VIK, Műszaki Informatika
ANALÍZIS (1)

Numerikus sorok

Oktatási segédanyag

A Villamosmérnöki és Informatikai Kar
műszaki informatikus hallgatóinak tartott előadásai alapján
összeállította:

Fritz Józsefné dr.
Kónya Ilona

2004. szeptember

Szerkesztette: Győri Sándor

1. Numerikus sorok konvergenciája

A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ végtelen összeghez hozzárendelünk egy (s_n) számsorozatot a következő módon:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \underbrace{\underbrace{\underbrace{a_1}_{s_1} + a_2}_{s_2} + a_3}_{s_3} + \cdots + a_n + \cdots$$

s_n

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k : \quad n\text{-edik részletösszeg}$$

E számsorozat határértékének segítségével definiáljuk a sor összegét az alábbiaknak megfelelően.

(D) A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens és összege s, ha létezik a

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) = s \in \mathbb{R}$$

(véges) határérték.

A részletösszegek (s_n) sorozatának viselkedése szerint az alábbi esetek lehetségesek:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \left\{ \begin{array}{r} s \in \mathbb{R}\,, \\ +\infty\,, \\ -\infty\,, \\ \nexists\,, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{az összeg konvergens} \\ \\ \text{az összeg divergens.} \end{array}$$

(Pl.) $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$ esetén $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \infty \qquad \text{(Divergens a sor.)}$$

(Pl.) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^k + \cdots$ divergens, mert

$$\left.\begin{array}{l} s_{2k+1} = 1 \to 1 \\ s_{2k} = 0 \to 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad (s_n) \text{ -nek 2 torlódási pontja van, a sor divergens.}$$

Pl.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \underbrace{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{s_n} + \cdots = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}}_{s_n} = \frac{1}{2} \quad \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 1\,,$$

tehát a sor konvergens.

Pl.

$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} = 1}$, mert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-1}{k+1} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{-1}{2} + 1\right) + \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{4} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1, \qquad \text{konvergens a sor.}$$

Pl. $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{(harmonikus sor) divergens}}$

Ugyanis

$$s_{2^k} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = 1 + k \cdot \frac{1}{2} \;\to\; \infty$$

$$\lim_{k\to\infty} s_{2^k} = \infty \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty}$$

Ugyanis $s_n \geq s_{2^k}$, ha $n > 2^k$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

●●●

Ⓣ **Geometriai sor**

$$1+q+q^2+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-q}\,, & \text{ha } |q|<1\\ \infty\,, & \text{ha } q\geq 1\\ \text{divergens}\,, & \text{ha } q\leq -1\end{cases}$$

Ⓑ $\quad s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}q^{k-1}=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}$

Ha $q=1$:

$$s_n=n\,,\quad \text{ezért}\quad \lim_{n\to\infty}s_n=\infty\,.$$

Ha $q\neq 1$:

$$s_n=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Mivel $q^n\to 0$, ha $|q|<1$, ezért

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{-1}{q-1}=\frac{1}{1-q}\text{ , ha }|q|<1.$$

Mivel $q^n\to\infty$, ha $q>1 \quad\Longrightarrow\quad s_n\to\infty$, ha $q>1$.

Ha $q=-1$:

q^n-nek két torlódási pontja van, mégpedig $t_1=1$, $t_2=-1$.

$\Longrightarrow$ s_n-nek is 2 torlódási pontja van: 0 és 1, tehát divergens.

Ha $q<-1$:

q^n-nek két torlódási pontja van, mégpedig $t_1=-\infty$, $t_2=\infty$.

$\Longrightarrow$ s_n-nek is 2 torlódási pontja van: $-\infty$ és ∞, tehát divergens. ■

Ⓟⓛ. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}q^k=q^3+q^4+q^5+\cdots=\frac{q^3}{1-q}$, ha $|q|<1$.

A részletösszegek a tételben szereplő részletösszegek q^3-szeresei, így a határérték (a sor összege) is q^3-nel szorzódik.

Ⓟⓛ. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a\,q^k=\sum_{k=1}^{\infty}a\,q^{k-1}=\frac{a}{1-q}\text{ , ha }|q|<1}$

Most a részletösszegek a tételben szereplő részletösszegek a-szorosai, így a határérték is a-szoros lesz.

$\left(\text{A képletet úgy érdemes megjegyezni, hogy }\quad s=\dfrac{\text{első tag}}{1-\text{ kvóciens}}\,.\right)$

Ⓜ Ha a sorban *véges sok* tagot elhagyunk vagy megváltoztatunk, akkor a konvergencia ténye nem változik, konvergens sorból konvergens sort, divergens sorból divergens sort kapunk. A sorösszeg értéke természetesen megváltozik.

Ⓜ $\sum_{k=1}^{\infty}(c\cdot a_k)$ és $\sum_{1}^{\infty}a_k$ $(c\neq 0)$ egyszerre konvergens illetve divergens.

(Ugyanis $s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ és $s_n^*=\sum_{k=1}^{n}(c\cdot a_k)$ egyidejűleg konvergens illetve divergens.)

Ⓟl. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-3)^{k+2}}{2^{2k+1}}=\frac{(-3)^2}{2^1}\quad\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{-3}{4}\right)^k=\frac{9}{2}\quad\frac{\left(\frac{-3}{4}\right)^2}{1-(\frac{-3}{4})}$

$$\left(q=\frac{-3}{4}\,,\quad |q|<1\ \text{ teljesül.}\right)$$

Ⓟl. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k+3^{k+1}}{4^{k+2}}=?$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^k}{4^{k+2}}+\frac{3^{k+1}}{4^{k+2}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{3}{16}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^k\right)$$

$$s_n=\frac{1}{16}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k+3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k\right)\ \to\ \frac{1}{16}\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+3\cdot\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right)=\frac{5}{8}$$

Ⓟl. Milyen x-re konvergens a $\sum_{k=0}^{\infty}(\log_2 x)^k$ sor?

$q=\log_2 x,\quad |\log_2 x|<1\iff -1<\log_2 x<1,$

$2^{-1}<\quad x\quad<2,\quad$ azaz $x\in(2^{-1}\,,2)\,.$

●●●

A konvergencia szükséges és elégséges feltétele (Cauchy kritérium):

Ⓣ $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\ \varepsilon>0$-hoz $\exists\ M(\varepsilon)$:

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+k}|<\varepsilon,\quad \text{ha } n>M(\varepsilon)\ \text{ és }\ k\in\mathbb{N}^+$$

Ⓑ Triviálisan igaz, hiszen a számsorozatok konvergenciájára tanult szükséges és

elégséges tétel alkalmazható. (s_n) akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\,\varepsilon > 0$ -hoz $\exists\, M(\varepsilon)$, hogy $n, m > M(\varepsilon)$ esetén $|s_m - s_n| < \varepsilon$.
Legyen $m > n$ és $m = n + k$! Mivel

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,,$$

$$s_m = s_{n+k} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}\,.$$

Ezért

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon\,,$$

ha $n > M(\varepsilon)$ és $k \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges. ∎

(Pl.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ konvergens

Ugyanis

$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{n+k}\right| =$$

$$= \begin{cases} \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)}_{>0} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right)}_{>0} = \\ = \frac{1}{n+1} - \underbrace{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)}_{>0} - \cdots - \underbrace{\left(\frac{1}{n+k}\right)}_{>0}, \qquad \text{ha } k \text{ páros} \\ \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)}_{>0} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{n+k-2} - \frac{1}{n+k-1}\right)}_{>0} + \frac{1}{n+k} = \\ = \frac{1}{n+1} - \underbrace{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)}_{>0} - \cdots - \underbrace{\left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right)}_{>0}, \qquad \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases}$$

Vagyis

$$|s_{n+k} - s_n| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \quad \Longrightarrow \quad N(\varepsilon) \geq \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$$

Későbbiekben könnyen ellenőrizhetjük, hogy ez egy úgynevezett Leibniz sor.

