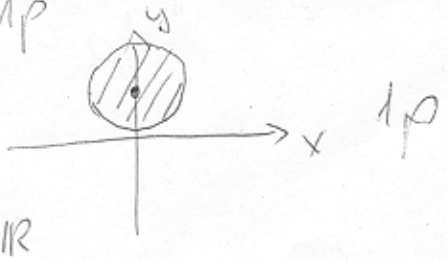
A csoport

1) $z = x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$ 1p

$x^2+(y-2)^2 \le 2$ 1p $\Rightarrow$ $(0;2)$ kp-ú, $\sqrt{2}$ sugarú körlemez (zárt) 1p



1p

2) $z = a+bi$, $a,b \in \mathbb{R}$

$(a+bi)^2 + a^2 = 1-2i$ 1p $\Rightarrow$ $2a^2-b^2+2abi = 1-2i \Rightarrow$ $2a^2-b^2=1$ 1p

$2ab=-2 \Rightarrow a \neq 0$ és $b=-\frac{1}{a}$

$\Rightarrow 2a^2-\left(-\frac{1}{a}\right)^2 = 1 \Rightarrow$ $2a^4-a^2-1=0 \Rightarrow (a^2)_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$ 1p, de $a^2 \neq -\frac{1}{2}$ miatt

$a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$. A megoldások: $z_1 = 1-i$, $z_2 = -1+i$ 1p

3) $n=1$ esetén $\sum_{k=1}^{1} (2k-1)^2 = (2\cdot 1-1)^2 = 1 = \frac{1\cdot(4\cdot 1-1)}{3}$ 1p

Tfh. n-re az állítás igaz, és belátjuk $(n+1)$-re. 1p

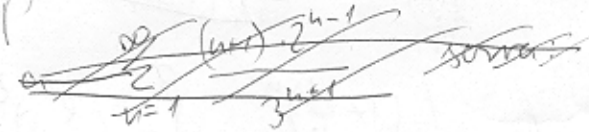
$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2n+1)^2 \overset{1p}{=} \frac{n(4n^2-1)}{3} + (2n+1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)+3(2n+1)^2}{3} =$$

$$= \frac{(2n+1)\cdot\left[n(2n-1)+3(2n+1)\right]}{3} = \frac{(2n+1)(2n^2+5n+3)}{3} = \frac{(2n+1)(2n+3)(n+1)}{3} \overset{1p}{=} \frac{(n+1)\left(4(n+1)^2-1\right)}{3}$$

4) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n+1)-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} =$ 2p

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = 1$$ 1p 1p

5) Hányadoskritériummal: 1p



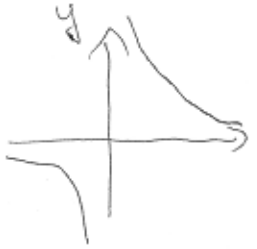
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)\cdot 2^n}{3^{n+2}}}{\frac{(n+1)\cdot 2^{n-1}}{3^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{2}{3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3} < 1$$, tehát az 1p

~~az adott~~ sor ~~osztott~~ konvergens. 1p

B csoport

1) $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ 1p

$\operatorname{Im}\left((x+yi)^2\right)=2 \Rightarrow \operatorname{Im}(x^2-y^2+2xyi)=2 \Rightarrow 2xy=2 \Rightarrow x\neq 0$ és $y=\frac{1}{x}$ 1p 1p



1p

2)

$z(z^4+16)=0 \Rightarrow z_0=0$ vagy $z^4=-16$ 1p Az előbbiből

$z^4=16(\cos\pi+i\sin\pi) \Rightarrow$ 1p

$z_1=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

$z_2=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ 2p

$z_3=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

$z_4=2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

3) $n=1$ esetén $\sum_{k=1}^{1} k^3=1^3=1=\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ 1p

Tfh. n-re igaz, és belátjuk $(n+1)$-re. 1p

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2\left[n^2+4(n+1)\right]}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$ 1p 1p

4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt[6]{n^6+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}{\sqrt[6]{1+\frac{1}{n^6}}}=2$$ 3p 1p

5) Gyökkritériummal: ~~a $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{?}$ sorra.~~ 1p

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}\right)^2=\left(\frac{e}{e^2}\right)^2=\frac{1}{e^2}<1,$$ 1p 1p

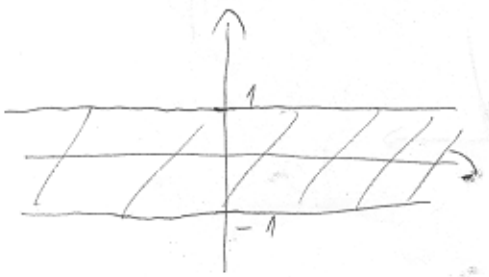
~~abszolút~~ konvergens 1p

C csoport

1) $z = x+yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ 1p

$(x^2+y^2) - \mathrm{Re}(x^2-y^2+2xyi) \le 2 \Rightarrow x^2+y^2-(x^2-y^2) \le 2 \Rightarrow 2y^2 \le 2 \Rightarrow y^2 \le 1$ 1p

