Feladatmegoldások az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2018/19/ősz, 7. hét

1. Számoljuk ki a határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)$ b)[hf] $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}+x}$ c) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{3}{x^3-1}\right)$

d)[hf] $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^5-3x^2+1}{x^7+4x^3+5}$ e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 9x^2}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x-\sin 8x}{7x+\sin 2x}$

Megoldás a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2}=\frac{3}{4}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2\right)\right)=+\infty$, felhasználva, hogy $x\to-\infty$ miatt $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ feltehető.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x}-x}{-4x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1}{4}=\frac{1}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{(x-1)(x+1)}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{2(x^2+x+1)-3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=$
$\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{2}$.

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^5-3x^2+1}{x^7+4x^3+5}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^5}}{x^2\left(1+\frac{4}{x^4}+\frac{5}{x^7}\right)}=0$.

e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 9x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 9x^2}{x^2(1+\cos 9x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 9x^2}{9x^2}\cdot\frac{9\sin 9x^2}{1+\cos 9x^2}=0$.

f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x-\sin 8x}{7x+\sin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{5-8\frac{\sin 8x}{8x}}{7+2\frac{\sin 2x}{2x}}=-\frac{1}{3}$.

2. Számoljuk ki a megadott függvények deriváltját a megadott pontban, a definíció alapján.

a) x^2-x+3, $x_0=-1$ b) $\sqrt{2x-5}$, x_0-ban

c)[hf] $\frac{2x-1}{x+3}$, $x_0=3$ d)[hf] $\sqrt[3]{2x-1}$, $x_0=1$.

e) $|x|$, $x_0=0$

Megoldás a) A derivált $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x^2-x+3)-5}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}(x-2)=-3$.

b) A derivált $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sqrt{2x-5}-\sqrt{2x_0-5}}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(2x-5)-(2x_0-5)}{(x-x_0)\left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{2x_0-5}\right)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2(x-x_0)}{(x-x_0)\left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{2x_0-5}\right)}=$
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2}{\sqrt{2x-5}+\sqrt{2x_0-5}}=\frac{1}{\sqrt{2x_0-5}}$.

c) A derivált $\lim\limits_{x\to3}\frac{\frac{2x-1}{x+3}-\frac{5}{6}}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{6(2x-1)-5(x+3)}{6(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{7x-21}{6(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{7}{6(x+3)}=\frac{7}{36}$.

d) A derivált $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(2x-1)-1}{\left(\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+\sqrt[3]{2x-1}+1\right)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+\sqrt[3]{2x-1}+1}=\frac{2}{3}$.

e) A jobb-, és baloldali derivált rendre $\lim\limits_{x\to0+0}\frac{x}{x}=1$ és $\lim\limits_{x\to0-0}\frac{-x}{x}=-1$. Mivel a két érték különbözik, az $|x|$ függvény nem deriválható 0-ban.

3. Hol deriválhatóak a megadott függvények? Számoljuk ki a deriváltakat.

a) $x^7+\dfrac{2}{x}-\sqrt{x}$ b) $x^7\cdot\dfrac{2}{x}\cdot\sqrt{x}$ c) $\operatorname{ctg}x\cdot e^x\cdot\sqrt[5]{x}-3$ d) $e^x+x^e+e^e$

e) $\dfrac{x^2+2x-1}{x^7+2x+1}$ f) $\sin(2x-1)$ g) $\operatorname{tg}(\pi x)$ h) $e^{\frac{1-x}{1+x}}$

i) $\sin x^2+\sin^2 x$ j) $\ln\left(e^x+e^{-x}\right)$ k) $\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}$ l) $\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\operatorname{arsh}\sqrt[3]{x}}$

m) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ n)^{hf} $\operatorname{sgn}x$ o)^{hf} $x\sin x\cos x$ p)^{hf} $\log_x x$

q)^{hf} $(x^3-3x+8)^{2014}$ r)^{hf} $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{1+2x^2}}$ s)^{hf} $(\sin^3(x)+2)^7$

Megoldás a) $\left(x^7+\frac{2}{x}-\sqrt{x}\right)'=\left(x^7+2x^{-1}-x^{\frac12}\right)'=7x^6+2\cdot(-1)x^{-2}-\frac12x^{-\frac12}$. A függvény $x>0$ esetén deriválható.

b) $\left(x^7\cdot\frac{2}{x}\cdot\sqrt{x}\right)'=\left(2x^{\frac{13}{2}}\right)'=13x^{\frac{11}{2}}$. A függvény $x>0$ esetén deriválható.

c) $(\operatorname{ctg}x\cdot e^x\cdot\sqrt[5]{x}-3)'=\frac{-1}{\sin^2x}\cdot e^x\cdot\sqrt[5]{x}+\operatorname{ctg}x\cdot e^x\cdot\sqrt[5]{x}+\operatorname{ctg}x\cdot e^x\cdot\frac15x^{-\frac45}$. A függvény $\sin x\neq0$ és $x\neq0$, azaz összefoglalva $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ esetén deriválható.

