4.22. $f'(x) = -e^x(1+x), \quad x \in \mathrm{R}.$

$f''(x) = -e^x(2+x), \quad x \in \mathrm{R}.$

$f'''(x) = -e^x(3+x), \quad x \in \mathrm{R}.$

4.23. $f'(x) = \dfrac{x-1-x^2}{e^x(x-1)^2}, \; x \in \mathrm{R} \setminus \{1\}.$

$f''(x) = \dfrac{x^3-2x^2+3x}{e^x(x-1)^3}, \; x \in \mathrm{R} \setminus \{1\}.$

4.24. $f'(x) = -2x \cdot e^{2-x^2}, \; x \in \mathrm{R}.$

$f''(x) = 2 \cdot e^{2-x^2}\left(2x^2-1\right), \; x \in \mathrm{R}.$

$\left]-\infty; \; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ f konvex, $\left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ f konkáv,

$\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \; +\infty\right[$ f konvex.

$\mathrm{INFL}_1\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \; e^{\frac{3}{2}}\right), \qquad \mathrm{INFL}_2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \; e^{\frac{3}{2}}\right).$

4.25. $f'(x) = x^2(3\ln x + 1), \; x \in \mathrm{R}^+.$

$f''(x) = x(6\ln x + 5), \; x \in \mathrm{R}^+.$

$]0; \; 0{,}43[$ f konkáv, $]0{,}43; \; \infty[$ f konvex.

$\mathrm{INFL}\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{e^5}}; \; \dfrac{-5}{6\sqrt{e^5}}\right).$

4.26. $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}, \; x \in \mathrm{R}.$

$f''(x) = \dfrac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}, \; x \in \mathrm{R}.$

$f''(x) = 0$, ha $x_1 = -1$, vagy $x_2 = 1.$

$]-\infty;\ -1[$ f konkáv, $]-1;\ 1[$ f konvex, $]1;\ +\infty[$ f konkáv.
$\mathrm{INFL}_1\ (-1;\ 0{,}69)$, $\mathrm{INFL}_2\ (1;\ 0{,}69)$.

4.27. A számláló határértéke is, a nevező határértéke is $+\infty$, tehát alkalmazhatjuk a l'Hospital-szabályt:

$$\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

4.28. $\frac{0}{0}$ típusú kifejezésről van szó, tehát alkalmazhatjuk a l'Hospital-szabályt:

$$\lim_{0} \frac{(1+x)^5 - 1}{x} = \lim_{0} \frac{5(1+x)^4}{1} = 5.$$

4.29. Zérushely: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

$f'(x) = 2x - 4x^3,\ x \in \mathrm{R}.$

$f''(x) = 2 - 12x^2,\ x \in \mathrm{R}.$

$f'''(x) = -24x,\ x \in \mathrm{R}.$

Szélsőérték pont: MAX_1 (-0,71; 0,25), MAX_2 (0,71; 0,25), MIN (0; 0).

$]-\infty;\ -0{,}71[$ monoton nő,
$]-0{,}71;\ 0[$ monoton csökken,
$]0;\ 0{,}71[$ monoton nő,
$]0{,}71;\ +\infty[$ monoton csökken.

Inflexiós pont: (-0,41; 0,14), (0,41; 0,14)

$]-\infty;\ -0{,}41[$ konkáv,
$]-0{,}41;\ 0{,}41[$ konvex,
$]0{,}41;\ +\infty[$ konkáv.
$\lim_{+\infty} f(x) = -\infty$,
$\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$.
$R_f =]-\infty;\ 0{,}25[$.

Megjegyzés

A továbbiakban nem térünk ki, helyhiány miatt, a deriváltfüggvények értelmezési tartományára, a monotonitási intervallumokra és a konvex/konkáv intervallumokra.