1.1. A konvergencia szükséges feltétele

Ⓣ $\boxed{\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens}\right) \quad \Longrightarrow \quad \left(\lim_{k\to\infty} a_k = 0\right)}$

Ⓑ A Cauchy kritériumból ($k = 1$ választással):

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad a_n \to 0$$

Vagy (egy másik bizonyítás)

$$s_n = s_{n-1} + a_n \quad \Longrightarrow \quad a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$$

■

Ⓜ A feltétel nem elégséges. Például a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor a feltételt teljesíti, mégis divergens.

2. Váltakozó előjelű (alternáló) sorok

$$c_1 - c_2 + c_3 - \cdots + (-1)^{n+1} c_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, c_n \quad , \qquad c_n > 0$$

Leibniz kritérium:

Ⓣ Ha az alternáló sor tagjainak abszolút értékeiből képzett sorozat (fent (c_n)) monoton fogyóan tart 0-hoz (jelben $c_n \searrow 0$), akkor a sor konvergens.

Az ilyen alternáló sor neve: **Leibniz sor**.

Ⓑ Belátjuk, hogy $s_{2k} \nearrow$ és felülről korlátos:

$$s_{2k+2} = s_{2k} + \underbrace{(c_{2k+1} - c_{2k+2})}_{\geq 0} \geq s_{2k} \quad \Longrightarrow \quad s_{2k} \nearrow$$

Másrészt

$$\underbrace{0 \leq s_{2k+2}}_{\text{az előzőből látható}} = c_1 - \underbrace{(c_2 - c_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(c_4 - c_5)}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(c_{2k+2})}_{\geq 0} \leq c_1$$

Tehát s_{2k} monoton növő és felülről korlátos $\Longrightarrow$ s_{2k} konvergens, legyen $s = \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k}$.
Megmutatjuk, hogy $s_{2k+1} \to s$ szintén, és így a sor konvergens.

$$s_{2k+1} = s_{2k} + c_{2k+1} \to s + 0 = s$$

■

Ⓜ Az is megmutatható, hogy az s_{2k+1} részsorozat monoton csökkenően tart s-hez.

$$0 \le s_{2k+1} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2k-1} - c_{2k}) + c_{2k+1} =$$
$$= \underbrace{(c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + c_{2k-1}}_{s_{2k-1}} - \underbrace{(c_{2k} - c_{2k+1})}_{\ge 0} \le s_{2k-1}$$

Hibabecslés Leibniz típusú soroknál

Tehát a Leibniz típusú soroknál a páros indexű részletösszegek s-nél kisebbek vagy egyenlők:

$$s_{2k} \le s.$$

A páratlan indexű elemek monoton csökkenve tartanak s-hez, ezért

$$s \le s_{2k+1}.$$

Mivel

$$s - s_{2k} \le s_{2k+1} - s_{2k} = c_{2k+1} \quad \text{és} \quad s_{2k+1} - s \le s_{2k+1} - s_{2k+2} = c_{2k+2},$$

ezért

$$|H| = |s - s_n| \le c_{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

●●●

Ⓟl. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\ \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\ c_n$

A sor Leibniz típusú és így konvergens, mivel $c_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2n+1}} \searrow 0$.

Ⓟl. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\ \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\ c_n$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{3}\ \sqrt[n]{n}}}_{\downarrow\ 1} = \frac{1}{\sqrt[n]{2n+n}} \le c_n < 1 \to 1$$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tehát nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, így a sor divergens.

(Pl.) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$

$$c_n = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} \quad \to \quad 0$$

A monoton csökkenés most nem triviálisan igaz, hiszen n növelésével a számláló és a nevező is nő. Várható, hogy a (c_n) sorozat monoton csökkenő, mert a nevező "gyorsabban nő". De ezt ilyenkor be kell bizonyítanunk! Tehát igaz-e, hogy

$$\begin{aligned} c_{n+1} &\overset{?}{\leq} c_n \\ \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+2} &\overset{?}{\leq} \frac{n+1}{n^2+2} \\ (n+2)\,(n^2+2) &\overset{?}{\leq} (n+1)\,(n^2+2n+3) \\ 0 &\overset{?}{\leq} n^2+3n-1 \qquad \text{Ez pedig igaz, minden } n \text{ -re .} \end{aligned}$$

Tehát a sor Leibniz típusú és így konvergens.

2.1. Feladatok a váltakozó előjelű sorokhoz

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

1. $\sum_{2}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\lg k}$
2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$
3. $\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\ 2k}{k^2-1}$
4. $\sum_{2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

3. Sorok abszolút és feltételes konvergenciája

Ⓓ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor *abszolút konvergens*, ha $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergens.

Pl. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ abszolút konvergens.

(Konvergens geometriai sorokról van szó, ahol a kvóciens $-\frac{1}{2}$ illetve $\frac{1}{2}$.)

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ nem abszolút konvergens, de konvergens.

Ⓓ *Feltételesen konvergens sor:*
a konvergens, de nem abszolút konvergens sor

Ilyen pl. a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ sor.

Ugyanis beláttuk, hogy ez a sor konvergens, de a $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor divergens.

Ⓣ $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergens}\right) \implies \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens}\right)$
Tehát az abszolút konvergenciából következik a konvergencia.

Ⓑ Ha $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergens, akkor teljesül rá a Cauchy kritérium, továbbá

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \;\le\; |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|$$

miatt

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \le \underbrace{||a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > M(\varepsilon),\ k \in \mathbb{N}^+}_{\text{Cauchy kritérium } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{-ra}}$$

Így $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$-ra is teljesül a szükséges és elégséges tétel (Cauchy kritérium), tehát konvergens. ∎

Ez a tétel azt mutatja, hogy az abszolút konvergencia vizsgálata igen hasznos lehet. A $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sor elemei nem negatívak, sőt pozitívnak tekinthetők, mivel a nulla elemeket nyilván nem kell figyelembe vennünk.

4. Pozitív tagú sorok

(T)

(i) Egy pozitív tagú sor részletösszegei monoton növekedőek.

(ii) Egy pozitív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata korlátos.

(B)

(i) Ha $a_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, akkor $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \;\; \forall\, n$-re.

(ii) a) Ha a sor konvergens, akkor (s_n) konvergens $\implies$ (s_n) korlátos

b) Ha (s_n) korlátos, akkor $(s_n) \nearrow$ miatt (s_n) konvergens.

■

(M) Pozitív tagú sor vagy konvergens, vagy ∞-nel egyenlő. Ez nem igaz általánosságban egy váltakozó előjelű sorra, ahol a részletösszegek sorozatának lehet több torlódási pontja (pl. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$).

(T)

$a_k > 0;\; a_k \geq a_{k+1}$ feltételek mellett

a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\sum_{l=1}^{\infty} a_{2^l} \cdot 2^l$ is konvergens

(B) (¬B)

A bizonyítás lényege, hogy az első sor részletösszegei a második sor megfelelő részletösszegeivel alulról és felülről is becsülhetőek. A becslés igazolásához fontos feltenni, hogy az (a_k) sorozat monoton csökken.

(A részletes bizonyítás megtekinthető Walter Rudin: A matematikai analízis alapjai című könyvében.)

