I. ANALÍZIS

1. SOROZATOK, SOROK

1.1. $1;\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{5};\ \frac{4}{7};\ \frac{5}{9};\ \ldots$

1.2. $0;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ \ldots$

1.3. $1;\ \frac{8}{5};\ \frac{9}{5};\ \frac{32}{17};\ \frac{25}{13};\ \ldots$

1.4. $5;\ \frac{7}{2};\ 3;\ \frac{11}{4};\ \frac{13}{5};\ \ldots$

1.5. $\frac{6}{5};\ \frac{11}{8};\ \frac{16}{11};\ \frac{3}{2};\ \frac{26}{17};\ \ldots$

1.6. $1;\ \frac{3}{4};\ \frac{7}{9};\ \frac{13}{16};\ \frac{21}{25};\ \ldots$

1.7. $1;\ 0;\ -1;\ 0;\ 1;\ldots$

1.8. $1;\ \frac{3}{2};\ \frac{11}{6};\ \frac{25}{12};\ \frac{137}{60};\ \ldots$

1.9. $\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{11}{8};\ \frac{13}{8};\ \frac{57}{32};\ \ldots$

1.10. $5;\ 7;\ 9;\ 11;\ 13;\ldots$

1.11. $a_1 = 1;\ a_2 = 1;\ a_3 = 1;\ a_4 = 2;\ a_5 = 1;\ a_6 = 3;\ \ldots$

1.12. $a_4 = \frac{1}{2};\ a_5 = \frac{1}{6};\ a_6 = \frac{1}{12};\ a_7 = \frac{1}{20};\ a_8 = \frac{1}{30};\ \ldots$

1.13. $a_3 = \frac{3}{2};\ a_4 = \frac{7}{4};\ a_5 = \frac{13}{8};\ a_6 = \frac{27}{16};\ a_7 = \frac{53}{32};\ \ldots$

1.14. $a_2 = 2;\ a_3 = 1;\ a_4 = \frac{1}{2};\ a_5 = \frac{1}{4};\ a_6 = \frac{1}{8};\ \ldots$

1.15. $a_n = \frac{(1-2)+(3-4)+\mathrm{L}\ +(2n-1-2n)}{1+2+3+\mathrm{L}\ +2n} = -\frac{n}{n(2n+1)} = -\frac{1}{2n+1}$

szigorúan monoton nő. A sorozat korlátos, $\frac{-1}{3} \le a_n < 0$.

1.16. Szigorúan monoton csökken. A sorozat korlátos, $\frac{-3}{2} < a_n \le \frac{-3}{10}$.

1.17. Szigorúan monoton nő. A sorozat korlátos, $\frac{1}{18} \le a_n < \frac{1}{2}$.

1.18. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{\sqrt{n^4+2n^3+2n^2+2n+1} - \sqrt{n^4+2n^3+2n^2}}{\sqrt{(n+1)^2+1}\ \sqrt{n^2+1}} > 0$

Szigorúan monoton nő. A sorozat korlátos, $0 < \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} < 1$.

1.19. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^2} - \dfrac{n!}{n^2} = \dfrac{n!}{n+1} - \dfrac{(n-1)!}{n} =$

$= \dfrac{(n-1)!\left(n^2-n-1\right)}{n(n+1)} \Rightarrow \begin{cases} >0, & \text{ha} \quad n \ge 2 \\ <0, & \text{ha} \quad n = 1 \end{cases}$ tehát a sorozat nem monoton.

Csak alulról korlátos (k = 1),

$a_n = \dfrac{n!}{n^2} = \dfrac{(n-1)!}{n} > \dfrac{(n-1)(n-2)}{2(n-1)} = \dfrac{n-2}{2} \to \infty \ (n \ge 3)$.

1.20. $a_n = 3 - \dfrac{1}{3^n} \Rightarrow$ szigorúan monoton nő.

A sorozat korlátos, $0 < 3 - \dfrac{1}{3^n} < 3$.