4.30. Zérushely: $x_1 = 0,$ $x_2 = 1{,}25.$

$f'(x) = 15x^2 - 16x^3.$

$f''(x) = 30x - 48x^2.$

$f'''(x) = 30 - 96x.$

Szélsőérték pont:ABSZMAX $\left(\frac{15}{16};\ 1{,}03\right).$

Inflexiós pont: $(0;\ 0),$ $\left(\frac{5}{8};\ 0{,}61\right).$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = -\infty,$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty.$

$R_f =]-\infty;\ 1{,}03[.$

4.31. Zérushely: $x_1 = 0,$ $x_2 = 5.$

$f'(x) = 3x^2 - 10x.$

$f''(x) = 6x - 10.$

$f'''(x) = 6.$

Szélsőérték pont:MAX (0; 0), MIN$\left(\frac{10}{3};\ -18{,}52\right).$

Inflexiós pont: $\left(\frac{5}{3};\ -9{,}26\right).$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty,$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty.$

$R_f = \mathrm{R}.$

4.32. Zérushely: nincs.

$f'(x) = 8x^3 - 8x$.

$f''(x) = 24x^2 - 8x$.

$f'''(x) = 48x$.

Szélsőérték pont: ABSZMIN$_1$ $(-1;\ 4)$, MAX $(0;\ 6)$, ABSZMIN$_2$ $(1;\ 4)$.

Inflexiós pont: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\ 4{,}9\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\ 4{,}9\right)$.

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$,

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$.

$R_f = [4;\ +\infty[$.

4.33. Zérushely: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$f''(x) = 6x - 6$.

$f'''(x) = 6$.

Szélsőérték pont: MAX $(0;\ 4)$, MIN $(2;\ 0)$.

Inflexiós pont: $(1;\ 2)$.

$\lim\limits_{+\infty} f(x) + \infty$,

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$.

$R_f = \mathrm{R}$.

4.34. Zérushely: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

$f'(x) = x^2\left(5x^2 - 3\right)$.

$f''(x) = 2x\left(10x^2 - 3\right)$.

$f'''(x) = 6\left(10x^2 - 1\right)$.

Szélsőérték pont: MAX $\left(-\sqrt{\frac{3}{5}};\ 0{,}19\right)$, MIN$\left(\sqrt{\frac{3}{5}};\ -0{,}19\right)$.

Inflexiós pont:$\left(-\sqrt{0{,}3};\ 0{,}12\right)$, $(0;\ 0)$, $\left(\sqrt{0{,}3};\ -0{,}12\right)$.

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty,$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty.$

$R_f = \mathrm{R}.$

4.35. Zérushely: nincs

$f'(x) = 4(x-1)^3.$

$f''(x) = 12(x-1)^2.$

Szélsőérték pont: MAX $(-1;\ 17)$, ABSZMIN $(1;\ 1)$,

ABSZMAX $(5;\ 257)$.

$R_f = [1;\ 257].$

4.36. Zérushely: $x_1 = \sqrt{1+\sqrt{3}}$, $x_2 = -\sqrt{1+\sqrt{3}}$.

$f'(x) = 2x - 2x^3.$

$f''(x) = 2 - 6x^2.$

$f'''(x) = -12x.$

Szélsőérték pont: $\mathrm{ABSZMAX}_1\,(-1;\ 1{,}5)$, MIN $(0;\ 1)$,

$\mathrm{ABSZMAX}_2\,(1;\ 1{,}5)$.

Inflexiós pont: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{23}{18}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{23}{18}\right)$.

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = -\infty,$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty.$

$R_f = \left]-\infty;\ \frac{3}{2}\right].$

4.37. Zérushely: $x_1 = -\sqrt[3]{2}$.

$f'(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}.$

$f''(x) = \frac{x^3 + 2}{x^3}.$

Szélsőérték pont: MIN $\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$.

Inflexiós pont: $\left(-\sqrt[3]{2};\ 0\right)$.

