4.61. Zérushely: $x_1 = 1$.

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

$$f''(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}.$$

Szélsőérték pont: ABSZMAX $\left(e;\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

Inflexiós pont: (4,48; 0,33).

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0,$

$\lim\limits_{-0+0} f(x) = -\infty.$

$R_f =]-\infty;\ 0{,}37].$

4.62. Zérushely: $x_1 = \frac{1}{e}$.

$$f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

$$f''(x) = \frac{2\ln x - 1}{x^3}.$$

Szélsőérték pont: ABSZMAX $(1;\ 1)$.

Inflexiós pont: $\left(\sqrt{e};\ 0{,}91\right)$.

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0,$

$\lim\limits_{0+0} f(x) = -\infty.$

$R_f =]-\infty;\ 1].$

4.63. Zérushely: $x_1 = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 1+2x, & x \in \mathrm{R}^+ \\ -1+2x, & x \in \mathrm{R}^-. \end{cases}$$

$f''(x) = 2,\ \ x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}.$

Szélsőérték pont: ABSZMIN (0; 0).

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty.$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty.$

$R_f = \mathrm{R}_0^+.$

4.64. Zérushely: $x_1 = \frac{1}{2}$.

$$f'(x) = 2\frac{3x^2 - 3x + 1}{x^3(x-1)^3}.$$

$$f''(x) = 6\frac{\left(2x^2 - 2x + 1\right)(1-2x)}{x^4(x-1)^4}.$$

Inflexiós pont: (0,5; 0)

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0,$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0,$

$\lim\limits_{0} f(x) = +\infty, \qquad \lim\limits_{1} f(x) = -\infty.$

$R_f = \mathrm{R}.$

4.65. Zérushely: nincs.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$f''(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{3-2x}{(1-x)^4}.$$

Inflexiós pont: (1,5; 0).

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = 1,$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = 1,$

$\lim\limits_{1-0} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{1+0} f(x) = 0.$

$R_f = \mathrm{R}^+ \setminus \{1\}.$

4.66. $E\left(\frac{2}{x-3}\right) = -\frac{x}{x-3}$.

Értékkészlet: $[-4;\ 2]$.

4.67. $E\left(k(x)\right) = \frac{18x^2 - 3x^3}{9x^2 - x^3 - 28}$.

$E\left(k(5)\right) \approx 1{,}04$.

4.68. $E(x) = x \cdot \ln 2$

$E_{y|5} = 5 \cdot \ln 2$.

4.69. Az $f(p)$ függvény elaszticitása: $E\left(f(p)\right) = -\frac{p}{p+3}$.

$E\left(f(5)\right) = -\frac{5}{8}$. A kereslet tehát körülbelül 0,6%-kal csökken.

4.70. $E\left(K(F)\right) = K'(F) \cdot \frac{F}{K(F)} =$

$$= \frac{2F\left(3F^2 - 925F + 150000\right)}{2F^3 - 925F^2 + 300000F + 106000000},\ F \in \mathrm{R}^+.$$

4.71. Zérushely: nincs. $\lim\limits_{+\infty} K(F) = +\infty$.

$K'(F) = p + \frac{d}{2\sqrt{F}},\quad F \in \mathrm{R}^+ \setminus \{F_1,\ F_2, \mathrm{L}\ , F_n\}$.

$K''(F) = p - \frac{d}{4F\sqrt{F}},\quad F \in \mathrm{R}^+ \setminus \{F_1,\ F_2, \mathrm{L}\ , F_n\}$.

$R_K = \mathrm{R}_0^+$.

4.72. $f'_x(x,y) = 2x - 4y + 8,\qquad f'_y(x,y) = 12y - 4x - 28,$

$\begin{cases} 2x - 4y + 8 = 0 \\ 12y - 4x - 28 = 0 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása a stacionárius pont.

4.73. $\mathrm{P}_1(0;\ 0)$ és $\mathrm{P}_2\left(\frac{2}{3};\ -\frac{4}{3}\right)$.

