Feladatmegoldások az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2018/19/ősz, 10. hét

1. Végezzük el a teljes függvényvizsgálatokat, rajzoljuk le a függvényeket.

a) $x \mapsto x - \dfrac{1}{x^2}$ b) $x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$ c) $x \mapsto x^2 e^x$

d)[hf] $x \mapsto 2x^3 - 9x^2 + 12x$ e)[hf] $x \mapsto e^{-x^2}$ f)[hf] $x \mapsto \sin^2 x - 2\sin x$

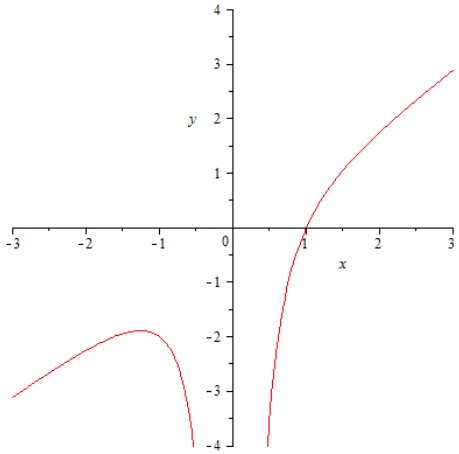
Megoldás a) Megnézzük a vizsgálandó tulajdonságokat az $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$ függvényre.
1) A kikötések alapján $x \neq 0$, azaz $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2) Zérushelyek: $x - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1$.
3) $f(-x) = -x - \frac{1}{x^2}$. Mivel $f(-x) \neq \pm f(x)$, a függvény nem páros és nem páratlan. Mind az értelmezési tartomány, mint a zérushelyek mutatják, hogy a függvény nem periodikus.
4) A függvény folytonos D_f-en. A határértékei:
$\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) = \infty$; és hasonlóan
$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$;
$\lim\limits_{x\to0+0} \left(x - \frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to0-0} \left(x - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$.
5) A függvény deriváltja $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^3}$, melynek egyetlen zérushelye $x = -\sqrt[3]{2} \approx -1,2599$. A táblázat:

	$x < -\sqrt[3]{2}$	$x = -\sqrt[3]{2}$	$-\sqrt[3]{2} < x < 0$	$0 < x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	$\uparrow$

A lokális maximum értéke $f\left(-\sqrt[3]{2}\right) = -\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = -\frac{3\sqrt[3]{2}}{2} \approx -1,8899$.
6) A függvény második deriváltja $f''(x) = -\frac{6}{x^4} \neq 0$. A táblázat:

	$x < 0$	$0 < x$
$f''(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	konkáv	konkáv

7) A grafikon és az értékkészlet: $R_f = \mathbb{R}$ (a grafikon alapján), és



b) Legyen $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.
1) A kikötések: $x > 0$ a logaritmus miatt, és $\ln x \neq 0$, azaz $x \neq 1$. Azaz $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.
2) Zérushelye nincs.

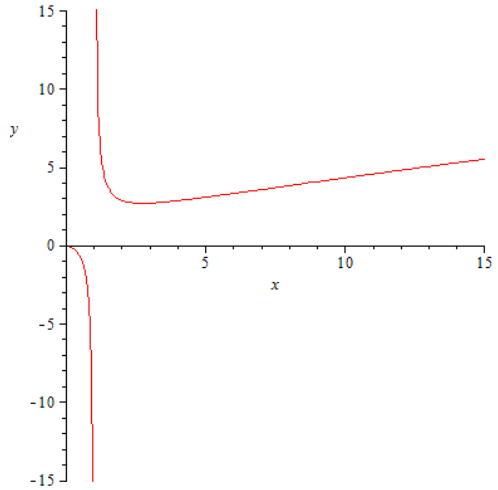
3) Az értelmezési tartományból látható, hogy nem páros, nem páratlan és nem periodikus. 4) Az értelmezési tartományon folytonos. A határértékek:
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \infty$ (a határérték kritikus, így alkalmaztuk a Bernoulli-L'Hospital szabályt);
$\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{x}{\ln x} = 0$ (a határérték „$\frac{0}{-\infty}$” típusú);
$\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{x}{\ln x} = \infty$; $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{x}{\ln x} = -\infty$.
5) A függvény deriváltja $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, melynek egyetlen gyöke $x = e$. A táblázat:

