5. SZÉLSŐÉRTÉK-SZÁMÍTÁS

A gazdasági életben sokszor kerülünk szembe a következő problémával: valamit úgy kell megterveznünk, hogy közben bizonyos mennyiség optimális (minimális vagy maximális) legyen. Gyakoriak az olyan követelmények, hogy valamely munkafolyamat a lehető legkevesebb időt vegye igénybe, hogy adott mennyiségű termelés mellett a termékegységre jutó összköltség minimális legyen, hogy adott mennyiségű anyagból a lehető legtöbb, bizonyos feltételeknek eleget tevő termék készüljön stb. Az ilyen feladatokat szélsőérték-(extrémum, optimum) feladatoknak nevezzük.

A gyakorlati problémából kiindulva keressük az f függvény szélsőértékét az $a \le x \le b$ feltétel mellett. Ez azt jelenti, hogy az adott probléma szempontjából csak az [a, b] intervallum jöhet szóba, és itt érdekel bennünket az f függvény maximuma vagy minimuma.

Előfordulhat, hogy az f függvénynek az a helyen helyi szélsőértéke van, de a függvény nem differenciálható e helyen. Ilyenkor a szélsőértékhely megkeresésénél az alábbi tételt használjuk fel.

TÉTEL

Ha az $f \in R \to R$ függvény az a helyen nem differenciálható, de a függvénynek van (véges vagy végtelen) jobb oldali és bal oldali differenciálhányadosa, és ezek különböző előjelűek, akkor f-nek az a helyen helyi szélsőértéke van, mégpedig:

A) ha $f'_-(a) > 0$ és $f'_+(a) < 0$,

akkor helyi maximuma;

B) ha $f'_-(a) < 0$ és $f'_+(a) > 0$,

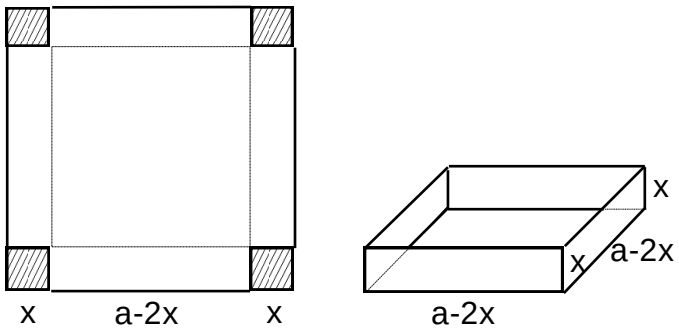
akkor helyi minimuma van.

5.1. Egy pozitív számhoz hozzáadjuk a reciprokát. Mikor lesz ez az összeg a lehető legkisebb?

5.2. Bontsuk fel az A pozitív számot két pozitív szám összegére úgy, hogy az egyik szám négyzetének és a másik szám köbének összege minimális legyen! (A feladatot Bárczy : Differenciálszámítás c. könyvéből vettük.)

5.3. Adott *k* kerületű téglalapok közül melyiknek a területe a legnagyobb?

5.4. Tegyük fel, hogy egy négyzet alakú bádoglemez négy sarkából az ábrán látható módon levágunk egy-egy darabot, majd a szaggatott vonal mentén a négy szélet felhajtva egy dobozt alkotunk. Mekkora *x* mellett lesz a doboz űrtartalma a legnagyobb?



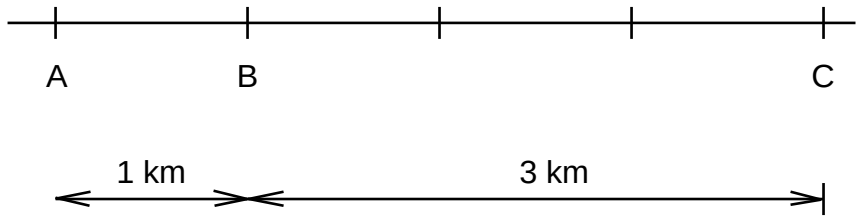
5.5. Egy felül nyitott, négyzet alapú doboz készítéséhez 2 m^2 területű lemezt használhatunk fel. Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit, hogy térfogata a legnagyobb legyen?

