5. SZÉLSŐÉRTÉKSZÁMÍTÁS

5.1. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \in \mathrm{R}^+$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathrm{R}^+, \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad x \in \mathrm{R}^+$

Az $1 - \frac{1}{x^2} = 0$ egyenlet gyökei : $x_1 = -1, \ x_2 = 1$. Mivel $f''(1) = 2 > 0$, ezért az 1 helyen van az *f*-nek minimuma.

5.2. Legyen az egyik szám *x*, a másik pedig $A - x$.

$f(x) = (A-x)^2 + x^3 = x^3 + x^2 - 2Ax + A^2, \quad x \in]0; A[, \quad (A > 0)$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2A, \qquad x \in]0; A[$

$f'(x) = 0 \qquad x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+6A}}{3} < 0$ nem jöhet számításba,

$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+6A}}{3} > 0$ lehetséges minimum.

$f''(x) = 6x + 2, \quad x \in]0; A[$.

$f''(x_2) = 2\sqrt{1+6A} > 0$, így *f*-nek az x_2 helyen minimuma van.

5.3. A téglalap oldalai: x és $\frac{k}{2} - x$.

A területfüggvény: $f(x) = -x^2 + \frac{k}{2}x, \qquad x \in]0; \frac{k}{2}[$.

A függvény $x = \frac{k}{4}$ értéknél veszi fel maximumát, tehát a $\frac{k}{4}$ oldalhosszúságú négyzet a legnagyobb területű k kerületű téglalap.

5.4. A doboz űrtartalma $x = \frac{a}{6}$ értékre lesz maximális.

5.5. Jelöljük az alapélt x-szel.

Az $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^3$ térfogatfüggvény, $x\in\left]0;\sqrt{2}\right[$ maximumát keressük.

Megoldás: a doboz alapéle: $x=\sqrt{\frac{2}{3}}=0{,}816\text{m},$

a doboz magassága: $m=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}=0{,}408\text{ m}.$

5.6. Megoldás: a medence alapéle : $x=\sqrt[3]{200}=5{,}85\text{ m},$

magassága: $m=\frac{100}{\left(\sqrt[3]{200}\right)^2}=2{,}92\text{ m}.$

5.7. A kerítés hosszát megadó függvény: $f(x)=2x+\frac{10000}{x}$, ahol x a rövidebb oldal hosszát jelöli.

Megoldás: a téglalap oldalai: 70,71 m, 141,42 m, 70,71 m.

5.8. $f(x)=3x+12\frac{200}{x},\quad x\in\mathrm{R}^+.$

$f'(x)=3-\frac{2400}{x^2},\quad x\in\mathrm{R}^+,\qquad f'\left(\sqrt{800}\right)=0.$

$f'(x)=\frac{4800}{x^3},\quad x\in\mathrm{R}^+.$ A függvénynek az $x=\sqrt{800}=28{,}28$ helyen minimuma van. Tehát leggazdaságosabb 28 zuhanykar felszerelése.

5.9. $f(x)=\begin{cases}-1{,}5x+4, & \text{ha } x\in[0;\ 1[,\\ 2{,}5x, & \text{ha } x\in[1;\ 4].\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}-1{,}5, & \text{ha } x\in[0;\ 1[,\\ 2{,}5, & \text{ha } x\in]1;\ 4].\end{cases}$

Az 1 pontban f nem differenciálható, de $f'_-(1)<0$ és $f'_+(1)>0$, tehát minimum van. Tehát a B gazdaságban célszerű a központi gyűjtőhelyet létesíteni, mert ekkor lesz a szállítási összköltség a legkevesebb: $f(1)=2{,}5$.

5.10. P-vel jelöljük az ABC áruház helyét. Legyen x a K-tól való távolság x = KP, nyilván nem lehet 0-nál kisebb és 15-nél nagyobb.

