6. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

Írjuk fel a következő függvények primitív függvényeit (6.1. - 6.70.):

6.1. f: $f(x) = 1$.

6.2. f: $f(x) = 2x$.

6.3. f: $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathrm{R}^+$.

6.4. f: $f(x) = x^3$.

6.5. f: $f(x) = 4x + 3$.

6.6. f: $f(x) = 3\sqrt[4]{x} + 2$, $x \in \mathrm{R}^+$.

6.7. f: $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $x \in \mathrm{R}^+$.

6.8. f: $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

6.9. f: $f(x) = x\sqrt[3]{x^2}$.

6.10. f: $f(x) = \sqrt{x}\sqrt[3]{x}$, $x \in \mathrm{R}_0^+$.

6.11. f: $f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x + 5$.

6.12. f: $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,(2x - 1)^2$.

6.13. f: $f(x) = 3x^4 + \frac{2}{x^5}$, $x \in \mathrm{R}^+$.

6.14. f: $f(x) = \frac{2x^2 - \sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$, $x \in \mathrm{R}^+$.

6.15. $f: f(x) = \dfrac{x^3 - 5}{x}, \quad x \in \mathrm{R}^-.$

6.16. $f: f(x) = 3x^2 - 4x + 2.$

6.17. $f: f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

6.18. $f: f(x) = \dfrac{x^4 - 6x}{\sqrt{x}}, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

6.19. $f: f(x) = (3 - 4x)^7.$

6.20. $f: f(x) = (3x^2 + 2x + 1)^3(3x + 1).$

6.21. $f: f(x) = \sqrt[4]{1 - 4x}, \; x \in \left]-\infty, \; \dfrac{1}{4}\right].$

6.22. $f: f(x) = \dfrac{1n^2 x}{x}, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

6.23. $f: f(x) = x^2 \sqrt{4 - x^3}, \quad x \in \left]-\infty, \; \sqrt[3]{4}\right].$

6.24. $f: f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in]-1; \; 1[.$

6.25. $f: f(x) = \dfrac{3x}{\left(2 + 3x^2\right)^3}, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

6.26. $f: f(x) = x\sqrt{x^2 + 4}.$

6.27. $f: f(x) = \dfrac{2}{3x - 1}, \quad x \in \left]\dfrac{1}{3}, \; +\infty\right[.$

6.28. $f: f(x) = \dfrac{2x - 4}{x^2 - 4x + 6}.$

6.29. $f\colon f(x)=\dfrac{x}{4+9x^2}$.

6.30. $f\colon f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$, $x\in \mathrm{R}^+$.

6.31. $f\colon f(x)=\dfrac{1}{5x+3}$, $x\in \mathrm{R}^+$.

6.32. $f\colon f(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$, $x\in]\text{-}3,\ +\infty[$.

6.33. $f\colon f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

6.34. $f\colon f(x)=\dfrac{5x^2}{x^3+2}$, $x\in \mathrm{R}^+$.

6.35. $f\colon f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x+x}$, $x\in \mathrm{R}^+$.

6.36. $f\colon f(x)=xe^{x^2}$.

6.37. $f\colon f(x) = e^{3x\text{-}5}$.

6.38. $f\colon f(x)=\dfrac{1}{x\ 1\mathrm{n}x}$, $x\in]1;\ +\infty[$.

6.39. $f\colon f(x)=\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

6.40. $f\colon f(x)=(2x+7)^6$.

6.41. $f\colon f(x)=e^{5x+1}$.

6.42. $f\colon f(x)=(7x^2+2x-3)(7x+1)$.

6.43. $f\colon f(x)=\dfrac{5\ln^3 x}{2x}$, $x\in \mathrm{R}^+$.

6.44. $f\colon f(x)=\left(\sqrt{x^3}-2x\right)\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}-2\right),\quad x\in \mathrm{R}^+.$

6.45. $f\colon f(x)=\frac{x}{3x^2+1}.$

6.46. $f\colon f(x)=\frac{42x^5+20x^3+2}{7x^6+5x^4+2x},\quad x\in \mathrm{R}^+.$

6.47. $f\colon f(x)=\frac{x}{\sqrt{4x^2+3}}.$

6.48. $f\colon f(x)=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}},\quad x\in \mathrm{R}_0^+$

6.49. $f\colon f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt[5]{x},\quad x\in \mathrm{R}_0^+.$

6.50. $f\colon f(x)=x^3-5\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}+\frac{4}{x^7},\quad x\in \mathrm{R}^+.$

6.51. $f\colon f(x)=\frac{x^3+x^2-3x+5}{2x^2},\quad x\in \mathrm{R}^+.$

6.52. $f\colon f(x)=3\cdot e^{1+x},\quad x\in \mathrm{R}.$

6.53. $f\colon f(x)=3\cdot 2^x+\frac{4}{x},\quad x\in \mathrm{R}^+.$

6.54. $f\colon f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}},\quad x\in \mathrm{R}^+.$