Példák a tétel alkalmazására:

(Pl.)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergens, ha $\alpha > 1$. Egyébként divergens.

Ha $\alpha \leq 0$: $a_n = \frac{1}{n^\alpha} = n^{|\alpha|} \not\to 0$

A konvergencia szükséges feltétele nem teljesül $\implies$ divergens a sor.

Ha $\alpha > 0$: $a_n = \frac{1}{n^\alpha} \searrow$, így alkalmazható az előző tétel:

Vagyis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ és $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2^l)^\alpha} \cdot 2^l$ egyidejűleg konvergens, illetve divergens.

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2^l)^\alpha} \cdot 2^l = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha l}} \frac{1}{2^{-l}} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{l\alpha - l} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha-1)l} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right)^l = \sum_{l=1}^{\infty} q^l$$

Geometriai sort kaptunk, mely csak akkor konvergens, ha

$$|q| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} < 1.$$

Tehát a konvergencia csak akkor teljesül, ha $\alpha - 1 > 0$, vagyis $\alpha > 1$.

Vigyázat! A tételben szereplő két sor összege nem azonos, tehát nem tudtuk megállapítani a $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor összegét, csak a konvergencia tényét tudtuk megállapítani $\alpha > 1$-re. Ilyenkor a megfelelő s_n részletösszeggel tudjuk közelíteni a sor összegét az esetleg előírt pontossággal (lásd hibabecslések).

(Pl.) $\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n}$ divergens

Ugyanis: $\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot \log_2 2^l} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l}$ divergens.

(Pl.) $\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log_2 n)^p}$ $p > 1$ konvergens, egyébként divergens

$p > 0$ esetén alkalmazható az előző tétel:

$$\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot (\log_2 2^l)^p} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l^p} \qquad 0 < p \leq 1: \text{ div.}; \quad 1 < p: \text{ konv.}$$

($p \leq 0$ esete HF. Pl. minoráns kritériummal — lásd később — megmutatható.)

(Pl.) $\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n}$ divergens

A tétel alkalmazható.

$$\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot (\log_2 2^l) \cdot (\log_2 \log_2 2^l)} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l \cdot \log_2 l} \quad \text{ez pedig divergens}$$

5. Pozitív tagú sorok konvergenciájával kapcsolatos elégséges kritériumok

- majoráns kritérium (csak konvergencia eldöntésére)
- minoráns kritérium (csak divergencia eldöntésére)
- hányados kritérium
- gyökkritérium
- integrál kritérium

Ezeket a kritériumokat kizárólag pozitív tagú sorokra alkalmazhatjuk. Így a szóbanforgó kritériumok hasznosak lehetnek az abszolút konvergencia eldöntésére (amiből következik az eredeti — nem feltétlenül pozitív tagú — sor konvergenciája is.)

5.1. Majoráns kritérium

Ⓣ Ha $0 < a_n \leq c_n \quad \forall\, n\text{-re} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens

Ⓑ A megfelelő részletösszegek sorozatára a feltétel miatt fennáll, hogy

$$s_n^a \leq s_n^c.$$

Továbbá $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergenciája miatt $s_n^c \leq K \implies s_n^a$ korlátos és pozitív tagú a sor

$\implies \sum_{1}^{\infty} a_n$ konv. ∎

5.2. Minoráns kritérium

Ⓣ Ha $0 \le d_n \le a_n \quad \forall\, n$-re és $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ divergens $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens

Ⓑ $s_n^a \ge s_n^d \to \infty \implies s_n^a \to \infty$ (spec. rendőrelv) ∎

Ⓜ Mindkét esetben elegendő, ha a feltétel $\forall\, n$ helyett $n \ge N_0$-ra teljesül.

($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n$ egyidejűleg konvergens ill. divergens, hiszen az első szumma részletösszegei $c = \sum_{n=1}^{N_0-1} a_n$ konstanssal nagyobbak, mint a második szumma részletösszegei.)

Ⓟl. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

A harmonikus sorból végtelen sok tagot elhagytunk. Vajon konvergens-e az új sor? A minoráns kritériummal belátjuk, hogy még ez a sor is divergens. Ugyanis

$$a_n > \frac{1}{2n+n} = \frac{1}{3n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergens} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens}$$

Ⓟl. $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^5+3}}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_n < \frac{1}{\sqrt{2n^5}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,n^{5/2}}\,, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}} \text{ konvergens } (\alpha = \frac{5}{2} > 1) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

Ⓟl. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n^5+3}}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

A sor divergens, mivel a rendőrelvvel megmutatható, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, tehát nem tart nullához, így nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele. Részletezve:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{5}\ (\sqrt[n]{n})^5}}_{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{1\cdot 1^5}=1}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2n^5+3n^5}} \le a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2n^5+3}} < \frac{1}{\sqrt[n]{1}} = \underbrace{1}_{\substack{\downarrow \\ 1}}$$

$$\Longrightarrow \quad a_n \to 1\,.$$

(Pl.) $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n^4+5}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$a_n < \dfrac{n+2n}{3n^4} = \dfrac{1}{n^3}\,, \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergens $(\alpha = 3 > 1) \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens

(Pl.) $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-32}{n^3+8}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$n \ge 4$-re a sor pozitív tagú. A minoráns kritériummal megmutatjuk, hogy divergens. Ugyanis, ha $n \ge 6$, akkor $n^2 > 32$ és ezért

$$a_n = \frac{2n^2-32}{n^3+8} > \frac{2n^2-n^2}{n^3+8n^3} = \frac{1}{9n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n} = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergens}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens.}$$

(Pl.) $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^{n+1}}{2^{2n+3}+5}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_n = \frac{2^n+3\cdot 3^n}{8\cdot 4^n+5} < \frac{3^n+3\cdot 3^n}{8\cdot 4^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ konvergens geometriai sor $\left(q=\dfrac{3}{4},\ |q|<1\right) \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens

Feladatok

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

1. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$
2. $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^2-\sqrt{n}}$
3. $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log_2 n}$
4. $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \log_2 n^2}$
5. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n+2}-3}$
6. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n}-3}$
7. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2^n-3}$
8. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n+2^{n+1}}$
9. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n+n}{n \cdot 4^n-3}$
10. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$
11. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{7n^5-2n^3+1}{n^6+3n^2-\sqrt{n}}$
12. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{7n^5-2n^3+1}{n^7+n^2-n+3}$
13. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{7n^5+n^3+1}{n^8-n^2+3}$
14. $\displaystyle\sum_{6}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$

5.3. Hányados kritérium

(T$_1$)

1. $(a_n > 0,\ \forall\ n) \wedge \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1,\ \forall\ n\right) \implies \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.
2. $(a_n > 0,\ \forall\ n) \wedge \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge q \ge 1,\ \forall\ n\right) \implies \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens.

(B)

1. Mivel $\quad a_{n+1} \le q\, a_n \le q^2\, a_{n-1} \le q^3\, a_{n-2} \le \cdots \le q^n\, a_1, \quad \forall\ n\,,$ ezért

$\sum_1^\infty a_n$-nek $\sum_1^\infty q^{n-1}\,a_1$ konvergens majoránsa (geometriai sor, $0<q<1$) $\Longrightarrow$ $\sum_1^\infty a_n$ konvergens.

2. Mivel $a_{n+1}\geq q\,a_n\geq q^2\,a_{n-1}\geq\cdots\geq q^n\,a_1,\quad\forall\,n$, ezért $\sum_1^\infty a_n$-nek $\sum_1^\infty q^{n-1}\,a_1$ divergens minoránsa (geometriai sor, $q\geq 1$) $\Longrightarrow$ $\sum_1^\infty a_n$ divergens.