1.21. $\lim a_n = \dfrac{2}{3}$.

1.22. $\lim a_n = 1$.

1.23. $\lim a_n = \dfrac{1}{2}$.

1.24. $\lim a_n = +\infty$.

1.25. $\lim a_n = \dfrac{1}{3}$.

1.26. $\lim a_n = 2.$

1.27. $\lim a_n = 0.$

1.28. A sorozat nem korlátos, nincs határértéke.

1.29. $\lim a_n = +\infty.$

1.30. $\lim a_n = \frac{1}{5}.$

1.31. $\lim a_n = 0.$

1.32. A sorozat divergens, mert $1\frac{2}{3}$-nak is és $\frac{1}{3}$-nak is akármilyen kis környezetében végtelen sok tagja van.

1.33. $\lim a_n = 0.$

1.34. A sorozat divergens, mert a 2-nek is, a 0-nak is akármilyen kis környezetében végtelen sok tagja van (a páros indexű tagok a 2 környezetében, a páratlan indexű tagok a 0 környezetében vannak).

1.35. Alkalmazzuk a számtani sorozat összegképletét:

$$a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(1+n)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2n+4},$$

$$\lim a_n = \frac{1}{2}.$$

1.36. $\lim a_n = 1.$

1.37. Nevezetes szorzat felhasználásával:

$$a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+5} = \frac{n+3-(n+5)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+5}} = \frac{-2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+5}}, \qquad \lim a_n = 0.$$

1.38. Beszorzással és nevezetes szorzat felhasználásával:

$$a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{3n-2} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{3n^2-2n} - n = \frac{2n^2-2n}{\sqrt{3n^2-2n}+n},$$

$$\lim a_n = +\infty.$$

1.39. $\lim a_n = +\infty.$

1.40. $\lim a_n = 1.$

1.41. $\lim\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$

1.42. $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2, \quad \lim a_n = e^2.$

1.43. $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{2n-2+2}{2}} =$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^2 \left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right), \quad \lim a_n = e^2.$$

1.44. $\lim a_n = 1.$

1.45. $\lim\frac{\sqrt{n^2-1}+n}{n\left(n^2-1-n^2\right)} = \lim\frac{\sqrt{n^2-1}+n}{-n} = \lim\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1}{-1} = -2.$

1.46. $\lim\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}} - \sqrt{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{2}{n} + \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = 0.$

1.47. $\lim\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = 1.$

1.48. $\lim\frac{2+n^6-n^6}{\sqrt[3]{\left(2-n^6\right)^2}+n^2\sqrt[3]{2+n^6}+n^4} = 0.$

1.49. $\lim a_n = \lim \dfrac{n \cdot \sqrt[5]{1+\dfrac{3}{n^4}+\dfrac{1}{n^5}}}{n \cdot \sqrt{1+\dfrac{6}{n}+\dfrac{2}{n^2}}} = 1.$

1.50. $\lim \dfrac{n-\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim \dfrac{1-\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1} = \dfrac{1}{2}.$

1.51. $\lim \dfrac{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)n}{-1} = -\infty.$

1.52. $\lim \dfrac{-26n+28}{25n-20} = -\dfrac{26}{25}.$

1.53. $\lim \dfrac{2n^3+5n^2+3n}{n^4-n^2-2} = 0.$

1.54. $\lim \left[5+(-1)^n \dfrac{1}{5^n}\right] = 5.$

1.55. $\lim \left(1+\dfrac{(-3)}{n}\right)^n = e^{-3}.$

1.56. $\lim \left(\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^{\sqrt{n}} = \lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = 0.$

1.57. $\lim \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n = \lim \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{-1}\, \mathrm{e} = \mathrm{e}^0 = 1.$

1.58. $\lim \left(\dfrac{n-\sqrt{3}}{8n}\right)^n = \lim \left[\dfrac{1}{8}\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{n}\right)\right]^n = 0.$

1.59. $\lim\left[5\left(\frac{1}{5n}+1\right)\right]^n = \lim 5^n\left(\frac{1}{5n}+1\right)^n = \infty,$

mert $\lim 5^n = \infty, \quad \lim\left(\frac{1}{5\mathrm{n}}+1\right)^n = \sqrt[5]{e}.$

1.60. $\lim\left(1+\frac{5}{n-2}\right)^n = \lim\left(1+\frac{5}{r}\right)^{r+2} = \lim\left(1+\frac{5}{r}\right)^{\mathrm{r}} \lim\left(1+\frac{5}{\mathrm{r}}\right)^2 = e^5.$

r: = n-2.

