$.

A kapott pontok tehát:

$$P_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}, 0\right); \quad P_2 = (0,0,0); \quad P_3 = (-1,0,0)$$

II. A másodrendű deriváltak kiszámítása:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} & f_{zx} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{zy} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y & 4x+2 & 0 \\ 4x+2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

Sorra vesszük az első részben kijött pontokat:

$$H(P_1) = H\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

A mátrix főminorjait nézzük:

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{1}{3} \\ D_2 &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 2 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} = -20 \cdot 2 = -40 \end{aligned}$$

Az előjelek: $(- + -)$ ezért a mátrix negatív definit, és így P_1-ben lokális maximum van.

$$H(P_2) = H(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

A mátrix főminorjai:

$$\begin{aligned} D_1 &= 0 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -4 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} = -20 \cdot -4 = 80 \end{aligned}$$

Ez a mátrix nem pozitív definit és nem is negatív definit. Ilyenkor nem tudjátok eldönteni mi van a pontban. (Ez különben egy nyeregpont lesz, de ez elvileg nem kell nektek...)

$$H(P_3) = H(-1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

A mátrix főminorjai:

$$\begin{aligned} D_1 &= 0 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = -4 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} = -20 \cdot -4 = 80 \end{aligned}$$

Ez a mátrix megint nem pozitív definit, és nem negatív definit. Nyeregpont lesz.

Megjegyzés

1. Ha a főminoroknál a $(+ + + + \dots)$ előjelsorozatot csak 0-ák rontják el, akkor vagy lokális minimum vagy nyeregpont van.
2. Ha a főminoroknál a $(- + - + \dots)$ előjelsorozatot csak 0-ák rontják el, akkor vagy lokális maximum vagy nyeregpont van.
3. Ha egyik felső eset sem teljesül, akkor tuti nyeregpont van.

Pl. 3×3-as mátrix esetén:

1. $(0 + +)$: csak a 0 rontja el a $(+ + +)$-t, ezért lok min vagy nyeregpont
2. $(-0-)$: csak a 0 rontja el a $(- + -)$-t, ezért lok max vagy nyeregpont
3. $(0 + -)$: megint csak a 0 rontja el a $(- + -)$-t ezért lok max vagy nyeregpont
4. $(+ - 0)$: ez tuti nyeregpont
5. stb.