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty,$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty.$

$\lim\limits_{0-0} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{0+0} f(x) = +\infty.$

$R_f = \mathrm{R}.$

4.38. Zérushely: $x_1 = 0$.

$$f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{-12}{(x+3)^3}.$$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = 2,$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = 2,$

$\lim\limits_{-3-0} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{-3+0} f(x) = -\infty.$

$R_f = \mathrm{R} \setminus \{2\}.$

4.39. Zérushely: $x_1 = 3$.

$$f'(x) = \frac{6}{(x-1)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{-12}{(x-1)^3}.$$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = 3,$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = 3,$

$\lim\limits_{1-0} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{1+0} f(x) = -\infty.$

$R_f = \mathrm{R} \setminus \{3\}.$

4.40. Zérushely: nincs.

$$f'(x)=1-\frac{2}{(x+1)^2}.$$

$$f''(x)=\frac{4}{(x+1)^3}.$$

Szélsőérték pont: MAX $(-2{,}41;\ -3{,}83)$, MIN $(0{,}41;\ 1{,}83)$.

$\lim\limits_{+\infty} f(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{-\infty} f(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{-1-0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{-1+0} f(x)=+\infty$.

$R_f=\left]-\infty;\ -2\sqrt{2}-1\right]\cup\left[2\sqrt{2}-1;\ +\infty\right[$.

4.41. Zérushely: nincs.

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x^3}.$$

$$f''(x)=2+\frac{6}{x^4}.$$

Szélsőérték pont: ABSZMIN$_1$ $(-1;\ 2)$, ABSZMIN$_2$ $(1;\ 2)$.

$\lim\limits_{+\infty} f(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{-\infty} f(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{0} f(x)=+\infty$.

$R_f=\left[2;\ +\infty\right[$.

4.42. Zérushely: $x_1=-0{,}1$, $x_2=5{,}1$.

$$f'(x)=\frac{-6x-12}{(x-1)^3},$$

$$f''(x)=\frac{12x+42}{(x-1)^4}.$$

Szélsőérték pont: ABSZMIN $(-2;\ -3)$.

Inflexiós pont: $(-3{,}5;\ -2{,}89)$.

$\lim\limits_{+\infty} f(x)=-2$,

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -2,$

$\lim\limits_{1} f(x) = +\infty.$

$R_f = [-3;\ +\infty[.$

4.43. Zérushely: $x_1 = 0.$

$$f'(x) = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{2-6x^2}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

Szélsőérték pont: ABSZMIN (0; 0)

Inflexiós pont: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{1}{4}\right).$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = 1,$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = 1.$

$R_f = [0;\ 1[.$

4.44. Zérushely: $x_1 = 0.$

$$f'(x) = \frac{10-5x}{(x+2)^3}.$$

$$f''(x) = \frac{10x-40}{(x+2)^4}.$$

Szélsőérték pont: ABSZMAX (2; 0,625).

Inflexiós pont: (4; 0,56).

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0,$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0,$

$\lim\limits_{-2} f(x) = -\infty.$

$R_f =]-\infty;\ 0{,}625].$

4.45. Zérushely: $x_1 = 0$.

$$f'(x) = \frac{6\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2},$$

$$f'(x) = \frac{12x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Szélsőérték pont: ABSZMIN $(-1;\ -3)$, ABSZMAX $(1;\ 3)$.

Inflexiós pont: $\left(-\sqrt{3};\ -2{,}6\right)$, $\left(\sqrt{3};\ 2{,}6\right)$.

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0,$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0.$

$R_f = [-3;\ 3]$.

4.46. Zérushely: $x = 1$.

$$f'(x) = \frac{6(x-1)(x+1)}{\left(x^2+1\right)^2},\quad x \in \mathrm{R}.$$

$$f''(x) = \frac{-12x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3},\ x \in \mathrm{R}.$$

Szélsőérték pont: MAX $(-1;\ 6)$, MIN $(1;\ 0)$.