	$0 < x < 1$	$1 < x < e$	$x = e$	$e < x$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

A lokális minimum értéke $f(e) = e$.
6) A függvény második deriváltja $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$, melynek egyetlen gyöke $x = e^2 \approx 7,3891$. A táblázat:

	$0 < x < 1$	$1 < x < e^2$	$x = e^2$	$e^2 < x$
$f''(x)$	$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$	konkáv	konvex	infl. pont	konkáv

Az inflexiós pont y-koordinátája $f(e^2) = \frac{e^2}{2} \approx 3,6945$.
7) A grafikon (megjegyezzük, hogy helyesen az origóban egy üres karika jelenne meg):



Az értékkészlet $R_f = (-\infty, 0) \cup \left[\frac{e^2}{2}, \infty\right)$.

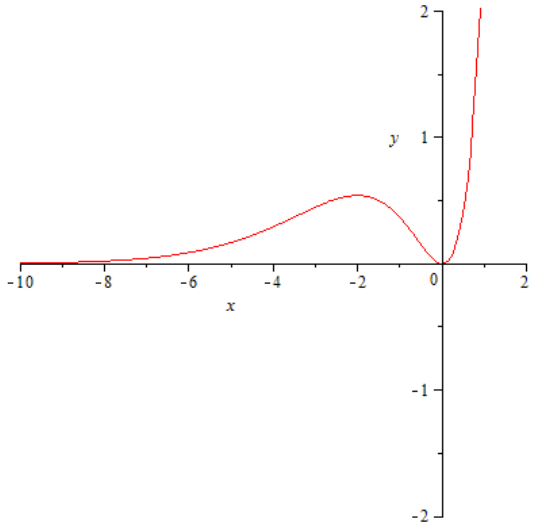
c) Legyen $f(x) = x^2 e^x$.
1) $D_f = \mathbb{R}$.
2) Az egyetlen zérushely $x = 0$.
3) Mivel $f(-x) = x^2 e^{-x}$, így a függvény nem páros és nem páratlan. A zérushelyekből látszik, hogy f nem periodikus.
4) A függvény páros $\mathbb{R}$-en.
$\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^x = \infty$, és $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$, alkalmazva a L'Hospital szabályt.
5) A derivált: $f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = x(x+2)e^x$, ennek zérushelyei $x = 0$ és $x = -2$. A táblázat:

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

A lokális szélsőértékek $f(0)=0$ és $f(-2)=\frac{4}{e^2}\approx 0,5413$.
6) A második derivált $f''(x)=(x^2+4x+2)\,e^x$, melynek gyökei $x=-2+\sqrt{2}\approx -0,5858$ és $x=-2-\sqrt{2}\approx -3,4142$. A táblázat:

	$x<-2-\sqrt{2}$	$x=-2-\sqrt{2}$	$-2-\sqrt{2}<x<-2+\sqrt{2}$	$x=-2+\sqrt{2}$	$-2+\sqrt{2}<x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex	infl. pont	konkáv	infl. pont	konvex

Az inflexiós pontok y-koordinátái $f(-2-\sqrt{2})\approx 0,3835$ és $f(-2+\sqrt{2})\approx 0,1910$.
7) A grafikon:



Az értékkészlet $R_f=[0,\infty)$.