■

(M$_1$) $\sum_1^\infty a_n$ és $\sum_{N_0}^\infty a_n$ egyidejűleg konvergens ill. divergens, ezért elég, ha a T$_1$ feltételei $\forall\,n\geq N_0$-ra teljesülnek.
(Természetesen, ha konvergensek, akkor az első sor összege $a_1+a_2+\cdots+a_{N_0-1}$-gyel több, mint a második sor összege.)

(M$_2$) T$_1$ (1)-nél nem elég megmutatni, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, q-t is kell találni.

(Pl.) $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ divergens, pedig

$$a_n=\frac{1}{n},\quad a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\quad\text{miatt}\quad\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}<1\,.$$

(Pl.) $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ konvergens. És most is

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{n^2}{(n+1)^2}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2<1\,.\qquad(\text{De }\not\exists\quad 0<q<1)$$

T$_1$ (2)-nél viszont q megtalálása nem fontos. A tétel így is kimondható.

$$(a_n>0)\ \wedge\ \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1,\ \forall\,n\geq N_0\right)\quad\Longrightarrow\quad\sum_1^\infty a_n\ \text{div.}$$

Ekkor ugyanis:

$0 < a_n \le a_{n+1}$, tehát $a_n \nearrow$ (és $a_n > 0$) $\implies$ $a_n \not\to 0$ (nem teljesül a szükséges feltétel) $\implies$ $\sum_1^\infty a_n$ divergens

A hányados kritérium egy kényelmesebben használható formában is kimondható:

(T$_{1^*}$)

1. $(a_n > 0, \forall\, n) \wedge \left(\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1\right) \implies \sum_{n=1}^\infty a_n$ konv.

2. $(a_n > 0, \forall\, n) \wedge \left(\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c > 1\right) \implies \sum_{n=1}^\infty a_n$ div.

(B)

1. Legyen $\varepsilon = \frac{1-c}{2}$, így $q = c + \varepsilon < 1$. A határérték tulajdonsága miatt
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1\,, \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$
Ezért T$_1$ (1)-ből adódik, hogy $\sum_{n=N(\varepsilon)}^\infty a_n$ és így vele együtt $\sum_{n=1}^\infty a_n$ is konvergens.

2. Legyen $\varepsilon = \frac{c-1}{2}$, így $q = c - \varepsilon > 1$. Ekkor $\exists\, N(\varepsilon)$, hogy
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1, \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$
Így T$_1^*$ (2)-ből adódik az állítás. ∎

T$_1^*$ (2) állítása $c = \infty$ esetén is igaz. Ugyanis, ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, akkor is található megfelelő q. (Pl. $q = 2$ is választható.)

(M$_3$) Ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, akkor nem tudtunk meg semmit a konvergenciáról. Lehet a sor konvergens és divergens is.
Pl. $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ divergens, és a $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ konvergens sorok esetén egyaránt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

(M$_4$) A fenti tétel tovább finomítható. Bebizonyíthatók az alábbi állítások is:

$$\text{Ha } a_n > 0\ \forall\, n, \text{ és } \overline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_1^\infty a_n \text{ konvergens.}$$

$$\text{Ha } a_n > 0 \,\forall\, n, \text{ és } \underline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_1^\infty a_n \text{ divergens.}$$

($\overline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ a konvergenciáról nem mond semmit.)

(Pl.) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)\ 3^{n+1}}{n!}}$$

A feladatot a T_1^* tétellel (hányadoskritériummal) oldjuk meg.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)\ 3^{n+2}\quad n!}{(n+1)!\quad (n+2)\ 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\,(n+3)}{(n+1)\,(n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\ \frac{1+\frac{3}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = 0 < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum a_n \text{ konvergens.}$$

5.3.1. Feladatok

Vizsgálja meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

1. $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{(2n+1)!}$
2. $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{2^n}{3^{n+2}\,(n+2)!}$
3. $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
4. $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{n!}{n^n}$
5. $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{n+2}{(n+1)^{n+3}}$
6. $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{n^k}{n!}, \quad k \in \mathbb{N}^+$

5.4. Gyökkritérium

(T$_2$) Ha $\forall\, n \geq N$-re $a_n > 0$ és

1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \implies \sum_N^\infty a_n$ konv.

2. $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \implies \sum_N^\infty a_n$ div.

(B)

1. $0 < a_n \leq q^n$ és $\sum_N^\infty q^n$ konvergens $\implies \sum_N^\infty a_n$ konvergens a majoráns kritérium miatt.

2. $a_n \geq 1 \implies a_n \not\to 0 \implies \sum_N^\infty a_n$ div.

■

(M$_5$) $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ elég, ha végtelen sok n-re igaz. Nem kell, hogy $\forall\ n > N$-re teljesüljön. Ekkor már $\exists\ a_{n_r} \not\to 0$ részsorozat.

Ez a tétel is kimondható limeszes alakban:

(T$_{2^*}$) Ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$ és

$c < 1 \implies \sum a_n$ konvergens.

$c > 1$ vagy $c = \infty \implies \sum a_n$ divergens.

(B) Hasonló a hányados kritériumnál látotthoz.

(M$_6$) $c = 1$, tehát $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ esetén nem használható a gyökkritérium. Az alábbi két példa igazolja állításunk helyességét.

(Pl.) $\sum \frac{1}{n}$ divergens és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

(Pl.) $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

Bebizonyítható az alábbi állítás is:

Ha $a_n > 0,\ n > N$ és $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} < 1$	$\Longrightarrow$	$\sum^{\infty} a_n$ konv.
Ha $a_n > 0,\ n > N$ és $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} > 1$	$\Longrightarrow$	$\sum^{\infty} a_n$ div.

(M$_6$) A második állítás könnyen bizonyítható, hiszen $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} > 1$-ből következik a divergencia, mivel végtelen sok n-re:

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n > 1\,; \quad \text{tehát } \exists\, a_{n_r} \not\to 0 \text{ részsorozat.}$$

(Pl.) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 2}{2n^2 + 5}\right)^{2n^3}$$

A feladatot a T_2^* tétellel (gyökkritériummal) oldjuk meg.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+5}\right)^{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{2n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1+\frac{5}{2n^2}\right)^{2n^2}} = \frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^5} = \frac{1}{\mathrm{e}^3} < 1$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

5.4.1. Feladatok

Vizsgálja meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

1. $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2\ 7^n}$

2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2\ 3^n}{7^{n+1}}$

3. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^6}{2^{n+3}}$

4. $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n^2}$

5. $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^{n^2+2n}$

6. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{4n+1}$

7. $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{2n+1}\ (3n+1)}$

8. $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n}{n-2}\right)^{n^2} \frac{1}{4^n}$

További kidolgozott példák

(Pl.) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n^4\ 8^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Ezt a feladatot legegyszerűbben a majoráns kritérimmal oldhatjuk meg.

$$a_n < \frac{8^n}{n^4\ 8^n} = \frac{1}{n^4}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \text{ konvergens } (\alpha = 4 > 1) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

A hányados kritérium, illetve a gyökkritérium is használható lenne.

