Feladatok az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2018/19/ősz, 1. hét

1. Így szokás halmazokat definiálni: $\{x \in \text{alaphalmaz} \mid \text{feltételek } x\text{-re}\}$. Definiáljuk:
   a) 1-nél kisebb pozitív valós számok halmaza,
   b) racionális; irracionális számok halmaza,
   c) a négyzetszámok halmaza,
   d) a második síknegyed pontjai,
   e)[hf] páros számok halmaza,
   f)[hf] prímszámok halmaza,
   g)[hf] az egységsugarú gömbön belüli pontok,
   h)[hf] harmadfokú polinomok halmaza.

2. Legyen A, B és C három halmaz. Fejezzük ki a
$$D = A - (A - (B - (B - C)))$$
halmazt az A, B és C halmazokkal, és az unió és metszet műveletekkel. Ez alapján döntsük el, hogy mivel egyenlő D az alábbi esetekben:
   a) a három halmaz páronként diszjunkt,
   b) pontosan két diszjunkt van köztük,
   c)[hf] nincs köztük kettő diszjunkt.

3. Igazoljuk az alábbi állításokat teljes indukcióval minden pozitív egész számra!
   a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
   b) $\sum_{n=1}^{k} n(n!) = (k+1)! - 1$
   c)[hf] $\prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$
   d) $\sqrt{k} < \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j}} < 2\sqrt{k}$, ahol $k \geq 2$
   e)[hf] $\frac{(2t)!}{(t!)^2} < 4^{t-1}$, ahol $t \geq 5$

4. A síkot n egyenessel részekre bontottuk.
   a) Mutassuk meg, hogy az így kapott síkrészek két színnel kiszínezhetők úgy, hogy az él mentén érintkező részek különböző színűek.
   b)[hf] Igazoljuk, hogy ha az egyenesek között nincsenek párhuzamosak, és mindegyik metszéspont pontosan két egyeneshez tartozik, akkor a síkrészek száma $\frac{n^2+n+2}{2}$.

5. Legyen $z = 1 - 4i$. Mi lesz $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\overline{z}$, $|z|$, $\arg z$?

6. Írjuk a következő komplex számokat $a + ib$ alakba!
   a) $(1 + 4i)(4 - 2i)$
   b) i^7
   c) $\frac{3 - 2i}{-2 + i}$
   d) $\frac{3 - 2i}{3i}$
   e)[hf] i^{2009}
   f)[hf] $\frac{1}{i}$
   g)[hf] $\frac{2 - i}{i - 1}$
   h)[hf] $(2 + i)^{37}(2 - i)^{38}$

Emlékeztető

– Logikai jelek: $\forall$ minden; $\exists$ létezik; $\exists!$ létezik egyetlen; $\wedge$ és; $\vee$ vagy; $\neg$ nem; $\Rightarrow$ következik; $\Leftrightarrow$ ekvivalens;
Halmazok: $\mathbb{N}$ természetes számok; $\mathbb{Z}$ egészek; $\mathbb{Q}$ racionálisok; $\mathbb{R}$ valós számok; $\emptyset$ üres halmaz;
$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.

– MINDEN feladat, amit a gyakorlaton nem beszélünk meg, házi feladat. Az eleve házi feladatnak szánt feladatok [hf] jellel vannak megjelölve.

– A követelmények leírása, a félév anyaga és beosztása, gyakorló feladatok, és sok egyéb hasznos információ található a tantárgy weblapjain. Ezeket az alábbi helyen keresztül érhetik el: `http://math.bme.hu/~geom/Oktatas_2018-19-1/index.html`