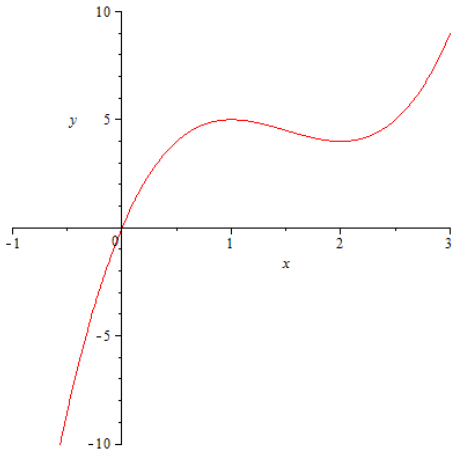
d) Legyen $f(x)=2x^3-9x^2+12x$.
1) $D_f=\mathbb{R}$.
2) A zérushelyek egyedül $x=0$.
3) $f(-x)=-2x^3-9x^2-12x$, azaz f nem páros és nem páratlan. A zérushelyekből látszik, hogy f nem periodikus.
4) A függvény $\mathbb{R}$-en folytonos. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-9x^2+12x)=\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(2-\frac{9}{x}+\frac{12}{x^2}\right)=\infty$ és $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-9x^2+12x)=-\infty$.
5) $f'(x)=6x^2-18x+12$, melynek gyökei $x=1$ és $x=2$. A táblázat:

	$x<1$	$x=1$	$1<x<2$	$x=2$	$2<x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

A szélsőértékek $f(1)=5$ és $f(2)=4$.
6) $f''(x)=12x-18$, melynek egyetlen gyöke $x=\frac{3}{2}$. A táblázat

	$x<\frac{3}{2}$	$x=\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}<x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	infl. pont	konvex

Az inflexiós pont x-koordinátája $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2}$.
7) Az értékkészlet és a grafikon $R_f=\mathbb{R}$ és



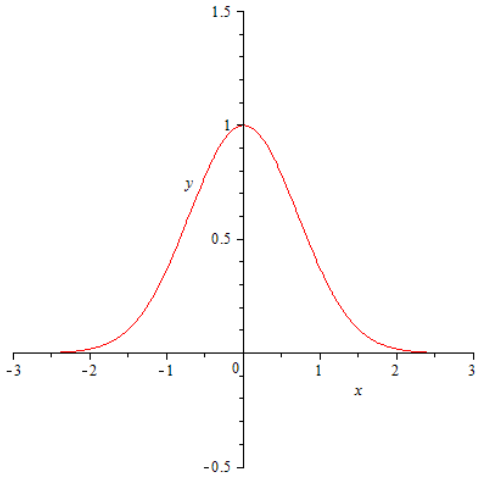
e) Legyen $f(x) = e^{-x^2}$.
1) $D_f = \mathbb{R}$.
2) Nincs zérushely.
3) $f(-x) = f(x)$ és a függvény páros. A később vizsgált tulajdonságok alapján látható, hogy f nem periodikus.
4) A függvény $\mathbb{R}$-en folytonos. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0$.
5) A derivált $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, melynek egyetlen gyöke $x = 0$. A táblázat:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

A lokális maximum értéke $f(0) = 1$.
6) $f''(x) = (4x^2 - 2)\, e^{-x^2}$, melynek gyökei $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. A táblázat:

	$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} < x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex	infl. pont	konkáv	infl. pont	konvex

Az inflexiós pontok y-koordinátái $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6065$.
7) Az értékkészlet $R_f = (0, 1]$, és a grafikon



f) Legyen $f = \sin^2 x - 2\sin x$.
1) $D_f = \mathbb{R}$.

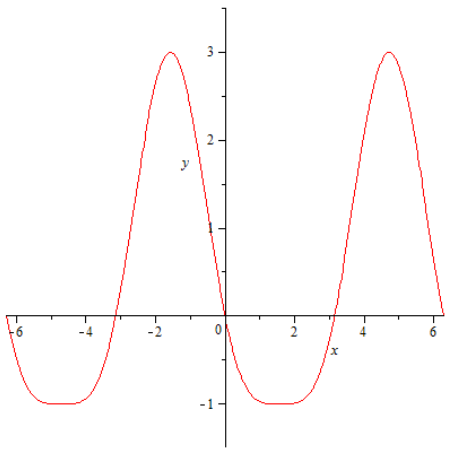
2) A zérushelyek $\sin x = 0$ és $\sin x = 2$, amiből $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3) $f(-x) = \sin^2 x + 2\sin x$, azaz f nem páros és nem páratlan. A függvény periodikus, és 2π periódusa. Így a továbbiakban csak a $[-\pi, \pi]$ intervallumon vizsgáljuk.
4) A függvény folytonos $\mathbb{R}$-en, és nincs határértéke $(\pm\infty)$-ben.
5) A derivált $f'(x) = 2\sin x\cos x - 2\cos x$, melynek gyökei $\cos x = 0$ és $\sin x = 1$, azaz a vizsgált intervallumon $x = \pm\frac{\pi}{2}$. A táblázat:

	$-\pi \le x < -\frac{\pi}{2}$	$x = -\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$	$x = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x \le \pi$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

A lokális szélsőértékek $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3$ és $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.
6) A második derivált $f''(x) = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 2\sin x = 2 + 2\sin x - 4\sin^2 x$. Ennek gyökei $\sin x = -\frac{1}{2}$ és $\sin x = 1$, azaz a vizsgált intervallumon $x = -\frac{5\pi}{6}$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$. A táblázat:

	$-\pi \le x < -\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x \le \pi$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	konvex	infl. p.	konkáv	infl. p.	konvex	nincs infl. p.	konvex

Az inflexiós pontok y-koordinátái $f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5}{4} = f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.
7) A grafikon:



Az értékkészlet $R_f = [-1, 3]$.

2. Számoljuk ki a megadott függvények deriváltját.

a) $x^{-\sqrt{x}}$ b)[hf] $(x^3-2)^{\sin x}$ c) $\sqrt[x^2]{\operatorname{tg}\dfrac{1-x}{1+2x}}$ d)[hf] x^{x^x} $\left(= x^{(x^x)}\right)$

Megoldás a) $\left(x^{-\sqrt{x}}\right)' = \left(\left(e^{\ln x}\right)^{-\sqrt{x}}\right)' = \left(e^{-\sqrt{x}\ln x}\right)' = e^{-\sqrt{x}\ln x}\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\ln x - \sqrt{x}\frac{1}{x}\right) = x^{-\sqrt{x}}\frac{-2-\ln x}{2\sqrt{x}}$.
b) Legyen $f(x) = (x^3-2)^{\sin x}$. Ekkor $\ln f(x) = \ln(x^3-2)^{\sin x} = \sin x \ln(x^3-2)$. Deriválva mindkét oldalt $\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \cos x\ln(x^3-2) + \sin x\frac{3x^2}{x^3-2}$. Mindkét oldalt szorozva az eredeti függvénnyel megkapjuk a végeredményt: $f'(x) = (x^3-2)^{\sin x}\left(\cos x\ln(x^3-2) + \sin x\frac{3x^2}{x^3-2}\right)$.
c) Vegyük észre, hogy $\sqrt[x^2]{\operatorname{tg}\frac{1-x}{1+2x}} = \left(\operatorname{tg}\frac{1-x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. Most már akár az a), akár a b) feladat módszerével megkapható a végeredmény: $\left(\left(\operatorname{tg}\frac{1-x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)' = \left(\operatorname{tg}\frac{1-x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\dfrac{x^2\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1-x}{1+2x}}\frac{1}{\cos^2\frac{1-x}{1+2x}}\frac{-3}{(1+2x)^2} - 2x\ln\operatorname{tg}\frac{1-x}{1+2x}}{x^4}$.
d) Valamelyik előző módszer kétszeres alkalmazásával $\left(x^{x^x}\right)' = x^{x^x}\left(x^x(\ln x+1)\ln x + x^x\cdot\frac{1}{x}\right)$

3. Írjuk fel a megadott görbék megadott pontbeli érintőjének egyenletét.

a) $x^3+\sin(xy)+y^3=x-2y$, $P_0(1;0)$ b)[hf] $\sqrt{x^2+y^2}=x^2+1$, $P_0(0;1)$

c) $\left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& \cos^3 t \\ y(t) &=& \sin^3 t \end{array}\right\}$, $t_0=\frac{\pi}{3}$ d) $\left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& 2t-2\sin t \\ y(t) &=& 2+2\cos t \end{array}\right\}$, $t_0=\frac{\pi}{3}$