5.6. Négyzet alapú, felül nyitott víztároló medencét akarunk készíteni függőleges oldalfalakkal 1000 hl víz tárolására. Milyennek válasszuk a medence méreteit, ha optimális anyagfelhasználással akarjuk azt felépíteni?

5.7. Egy folyó partján 1 ha nagyságú téglalap alakú sátor tábort akarunk elkeríteni. Mekkorára válasszuk a téglalap oldalait, hogy a legrövidebb kerítésre legyen szükségünk? (A folyó partján nem állítunk kerítést.)

5.8. Egy diákotthon zuhanyozó helyiséget rendeztet be 200 tanuló számára. A zuhanyozó meleg vízzel történő ellátásakor a következőket kell figyelembe venni. A meleg vizet szolgáltató kazán előmelegítése annyiszor 3 percig tart, ahány zuhanykar lesz, és a fürdés alatt is fűteni kell. Egy-egy csoport fürdése 12 percig tart. Hány zuhanykar gazdaságos?

5.9. Egy egyenes út mentén három gazdaság helyezkedik el az alábbi módon:



A gazdaságból rendszeresen 2, 4, illetve 1 egységnyi feldolgozásra váró terméket gyűjtenek be. Egységnyi termék szállítási költsége kilométerenként 0,5 Ft.

Hol helyezzük el a központi gyűjtőhelyet (G) az út mentén, hogy a termékek szállítási költsége minimális legyen?

5.10. Egy egyenes mentén van három nyaralótelep, sorra: K, L és M. Egymástól való távolságuk: KL = 5 km, LM = 10 km. A lakosság száma sorra: 1000, 2000, 8000 fő. Hová telepítsünk egy ABC üzletet, hogy a nyaralók számára a leghozzáférhetőbb legyen?

5.11. Valaki egy műút mellett fekvő A pontból az A-tól 10 km-re és a műúttól 6 km-re fekvő B pontba a legrövidebb idő alatt akar eljutni. Hol térjen le a műútról, ha a műúton másfélszer olyan gyorsan halad, mint az utat szegélyező terepen?

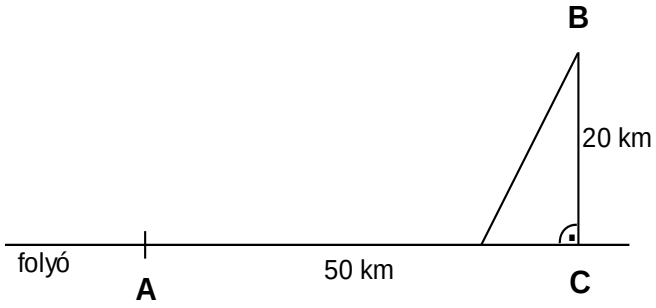
5.12. Egy hajó üzemeltetési költségeit a fűtőanyagfogyasztás és egyéb kiadások képezik. Az óránként felhasznált fűtőanyag *A* értéke függ a sebességtől; az összefüggést az $A = 0{,}03v^3$ képlet fejezi ki, ahol *v* (km/óra) a sebesség.
Az egyéb kiadások 480 Ft-ot tesznek ki óránként.

a.) Határozzuk meg milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a kilométerenkénti költség minimális legyen?

b.) Ha a minimális költséghez tartozó sebességet 1% -kal növeljük, ez hány % -kal növeli a költségeket?

5.13. Egy folyó partján az A helyen épült konzervgyárba a B helyen fekvő állami gazdaság rendszeresen szállít termékeket. A folyón való szállítás tonnánként és kilométerenként 1 Ft. Ezt a kedvező lehetőséget az állami gazdaság igénybe szeretné venni, és a folyó partjához iparvasút építését tervezi. Hogyan kell megépíteni az iparvasutat, hogy a szállítás a leggazdaságosabb legyen? Az iparvasúton a szállítás költsége 2 Ft/tonna-

km. AC = 50 km és BC = 20 km. (C a B helynek a folyóra eső vetületi pontja.)