Az $f(x) = 1000x + 2000|x-5| + 8000(15-x)$, $x \in [0;\ 15]$ függvény abszolút minimumát keressük.

$$f(x) = \begin{cases} -9000x + 130000, & \text{ha } x \in [0;\ 5[, \\ -5000x + 110000, & \text{ha } x \in [5;\ 15]. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -9000, & \text{ha } x \in [0;\ 5[, \\ -5000, & \text{ha } x \in [5;\ 15]. \end{cases}$$

Stacionárius pontja nincs.
A függvény szigorúan monoton csökkenő, így minimumát az intervallum végpontjában veszi fel: x = 15. Ez ezt jelenti, hogy az M nyaralótelepen kell létrehozni az ABC üzletet.

5.11. Legyen sebessége a földúton 1, a műúton 1,5. Jelöljük a B pont műútra eső merőleges vetülete és az elágazási pont közötti távolságot x-szel.

Keressük az $f(x) = \frac{8-x}{1{,}5} + \sqrt{36 + x^2}$, $x \in]0;\ 8[$ függvény minimumát.

A függvénynek az $x = 5{,}4$ helyen van minimuma. Tehát A-tól 2,6 km távolságra kell letérni a műútról.

5.12. a.) Óránként a költség: $K_{\text{ó}}(v) = 0{,}03v^3 + 480$, $v \geq 0$,

ahonnan a kilóméterenkénti költség: $K(v) = 0{,}03v^2 + \frac{480}{v}$, $v \geq 0$.

$K'(v) = 0{,}06v - \frac{480}{v^2}$, $v \geq 0$.

$v = 20$ km/h sebességgel kell haladnia minimális kilóméterenkénti költség eléréséhez.

b.) $K(20) = 36$, $K(22) = 36{,}3382$, ahonnan kiszámíthatjuk, hogy a növekedés mértéke 0,939 %-os.

5.13. $f(x)=a(50-x)+b\sqrt{400+x^2}$, $x\in\left]0;\ 50\right[$ függvény minimumát keressük.

A függvénynek az $x=\dfrac{20a}{\sqrt{b^2-a^2}}$ helyen minimuma van.

5.14. $f(x)=\sqrt{x^2+1}+2+\sqrt{9+(8-x)^2}$, $x\in\left]0;\ 8\right[$ függvény minimumát keressük.

A függvénynek az $x=2$ helyen van minimuma.

5.15. Az egyidejű elindulás utáni *x*-edik percben a két vonat közötti távolságot adja meg az $f(x)=\sqrt{(40-0{,}8x)^2+(50-0{,}6x)^2}$ függvény.

A két vonat közti távolság az indulás után 62 perccel lesz a legkisebb.

5.16. Az A ponttól az elágazásig terjedő szakaszt jelöljük x-szel.
A költségfüggvény:

$$K(x)=100x+80(6-x)+60\sqrt{1+(4-x)^2}\ .$$

Ennek az $x=3{,}65$ helyen van minimuma.

5.17. Jelöljük *x*-szel az A város folyóra eső merőleges vetületének és az útnak a folyót elérő pontjának távolságát. A teljes szállítási költséget a következő függvény fejezi ki:

$$K(x)=2c\sqrt{11^2+x^2}+c(60-x),$$

ahol "*c*" a szállítási egységköltséget jelenti, kilométerenként. A függvénynek az $x=\dfrac{11}{\sqrt{3}}$ helyen van minimuma. Ez azt jelenti, hogy a szóban forgó utat a folyóra merőleges iránytól α = 30°-os szögben kell vezetni a folyóig a B város irányába.

5.18. A minimális önköltség a 20,2 mázsás termésátlaghoz tartozik.

5.19. a.) $f'(x)=\dfrac{-x^2-2x-2}{\left(x^2+2x\right)^2}$, $x>0$.

Ebből következik, hogy a függvény az értelmezési tartomány mindenpontjában szigorú monoton csökkenő.

b.) $E\left(f(x)\right)=\dfrac{-x^2-2x-2}{(x+2)(x+1)}$, $x>0$.