$\Rightarrow |y| \le 1$ 1p



1p

2) $z = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ 1p

$(a+bi)^2 - \left(\mathrm{Im}\left((a+bi)^2\right)\right)^2 = -4-7i \Rightarrow a^2-b^2+2abi-(2ab)^2 = -4-7i \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2-b^2-(2ab)^2 = -4$ 1p

$2ab = -2 \Rightarrow b \neq 0$ és $b = -\frac{1}{a} \Rightarrow a^2 - \left(-\frac{1}{a}\right)^2 - \left(2 \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)\right)^2 = -4 \Rightarrow$ 1p

$\Rightarrow a^2 - \frac{1}{a^2} - 4 = -4 \Rightarrow a^4 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$. 1p A megoldások: $z_1 = 1-i$, $z_2 = -1+i$ 1p

3) $n=1$ esetén $\sum_{k=1}^{1} (-1)^{k-1} \cdot k^2 = (-1)^0 \cdot 1^2 = 1 = (-1)^0 \cdot \frac{1 \cdot 2}{2}$ 1p

Tfh n-re az állítás igaz, és teljesül $(n+1)$-re. 1p

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \cdot k^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n \cdot (n+1)^2 = (-1)^n \cdot \left[-\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2\right] =$$ 1p

$$= (-1)^n \cdot \frac{(n+1)}{2} \cdot \left[-n + 2(n+1)\right] = (-1)^n \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$ 1p

4) A rendőr-elv alapján ha $n \ge 2$, akkor 1p

$$\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2}} = \sqrt[2n]{n^2 - \frac{n^2}{2}} \le \sqrt[2n]{n^2-n+2} \le \sqrt[2n]{n^2} = \sqrt[n]{n}$$ 1p

Az előadás alapján $\sqrt[n]{n} \to 1$ és $\forall a > 0$ esetén $\sqrt[n]{a} \to 1$. 1p

Így a rendőr-elv miatt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n^2-n+2} = 1$ 1p

5) $\frac{n-1}{n(n+1)} \ge \frac{n-\frac{n}{2}}{n \cdot (n+n)} = \frac{1}{6n}$, ha $n \ge 2$, és $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{6n} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens.

Így a minoráns-elv alapján az eredeti sor nem abszolút konvergens.

A sorváltakozó előjelű 1p $\frac{n+1}{(n+1)(n+2)} - \frac{n-1}{n(n+1)} = \frac{-n+2}{n(n+1)(n+2)} \le 0$ miatt $\left\{\frac{n-1}{n(n+1)}\right\} \searrow$ 1p

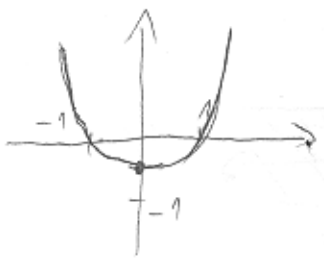
és $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-1/n}{n+1} = 0$ 1p Azaz a sor Leibniz típusú, és konvergens. 1p

D csoport

1) $z = x+yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ 1p

$|x+yi| - \mathrm{Im}(x+yi) = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} - y = 1 \Rightarrow$ 1p $\sqrt{x^2+y^2} = y+1 \Rightarrow y \geq -1$, és

$x^2+y^2 = (y+1)^2 \Rightarrow x^2 = 2y+1 \Rightarrow y = \frac{x^2-1}{2}$. Ebből $y \geq -\frac{1}{2} > -1$ tövelhető 1p



1p

2) $z = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

$(a+bi)^2 + (a-bi)^2 = a+bi \Rightarrow$ 1p $a^2+2abi-b^2+a^2-2abi-b^2 = a+bi \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a^2-2b^2 = a+bi \Rightarrow$ 1p $\begin{matrix} 2a^2-2b^2 = a \\ 0 = b \end{matrix} \Rightarrow 2a^2 = a \Rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{2}$ 1p

A megoldásokat: $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{1}{2}$. 1p

3) $n=1$ esetén $\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1 \cdot 2 = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$ 1p

Tfh az állítás n-re igaz, és belátjuk $(n+1)$-re. 1p

$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)}{3} \cdot (n+3)$ 1p 1p

4) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\frac{1/3}{n}}{1+\frac{2/3}{n}}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(1-\frac{1/3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2/3}{n}\right)^n}\right)^2 = \left(\frac{e^{-1/3}}{e^{2/3}}\right)^2 =$

1p 2p 1p

$= \frac{1}{e^2}$

5) A gyökkritérium alapján 1p

$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2 = (1-1)^2 = 0 < 1$, tehát a sor ~~abszolút~~ konvergens. 1p 1p 1p