2014-2015/1. A1 **1. zárthelyi megoldásai** **A**

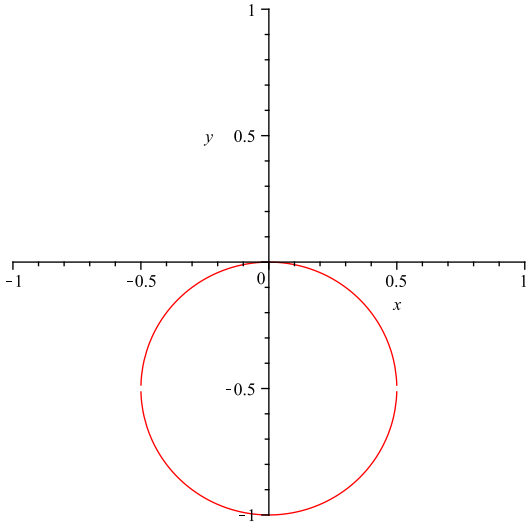
1. (4 pont) Ábrázolja a komplex számsíkon az $\mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Im}(\bar{z}) - 2\,(\mathrm{Im}z)^2$ feltételt kielégítő z komplex számok halmazát.

Megoldás Legyen $z = x + iy$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Ekkor a feltétel:

$$\mathrm{Re}((x+iy)^2) = \mathrm{Im}(x - iy) - 2\,(\mathrm{Im}x + iy)^2$$

$$x^2 - y^2 = -y - 2y^2$$

Ebből $x^2 + y^2 + y = 0$, azaz $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, ami a $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ középpontú, $\frac{1}{2}$ sugarú kör egyenlete. Az ábra:



2. (3 pont) Oldja meg a $z^4 + iz = 0$ a komplex számok halmazán. A megoldásokat algebrai vagy trigonometrikus alakban adja meg.

Megoldás Az egyenlet felírható $z\,(z^3 + i) = 0$ alakban, amiből $z_1 = 0$, vagy $z^3 = -i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$. Elvégezve a gyökvonást, az utóbbi egyenlet megoldásai $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, $z_3 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, és $z_4 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$. A megoldásokat vagy egy részüket elég trigonometrikus alakban is megadni.

3. (4 pont) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3 - 2n^2 + 1} - \sqrt{n^3 + n^2 + 5}}{n + 7} = ?$

Megoldás

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3 - 2n^2 + 1} - \sqrt{n^3 + n^2 + 5}}{n + 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3 - 2n^2 + 1) - (n^3 + n^2 + 5)}{(n + 7)\left(\sqrt{n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt{n^3 + n^2 + 5}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3n^2 - 4}{(n + 7)\left(\sqrt{n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt{n^3 + n^2 + 5}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{3}{n^{1/2}} - \frac{4}{n^{5/2}}}{(1 + \frac{7}{n})\left(\sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^3}}\right)} = 0$$

4. (4 pont) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + n + 1} = ?$

Megoldás Vegyük észre, hogy $1 < \sqrt[n]{n^2+n+1} \leq \sqrt[n]{3n^2} = \sqrt[n]{3} \cdot (\sqrt[n]{n})^2$. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, és $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} \cdot (\sqrt[n]{n})^2 = 1 \cdot 1^2 = 1$ a megfelelő nevezetes határértékeket használva, így a rendőr-elv alapján az eredeti határérték is 1.

5. (4 pont) Konvergens vagy divergens a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2-2}{n \cdot 3^n - 1}$ sor?

Megoldás A hányadoskritériumot alkalmazzuk.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2-2}{(n+1)\cdot(3^{n+1}-1)}}{\frac{n^2-2}{n\cdot(3^n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2-n}{n^3+n^2-2n-2} \cdot \frac{3^n-1}{3\cdot 3^n-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}} \cdot \frac{1-\frac{1}{3^n}}{3-\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1,$$

azaz a sor konvergens.