Oldjuk meg a feladatot azzal a feltétellel, hogy a folyón való szállítás *a* Ft/tonna-km, az iparvasúton való szállítás pedig *b* Ft/tonna-km. Függ-e az építendő iparvasút hossza az *a* és *b* arányától?

5.14. Az A és B települések az országúttól 3 km illetve 1 km távolságra vannak. Az AB távolság vetülete az országútra 10 km. Milyen útvonalon kell haladnia annak a vasútnak, amelynek a megépítése a leggazdaságosabb, és a két várost úgy köti össze, hogy 2 km hosszú szakasza az országút mellett, vele párhuzamosan haladjon (az országút és a vasút távolságát zérusnak tekintjük)? (A feladatot Schipp, Szabó, Turczi: Matematikai példatár 1975-ből vettük át.)

5.15. Két vasútvonal derékszögben metszi egymást. A kereszteződés felé egyidejűleg egy-egy vonat halad két vasútvonalon. Az első vonat, amely a kereszteződés pontjától 40 km távolságra fekvő állomásról indul, percenként 800 m-t tesz meg, a másik vonat pedig, amely a kereszteződés pontjától 50 km távolságra fekvő állomásról fut ki, percenként 600 m-t tesz meg. Az indulás pillanatától számítva hány perc múlva lesz a két mozdony egymástól legkisebb távolságra, és mekkora ez a távolság?

5.16. Az egymástól 6 km távolságban levő A és B pont között csővezetéket kell lefektetni, amely valahol elágazik a C pont felé. A C pont az AB egyenestől 1 km-re fekszik. A C pontból az AB egyenesre bocsátott merőleges talppontja a B ponttól 2 km távolságra van A csővezeték az elágazásig a legvastagabb csőből készül, amelynek ára 100 Ft folyóméterenként. Az elágazástól B-ig 80 Ft-os, a C-ig pedig 60 Ft-os cső fektetendő.

Az A ponttól hány km-re létesítsünk elágazást, ha azt akarjuk, hogy a lefektetendő csővezeték (-rendszer) költsége minimális legyen?(A feladatot Denkinger-Gyurkó: Analízis gyakorlatok c. könyvéből vettük.)

5.17. Az A város 11 km-re van egy folyótól. Egy B város pedig éppen a folyó partján fekszik. A két város távolsága 61 km. Az A városból rendszeres szállítmányok mennek B-be. Egységnyi szállítmány szállítási költsége szárazföldön kilométerenként duplája a vízi úton történő szállításának.
Milyen irányban kell egy egyenes utat megépíteni a folyóparthoz, hogy a szállítmányok a legkisebb költséggel jussanak B-be.(Tételezzük fel, hogy a folyó a szóban forgó szakaszon nem kanyarog, a megadott távolságok légvonalban értendők.)(A feladatot Denkinger-Gyurkó: Analízis gyakorlatok c. könyvéből vettük.)

5.18. Egy állami gazdaságban vizsgálatokat végeztek a kukorica hektáronkénti termésátlaga és önköltsége közötti összefüggés megállapítására. Eredményül az

$$f : x \in]10;30[\,, \qquad x \mapsto 444{,}6 - 42{,}2x + 1{,}5x^2 - 0{,}015x^3$$

függvény adódott. Ebben x a hektáronkénti termésátlagot jelenti q-ban, $f(x)$ pedig az önköltséget Ft-ban.

Állapítsuk meg, melyik termésátlaghoz tartozik a minimális önköltség!(A feladatot Denkinger-Gyurkó: Matematikai analízis c. feladat-gyűjteményéből vettük át.)