d) $(e^x+x^e+e^e)'=e^x+ex^{e-1}$, és $x\in\mathbb{R}$ esetén deriválható.

e) $\left(\frac{x^2+2x-1}{x^7+2x+1}\right)'=\frac{(x^2+2x-1)'\cdot(x^7+2x+1)-(x^7+2x+1)'\cdot(x^2+2x-1)}{(x^7+2x+1)^2}=\frac{(2x+2)\cdot(x^7+2x+1)-(7x^6+2)\cdot(x^2+2x-1)}{(x^7+2x+1)^2}$, és a függvény $x^7+2x+1\neq0$ esetén deriválható.

f) $(\sin(2x-1))'=2\cos(2x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ esetén.

g) $(\operatorname{tg}(\pi x))'=\pi\frac{1}{\cos^2(\pi x)}$, $\cos(\pi x)\neq0$, azaz $x\neq\frac12+k$, $k\in\mathbb{Z}$ esetén.

h) $\left(e^{\frac{1-x}{1+x}}\right)'=e^{\frac{1-x}{1+x}}\frac{-2}{(1+x)^2}$, $x\neq-1$ esetén.

i) $\left(\sin x^2+\sin^2x\right)'=\cos x^2\cdot2x+2\sin x\cos x$, minden $x\in\mathbb{R}$ esetén.

j) $\left(\ln\left(e^x+e^{-x}\right)\right)'=\frac{1}{e^x+e^{-x}}\left(e^x+e^{-x}(-1)\right)$, $e^x+e^{-x}>0$, azaz minden $x\in\mathbb{R}$ esetén.

k) $\left(\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}\right)'=\frac13\left(x+\sqrt[3]{x}\right)^{-\frac23}\cdot\left(1+\frac13x^{-\frac23}\right)$, és a függvény $x\neq0$ és $x+\sqrt[3]{x}\neq0$, azaz összesítve $x\neq0$ esetén deriválható.

l) $\left(\frac{\operatorname{arctg}\frac1x}{\operatorname{arsh}\sqrt[3]{x}}\right)'=\frac{\frac{1}{1+\left(\frac1x\right)^2}\cdot\left(-x^{-2}\right)\operatorname{arsh}\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}}\cdot\frac13x^{-\frac23}\operatorname{arctg}\frac1x}{\operatorname{arsh}^2\sqrt[3]{x}}$, és a függvény $x\neq0$ és $\operatorname{arsh}\sqrt[3]{x}\neq0$ esetén, azaz összesítve $x\neq0$ esetén deriválható.

m) A függvény $x>0$ esetén deriválható, és $\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)'=\frac12\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^{-\frac12}\cdot\left(1+\frac12\left(x+\sqrt{x}\right)^{-\frac12}\left(1+\frac12x^{-\frac12}\right)\right)$.

n) A függvény $x\neq0$ esetén deriválható, és ekkor $(\operatorname{sgn}x)'=0$.

o) $(x\sin x\cos x)'=\sin x\cos x+x\cos^2x-x\sin^2x$, minden $x\in\mathbb{R}$ esetén.

p) $(\log_x x)'=1'=0$, ha $x>0$ és $x\neq1$.

q) $((x^3-3x+8)^{2014})'=2014(x^3-3x+8)^{2013}(3x^2-3)$, minden $x\in\mathbb{R}$ esetén.

r) $\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{1+2x^2}}\right)'=\frac{2x\cdot\sqrt{1+2x^2}-(x^2+1)\cdot\frac12\cdot\left(1+2x^2\right)^{-\frac12}4x}{1+2x^2}$, minden $x\in\mathbb{R}$ esetén.

s) $\left((\sin^3(x)+2)^7\right)'=7(\sin^3(x)+2)^6\cdot3\sin^2(x)\cdot\cos x$ minden $x\in\mathbb{R}$ esetén.

4. Legyen

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x},\ \text{ha } x\neq1,\\ \beta,\ \text{ha } x=1.\end{cases}$$

a) Megválasztható-e β értéke úgy, hogy az f függvény folytonos legyen $x=1$-ben?

b) $f'(x)=?$, ha $x\neq1$

c) $\lim\limits_{x\to1}f'(x)=?$ Létezik-e $f'(1)$?

Megoldás a) A $\lim\limits_{y\to\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}$ és $\lim\limits_{y\to-\infty} \operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2}$ határértékek alapján $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} = -\frac{\pi}{2}$ és $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{2}$. Ezek szerint $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ nem létezik. Minthogy egy függvény pontosan akkor folytonos valahol, ha itt van határértéke, és ez megegyezik a helyettesítési értékével, így β nem választható meg úgy, hogy f folytonos legyen.

b) Ha $x \neq 1$, $f'(x) = \left(\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}$.

c) A b) rész szerint $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} = \frac{1}{2}$. Mivel f nem folytonos 1-ben, így nem is lehet deriválható.