(Pl.) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4\ 7^n}{8^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Ennek a feladatnak a megoldása már a majoráns kritérummal elég nehézkes lenne. A hányados kritérim alkalmazható, de itt a gyökkritérium alkalmazása a legjobb választás.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^4\ 7}{8} = \frac{7}{8} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

(Pl.) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(2n+1)\ 5^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Most viszont a hányados kritérium alkalmazása a legcélszerűbb. (A gyökkritérium alkalmazásánál a rendőrelvre is szükségünk lenne az $\sqrt[n]{2n+1}$ sorozat határértékének bizonyításához.)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}\quad(2n+1)\quad 5^n}{(2n+3)\;\;5^{n+1}\quad 3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{5}\quad\frac{2n+1}{2n+3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{5}\quad\frac{2+\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{3}{n}}=\frac{3}{5}<1\quad\Longrightarrow\quad\sum^{\infty}a_n\ \text{ konvergens.}$$

(Pl.) $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!\;\;2^n}{3^{2n}}}\;=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)!\;\;\left(\frac{2}{9}\right)^n$

Itt is a hányados kritériumot alkalmazzuk:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!\;\;\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n+1}}{(n+1)!\;\;\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{9}\;(n+2)=\infty>1$$

$$\Longrightarrow\quad\sum^{\infty}a_n\ \text{ divergens.}$$

(Pl.) Abszolút vagy feltételesen konvergens-e $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5\,n^2\,+\,3}$ sor?

Nem abszolút konvergens, mert

$$|a_n|=\frac{n}{5n^2+3}\geq\frac{n}{5n^2+3n^2}=\frac{1}{8n}$$

és $\dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergens, tehát $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$ divergens (a minoráns kritérium miatt).

Viszont $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ konvergens, mert Leibniz típusú. Ugyanis

$|a_n|=\dfrac{n}{5n^2+3}\searrow 0$, mert

$$|a_n|=\underbrace{\frac{n}{n^2}}_{=\frac{1}{n}}\;\frac{1}{5+\frac{3}{n^2}}\to 0\cdot\frac{1}{5}=0$$

És

$$\begin{array}{rcl} |a_{n+1}| = \dfrac{n+1}{5(n+1)^2+3} & < & \dfrac{n}{5n^2+3} = |a_n| \\ & \Uparrow & \\ (n+1)(5n^2+3) & < & n\,(5n^2+10n+8) \\ & \Uparrow & \\ 5n^3+5n^2+3n+3 & < & 5n^3+10n^2+8n \\ & \Uparrow & \\ 0 & < & 5n^2+5n-3\,, \quad \text{ha } \ n \geq 2 \end{array}$$

Vagyis a sor feltételesen konvergens.

(Majd folytatjuk.)

5.5. Integrálkritérium

Ⓣ Legyen f pozitív értékű <u>monoton csökkenő</u> függvény $[1,\infty)$-en és $f(k) = a_k > 0$

1. Ha $\int\limits_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergens $\implies$ $\sum\limits_{k=1}^\infty a_k$ konvergens

2. Ha $\int\limits_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ divergens $\implies$ $\sum\limits_{k=1}^\infty a_k$ divergens

Ⓜ $\iff$ állítás is igaz, tehát a sor és az improprius integrál egyidejűleg konvergens, illetve divergens.

Ⓑ

1. Mivel

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \underbrace{\int\limits_1^n f(x)\,\mathrm{d}x}_{\substack{\text{monoton növő függvénye } n\text{-nek}}} \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}\,,$$

$$a_k > 0 \ \text{ és } \ \sum_2^n a_k \ \text{ korlátos} \quad \Longrightarrow \quad \sum_2^\infty a_k \ \text{ konvergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum_1^\infty a_k \ \text{ konvergens}$$

2. $\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \le a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = s_{n-1}$

Mivel $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \infty$, tehát a sor divergens.

■

5.6. Hibabecslés pozitív tagú sorösszegek közelítése esetén

1. Ha a sor konvergenciája integrálkritériummal állapítható meg, akkor az s sorösszeg s_n részletösszeggel való közelítésének hibáját is egy integrállal becsülhetjük.

Ⓣ Ha az integrálkritérium 1. állításának feltételei teljesülnek, akkor az $s \approx s_n$ közelítésnél elkövetett hiba

$$0 < H = r_n = a_{n+1} + a_{n+2} \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \le \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ⓑ Mivel

$$a_{n+1} + a_{n+2} \cdots + a_m \le \int_n^m f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

ezért

$$H = r_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} a_k \le \lim_{m\to\infty} \int_n^m f(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

2. Ha a sor konvergenciájára hányados vagy gyökkritériummal következtettünk, akkor a sorhoz található konvergens majoráló geometriai sor. A majoráló sor r_n^* maradékösszegével becsülhetjük az eredeti sor r_n maradékösszegét.
(L. előadás és gyakorlat!)

6. Műveletek konvergens sorokkal

Ⓣ Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b$, $S_a, S_b \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = S_a + S_b \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot a_k) = c \cdot S_a \,.$$

Ⓑ

$$S_a = \lim_{n\to\infty} s_n^a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$S_b = \lim_{n\to\infty} s_n^b = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$S_{a+b} = \lim_{n\to\infty} s_n^{a+b} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) + \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right) = S_a + S_b$$

Másrészt

$$S_{c\,a} = \lim_{n\to\infty} s_n^{c\,a} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (c\,a_k) = c \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = c\,S_a$$

6.1. Végtelen sorok természetes szorzata

	a_1	+	a_2	+	a_3	+	a_4	+	$\cdots$	+	a_k	+	$\cdots$
b_1	b_1a_1	+	b_1a_2	+	b_1a_3	+	b_1a_4	+	$\cdots$	+	b_1a_k	+	$\cdots$
+													
b_2	b_2a_1	+	b_2a_2	+	b_2a_3	+	b_2a_4	+	$\cdots$	+	b_2a_k	+	$\cdots$
+													
b_3	b_3a_1	+	b_3a_2	+	b_3a_3	+	b_3a_4	+	$\cdots$	+	b_3a_k	+	$\cdots$
+													
b_4	b_4a_1	+	b_4a_2	+	b_4a_3	+	b_4a_4	+	$\cdots$	+	b_4a_k	+	$\cdots$
+													
$\vdots$	$\vdots$												
+													
b_k	b_ka_1	+	b_ka_2	+	b_ka_3	+	b_ka_4	+	$\cdots$	+	b_ka_k	+	$\cdots$
+													
$\vdots$	$\vdots$												

A természetes szorzat elemei:

$t_1 = b_1a_1, \quad t_2 = b_2a_1 + b_2a_2 + b_1a_2, \quad t_3 = b_3a_1 + b_3a_2 + b_3a_3 + b_2a_3 + b_1a_3, \ldots$

A természetes szorzat:

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k\,, \qquad \text{ahol} \qquad \sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Ⓣ Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b\,,$ akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sorok természetes szorzata konvergens, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) = S_a\, S_b.$$

(Bizonyítás az előzőek alapján nyilvánvaló.)

6.2. Végetelen sorok Cauchy-szorzata

	a_1	+	a_2	+	a_3	+	a_4	+	$\cdots$	+	a_k	+	$\cdots$
b_1	b_1a_1		b_1a_2		b_1a_3		b_1a_4		$\cdots$		b_1a_k		$\cdots$
+													
b_2	b_2a_1		b_2a_2		b_2a_3		b_2a_4		$\cdots$		b_2a_k		$\cdots$
+													
b_3	b_3a_1		b_3a_2		b_3a_3		b_3a_4		$\cdots$		b_3a_k		$\cdots$
+													
b_4	b_4a_1		b_4a_2		b_4a_3		b_4a_4		$\cdots$		b_4a_k		$\cdots$
+													
$\vdots$	$\vdots$												
+													
b_k	b_ka_1		b_ka_2		b_ka_3		b_ka_4		$\cdots$		b_ka_k		$\cdots$
+													
$\vdots$	$\vdots$												

A Cauchy-szorzat elemei:

$c_1 = b_1a_1,$
$c_2 = b_1a_2 + b_2a_1,$
$c_3 = b_1a_3 + b_2a_2 + b_3a_1,$
$\cdots,$
$c_n = b_1a_n + b_2a_{n-1} + b_3a_{n-2} + \cdots + b_na_1 \qquad$ (indexek összege $n+1$).