5.19. Egy vegyianyagokat gyártó üzem csarnokának méreteit a levegő toxikus anyag-koncentrációjának függvényében kell megtervezni. A toxikus anyag-koncentrációt az $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + 2x}$, $x > 0$ függvény adja meg
(mg/m^3 -ben), ahol az x a csarnok térfogatát jelenti (ezer m^3 -ben).

a.) Hogyan változik a toxikus anyag-koncentráció, ha növeljük a térfogatot? (Vizsgáljuk meg $f(x)$ monotonítását.)

b.) Vizsgálja meg, hogy hogyan változik a levegő toxikus anyag-koncentrációja, ha a csarnok térfogatát 2000 m^3 -ről megnövelnénk 20 m^3 -rel?

c.) Számítsa ki az $5x + 32y = 22$ egyenletű egyenes, az $f(x)$ függvény grafikonja, az x tengely és az $x = 5$ egyenletű egyenes által közrezárt terület számértékét.

5.20. Télen egy szállodában elromlik a fűtés és ennek következtében a szobákban a hőmérséklet gyorsan süllyedni kezd. Később kijavítják a hibát, és a fűtés újraindítása után a szobákban a hőmérséklet emelkedni kezd. A szobák hőmérsékletét az $f(x)=\dfrac{2(x-1)^2}{x^2+1}$, $x\in[0;\infty[$ függvény adja meg, ahol 1 egység 10°C-t jelent, és x az időt jelenti napokban.

a.) Hány fok volt a szobákban kezdetkor, és az hány fokra süllyedt le addig, amíg újraindították a fűtést?

b.) Adja meg a hőmérséklet-függvény értékkészletét.

c.) Az $f(x)$ függvény grafikonja és az x tengely által a $[0;1]$ intervallumon közrezárt terület számértéke a fűtéskiesés miatt a szállodát ért kárt adja meg ezer dollárban. Számítsa ki ezt az összeget!

5.21. Pszichológiai megfigyelések szerint egy rulettjátékos számára a pénz értéke nem a pénz mennyiségével, hanem csak annak 10-es alapú logaritmusával arányos. Így például 100 Ft-ot csak kétszer annyira értékel, mint 10 Ft-ot, stb. A játékos 37 esetből átlagosan az egyszer megtett összeg százszorosát kapja, 36-szor pedig a megtett összeget elveszíti.
Ha a játékos 1000 Ft birtokában kezd játszani, s egz/egz alkalommal x Ft-ot tesz meg, akkor nyereményének várható értéke

$$f(x)=\frac{36}{37}\lg(1000-x)+\frac{1}{37}\lg(1000+100x)\ \text{Ft}$$

lesz. Mennyit tegyen meg egy-egy alkalommal, hogy az $f(x)$ várható nyeresége maximális legyen?

5.22. Adott az $f(x)=6$, $x\in\mathrm{R}$ és $g(x)=x^3+1$, $x\in\mathrm{R}^+$ függvény. Képezze e két függvény hányadosát, azaz

$$h:\ =\ \frac{f}{g}\ .$$

A "h" függvény egy terméknek az "x" Ft/kg-os egységárhoz tartozó keresletét fejezi ki (kg-ban).

a.) Hány Ft / kg egységár mellett lesz az árbevétel (B) maximális ($B = x \cdot h$)?

b.) Mekkora az ehhez az egységárhoz tartozó kereslet?

c.) Hány %-kal változik a kereslet, ha x-et 1 Ft-os egységárról 1%-kal növeljük?

5.23. Egy termék fogyasztói ára (x: ezer Ft-ban) és kereslete ($f(x)$: tízezer darabban) közötti kapcsolatot az

$$f(x) = 5\sqrt[3]{x} - x, \quad x \in [0;\ 10]$$

függvénnyel írhatjuk le.
Határozzuk meg:

a.) milyen ár mellett lesz a kereslet a legnagyobb, és mekkora ez a kereslet?
b.) azt az intervallumot, amelyben a kereslet növekvő tendenciát mutat!
c.) az 1000 Ft-os árhoz tartozó pontelaszticitás értékét!
A kapott eredményt fogalmazza meg szavakkal is!

5.24. Egy adott termék termelési költsége a termelt mennyiség függvényében:

K: $K(x) = 0{,}1x^3 - 21x^2 + 1470x + 4170; \qquad x \in [0;\ 200]$.

Állapítsuk meg, hogy mekkora termelés esetén lenne az egységre eső átlagköltség minimális?