6.55. $f\colon f(x)=\frac{\sqrt{x^3}+x}{x^2},\quad x\in \mathrm{R}^+.$

6.56. $f\colon f(x)=e^x\left(1-e^x\right)^3,\quad x\in \mathrm{R}.$

6.57. $f\colon f(x)=2^x\sqrt{1+2^x},\quad x\in \mathrm{R}.$

6.58. $f\colon f(x)=x\sqrt[5]{3+4x^2},\quad x\in \mathrm{R}^{+}.$

6.59. $f\colon f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{1+x^2}},\quad x\in \mathrm{R}.$

6.60. $f\colon f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+6}},\quad x\in \mathrm{R}.$

6.61. $f\colon f(x)=e^{5x+2},\quad x\in \mathrm{R}.$

6.62. $f\colon f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}},\quad x\in \mathrm{R}.$

6.63. $f\colon f(x)=e^{-5x}+3,\quad x\in \mathrm{R}.$

6.64. $f\colon f(x)=\dfrac{x-e^{-x}}{x\cdot e^{-x}},\quad x\in \mathrm{R}\setminus\{0\}.$

6.65. $f\colon f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}},\quad x\in]1;\ \infty[.$

6.66. $f\colon f(x)=\dfrac{\ln^4 x}{x},\quad x\in \mathrm{R}^{+}.$

6.67. $f\colon f(x)=\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2,\quad x\in \mathrm{R}\setminus\{0\}.$

6.68. $f\colon f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x-1},\quad x\in \mathrm{R}^{+}.$

6.69. $f\colon f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x+e^{-x}+2},\quad x\in \mathrm{R}.$

6.70. $f\colon f(x)=\dfrac{5}{(x-2)^4},\quad x\in \mathrm{R}\setminus\{2\}.$

6.71. Írjuk fel az f: $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ függvénynek azt a primitív függvényét, amelynek görbéje átmegy a $(3;\ 5)$ ponton!

6.72. Írjuk fel az $f(x) = \frac{5}{x}$ primitív függvényei közül azt, amelyiknek a grafikonja áthalad a $P_0(-e;\ -8)$ ponton!

6.73. Írjuk fel az f: $f(x) = 4x - 2$ függvénynek azt a primitív függvényét, amelynek egyik zérushelye: $x = 3$!

Írjuk fel a következő függvények primitív függvényeit a parciális integrálás módszerével (6.74.-6.78.):

6.74. f: $f(x) = x \cdot 3^x$, $x \in \mathrm{R}$.

6.75. f: $f(x) = \ln x$, $x \in \mathrm{R}^+$.

6.76. f: $f(x) = (x^3 - 2x + 1)\ln x$, $x \in \mathrm{R}^+$.

6.77. f: $f(x) = \ln^2 x$, $x \in \mathrm{R}^+$.

6.78. f: $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}}$, $x \in \mathrm{R}$.

6.79. Számítsa ki az f: $f(x) = x^3 \ln x$, $x \in \mathrm{R}^+$ függvény határozott integrálját az $[1;\ e]$ intervallumon.

Számítsuk ki az alábbi határozott, illetve improprius integrálokat (6.80. - 6.119.):

6.80. $\int_1^3 x^2 dx$.

6.81. $\int_0^2 e^{2x} dx$.

6.82. $\int_1^6 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) dx$.

6.83. $\int_{-e}^{-1} \frac{1}{x} dx$.

6.84. $\int_0^{0,5} x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

6.85. $\int_2^3 \frac{1}{(2x+1)^4}\,\mathrm{d}x$.

6.86. $\int_1^2 \frac{x+1}{2x-7}\,dx$.

6.87. Számítsa ki az *f*: $f(x)=(9x-6)e^{-3x^2+4x}$, $x\in\mathrm{R}$ függvény határozott integrálját a $[0;\ 1]$-on!

6.88. a.) Írja fel az *f*: $f(x)=\left(30x^2+5\right)\sqrt[3]{\left(4x^3+2x\right)^2}$, $x\in\mathrm{R}^+$ függvény primitív függvényeit!
b.) Számítsa ki a határozott integrálját az $f(x)$-nek a $[0;\ 1]$-on!

6.89. Határozza meg az $f(x)=(x-4)^2+1$ és a $g(x)=-x^2+14x-39$ függvények görbéivel határolt síkidom területét!

6.90. $\int_0^1 \frac{x+3}{x^2+6x+10}\,dx$.

6.91. $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$.

6.92. $\int_0^1 \left(x^2+2x+5\right)dx$.

6.93. $\int_2^3 \left(5x^3-2x^2+1\right)\left(15x^2-4x\right)dx$.

6.94. $\int_1^4 \frac{8x^2+1}{8x^3+3x}\,dx$.

6.95. $\int_{-2}^0 e^{2-3x}dx$.

6.96. $\int_0^1 \left(x\sqrt{x}-3e^{x+1}\right)dx$.

6.97. $\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

6.98. $\int_1^2 \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}\,dx$.

6.99. $\int_1^2 \frac{1}{x\ln x}\,dx$.