A Cauchy-szorzat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,, \quad \text{ahol} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\, a_{n-k+1}\,.$$

Ⓣ Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ abszolút konvergens sorok és $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b$, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Cauchy-szorzata is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = S_a\, S_b\,, \quad \text{ahol} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\, a_{n-k+1}\,.$$

(¬B)

Ⓟ $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots = \dfrac{1}{1-x}\,,$ ha $|x| < 1.$

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^k = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^k\, x^k + \cdots = \dfrac{1}{1+x}\,,$ ha $|x| < 1\,.$

Írjuk fel a fenti két sor Cauchy-szorzatát!

	1	$+$	x	$+$	x^2	$+$	x^3	$+$	$\cdots$	$+$	x^k	$+$	$\cdots$
1	1		x		x^2		x^3		$\cdots$		x^k		$\cdots$
$+$													
$-x$	$-x$		$-x^2$		$-x^3$		$-x^4$		$\cdots$		$-x^{k+1}$		$\cdots$
$+$													
x^2	x^2		x^3		x^4		x^5		$\cdots$		x^{k+2}		$\cdots$
$+$													
$-x^3$	$-x^3$		$-x^4$		$-x^5$		$-x^6$		$\cdots$		$-x^{k+3}$		$\cdots$
$+$													
$\vdots$	$\vdots$												
$+$													
$(-1)^k x^k$	$\cdots$												
$+$													
$\vdots$	$\vdots$												

Cauchy-szorzat:

$$1+0+x^2+0+x^4+0+x^6+\cdots = 1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2k}+\cdots = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1+x}\,,$$

ha $|x| < 1\,.$

Házi feladat:

Határozzuk meg a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=\mathrm{e}^x$ és $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}=\mathrm{e}^y$ sorok Cauchy-szorzatát!

(Megjegyzés: $\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^{x+y}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+y)^k}{k!}$ eredményt kell kapni.)

6.3. Zárójelek elhelyezése illetve elhagyása végtelen sor esetén

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+\cdots$$

A fenti sor részletösszegei:
$s_1=a_1,\ s_2=a_1+a_2,\ s_3=a_1+a_2+a_3,\ s_4=a_1+a_2+a_3+a_4,\ s_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5,\ldots$ stb. Az

$$a_1+a_2+\underbrace{(a_3+a_4+a_5)}_{a_3^*}+a_6+\cdots$$

bezárójelezett új sor részletösszegei

$$s_1^*=a_1,\ s_2^*=a_1+a_2,\ s_3^*=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5,\ s_4^*=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6,\ \ldots$$

Zárójelek elhelyezése esetén a részletösszegek sorozata szűkül. Ha a sor konvergens volt, akkor zárójelek behelyezése esetén is konvergens marad. Előfordulhat, hogy divergens sorból – zárójelek elhelyezése után – konvergens sor lesz.

Pl. $(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-\cdots$.

Véges sok zárójel elhelyezése nem befolyásolja a konvergenciát!

Zárójelek elhagyása után a részletösszegek sorozata bővül. Ha a sor divergens volt, akkor zárójelek elhagyása esetén is divergens marad. Előfordulhat, hogy konvergens sorból – zárójelek elhagyása után – divergens sor lesz. Véges sok zárójel elhagyása nem befolyásolja a konvergenciát!

6.4. Végtelen sor elemeinek felcserélése (átrendezése)

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots+a_k+\cdots$$

$$a_1+a_3+a_2+a_{100}+a_5+a_6+\cdots+a_{99}+a_4+a_{101}+\cdots$$

Véges sok elem felcserélése nem változtatja meg a konvergencia vagy divergencia tényét, nem változik meg a sorösszeg sem. Végtelen sok elemcsere megváltoztathatja a sorösszeget, feltételesen konvergens sor átrendezhető akár divergenssé is.

Ⓣ Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens és $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergens, akkor $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ átrendezhető úgy, hogy divergens legyen, és átrendezhető úgy is, hogy egy előre tetszőlegesen megadott szám legyen az összege. (Nem bizonyítjuk.)

Ⓣ Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abszolút konvergens, akkor tetszőleges átrendezése is abszolút konvergens, az átrendezés nem változtatja meg a sorösszeget. (Nem bizonyítjuk.)

7. Feladatok sorokhoz

1. a) $\sum_{2}^{\infty} \frac{3^{k+1} + 2^{2k+1}}{5^k} = ?$

   b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} = ?$

   c) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n+1}}} = ?$

2. Konvergensek-e az alábbi sorok?

   a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}}$

   b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n n^3 + 1}{n^5 + 1}$

   c) $\sum_{1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2+5}}$

   d) $\sum_{1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n+3)!}$

   e) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{3n+1}$

   f) $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{n\,4^{n+1}}$

   g) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n + 2^n}$

   h) $\sum_{1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n + n}$

   i) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

   j) $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

   k) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{7^{3n+2}}$

   l) $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n}{(3n)!}$

m) $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{n}$

n) $\sum_{1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{5^n+6^n}$

o) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{2n+1}$

p) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+5}$

q) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^3+5}$

r) $\sum_{10}^{\infty}\frac{\frac{1}{n}}{n-\sqrt{n^2-\sqrt{n}+3}}$

s) $\sum_{1}^{\infty}\left(1-\frac{\sqrt{5}}{3n}\right)^{n}$

t) $\sum_{1}^{\infty}\frac{10^n}{n!\,n^2}$

u) $\sum_{1}^{\infty}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{n}\right)^{n^2+n}$

v) $\sum_{1}^{\infty}\frac{n^3}{\left(4+\frac{2}{n^2}\right)^n}$

w) $\sum_{1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

x) $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2}$

y) $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2}$

z) $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}$

3. Határozzuk meg az alábbi sorok értékét 10^{-3}-nál kisebb hibával!

a) $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{2n^2+1}\right)^{n}$

b) $\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{(2n)!-n!}$

c) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{2^n}{2^n+10^n}$

d) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^n+5}$

e) $\sum_{1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$

f) $\sum_{1}^{\infty}\frac{n!\,3^n}{(2n)!}$

4. Mekkora hibát követünk el, ha a sorösszeget 10. részletösszegével közelítjük?

$(s\approx s_{10};\quad H=r_{10}=\sum_{k=11}^{\infty}a_k;\quad |H|\le ?)$

a) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n! + \sqrt{2}}$

b) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^2 + 3^n}$

c) $\displaystyle\sum_1^\infty \left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{n!}{(2n)!}$

e) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{3^n}{2^{2n} + n^2 + 3}$

f) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{(-1)^n\,(n-1)}{n^2 + n}$

5. Abszolút illetve feltételesen konvergens-e az alábbi sor?

a) $\displaystyle\sum_1^\infty (-1)^n\,\frac{n+4}{n^2+4}$

b) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n\,\log_2 n^2}$

c) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{2n^2 - 3n + 8}$

d) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3^n} + \cdots$

e) $\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{1^2} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2} + \cdots$

f) $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{2^3} - \cdots - \frac{1}{n!} + \frac{1}{2^n} - \cdots$

g) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \cdots + \frac{1}{(2n-1)^3} - \frac{1}{(2n)^2} + \cdots$

h) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2^n} + \cdots$

8. Számsorozatok nagyságrendje

(D) $a_n = O(b_n)$ („nagy ordó b_n”), ha $\exists\ c_1$:
$|a_n| \le c_1|b_n|, \quad n > N$ (legfeljebb véges sok kivétellel)

(D) $a_n = \Omega(b_n)$ („omega b_n”), ha $b_n = O(a_n)$.