5.25. Fejezze ki

$$p: \ p(x) = 60 - 0{,}015x, \quad x \in]0;\ 4000[$$

valamely árucikk egységárának alakulását a kínált mennyiség függvényében. Mennyit kell az árucikkből eladni, hogy maximális árbevételhez jussunk?

5.26. Tételezzük fel, hogy valamely termék kg-ban kifejezett kereslete és annak p Ft-os egységára között az

$$f: \ f(p) = -4p + 280, \quad p > 0$$

összefüggés áll fenn.

a) Hány Ft-os egységár mellett lenne az árbevétel maximális, és hány Ft ez a maximum?
b) Mekkora kereslet tartozik ehhez az egységárhoz?

5.27. Valamely termék nyereségfüggvénye:

$$N: N(x) = -4x^2 + 250x - 270\ , \quad x \in \mathrm{R}^+$$

költségfüggvénye:

$$K: K(x) = 70x + 2\ , \ x \in \mathrm{R}^+.$$

Határozzuk meg, hogy milyen x mellett vesz fel maximális értéket az árbevétel függvénye? (Az x az eladott termék mennyiségét jelenti.)

5.28. Valamely árucikk iránti keresletet az

$$f(p) = e^{-0,01p+12},\ p > 0$$

keresleti függvény fejezi ki, ahol p az egységárat, $f(p)$ pedig a hozzá tartozó keresletet jelenti.

a.) Milyen egységár mellett lenne az árbevétel maximális?
b.) Mekkora az ehhez az egységárhoz tartozó kereslet?

(A feladatot Denkinger-Gyurkó: Analízis gyakorlatok c. könyvéből vettük.)

5.29. Bizonyos statisztikai vizsgálatok alapján rendszerint megállapítható az ún. költségfüggvény, amely arra nézve nyújt felvilágosítást, hogy egy adott vállalatnál a várható költségek nagysága hogyan függ a forgalomtól. Tegyük fel, hogy egy bizonyos vállalatnál az egy hónapra eső költség megközelítőleg a

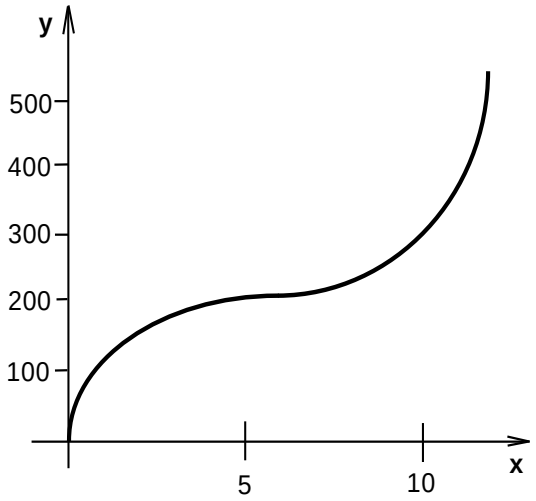
$$k: x \text{ a } x^3 - 20x^2 + 140x + 10, \quad x \in \mathrm{R}^+$$

függvénnyel fejezhető ki, ahol az „x" a forgalmat jelenti millió forintban kifejezve, a $k(x)$ pedig a költséget, de már csak ezer forintban kifejezve. A k költségfüggvény, amelynek grafikus képe az ún. költséggörbe.

Az ábrán látható, hogy a forgalom növekedésével a költségek is növekednek. A növekedés azonban nem egyenletes. Először rohamosan nőnek a költségek, majd a növekedés üteme lelassul, de azután bizonyos határon túl a növekedés ismét egyre rohamosabbá válik. (Ez általában is jellemző költséggörbékre, amelyeknek megkonstruálásával a matematikai statisztika foglalkozik.)

A vállalat eredményét úgy értelmezzük, mint a forgalom és a költség különbségét. Ha tehát az eredményt a $h(x)$ szimbólummal jelöljük, akkor

$$h(k) = 1000x - k(x).$$



(Az „x" helyett azért szerepel $1000x$, hogy a forgalmat is ezer forintban fejezzük ki.) Mikor lesz a vállalat eredménye maximális?