$E\left(f(2)\right)=-\dfrac{5}{6}=-0{,}83$, vagyis a toxikus anyag-koncentráció 0,83% - kal csökken.

5.20. $f'(x)=\dfrac{4\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\geq 0$.

Absz MIN (1; 0) , mert $]0;\ 1[$ csökken és $]1;\ \infty[$ nő a függvény.

a.) Kezdetben: 2^0C , újraindításkor 0^0C volt a szobákban.

b.) Mivel $\lim\limits_{\infty} f=2$, ezért $\mathrm{R}_f=[0;\ 2]$.

5.21. $f'(x)=\dfrac{0{,}43}{37}\left(\dfrac{-36}{1000-x}+\dfrac{100}{1000+100x}\right)=0$

$x\cong 17{,}3$.

$f''(x)=\dfrac{0{,}43}{37}\left(\dfrac{-36}{(1000-x)^2}+\dfrac{10000}{(1000+100x)^2}\right)<0$.

Ami azt mutatja, hogy a 17,3 Ft - os téttel egyben globális maximumot tud elérni.

5.22. $h(x)=\dfrac{6}{x^3+1}$, $\quad x\in\mathrm{R}^+$.

$B(x)=\dfrac{6x}{x^3+1}$, $\quad x\in\mathrm{R}^+$.

$$B'(x)=\frac{6-12x^3}{\left(x^3+1\right)^2},\quad x\in \mathrm{R}^+.$$

$$B'\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)=0,\qquad \mathrm{MAX}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}};\ 3{,}2\right).$$

$$h\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)=4.$$

$$h'(x)=\frac{-18x^2}{\left(x^3+1\right)^2},\qquad x\in \mathrm{R}^+.$$

Elaszticitás: $E_{y|x}=\dfrac{h'(x)\cdot x}{h(x)}$,

$$E_{y|x}=\frac{3x^3}{x^3+1}=-\frac{3}{2}=-1{,}5\ ,\ \text{tehát}\quad 1{,}5\%\text{-kal csökken.}$$

5.23. a.) $f'(x)=\dfrac{5}{3\sqrt[3]{x^2}}-1,\qquad x\in\left]0;10\right[$

$$f'(2{,}15)=0,$$

$$f''(x)=-\frac{10}{9}x^{-\frac{5}{3}},\qquad x\in\left]0,10\right[$$

$$f''(2{,}15)\ <\ 0\qquad \mathrm{MAX}\ (2{,}15;\ 4{,}3).$$

b.)]0; 2,15[monoton nő a kereslet

c.) $E_{y|x}=\dfrac{f'(x)\cdot x}{f(x)}=\dfrac{\left[\left(\frac{5}{3}\right)-1\right]\cdot 1}{4}=\dfrac{1}{6}\approx 0{,}16.$

5.24. Az egységre eső átlagköltséget a $\dfrac{K(x)}{x},\quad x\in[0;\ 200]$ függvény adja meg. Ez a függvény a $0;\ 106{,}8$ intervallumon monoton csökken, utána pedig monoton nő. Tehát, körülbelül 107-es darabszám esetén lesz minimális az egységre eső átlagköltség.

5.25. $B(x) = x \cdot p(x) = 60x - 0{,}015x^2$ maximumát kell meghatározni.
A maximumhely: $x = 3000$.

5.26. a.) $B(p) = p \cdot f(p) = -4p^2 + 280p$.
A derivált zérushelye $p = 35$, B grafikus képe konkáv parabola,
így $B_{\max} = 4900$.

b.) $f(35) = 140$.

5.27. $B(x) = N(x) + K(x) = -4x^2 + 320x - 268, \quad B'(x) = -8x + 320$.
Stacionárius pont, és egyben maximumhely: $x = 40$.

5.28. a.) Maximumhely: $p = 100$.
b.) A $p = 100$ egységárhoz tartozó kereslet: $f(100) = e^{11} \approx 59874$.

