Feladatok az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2018/19/ősz, 10. hét

1. Végezzük el a teljes függvényvizsgálatokat, rajzoljuk le a függvényeket.

   a) $x \mapsto x - \dfrac{1}{x^2}$ b) $x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$ c) $x \mapsto x^2 e^x$

   d)[hf] $x \mapsto 2x^3 - 9x^2 + 12x$ e)[hf] $x \mapsto e^{-x^2}$ f)[hf] $x \mapsto \sin^2 x - 2\sin x$

2. Számoljuk ki a megadott függvények deriváltját.

   a) $x^{-\sqrt{x}}$ b)[hf] $\left(x^3 - 2\right)^{\sin x}$ c) $\sqrt[x^2]{\operatorname{tg} \dfrac{1-x}{1+2x}}$ d)[hf] $x^{x^x} \quad \left(= x^{(x^x)}\right)$

3. Írjuk fel a megadott görbék megadott pontbeli érintőjének egyenletét.

   a) $x^3 + \sin(xy) + y^3 = x - 2y$, $P_0(1;0)$ b)[hf] $\sqrt{x^2+y^2} = x^2 + 1$, $P_0(0,1)$

   c) $\left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& \cos^3 t \\ y(t) &=& \sin^3 t \end{array}\right\}$, $t_0 = \frac{\pi}{3}$ d) $\left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& 2t - 2\sin t \\ y(t) &=& 2 + 2\cos t \end{array}\right\}$, $t_0 = \frac{\pi}{3}$

4. Számoljuk ki a következő Taylor-polinomokat, és írjuk fel a hozzájuk tartozó hibatagot!

   a) $f(x) = (x-2)^{-2}$, középpont: 3, $T_3(x) = ?$

   b)[hf] $f(x) = \sin x$, középpont: π, $T_n(x) = ?$

   c)[hf] $f(x) = e^x$, középpont: 0, $T_5(x) = ?$

   d)[hf] $f(x) = \ln\cos x$, középpont: 0, $T_6(x) = ?$

5. $\ln(1.1)$-et szeretnénk közelítőleg kiszámolni az $\ln(1+x)$ függvény 0 közepű Taylor-polinomja segítségével. Hányadik tagig kell elmennünk, hogy a közelítés hibája 10^{-8} alá csökkenjen?

6.[hf] Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 5x - 3 + \sin 2x$ függvény $x_0 = 0$ középpontú harmadrendű Taylor-polinomját és a hozzá tartozó hibatagot! Legfeljebb mekkora hibát követünk el, ha $f(0.1)$ értékét $T_3(0.1)$ értékével közelítjük?

Emlékeztető

– Egy függvény teljes vizsgálata alatt az alábbi tulajdonságok vizsgálatát értjük: értelmezési tartomány, zérushelyek, párosság/páratlanság/periodicitás, folytonosság és határértékek, monotonicitás, lokális szélsőértékek, konvexitás/konkávitás, inflexiós pontok, grafikon és értékkészlet.

– Egy n-szer deriválható függvény *a körüli n-edrendű Taylor-polinomja*:
$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. *Taylor tétele:* Ha $f^{(n)}$ differenciálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor létezik egy $\xi \in [a,b]$, hogy $f(b) = T_n(b) + R_n(b,\xi)$, ahol $R_n(x,\xi) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.
Az $R_n(x,\xi)$ kifejezés neve közelítés *hibatagja:*.