Vagyis $|b_n| \le c_1|a_n| \quad n > N \quad (\exists\ c_1)$.
Ekkor: $c_2|b_n| = \dfrac{1}{c_1}|b_n| \le |a_n|$, vagyis most $|a_n|$ alulról becsülhető $|b_n|$ segítségével.

(D) $a_n = \Theta(b_n)$ („teta b_n”), ha $a_n = O(b_n)$ és $a_n = \Omega(b_n)$.

Az előzőből következik:

(T) $a_n = \Theta(b_n) \iff c_2|b_n| \le |a_n| \le c_1|b_n|$

(Pl.) $a_n = 2n^2 - n + 3$

1. $a_n = O(n^2)$, mert $2n^2 - n + 3 \le 2 \cdot n^2$, ha $n \ge 3$. Persze $a_n = O(n^3)$ is igaz, sőt általánosságban: $a_n = O(n^{2+\alpha}), \quad \alpha \ge 0$.
2. $a_n = \Omega(n^2)$, mert $1 \cdot n^2 = 2n^2 - n^2 \le 2n^2 - n + 3$. Sőt $a_n = \Omega(n^{2-\alpha}), \quad \alpha \ge 0$.
3. Tehát $a_n = \Theta(n^2)$.

8.1. Műveletek Θ-val

(T) $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \Theta(c_n) \\ b_n = \Theta(d_n) \end{array}\right\} \implies \begin{cases} 1. & a_n \cdot b_n = \Theta(c_n \cdot d_n) \\ 2. & \dfrac{a_n}{b_n} = \Theta\left(\dfrac{c_n}{d_n}\right) \\ 3. & a_n + b_n = \Theta(c_n + d_n) \end{cases}$$

Különbségre nem igaz!

Megj.: Akkor van értelme használni ezt, ha c_n és d_n sokkal „egyszerűbb” sorozatok.

(B)

$$0 < \alpha_1 c_n \le a_n \le \alpha_2 c_n, \quad \text{mert } a_n = \Theta(c_n)$$
$$0 < \beta_1 d_n \le b_n \le \beta_2 d_n, \quad \text{mert } b_n = \Theta(d_n)$$

1. Azonos értelmű egyenlőtlenségek összeszorozhatók:

$$(\alpha_1\beta_1)c_nd_n \le a_nb_n \le (\alpha_2\beta_2)c_nd_n \quad \Longrightarrow \quad a_nb_n = \Theta(c_nd_n)$$

2.
$$\left.\begin{array}{l} 0 < \alpha_1 c_n \le \alpha_n \le \alpha_2 c_n \\ 0 < \dfrac{1}{\beta_2}\dfrac{1}{d_n} \le \dfrac{1}{b_n} \le \dfrac{1}{\beta_1}\dfrac{1}{d_n} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)\frac{c_n}{d_n} \le \frac{a_n}{b_n} \le \left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)\frac{c_n}{d_n},$$

tehát $\dfrac{a_n}{b_n} = \Theta\left(\dfrac{c_n}{d_n}\right)$

3.
$$\alpha(c_n + d_n) \le \alpha_1 c_n + \beta_1 d_n \le a_n + b_n \le \alpha_2 c_n + \beta_2 d_n \le \beta(c_n + d_n)$$
$$\alpha = \min\{\alpha_1, \beta_1\}, \quad \beta = \max\{\alpha_2, \beta_2\}$$
$\Longrightarrow a_n + b_n = \Theta(c_n + d_n)$

■

(Pl.) $a_n = \sqrt{2n^2+3n+1} - \sqrt{n^2-n+1} = \dfrac{n^2+4n}{\sqrt{2n^2+3n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} =$

$$= \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n)+\Theta(n)} = \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n+n)} = \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n)} = \Theta\left(\frac{n^2}{n}\right) = \Theta(n) \quad \Longrightarrow \quad a_n \to \infty$$

(Pl.) $a_n = \sqrt{7n^2-2n+10} - \sqrt{7n^2-2n+3} = \dfrac{10-3}{\sqrt{7n^2-2n+10} + \sqrt{7n^2-2n+3}} =$

$$= \frac{\Theta(1)}{\Theta(n+n)} = \Theta\left(\frac{1}{n}\right) \quad \Longrightarrow \quad a_n \to 0$$

8.2. $a_n \sim b_n$

(D)

> a_n aszimptotikusan egyenlő b_n-nel, jelben $a_n \sim b_n$, ha
>
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

(Pl.) $\sin\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$, mert $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$

(Pl.) $n! \sim \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ **Stirling formula** (¬B)

Ⓣ $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \sim c_n \\ b_n \sim d_n \end{array}\right\} \implies \begin{cases} 1. & a_n + b_n \sim c_n + d_n \\ 2. & a_n b_n \sim c_n d_n \\ 3. & \dfrac{1}{a_n} \sim \dfrac{1}{c_n} \\ 4. & \dfrac{b_n}{a_n} \sim \dfrac{d_n}{c_n} \end{cases}$$

Megint nincs különbség!

Ⓑ

$$a_n \sim c_n: \quad \frac{a_n}{c_n} \to 1 \quad \implies \quad 0 < 1-\varepsilon < \frac{a_n}{c_n} < 1+\varepsilon, \quad n > N_1$$

$$b_n \sim d_n: \quad \frac{b_n}{d_n} \to 1 \quad \implies \quad 0 < 1-\varepsilon < \frac{b_n}{d_n} < 1+\varepsilon, \quad n > N_2$$

Legyen $n > \max\{N_1, N_2\} = N$

1. $1-\varepsilon = \dfrac{(1-\varepsilon)c_n + (1-\varepsilon)d_n}{c_n + d_n} < \dfrac{a_n + b_n}{c_n + d_n} < \dfrac{(1+\varepsilon)c_n + (1+\varepsilon)d_n}{c_n + d_n} = 1+\varepsilon\,,$
   ha $n > N$
2. ¬B
3. $\dfrac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{c_n}} = \dfrac{c_n}{a_n} = \dfrac{1}{\frac{a_n}{c_n}} \to 1$
4. Az előző kettőből következik: $a_n \sim c_n \implies \dfrac{1}{a_n} \sim \dfrac{1}{c_n}$; másrészt $b_n \sim d_n$
   $\implies \dfrac{b_n}{a_n} \sim \dfrac{d_n}{c_n}$

Ⓟl. $a_n = \sqrt[3]{2n^2+n+1} - \sqrt[3]{2n^2-3n-7} =$

$$= \frac{2n^2+n+1-(2n^2-3n-7)}{\left(\sqrt[3]{2n^2+n+1}\right)^2 + \sqrt[3]{2n^2+n+1}\sqrt[3]{2n^2-3n-7} + \left(\sqrt[3]{2n^2-3n-7}\right)^2} \sim$$

$$\sim \frac{4n}{\left(\sqrt[3]{2}\,n^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{2}\,n^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{2}\,n^{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{4n}{\sqrt[3]{4}\cdot 3\,n^{\frac{4}{3}}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{n}} \quad \implies \quad a_n \to 0$$