Inflexiós pont: INFL_1 $\left(-\sqrt{3};\ 5{,}6\right)$, INFL_2 $(0;\ 3)$, INFL_3 $\left(\sqrt{3};\ 0{,}40\right)$.

$\lim\limits_{\pm\infty} f = 3,\quad R_f = [0;\ 6]$.

4.47. Zérushely: $x = 0$.

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x-1)^3},\quad x \in \mathrm{R}\setminus\{1\}.$$

$$f''(x) = \frac{6(2x+1)}{(x-1)^4},\ x \in \mathrm{R}\setminus\{1\}.$$

Szélsőérték pont: MIN $(0;\ 0)$.

Inflexiós pont: INFL $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right)$.

$\lim\limits_{\pm\infty} f = 3, \quad \lim\limits_{1} f = \infty, \quad R_f = \mathrm{R}_0^+$.

4.48. Zérushely: $x = 0$.

$$f'(x) = \frac{5x^2(2x+3)}{(2x+1)^3}, \quad x \in \mathrm{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

$$f''(x) = \frac{30x}{(2x+1)^4}, \quad x \in \mathrm{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

Szélsőérték pont: MAX $\left(-\frac{3}{2};\ -4{,}22\right)$.

Inflexiós pont: INFL $(0;\ 0)$.

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty, \quad \lim\limits_{-\infty} f = -\infty, \quad \lim\limits_{-\frac{1}{2}} f = -\infty$.

$R_f = \mathrm{R}$.

4.49. Zérushely: $x_1 = 1, \quad x_2 = -1$.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}.$$

Szélsőérték pont: $\mathrm{MIN}_1(-1;\ 0)$, $\mathrm{MIN}_2\ (1;\ 0)$.

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$,

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$.

$R_f = \mathrm{R}_0^+$.

4.50. Zérushely: $x_1 = 0, \quad x_2 = 1$.

$$f'(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}.$$

$$f''(x) = \frac{3x-4}{4(1-x)\sqrt{1-x}}.$$

Szélsőérték pont: ABSZMAX $\left(\frac{2}{3};\ 0{,}38\right)$, MIN (1; 0).

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$.

$R_f = \left]-\infty;\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$.

4.51. Zérushely: $x_1 = 4$.

$f'(x) = \frac{2}{3^3\sqrt{x-4}}$.

$f''(x) = \frac{2}{9^3\sqrt{(x-4)^4}}$.

Szélsőérték pont: ABSZMIN (4; 0).

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$,

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$.

$R_f = \mathrm{R}_0^+$.

4.52. Zérushely: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$f''(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

Szélsőérték pont: MAX (0; 0), ABSZMIN (1; 0).

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.

$R_f = [-1;\ +\infty[$.

4.53. Zérushely: nincs

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$.

$f''(x) = \frac{-2(2x^2+1)\sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)^3}$.

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0,$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0,$

$\lim\limits_{-1-0} f(x) = -\infty,$

$\lim\limits_{1+0} f(x) = -\infty.$

$R_f = \mathrm{R}^-.$

4.54. Zérushely: $x_1 = 0.$

$f'(x) = e^x(1+x).$

$f''(x) = e^x(2+x).$

Szélsőérték pont: ABSZMIN $\left(-1;\ -\frac{1}{e}\right).$

Inflexiós pont: $\left(-2;\ -\frac{2}{e^2}\right).$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty,$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0.$

$R_f = \left[-\frac{1}{e};\ +\infty\right[.$

4.55. Zérushely: $x_1 = 0.$

$f'(x) = 2xe^{-x^2}(1-x^2).$

$f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^4 - 5x^2 + 1).$

Szélsőérték pont: ABSZMAX $\left(1;\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$, ABSZMIN (0; 0),

