Feladatok az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2018/19/ősz, 8. hét

1. Milyen α, β-ra deriválhatóak a következő függvények?

a) $\begin{cases} \alpha - \cos x & \text{ha } x > 0 \\ \beta x & \text{különben} \end{cases}$ b)[hf] $\begin{cases} \sin x & \text{ha } x > 0 \\ \alpha x + \beta & \text{különben} \end{cases}$ c)[hf] $\begin{cases} x^3 + \alpha & \text{ha } x > 1 \\ 2 - \beta x & \text{különben} \end{cases}$

2. Írjuk fel az alábbi függvények grafikonjának x_0 abszcisszájú pontjához húzott érintő és normális egyenes egyenletét!

a) $f(x) = x^3, \quad x_0 = 2;$ b) $f(x) = \ln 3x, \quad x_0 = e^2/3;$
c)[hf] $f(x) = \sin x, \quad x_0 = \pi;$ d)[hf] $f(x) = 1 + \sin(xe^{2x+1}), \quad x_0 = 0.$

3. Írjuk fel az $y = \ln(x^2 + 1)$ görbének az $y = x + 2$ egyenessel párhuzamos/merőleges érintőinek egyenletét.

4. Pista ceruzájának a hegye a $(4, 0)$ pontban van, és innen érintőegyenest szeretne húzni az $f(x) = x^2/3$ függvényhez. Hány fokos szögben kell elindítania a ceruzáját?

5.[hf] Van-e az $f(x) = x^2 - 1$ parabolának olyan érintője, amely átmegy a $(2, 2)$ ponton? Ha igen, írjuk fel az érintő egyenletét!

6. Kiszámolandó határértékek:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-5x}$

d)[hf] $\lim\limits_{x\to 1} (\ln x) \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} x\right)$ e)[hf] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x + \sin x}$ f)[hf] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$

g)[hf] $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{x \cos x}{(2\pi - x)^2}$ h)[hf] $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x \sin x}\right)$ i)[hf] $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x} \ln x^7$

j) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$ k) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\operatorname{tg} x}$ l)[hf] $\lim\limits_{x\to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

m)[hf] $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$

Emlékeztető

– Egy görbe adott pontbeli normálisa az az egyenes, amelyik átmegy az adott ponton, és merőleges a görbe ezen pontbeli érintőjére.

– A Bernoulli-L'Hospital szabály szerint, ha f és g deriválhatóak x_0 egy pontozott környezetében, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ egy „$\frac{0}{0}$” vagy „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú” határérték, valamint $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik, akkor $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ is létezik, és $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.