Ⓟl. $a_n = \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{n}}{\sqrt[3]{2n^2+n+1} - \sqrt[3]{2n^2-3n-7}} \sim \dfrac{\frac{\pi}{2}}{\frac{4}{3\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{n}}} = \text{konst}\cdot\sqrt[3]{n} \to \infty$

Pl. $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \dfrac{\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} 2\pi n}{\left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \sqrt{2\pi \cdot 2n}} = \dfrac{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}{4^n} \to 0$

Pl. Az előző példa felhasználásával:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \quad \left(= \Theta\left(\frac{4^n}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

M $a_n \sim b_n \quad \not\Longrightarrow \quad (a_n)^n \sim (b_n)^n$ Pl. $1 + \underset{\downarrow}{\underset{1}{\frac{1}{n}}} \sim \underset{\downarrow}{\underset{1}{\sqrt[n]{2}}}$, de $\left(1 + \underset{\downarrow}{\underset{\mathrm{e}}{\frac{1}{n}}}\right)^n \not\sim 2$

Persze $a_n \sim b_n$ esetén $a_n^k \sim b_n^k, k \in \mathbb{N}^+$ már igaz ($k \neq f(n)$). (k valós is lehet)

$$\left(\frac{a_n}{b_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^k \to 1\right)$$

És igaz a következő tétel is:

T
$a_n, b_n > 0$
$$a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} \sim \sqrt[n]{b_n}$$

B $a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{a_n}{b_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < 1 - \varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon)$

$$\Longrightarrow \quad \underset{\downarrow}{\underset{1}{\sqrt[n]{1-\varepsilon}}} < \sqrt[n]{\frac{a_n}{b_n}} < \underset{\downarrow}{\underset{1}{\sqrt[n]{1+\varepsilon}}} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{\frac{a_n}{b_n}} \to 1$$

■

Pl. $\sqrt[n]{\dfrac{3n^2 - n\sqrt{n} + 6}{2n^2 + 3n + 7}} \sim \sqrt[n]{\dfrac{3}{2}} \sim 1$

Pl. Határozza meg A és α értékét úgy, hogy $\cos\dfrac{1}{n} - 1 \sim An^\alpha$ teljesüljön!

1. megoldás:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{An^\alpha}=1 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{n^\alpha}=A\neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=0\text{-ra } A=0 \text{ lenne}\\ \alpha>0\text{-ra } \frac{0}{\infty}\to 0=A \text{ lenne}\end{array}\right\}\Longrightarrow\quad \alpha<0$$

$$u:=\frac{1}{n}\ \overset{n}{\underset{\infty}{\downarrow}}\ 0$$

$$\lim_{u\to+0}\ \underbrace{\frac{\cos u-1}{u^{-\alpha}}}_{\frac{0}{0}\text{ alakú }(-\alpha>0)}\ \overset{\text{L'H}}{=}\lim_{u\to+0}\frac{-\sin u}{-\alpha u^{-\alpha-1}}=\lim_{u\to+0}\frac{\sin u}{u^{-\alpha-1}}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}=A$$

ha $-\alpha-1=1 \quad\Longrightarrow\quad \alpha=-2, A=-\frac{1}{2}$.

Tehát $\cos\frac{1}{n}-1\sim-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$

2. megoldás:

$\cos x-1=-2\sin^2\frac{x}{2}$ azonosság segítségével: $\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{An^\alpha}=\frac{-2\sin^2\frac{1}{2n}}{An^\alpha}\to 1$, ha $An^\alpha=-2\left(\frac{1}{2n}\right)^2\to A=-\frac{1}{2},\alpha=-2$

Feladat:

Határozza meg A és α értékét úgy, hogy $\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\sim An^\alpha$ fennálljon!

Ⓣ
$a_n>0, b_n>0$

$a_n\sim b_n \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ egyidejűleg konvergens, illetve divergens

(Jelben: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n$)

Ⓑ $a_n\sim b_n \quad\Longrightarrow\quad \frac{a_n}{b_n}\to 1 \quad\Longrightarrow\quad 1-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<1+\varepsilon$. Legyen $\varepsilon<1$.

Tehát $c_1b_n<a_n<c_2b_n \quad (c_1=1-\varepsilon>0, \quad c_2=1+\varepsilon)$

Ha $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergens, akkor $b_n<\frac{1}{c_1}a_n$ miatt $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ is konvergens (majoráns kritérium)

Ha $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ divergens, akkor $\frac{1}{c_2}a_n<b_n$ miatt $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ is divergens (minoráns kritérium)

Ha $\sum^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $a_n < c_2 b_n$ miatt $\sum^{\infty} a_n$ is konvergens (majoráns kritérium)
Ha $\sum^{\infty} b_n$ divergens, akkor $c_1 b_n < a_n$ miatt $\sum^{\infty} a_n$ is divergens (minoráns kritérium)
■

(Pl.) $\sum^{\infty} \frac{1}{3n^2 - 2\sqrt{n} + 8} = \sum^{\infty} a_n$

$a_n \sim \frac{1}{3n^2} = b_n$ és $\sum^{\infty} b_n$ konvergens $\implies$ $\sum^{\infty} a_n$ konvergens

(Pl.) $\sum^{\infty} \frac{1}{7n + \sqrt[3]{n} - 1} = \sum^{\infty} a_n$

$a_n \sim \frac{1}{7n} = b_n$ és $\sum^{\infty} b_n$ divergens $\implies$ $\sum^{\infty} a_n$ divergens

(Pl.) $\sum^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = \sum^{\infty} a_n$

$a_n \sim \frac{1}{n} = b_n$ és $\sum^{\infty} b_n$ divergens $\implies$ $\sum^{\infty} a_n$ divergens

(Pl.) $\sum^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) = \sum^{\infty} a_n$

$a_n = 2\sin^2 \frac{1}{2n} \sim 2\frac{1}{4n^2} = \frac{1}{2n^2} = b_n$ és $\sum^{\infty} b_n$ konvergens $\implies$ $\sum^{\infty} a_n$ konvergens

Feladatok:
Konvergensek-e az alábbi sorok?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n}\right)$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch} \frac{2}{n} - \cos \frac{3}{n}\right)$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{3n}{n}}$

(D) $a_n = o(b_n)$ („kis ordó b_n”), ha $\forall\ c > 0$-ra $|a_n| \le c|b_n| \quad n > N$-re

Más jelölés is használatos:

$$a_n \ll b_n, \text{ ha } a_n = o(b_n)$$

(Nagyságrendileg kisebb vagy lényegesen kisebb.)

A definíció következménye, hogy $b_n \neq 0$ esetén $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \le c, \quad n > N \quad \forall\ c > 0$-ra. Ebből persze már következik, hogy ekkor $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ N_0(\varepsilon)$, hogy $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon$, ha $n > N_0(\varepsilon)$.

Nyilvánvalóan igaz az alábbi állítás is:

(T) $a_n = o(b_n), \quad b_n \neq 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

(Pl.) Mit jelent $a_n = o(1)$?

Mivel $\forall\ c > 0$-ra $|a_n| \le c$, ha $n > N$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(M) A következő állítás is könnyen bizonyítható lenne:

$$a_n \sim b_n \iff a_n = b_n(1 + o(1)).$$

(Pl.) $n! = o(n^n)$, mert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

1. megoldás:

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} < \frac{1}{n} \qquad + \text{rendőrelv}$$

2. megoldás:

$$\frac{n!}{n^n} \sim \frac{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{\mathrm{e}^n} \to 0$$

Vége!