2014-2015/1. A1 **1. zárthelyi megoldásai** **B**

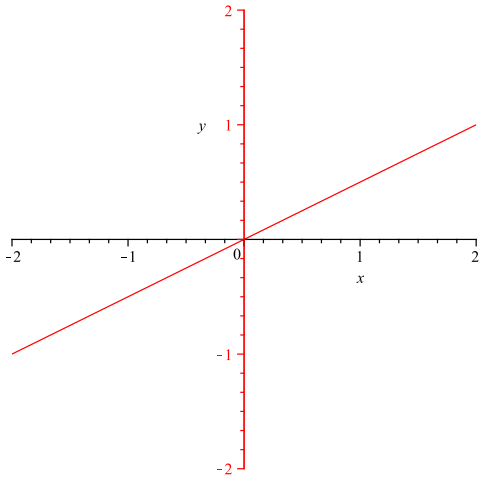
1. (4 pont) Ábrázolja a komplex számsíkon az $\mathrm{Im}(z^2) = (\mathrm{Re}z)^2$ feltételt kielégítő z komplex számok halmazát.

   Megoldás Legyen $z = x + iy$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Ekkor a feltétel:

   $$\mathrm{Im}((x+iy)^2) = (\mathrm{Re}(x+iy))^2$$

   $$2xy = x^2.$$

   Ebből $x(2y - x) = 0$, azaz a megoldás az $x = 0$, illetve az $y = \frac{x}{2}$ egyenletű egyenesek uniója.



2. (3 pont) Oldja meg a $z^5 - 64iz^2 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán. A megoldásokat algebrai vagy trigonometrikus alakban adja meg.

   Megoldás Az egyenlet felírható $z^2\left(z^3 - 64i\right) = 0$ alakban, amiből $z_1 = 0$, vagy $z^3 = 64i = 64\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Elvégezve a gyökvonást, az utóbbi egyenlet megoldásai $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$, $z_3 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -2\sqrt{3} + 2i$, és $z_4 = 4\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = -4i$. A megoldásokat vagy egy részüket elég trigonometrikus alakban is megadni.

3. (4 pont) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{2n^2-n+5}}{3-n} = ?$

Megoldás

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2-n+5}}{3-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2+1)-(2n^2-n+5)}{(3-n)\left(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2-n+5}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-4}{(3-n)\left(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2-n+5}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}}{(\frac{3}{n}-1)\left(\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}\right)} = 0$$

4. (4 pont) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{n+2}\right)^{2n-3} =?$

Megoldás

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{n+2}\right)^{2n-3} = \lim_{n\to\infty} 2^{2n-3}\cdot\left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+2}\right)^{2n-3} = \lim_{n\to\infty} 2^{2n-3}\cdot\left(\left(1-\frac{\frac{5}{2}}{n+2}\right)^{n+2}\right)^{\frac{2n-3}{n+2}}$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 2$, $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\frac{5}{2}}{n+2}\right)^{n+2} = e^{-\frac{5}{2}}$ és $\lim_{n\to\infty} 2^{2n-3} = \infty$, így $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{n+2}\right)^{2n-3} = \infty$.

5. (4 pont) Konvergens vagy divergens a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)\cdot 2^{n+3}}{(n+1)!}$ sor?

Megoldás A hányadoskritériumot alkalmazzuk.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n\cdot 2^{n+4}}{(n+2)!}}{\frac{(n-1)\cdot 2^{n+3}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot 2^{n+4}\cdot(n+1)!}{(n-1)\cdot 2^{n+3}\cdot(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{(n-1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1-\frac{1}{n}\right)(n+2)} = 0 < 1$$

azaz a sor konvergens.