1.61. $\lim\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n = \lim\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{2}{n-1}\right) = e^2.$

1.62. $\lim\left(\frac{n+2-2}{n+2}\right)^{2n} = \lim\left(1-\frac{2}{n+2}\right)^{2n} =$

$= \lim\left[\left(1+\frac{-2}{n+2}\right)^{n+2}\right]^2\cdot\left(1+\frac{-2}{n+2}\right)^{-4} = e^{-2}\cdot 1 = e^{-2}.$

1.63. $\lim\left(\frac{4n+3}{4n+1}\right)^{n+1} = \lim\left(\frac{4n+3}{4n+1}\right) \frac{\left(1+\frac{3}{\frac{4}{n}}\right)}{\left(1+\frac{1}{\frac{4}{n}}\right)} = e^{\frac{1}{2}}.$

1.64. $\lim\left(1+\frac{4}{2n-1}\right)^{n-3} = \lim\left(1+\frac{2}{n-\frac{1}{2}}\right)^{n-3} =$

$= \lim\left(1+\frac{2}{n-\frac{1}{2}}\right)^{n-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{2}{n-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{5}{2}} = e^2.$

1.65. $\lim\left(1+\frac{3}{2n-1}\right)^{6n-2}=\lim\left(1+\frac{9}{6n-3}\right)^{6n-2}=$

$\lim\left(1+\frac{9}{6n-3}\right)^{6n-3}\cdot\left(1+\frac{9}{6n-3}\right)=e^{9}.$

1.66. $\lim\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{n-1}{2}}=\lim\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n\cdot\frac{n-1}{4n}}=e^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{e}.$

1.67. $\lim\left(1+\frac{(-1)}{n}\right)^{n}=e^{-1}.$

1.68. $\lim\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}}}=\infty.$

1.69. $\lim\frac{\sqrt[3]{\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}}=0.$

1.70. $\lim\frac{3\cdot 3^{n}-1}{3^{n}}=\lim\frac{3-\frac{1}{3^{n}}}{1}=3.$

1.71. $\lim\frac{1}{1+\frac{1}{2^{n}}}=1.$

1.72. $\lim a_n=0.$

1.73. $\lim a_n=\frac{3}{2}.$

1.74. $\lim a_n=\frac{1}{2}.$

1.75. $a_n = \left(\frac{(1+n)n}{2n^2}\right)^n = \left(\frac{1+n}{2n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1+n}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,

$\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0 \cdot e = 0.$

1.76. $a_n = \frac{n(1+n)}{2(n+2)} - \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)-n(n+2)}{2(n+2)} = \frac{-n}{2n-4}$,

$\lim a_n = -\frac{1}{2}.$

1.77. $a_n = \frac{1(1+1)+2(2+1)+\ldots+n(n+1)}{n^3} =$

$= \frac{1^2+1+2^2+2+3^2+3+\ldots+n^2+n}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} + \frac{n(n+1)}{2n^3} =$

$= \frac{(n+1)(n+2)}{3n^2}$

$\lim a_n = \frac{1}{3}.$

1.78. $a_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$, n növelésével a kivonandó $\left(\frac{1}{n}\right)$ csökken, tehát a különbség értéke nő, vagyis a sorozat monoton nő.
A sorozat korlátos: $0 \le a_n < 1.$ $\lim a_n = 1.$