Megoldás a) Az $F(x,y)=0$ implicit módon adott függvények deriválási szabályát alkalmazzuk: $y'=-\frac{\partial_x F}{\partial_y F}$. Ez adja meg a vizsgált pontban húzott érintő meredekségét.
Jelen esetben $F(x,y)=x^3+\sin(xy)+y^3+2y-x$. Tehát $\partial_x F=3x^2+\cos(xy)\cdot y-1$ és $\partial_y F=\cos(xy)\cdot x+3y^2+2$. A vizsgált pontban tehát $(\partial_x F)(1,0)=2$ és $(\partial_y F)(1,0)=3$. Tehát az érintő meredeksége $m_e=-\frac{2}{3}$. Az adott ponton áthaladó, adott meredekségű egyenes egyenletét felírva az érintő egyenlete: $y=-\frac{2}{3}(x-1)$.
b) Az érintő meredekségének kiszámítására most egy másik módszert alkalmazunk. Képzeljük el, hogy $y=y(x)$ egy olyan függvény, melyre minden pontban teljesül a megadott feltétel legalább $P_0(0;1)$ valamilyen környezetében. Ekkor a megadott feltétel bal- és jobboldalán látható függvények, így deriváltjaik is megegyeznek. Deriváljuk mindkét oldalt:

$$\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+2yy')=2x.$$

Helyettesítsük be a megadott pont koordinátáit x és y helyett; ekkor y' értéke éppen az adott pontbeli érintő m_e meredeksége lesz: $m_e=0$. Ebből az érintő egyenlete $y=1$.
c) Az $\left.\begin{array}{rcl} x &=& x(t) \\ y &=& y(t) \end{array}\right\}$ paraméteres alakban adott függvény deriváltja (azaz érintőjének meredeksége) a t_0 paraméterértékhez tartozó pontban $y'|_{t=t_0}=\frac{\dot y(t_0)}{\dot x(t_0)}$. Jelen esetben $\dot x(t)=-3\cos^2 t\sin t$ és $\dot y(t)=3\sin^2 t\cos t$, vagyis $m_e=\frac{3\sin^2\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}}{-3\cos^2\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}}=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$. Az érintési pont $p_0(x(t_0),y(t_0))=p_0\left(\frac{1}{8};\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$. Így az érintő egyenlete $y=\frac{3\sqrt{3}}{8}-\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{8}\right)$.
d) Most $\dot x(t)=2-2\cos t$ és $\dot y(t)=-2\sin t$, vagyis $m_e=\frac{-2\sin\frac{\pi}{3}}{2-2\cos\frac{\pi}{3}}=-\sqrt{3}$. Az érintési pont $P_0\left(\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3},3\right)$. Az érintő egyenlete $y=3-\sqrt{3}\left(x-\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\right)$.

4. Számoljuk ki a következő Taylor-polinomokat, és írjuk fel a hozzájuk tartozó hibatagot!

a) $f(x)=(x-2)^{-2}$, középpont: 3, $T_3(x)=?$
b)[hf] $f(x)=\sin x$, középpont: π, $T_n(x)=?$
c)[hf] $f(x)=e^x$, középpont: 0, $T_5(x)=?$
d)[hf] $f(x)=\ln\cos x$, középpont: 0, $T_6(x)=?$