5.29. A h függvény maximumát kell meghatározni. Ennek érdekében képezzük az első és második deriváltfüggvényt:

$$h': x \in \mathrm{R}^+, \quad x \text{ a } \quad -3x^2 + 40x + 860,$$

$$h'': x \in R^+, \quad x \text{ a } \quad -6x + 40.$$

A $h'(24{,}8) = 0$. Mivel $h''(24{,}8) < 0$, a maximális eredmény 24,8 mó forint forgalom mellett várható.

5.30. Jelöljük x-szel az egyenlő időközönként rendelendő azonos darabszámot.
Az egy évre szóló összköltség-függvény (leszámítva a félkész termék beszerzési árát, hiszen ez nem befolyásolja a minimumot):

$$K(x) = \left(600 + \frac{x}{2} \cdot 200 \cdot \frac{x}{\frac{50}{3}}\right) \cdot \frac{\frac{50}{3} \cdot 300}{x}, \quad x \in \mathrm{R}^+.$$

Megoldás: minimális az összköltség, ha $x = 10$.

5.31. Az együttes költségfüggvény (x darab termelése esetén):

$$K\colon x \text{ a } \left[\frac{a}{bx+c}+d\right]x+Ax, \quad x \in]B,\ \infty[\setminus \left\{-\frac{c}{b}\right\}.$$

$$K'\colon x \text{ a } \frac{ac}{(bx+c)^2}+d+A, \quad x \in]B,\ \infty[\setminus \left\{-\frac{c}{b}\right\}.$$

A $K'(x)=0$ egyenlet (és a feladat) megoldása : $x_0=\frac{1}{b}\left[\sqrt{-\frac{a\cdot c}{d+A}}-c\right]$.

5.32. Az összköltség x darab termelése esetén:

$$K(x)=\frac{a}{bx+c}+d+A^{-x}.$$

E függvény deriváltja mindenütt negatív, a költség x növekedésével állandóan fogy, minimuma nincs. Az optimális darabszám tehát az a maximális mennyiség, amit az üzem termelni képes.

5.33. Megoldott feladat.

5.34. $PQ\colon\ Q \in \mathrm{R}^+,\ \ Q \text{ a } 114Q-0{,}25Q^2$

$C\colon\ Q \in \mathrm{R}^+,\ \ Q \text{ a } 120Q-Q^2+0{,}02Q^3$

$(PQ)'\colon\ Q \in R^+,\ \ Q \text{ a } 114-0{,}5Q$

$C'\colon\ Q \in \mathrm{R}^+,\ \ Q \text{ a } 120-2Q+0{,}06Q^2$

$114-0{,}5Q=120-2Q+0{,}06Q^2$

$Q = 20.$

5.35. a.) A határköltség: $C'\colon Q \text{ a } 120-2Q+0{,}06Q^2,\ \ Q \in]0;\ 400[$,

$C'(50)=170,\ C'(100)=520,\ \ C'(150)=1170.$

A határbevétel: $(PQ)'\colon Q \text{ a } 114Q-0{,}24Q^2,\ \ Q \in]0;\ 400[$,

$(PQ)'(50)=5100,\ (PQ)'(100)=9000,\ (PQ)'(150)=11700.$

A határprofit: $R'\colon Q \text{ a } -0{,}3Q^2+116Q-120,\ \ Q \in]0;\ 400[$,

. $R'(50)=4930,\ R'(100)=8480,\ R'(150)=10530.$

b.) $120-2Q+0{,}06Q^2=114Q-0{,}24Q^2$,
$Q_1=385{,}629$, $Q_2=1{,}03727$.
A feltételnek mindkét megoldás eleget tesz.