6.100. $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$.

6.101. $\int_1^e \frac{5x^2+10}{x^3+6x}\,dx$.

6.102. $\int_{-1}^0 \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx$.

6.103. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$.

6.104. $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$.

6.105. $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$.

6.106. $\int_4^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$.

6.107. $\int_5^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}dx$.

6.108. $\int_1^\infty e^{-x}dx$.

6.109. $\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

6.110. $\int_0^\infty e^{-4x}dx$.

6.111. $\int_{-\infty}^{-3} e^{x}dx$.

6.112. $\int_3^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx$.

6.113. $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$.

6.114. $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$.

6.115. $\int_0^1 \frac{1}{x^4}dx$.

6.116. $\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

6.117. $\int_1^2 \frac{1}{x\ln x}\,dx$.

6.118. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$.

6.119. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx$.

6.120. $\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

6.121. a.) Írjuk fel az $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in \mathrm{R}^+$ függvény határozatlan integrálját!

b.) Írjuk fel azt a primitív függvényt, amely a $\mathrm{P}_0(1;\ 10)$ ponton megy át!

6.122. a.) Írjuk fel az $f(x)=(3x+5)e^{x+4}$, $x\in \mathrm{R}$ függvény határozatlan integrálját!

b.) Írjuk fel azt a primitív függvényt, amely a $\mathrm{P}_0(0;\ 5)$ ponton megy át!

6.123. a.) Írjuk fel az $f(x) = x \cdot e^{2x}$, $x \in \mathrm{R}$ függvény primitív függvényeit!
b.) Számítsa ki az $f(x)$ függvény határozott integrálját a $[0;\ 1]$ intervallumon!

6.124. $\int_0^1 x \cdot e^{-x}\,dx$.

Az "a" milyen értéke esetén áll fenn a következő összefüggés (6.125. - 6.129.):

6.125. $\int_1^a x^2\,dx = 2$.

6.126. $\int_1^a x\,dx = \int_0^2 x\,dx$.

6.127. $\int_{-a}^{a} x^2\,dx = 1$.

6.128. $\int_a^2 \frac{1}{x^2}\,dx = 1$.

6.129. $\int_a^{-1} \frac{1}{x}\,dx = -1$?

6.130. Határozza meg az f: f(x) = $\begin{cases} 2, & \text{ha } x \in [-3;\ 1[, \\ 2x^2 + 1, & \text{ha } x \in [1;\ 2[, \\ 4, & \text{ha } x \in [2;\ 4]. \end{cases}$ függvény
és az x tengely közötti terület mérőszámát!

6.131. Határozza meg az f: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0;\ 1[, \\ x^3 + 1, & \text{ha } x \in [1;\ 3[, \\ 10, & \text{ha } x \in [3;\ 10]. \end{cases}$ függvény
és az x tengely közötti terület mérőszámát!

6.132. Határozza meg az f: $f(x) = x^2$ és a g: $g(x) = x + 2$ függvények által határolt síkidom területét!

6.133. Határozza meg az f: $f(x) = x^2$ és a g: $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathrm{R}_0^+$ függvények által határolt síkidom területét!

6.134. Határozza meg az $f(x)=\frac{4}{3x}$, $x\in\mathrm{R}\setminus\{0\}$ és a $g(x)=-x+\frac{13}{3}$ függvények grafikonjai által határolt síkidom területét!

6.135. Határozza meg az $f(x)=\frac{5}{2x}$ és a $g(x)=\frac{11}{2}-x$ függvények grafikonjai által határolt síkidom területét!

6.136. Határozza meg az $f(x)=x+1$ és a $g(x)=-x^2+3$ függvények grafikonjai által határolt síkidom területét!

6.137. Határozza meg az $f: f(x)=9-x^2$ és a $g: g(x)=x+3$ függvények által bezárt síkidom területét!

6.138. Számítsa ki az $f: f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{3+x^3}}$ függvény grafikonja és az x tengely között fekvő síkidom területét az $x_1=-1$ és $x_2=1$ értékek között!

6.139. Számítsa ki az $f: f(x)=\frac{1}{2x-3}$, $x\in\mathrm{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$,

$g: g(x)=0$, $x\in\mathrm{R}$,

$x=6$,

$x=10$

egyenletű görbék által meghatározott síkidom területét!

6.140. Határozza meg annak a síkidomnak a területét, amit az $f: f(x)=-\frac{2}{x-1}$, $x\in\mathrm{R}\setminus\{1\}$, és a $g: g(x)=x-5{,}5$, $x\in\mathrm{R}$ függvények zárnak közre.

6.141. Határozza meg annak a síkidomnak a területét, amit az $f: f(x)=\frac{2}{x+3}$, $x\in\mathrm{R}\setminus\{-3\}$ és a $g(x)=-x+\frac{3}{2}$, $x\in\mathrm{R}$ függvények zárnak közre.

6.142. Számítsa ki az $f: f(x)=x^2-4x+3$ függvény és a tengelyek által bezárt síkrész területét!