Megoldás a) Kiszámoljuk az emlékeztetőben is szereplő képletben használt mennyiségeket: $f'(x)=-2(x-2)^{-3}$, $f''(x)=6(x-2)^{-4}$ és $f'''(x)=-24(x-2)^{-5}$. A középpontban felvett értékek: $f(3)=1$, $f'(3)=-2$, $f''(3)=6$ és $f'''(3)=-24$. Azaz $T_3(x)=\frac{f(3)}{0!}+\frac{f'(3)}{1!}(x-3)+\frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2+\frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3=1-2(x-3)+3(x-2)^2-4(x-2)^3$.
b) Most $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$ és $f^{(4)}(x)=\sin x=f(x)$. Innentől fogva általánosan is fel tudjuk írni a deriváltakat: $f^{4k}(x)=\sin x$, $f^{(4k+1)}(x)=\cos x$, $f^{(4k+2)}(x)=-\sin x$ és $f^{(4k+3)}(x)=-\cos x$ minden $k\in\mathbb{N}$ esetén. Minthogy $\sin\pi=0$ és $\cos\pi=-1$, azt kapjuk, hogy $T_{2m+1}(x)=T_{2m+2}(x)=\sum_0^m\frac{(-1)^{m-1}}{(2m+1)!}(x-\pi)^{2m+1}$ minden $m\in\mathbb{N}$ esetén.
c) Vegyük észre, hogy $f^{(n)}(x)=e^x$ minden $n\in\mathbb{N}$ esetén. Mivel $e^0=1$, így $T_5(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}$.
d) Ennél a feladatnál $f'(x)=-\frac{\sin x}{\cos x}$, $f''(x)=-\frac{1}{\cos^2 x}$, $f'''(x)=-\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$, $f^{(4)}(x)=\frac{2(2\cos^2 x-3)}{\cos^4 x}$, $f^{(5)}(x)=\frac{8\sin x(\cos^2 x-3)}{\cos^5 x}$ és $f^{(6)}(x)=-\frac{8(2\cos^4 x+15\sin^2 x)}{\cos^6 x}$. A középpontban $f(0)=0$, $f'(0)=0$,

$f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = -2$, $f^{(5)}(0) = 0$ és $f^{(6)}(0) = -16$. Vagyis $T_6(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45}$.

5. $\ln(1.1)$-et szeretnénk közelítőleg kiszámolni az $\ln(1+x)$ függvény 0 közepű Taylor-polinomja segítségével. Hányadik tagig kell elmennünk, hogy a közelítés hibája 10^{-8} alá csökkenjen?

   Megoldás A fenti függvénynél $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$ Végiggondolható, hogy $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n}$. Azaz $T_n(x)$-et használva a közelítéshez $x = 0,1$ esetén a hibatag legfeljebb $\left|\frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}(n+1)!} 0,1^{n+1}\right| = \frac{0,1^{n+1}}{(1+t)^{n+1}(n+1)}$ maximuma a $t \in [0;0,1]$ intervallumon, ami $\frac{0,1^{n+1}}{n+1}$. Azaz ahhoz, hogy a közelítés hibája 10^{-8} alá csökkenjen, elég azt garantálni, hogy $\frac{0,1^{n+1}}{n+1} < 10^{-8}$ teljesüljön, ami igaz lesz $n = 7$ esetén. Tehát a hetedik tagig elmenve a hiba 10^{-8} alá csökken.

6.[hf] Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 5x - 3 + \sin 2x$ függvény $x_0 = 0$ középpontú harmadrendű Taylor-polinomját és a hozzá tartozó hibatagot! Legfeljebb mekkora hibát követünk el, ha $f(0,1)$ értékét $T_3(0,1)$ értékével közelítjük?

   Megoldás $f'(x) = 2x + 5 + 2\cos 2x$, $f''(x) = 2 - 4\sin 2x$, $f'''(x) = -8\cos 2x$, $f^{(4)}(x) = 16\sin 2x$. Mivel $f(0) = -3$, $f'(0) = 7$, $f''(0) = 2$ $f'''(0) = -8$, így $T_3(x) = -3 + 7x + x^2 - \frac{4}{3}x^3$. A közelítés hibája legfeljebb $\frac{16\sin 2t}{24} \cdot 0,1^4$ maximuma a $t \in [0;0,1]$ intervallumon, ami legfeljebb $\frac{\sin 0,2}{15000} \approx 1,32 \cdot 10^{-5}$, illetve ha egyszerűen a $|\sin\alpha| \leq 1$ becslést használjuk, akkor felső becslésnek $\frac{1}{15000}$ adódik.