1.79. $a_n = \frac{n+3}{n+5} = 1 - \frac{2}{n+5}$. Ennek alapján a sorozat monoton nő.
A sorozat korlátos: $\frac{2}{3} \le a_n < 1.$ $\lim a_n = 1.$

1.80. $a_n = \frac{n^2+3}{n^2} = 1 + \frac{3}{n^2}$, tehát monoton csökken,
$1 < a_n \le 4.$ $\lim a_n = 1.$

1.81. Monoton nő, $\frac{1}{6} \le a_n < 1.$ $\lim a_n = 1.$

1.82. $a_{n+1}-a_n=\dfrac{n-2}{n(n+1)(n+2)}\begin{cases}<0, & \text{ha } n<2\\ =0, & \text{ha } n=2\\ >0, & \text{ha } n>2,\end{cases}$ tehát a sorozat nem monoton.

A sorozat korlátos: $\dfrac{5}{6}\le a_n\le 1.\quad \lim a_n=1.$

1.83. $a_{n+1}-a_n=\dfrac{11}{(n+4)(n+5)}>0,$ tehát monoton nő.

A sorozat korlátos: $\dfrac{4}{5}\le a_n<3.\quad \lim a_n=3.$

1.84. $a_{n+1}-a_n=\dfrac{19}{(2n+5)(2n+7)}>0,$ tehát monoton nő.

A sorozat korlátos: $-\dfrac{6}{7}\le a_n<\dfrac{1}{2}.\quad \lim a_n=\dfrac{1}{2}.$

1.85. $a_{n+1}-a_n=\dfrac{-2^n-2}{3^{n+1}}<0,$ tehát monoton csökken.

$0<a_n\le 1.\ \lim a_n=0.$

1.86. Nem monoton. A sorozat korlátos: $-1\le a_n\le\dfrac{1}{4}.\ \lim a_n=0.$

1.87. $\lim a_n=\dfrac{1}{2}.$

$\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{n+1}{2n-7}\right|<10^{-2}$ megoldása: $n>228{,}5,$

tehát a 229. tag az első olyan, amely a határérték 10^{-2} sugarú környezetébe esik.

1.88. $\lim a_n=-\dfrac{1}{2}.$

$\left|\dfrac{1-2n}{4n-3}+\dfrac{1}{2}\right|<10^{-3}$, megoldása $n>125{,}75$, tehát a 126. tag az első olyan, amely a határérték 10^{-3} sugarú környezetébe esik.

1.89. $\lim\ a_n = 0$.

$\left|0 - \frac{1}{n^2}\right| < 10^{-4}$ egyenlőtlenség megoldása $n > 100$.

1.90. $\lim a_n = \frac{4}{5}$.

$\left|\frac{4}{5} - \frac{4n+3}{5n-1}\right| < 10^{-1}$ egyenlőtlenség megoldása $n > 7$.

1.91. $\lim a_n = \frac{5}{3}$.

$\left|\frac{5}{3} - \frac{5n^2-2}{3n^2+1}\right| < 10^{-6}$ egyenlőtlenség megoldása $n > 1106$.

1.92. $\lim\ a_n = 0$, $n > 149$.

1.93. $\lim\ a_n = 2$.

$\left|2 - \frac{2n-3}{n+1}\right| < \frac{1}{20}$ egyenlőtlenség megoldása $n > 99$.

1.94. $\lim a_n = \frac{1}{3}$.

$\left|\frac{1}{3} - \frac{n+5}{3n+1}\right| < 10^{-1}$ egyenlőtlenség megoldása $n > 15$.

1.95. $\lim\ a_n = 0$.

$\left|\frac{n+2}{n^2+3}\right| < 10^{-2}$ egyenlőtlenség megoldása $n > 101$.

1.96. $\lim\ a_n = 0$.

$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0{,}01$ egyenlőtlenség megoldása $n > 6$.

1.97. $\lim\ a_n = 1$.