4.74. $\mathrm{P}(1;\ 0)$.

4.75. $\mathrm{P}\left(-\frac{16}{5};\ \frac{7}{5}\right)$.

4.76. $\mathrm{P}\left(-\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right)$.

4.77. $\begin{cases} 2x+2y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$ Végtelenül sok stacionárius pont van.

Ezek alakja: $\mathrm{P}(x;\ -x), \quad x \in \mathrm{R}$.

4.78. Nincs stacionárius pont.

4.79. $f'_x(x,y)=2x+y, \quad f'_y(x,y)=2y+x+1,$

$\left.\begin{matrix} 2x+y & =0 \\ 2y+x+1 & =0 \end{matrix}\right\}$, ha $x=\frac{1}{3}, \quad y=-\frac{2}{3}$

$f''_{xx}(x,y)=2, \qquad f''_{yy}(x,y)=2, \qquad f''_{xy}(x,y)=1,$

$\mathrm{D}\left(\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right)=2\cdot 2-1^2=3>0,$ van szélsőérték.

$f''_{xx}\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)>0,$ tehát az $\left(\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$ pontban minimum van,

azaz: $f\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)=\frac{14}{3}$.

4.80. $f'_x(x,y)=3x^2-3y, \quad f'_y(x,y)=3y^2-3x,$

$\left.\begin{matrix} 3x^2-3y & =0 \\ 3y^2-3x & =0 \end{matrix}\right\}$, a $\mathrm{P}_1(0;\ 0)$ és $\mathrm{P}_2(1;\ 1)$ pontokban

$f''_{xx}(x,y)=6x, \qquad f''_{yy}(x,y)=6y, \qquad f''_{xy}(x,y)=-3.$

$\mathrm{D}(0,0)=0\cdot 0-(-3)^2<0,$ tehát $\mathrm{P}_1(0;\ 0)$ -ban nincs szélsőérték.

$\mathrm{D}(1,1)=6\cdot 6-(-3)^2>0,$ tehát $\mathrm{P}_2(1;\ 1)$ -ben van szélsőérték.

$f''_{xx}(1,1)>0,$ tehát a $\mathrm{P}_2(1;\ 1)$ -ben minimum van,

azaz: $f(1,1)=1$.

4.81. $f'_x(x,y)=\frac{y}{125}-\frac{1}{x^2}$, $f'_y(x,y)=\frac{x}{125}-\frac{1}{y^2}$,

$$\left.\begin{aligned}\frac{y}{125}-\frac{1}{x^2}&=0\\ \frac{x}{125}-\frac{1}{y^2}&=0\end{aligned}\right\},$$ ha $x=5$, $y=5$.

$f''_{xx}(x,y)=\frac{2}{x^3}$, $f''_{yy}(x,y)=\frac{2}{y^3}$, $f''_{xy}(x,y)=\frac{1}{125}$.

$D(5,5)=\frac{3}{(125)^2}>0$, tehát van szélsőérték.

$f''_{xx}(5,5)=\frac{2}{125}>0$, tehát az $(5;\ 5)$ pontban minimum van,

azaz: $f(5,5)=\frac{3}{5}$.

4.82. MIN $(1;\ -2;\ -4)$.

4.83. MIN (2; 5; 30).

4.84. MIN_1 $(1;\ 1;-2)$, MIN $(-1;-1;-2)$, a P (0; 0; 0) stacionárius pont vizsgálata további ismereteket feltételez.

4.85. MIN (2,25; 1,5; 1,6875), a P (0; 0; 0) stacionárius pont vizsgálata további ismereteket feltételez.

4.86. MIN $(1;\ 0;\ -1)$.

4.87. MIN (0; 0; 0).

4.88. MIN $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ -1{,}75\right)$.

4.89. MIN $\left(\frac{8}{3};\ -\frac{8}{3};\ -9\frac{13}{27}\right)$.