4. FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT

4.1. Zérushely: $x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$

$\lim\limits_{\pm\infty} f = -\infty.$

$f'\colon f'(x) = 1 - 2x, \quad x \in \mathrm{R},$

$f''\colon f''(x) = -2, \; x \in \mathrm{R}.$

A függvénynek abszolút maximuma van a P(0,5; 0,25) pontban.

4.2. Zérushely: $x_1 = 0, \quad x_2 = 2{,}5.$

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty, \quad \lim\limits_{-\infty} f = -\infty.$

$f'\colon f'(x) = 6x^2 - 10x, \; f'(0) = 0, \quad f'\left(\frac{5}{3}\right) = 0.$

$f'(-1) > 0$, és $f'(1) < 0$, tehát a függvénynek lokális maximuma van a 0 helyen.

$f'(1) < 0$ és $f'(2) > 0$, tehát a függvénynek lokális minimuma van az $\frac{5}{3}$ helyen.

4.3. A függvénynek a $-1 \le x \le 2$ intervallumban zérushelye csak a 0 pont. A 0 helyen abszolút maximuma van, a -1 helyen pedig abszolút minimuma van a függvénynek

4.4. Zérushely: $x = 0.$

$\lim\limits_{\pm\infty} f = +\infty.$

$f'\colon f'(x) = 6x\left(x^2 - 1\right)^2, \quad x \in \mathrm{R}, \quad f'(0) = 0.$

$f''\colon f''(x) = 6\left(x^2 - 1\right)\left(5x^2 - 1\right), \quad x \in \mathrm{R},$

$f''(0) > 0$, a függvénynek a 0 helyen abszolút minimuma van.

ABSZMIN (0, 0).

4.5. Zérushely: $x = 0.$

$\lim\limits_{\pm\infty} f = 0.$

$$f': f'(x) = \frac{6\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)}, \quad x \in \mathrm{R}, \quad f'(1) = 0 \quad \text{és} \quad f'(-1) = 0.$$

$$f'': f''(x) = \frac{12x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}, \quad x \in \mathrm{R}.$$

$f''(1) < 0$, a függvénynek az 1 helyen abszolút maximuma van.

$f''(-1) > 0$, a függvénynek a -1 helyen abszolút minimuma van.

4.6. Zérushely: $x = 0$.

$\lim_{\pm\infty} f = 0.$

$$f': f'(x) = xe^{-x^2(2-2x^2)}, \quad f'(-1) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(1) = 0.$$

$$f'': f''(x) = e^{-x^2}\left(4x^4 - 10x^2 + 2\right).$$

$f''(-1) < 0$, -1 hely abszolút maximumhely,

$f''(0) > 0$, 0 hely abszolút minimumhely,

$f''(1) < 0$, 1 hely abszolút maximumhely.

4.7. Zérushely: nincs.

$$f': f'(x) = e^{-x^2}\left(1-2x^3\right), \quad x \in \mathrm{R}.$$

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 0.$$

$$f'': f''(x) = e^{-x^2} \cdot 2x\left(2x^3 - 3x - 1\right), \quad x \in \mathrm{R}.$$

$f''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) < 0$, a függvénynek a $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ helyen abszolút maximuma van.

$$\text{ABSZMAX}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\ 1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}e^{-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}\right).$$

4.8. Zérushely: nincs.

$\lim_{+\infty} f = +\infty, \quad \lim_{0+0} f = 0.$

$f': f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad f'\left(\frac{1}{e^2}\right) = 0.$

$f'': f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} (\ln x + 1).$

$f''\left(\frac{1}{e^2}\right) > 0$, a függvénymek az $\frac{1}{e^2}$ helyen abszolút minimuma van.

ABSZMIN $\left(\frac{1}{e^2};\ -\frac{2}{e}\right)$.

4.9. Zérushely: $x = 4$. $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in \mathrm{R}^+$, $f'(1) = 0$. $f'(0{,}5) < 0$ és $f'(1{,}5) > 0$, tehát az 1 helyen abszolút minimuma van a függvénynek.

4.10. $f(x) = 30 - 20x + 4x^2$, $x \in \mathrm{R}$.
$f'(x) = -20 + 8x$, $x \in \mathrm{R}$, $f'(2{,}5) = 0$.
$f''(x) = 8$, $x \in \mathrm{R}$.
ABSZMIN (2,5; 2,5).

4.11. $f'(x) = \frac{8x^3}{3\sqrt[3]{x^4 - 1}}$, $x \in \mathrm{R} \setminus \{-1; 1\}$. $f'(0) = 0$.
Függvényünk a -1 és az 1 helyen nem differenciálható. Ezeken a helyeken a függvénynek csak végtelen egyoldali differenciálhányadosa van:

$$f'_-(-1) = -\infty \quad \text{és} \quad f'_+(-1) = +\infty,$$

$$f'_-(1) = -\infty \quad \text{és} \quad f'_+(1) = +\infty.$$

MAX (0, 1), MIN (-1, 0), MIN (1,0).

4.12. A függvénynek nincs zérushelye.
ABSZ MAX (100; 85).
ABSZ MIN (0; 10).

4.13. $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.
$f'(x) = 1 - 3x^2$, $x \in \mathrm{R}$. $f''(x) = -6x$, $x \in \mathrm{R}$.

4.14. $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty, \quad \lim\limits_{-\infty} f = -\infty, \quad \lim\limits_{0+0} f = +\infty, \quad \lim\limits_{0-0} f = -\infty.$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}. \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}.$

4.15. $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty, \qquad \lim\limits_{-\infty} f = -\infty.$

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 4, \quad x \in \mathrm{R}. \qquad f'(x) = 6x - 10, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.16. $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty, \qquad \lim\limits_{-\infty} f = -\infty.$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}. \qquad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}, \quad x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}.$

4.17. Zérushely: $x = 1.$

$f': f'(x) = -3\ln x - 3, \quad f'(x) = 0,$ ha $x = \frac{1}{e}.$

$\left]0;\ \frac{1}{e}\right[\quad f' > 0,$ ezen az intervallumon a függvény növekvő,

$\left]\frac{1}{e};\ \infty\right[\quad f' < 0,$ ezen az intervallumon a függvény csökkenő.

MAX $\left(\frac{1}{e};\ \frac{3}{e}\right).$

4.18. $f'(x) = 3 - 3x^2, \quad x \in \mathrm{R}. \qquad f''(x) = -6x, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.19. $f'(x) = 3x^2 - 4x - 3, \quad x \in \mathrm{R}.$

$f''(x) = 6x - 4, \quad x \in \mathrm{R}.$

$f'''(x) = 6.$

4.20. $f'(x) = -6x(1+x)^2(1-x)^2, \quad x \in \mathrm{R}.$

$f''(x) = -6\left(5x^4 - 6x^2 + 1\right), \quad x \in \mathrm{R}.$

4.21. $f'(x) = \frac{2\ln x}{x}, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

$f''(x) = 2\frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad x \in \mathrm{R}^+.$