5.36. a.) $g'(t)=50-0{,}1t$, ahonnan MAX (500; 12500).

b.) $g(t)=50t-0{,}05t^2$,
a 6. hónap eleje az az 5. hónap vége + 1nap: $g(126)=5506{,}2$ (m),
a 7. hónap vége: $g(175)=7218{,}75$(m).

c.) $K(x)=\frac{x^2}{2}+4x+\sqrt{x^3}+\mathrm{C}$ ($K'(x)$-ből integrálással kaptuk!).

d.) $g(5\cdot 25+1)=5506{,}2$ $g(7\cdot 25)=7218{,}75$ $g(200)=8000$
$K(8000)=32747542$, $K(7218{,}75)=26697379$,
$K(5506{,}2)=15589725$, tehát
a 6. hónapban végzett munka költsége: 11 107 654;
a 7. hónapban végzett munka költsége: 6 050 162,9.

e.) $K'(10)=18{,}737$.

f.) $E(K(x))=\frac{8+3\sqrt{x}+2x}{x+8+\sqrt{x}}$.

5.37. A tiszta bevételt nyilván a
z: (x_1,x_2) a $5(x_2-x_1)(x_1-2{,}5)1000+(30+5x_1-8x_2)(x_2-3)1000$,
$D_z=\mathrm{R}^+x\,\mathrm{R}^+$.
kétváltozós függvény írja le. A feladat megoldása pedig a z függvény szélsőértékének megkeresését jelenti.
A függvénynek maximuma van az x_1 = 6,25, x_2 = 6,5 pontban.
A kapott eredmény tíz forintokban értendő, vagyis az eladási ár 62,5 Ft illetve 65 Ft.

5.38. Az x_1 és x_2 árú termékek eladásából származó tiszta összbevételt az

$$f(x_1,x_2)=\frac{10000}{x_1\cdot x_2}(x_1-20)+\frac{20000}{x_1\cdot x_2}(x_2-10)$$

függvény adja meg. Ennek akkor van maximuma, ha x_1 = 40 Ft és x_2 = 20 Ft.

5.39. Tegyük fel, hogy a feladatban említett meghatározott idő T napból áll, továbbá, hogy egy-egy sorozat legyártásához t_1, illetve t_2 idő (nap) szükséges az A, ill. B jelű termékből. A kérdéses sorozatnagyságot jelöljük x_1-gyel, ill. x_2-vel. Ez esetben - egyenletes termelést feltételezve - a t_1, ill. t_2 napra eső átlagos raktárkészlet $\frac{x_1}{2}$ és $\frac{x_2}{2}$, így az ezen időre eső átlagos raktárköltség $\frac{x_1}{2}r_1t_1$, ill. $\frac{x_2}{2}r_2t_2$ Ft. Mivel T idő alatt $\frac{T}{t_1}(i=1,2)$ sorozatot gyártanak le, így a T napra eső összes raktárköltség: $K_r = \frac{r_1 T x_1}{2} + \frac{r_2 T x_2}{2}$. A fix költségek, amelyek egy-egy sorozat gyártásának beindításához szükségesek, T idő alatt $K_f = k_1 \frac{T}{t_1} + k_2 \frac{T}{t_2} = k_1 \frac{N_1}{x_1} + k_2 \frac{N_2}{x_2}$ Ft-ot tesznek ki.

Ui. Nyilvánvaló, hogy $\frac{T}{t_i} = \frac{N_i}{x_i}$ $(i = 1, 2)$. A minimalizálandó költségfüggvény ezek alapján:

$$K(x_1, x_2) = K_r + K_f = \frac{r_1 T x_1}{2} + k_1 \frac{N_1}{x_1} + \frac{r_2 T x_2}{2} + k_2 \frac{N_2}{x_2}.$$

Megoldásul az

$$x_1 = \sqrt{\frac{2k_1 N_1}{r_1 T}} \quad \text{és} \quad x_2 = \sqrt{\frac{2k_2 N_2}{r_2 T}}$$

adódik, és könnyen belátható, hogy ezek az értékek valóban a $K(x_1, x_2)$ függvény minimumhelyét szolgáltatják.

5.40. Behelyettesítve az előző általános feladat eredményeibe kapjuk, hogy a leggazdaságosabb termelés megvalósítására körülbelül 73, illetve 179 darabot kell legyártani a kétféle termékből sorozatonként.