$\left|1 - \left[1 + (-1)^n \frac{2}{3^n}\right]\right| = \frac{2}{3^n} < \frac{1}{10^3}$ egyenlőtlenség megoldása

$n > \frac{3 + \lg 2}{\lg 3} = 6{,}92$. Tehát $n \geq 7$.

1.98. $\lim\ a_n = 1.$

$$|a_n - 1| = \left|1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} \langle \frac{1}{100}.$$

Megoldás: $n \rangle 100.$

1.99. $\lim a_n = \frac{4}{5}.$

$$\left(a_n - \frac{4}{5}\right) = \begin{cases} \frac{9}{5(5n-1)}, & \text{ha } n \text{ pá ros} \\ \frac{9}{5(5n+1)}, & \text{ha } n \text{ pá ratlan} \end{cases}$$

$$\frac{9}{5(5n-1)} \langle \frac{1}{100}, \quad \text{ha } n \rangle 36$$

$$\frac{9}{5(5n+1)} \langle \frac{1}{100}, \quad \text{ha } n \rangle 35$$

Megoldás : $n \rangle 36.$

1.100. $\left(\frac{6}{5}\right)^n > 10^6.$ Az egyenlőtlenség megoldása $n > 75{,}8$, a 76. tag már nagyobb, mint 1 millió.

1.101. $\frac{n^2+3}{n+1} > 100$ egyenlőtlenség megoldása $n > 101.$

1.102. $n^2 + 3n > 1000$ egyenlőtlenség megoldása $n > 30.$

1.103. $2^n > 10^6$ egyenlőtlenség megoldása $n > 19.$

1.104. a.) $s_1 = \frac{1}{1^2}$, $s_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}$, $s_3 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$, L

$$s_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \text{L} + \frac{1}{n^2} + \text{L}$$

b.) $s_1 = \frac{1}{1!}$, $s_2 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$, $s_3 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$, L

$$s_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \text{L} + \frac{1}{n!} + \text{L}$$

c.) $s_1 = \frac{1}{1}$, $s_2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$, $s_3 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, L

$$s_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \text{ - L + } \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ + L}$$

1.105. A sor n-edik tagja $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ és

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \text{ L } + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Mivel $\lim\ s_n = 1$, ennélfogva a sor 1-hez konvergál.

1.106. Az s_n részletösszeg felírásánál felhasználjuk, hogy

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right). \quad \lim s_n = \frac{1}{2}.$$

1.107. Végtelen mértani sorról van szó a feladatokban.

a.) $q = \frac{1}{2}$, $\lim\ s_n = 1.$

b.) $q = 0{,}1$, $\lim\ s_n = 1\frac{2}{9}.$

c.) $q = 2$, divergens.

d.) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \text{ L}$ alternáló sor, $q = -\frac{1}{3}$, $\lim\ s_n = -\frac{1}{4}.$

e.) $q = \frac{1}{3}$, $\lim s_n = \frac{1}{2}.$

f.) $a = -\frac{3}{4}$, $q = -\frac{3}{4}$, $\lim s_n = -\frac{3}{7}.$

1.108. $\lim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 1,$ konvergens.

1.109. Divergens.

1.110. $\lim \sum_{n=1}^{\infty} 10(-0{,}25)^{n-1} = 8,$ konvergens.

1.111. Divergens.

1.112. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3\cdot 3^k}{4^k}=3\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k$,ahonnan $q=\frac{3}{4}$, $a=\frac{3}{4}$,

$\lim s_n=3\cdot\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=9$, konvergens.

1.113. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^n}{5^{n+2}}=\frac{1}{5^2}\cdot\frac{4}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$, akonnan $q=\frac{4}{5}$, $a=\frac{4}{5}$,

$\lim s_n=\frac{4}{5^3}\cdot\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=\frac{4^2}{5^3}=\frac{16}{125}$, konvergens.

1.114. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^k}-\frac{2}{5^{k+1}}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k-\left(\frac{2}{5}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k$, ahonnan

$\lim s_n=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}-\frac{2}{5}\cdot\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}-\frac{2}{20}=\frac{3}{20}$, konvergens.