ABSZMAX $\left(-1;\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right).$

Inflexiós pont: $(-1{,}51;\ 22{,}29),\ (-0{,}47;\ 0{,}28),\ (0{,}47;\ 0{,}18),$

$(1{,}51;\ 22{,}29).$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0,$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0.$

$R_f = \left[0;\ \frac{1}{e}\right].$

4.56. Zérushely: $x = 0.$

$f'(x) = 3(1-x)e^{-x},\ \ x \in \mathrm{R}.$

$f''(x) = 3(x-2)e^{-x},\ x \in \mathrm{R}.$

$f'''(x) = 3(3-x)e^{-x},\ x \in \mathrm{R}.$

Szélsőérték pont: MAX $\left(1;\ \frac{3}{e}\right).$

Inflexiós pont: INFL $\left(2;\ \frac{6}{e^2}\right).$

$\lim\limits_{+\infty} f = 0, \quad \lim\limits_{-\infty} f = -\infty.$

$R_f = \left]-\infty;\ 3e^{-1}\right].$

4.57. Zérushely: $x = 0.$

$f'(x) = e^{-x} \cdot x^2(3-x),\ \ x \in \mathrm{R}.$

$f''(x) = e^{-x} \cdot x\left(x^2 - 6x + 6\right),\ x \in \mathrm{R}.$

Szélsőérték pont: MAX $\left(3;\ \frac{27}{e^3}\right).$

Inflexiós pont: $\mathrm{INFL}_1\ (0;\ 0), \quad \mathrm{INFL}_2\ \left(3-\sqrt{3};\ 0{,}58\right),$

$\mathrm{INFL}_3\ \left(3+\sqrt{3};\ 1{,}33\right).$

$\lim\limits_{+\infty} f = 0, \quad \lim\limits_{-\infty} f = -\infty.$

$R_f = \left]-\infty;\ \frac{27}{e^3}\right].$

4.58. Zérushely: $x = 0.$

$f'(x) = \frac{-2\left(x^2 - x + 1\right)}{(x-1)^2 e^x},\ \ x \in \mathrm{R} \setminus \{1\}.$

$$f''(x)=\frac{2x\left(x^2-2x+3\right)}{(x-1)^3e^x},\ x\in\mathrm{R}\setminus\{1\}.$$

Szélsőérték pont: nincs.

Inflexiós pont: $\mathrm{INFL}(0;\ 0)$.

$\lim\limits_{+\infty} f=0,\quad \lim\limits_{-\infty} f=+\infty,\quad \lim\limits_{1+0} f=\infty,\quad \lim\limits_{1-0} f=-\infty.$

$R_f=\mathrm{R}.$

4.59. Zérushely: $x=1$.

$f'(x)=\ln x+1,\ \ x\in\mathrm{R}^+.$

$f''(x)=\frac{1}{x},\ x\in\mathrm{R}^+.$

$f'''(x)=-\frac{1}{x^2},\ x\in\mathrm{R}^+.$

Szélsőérték pont: $\mathrm{MIN}\left(\frac{1}{e};\ -\frac{1}{e}\right)$.

Inflexiós pont: nincs.

$\lim\limits_{+\infty} f=\infty,\quad \lim\limits_{0+0} f=0.$

$R_f=\left[-\frac{1}{e};\ \infty\right[.$

4.60. Zérushely: $x=1$.

$f'(x)=x(2\ln x+1),\ \ x\in\mathrm{R}^+.$

$f''(x)=2\ln x+3,\ x\in\mathrm{R}^+.$

Szélsőérték pont: $\mathrm{MIN}\left(e^{-\frac{1}{2}};\ -\frac{1}{2e}\right)$.

Inflexiós pont: $\mathrm{INFL}\left(e^{-\frac{3}{2}};\ -\frac{3}{2e^3}\right)$.

$\lim\limits_{+\infty} f=\infty,\quad \lim\limits_{0+0} f=0.$

$R_f=\left[-\frac{1}{2e};\ \infty\right[.$