5.30. Egy áruház raktárában valamely cikkből a készlet minimális szintje 500 kg. Az utánpótlás úgy történik, hogy meghatározott időközönként (pl. nap) q kilogrammal töltjük fel a raktárt. A forgalmat egyenletesnek tételezzük fel, ezért a készlet fogyása is egyenletesnek tekinthető. A raktár az év folyamán 300 napon keresztül van nyitva, és ismerjük még, hogy a kérdéses cikk várható napi forgalma 800 kg. Egy-egy szállítmány rendelési költsége (függetlenül a szállítmány nagyságától) 4000 Ft. Tudjuk még, hogy egy kilogramm raktározási költsége naponként 0,50 Ft.

Mekkora legyen a készlet feltöltés (az utánpótlás) nagysága, hogy az áruellátás a lehető legkisebb költséget eméssze fel? Hány naponként kell ekkor a raktárt feltölteni?

5.31. Egy üzemben statisztikai adatok alapján megállapították, hogy az önköltség csökkenését a darabszám függvényében (egy darabra vonatkozóan) a

$$K_1 : x \in \mathrm{R}^+ \setminus \left\{-\frac{c}{b}\right\}, \qquad x \text{ a } \frac{a}{bx + c} + d$$

függvény írja le, ahol a, b, c, d konstans és a, b, d pozitív, míg c negatív. A vizsgált időszakban viszont a késztermékek raktározási, karbantartási és szállítási költségeit bizonyos $x > B$ darabszámon felül a

$$K_2 : x \in]B, +\infty[, \qquad x \text{ a } Ax\,(A > 0)$$

függvény fejezi ki.

Mekkora legyen az a darabszám a vizsgált időszakban, amely mellett a két költség figyelembevételével a legolcsóbb a termelés? (A feladatot Szép Jenő: Analízis c. könyvéből vettük.)

5.32. Oldjuk meg az előző feladatot azzal a változtatással, hogy

$$K_2 : x \in]B;\ +\infty[\ ,\ x \text{ a } A^{-x},\ (A>1)\ .$$

Későbbi tanulmányaikban részletesebben fognak foglalkozni a most felhasználandó fogalmakkal. Így ezekről most csak a legfontosabbakat említjük meg.

Egy termelés folyamán jelöljük Q-val a termelt mennyiséget, C-vel ezen áruk termelésének összes költségét, és P jelentse az egységnyi előállított termékek eladási árát. Általában P és C függ Q-tól. Az összes bevételt a PQ szorzat adja meg. A termelőnek az a célja, hogy minél nagyobb legyen a nyeresége (profitja). A nyereséget R-rel jelöljük és R az $R = PQ - C$ összefüggés alapján határozható meg. Ha R értéke maximális, akkor a függvény differenciálhányadosa zérus, vagyis

$$R'(Q) = (PQ)'(Q) - C'(Q) = 0\ ,$$

amiből következeik, hogy

$$(PQ)'(Q) = C'(Q)\ .$$

A $(PQ)'(Q)$-t határbevételnek, $C'(Q)$ -t határköltségnek, $R'(Q) = (PQ)'(Q) - C'(Q)$-t pedig határnyereségnek nevezzük. Tehát maximális a nyereség (profit) akkor, ha a határköltség egyenlő a határbevétellel.

Most nézzünk egy konkrét feladatot!

5.33. Tegyük fel, hogy az ár a $P : Q$ a $100 - 0{,}01\ Q$, $Q \in \mathrm{R}^+$ alapján határozható meg, ahol Q a heti termelést jelenti. Ez a függvénykapcsolat azt fejezi ki, hogy ha az áruból többet visznek a piacra, az árának esnie kell. Egy egységgel csökken az ár, ha az áruból azon a héten 100 egységgel többet visznek a piacra.
Tegyük fel, hogy a költség:

$$C : Q \text{ a } 50Q + 30000\ , \qquad Q \in \mathrm{R}^+.$$

Az összes bevétel:

$$PQ : Q \text{ a } 100Q - 0{,}01Q^2, \qquad Q \in \mathrm{R}^+.$$

A határbevétel:

$$(PQ)' : Q \text{ a } 100 - 0{,}02Q .$$

A határköltség:

$$C' : Q \text{ a } 50 .$$

Ha maximális a nyereség,
akkor:

$$(PQ)' = C',$$

vagyis

$$100 - 0{,}02Q = 50 ,$$

ahonnan

$$Q = 2500 \quad \text{egység hetente.}$$

Ezen a termelési szinten az ár:

$$P(2500) = 100 - 25 = 75 \quad \text{egység,}$$

a heti nyereség:

$$R(2500) = 75 \cdot 2500 - (30000 + 50 \cdot 2500) = 32500 \quad \text{egység.}$$

5.34. Tegyük fel, hogy az összes költség:

$$C : Q \text{ a } 120Q - Q^2 + 0{,}02Q^3 , Q \in \mathrm{R}^+,$$

és az ár:

$$P : Q \text{ a } 114 - 0{,}25Q , \quad Q \in \mathrm{R}^+$$

összefüggés alapján határozható meg.

Milyen termelési mennyiség mellett egyenlő a határköltség a határbevétellel? (A feladatokat William J. Baumol: Közgazdaságtan és Operációanalízis c. könyvéből vettük át.)

5.35. Egy adott termék termelési költségét a

$$C: Q \text{ a } 120Q - Q^2 + 0{,}02Q^3, \quad Q \in]0;\ 400[$$

függvény, az eladott termék egységárának alakulását a

$$P: Q \text{ a } 57Q - 0{,}08Q^2, \quad Q \in]0;\ 400[$$

függvény fejezi ki, ahol Q a termelt mennyiséget jelenti.

a.) Számítsa ki az 50, a 100 és a 150 egységnyi termeléshez tartozó határköltséget, határbevételt, illetve határprofitot (nyereséget) !

b.) Milyen termelés mellett lesz egyenlő a határköltség a határbevétellel?

5.36. Egy hegy tetején gyógyszállót építenek. A leendő szállodához 8000 m hosszú utat kell építeni. Az út készítésének költségei a kezdőponttól

távolodva egyre nőnek. A költségek alakulását (tízezer Ft-ban) a kezdőponttól méterben mért távolság (x) függvényében, a $K(x)$ költség-függvény mutatja. Ennek az építési költség-függvény deriváltfüggvénye a:

$$K'(x) = 4 + \frac{3\sqrt{x}}{2} + x \ , \quad x \geq 0 \ .$$

Az út hosszának alakulása a napokban mért idő (t) függvényében:

$$g: \ g(t) = 50t - 0{,}05t^2 \ , \quad t > 0 \ .$$

a.) Keressük meg a g függvény szélsőértékének helyét és nagyságát!

b.) Hány nap alatt készült el az út és hány méter utat készítettek el az építők, a 6. hónap elejéig, illetve a 7. hónap végéig, ha egy hónapban 25 munkanapot dolgoztak?

c.) Írjuk fel a $K(x)$ költség-függvényt!

d.) Mennyi volt a 6. és 7. hónapban végzett munka költsége?

e.) Írjuk fel a $K(x)$ függvény $x = 10$ pontjához tartozó érintő meredekségét (iránytangensét) !

f.) Egy másik útépítési terv szerint egy hosszabb út készülne a szállodához. Írjuk fel a $K(x)$ költség-függvényhez tartozó elaszticitás függvényt!

5.37. Egy csokoládégyár M és N elnevezéssel két új szeletkülönlegességet hoz forgalomba. Az M önköltsége darabonként 25 Ft, az N-é pedig 30 Ft. A piackutatás során azt találták, hogy ha x_1, illetőleg x_2 a szeletfajták jelenlegi darabonkénti eladási ára, tízforintokban megadva, akkor az M iránti heti keresletet ezer darabban az

$$m: \quad (x_1, x_2) \text{ a } \ 5(x_2 - x_1) \ ,$$

az N irántiét pedig az

$$n: \quad (x_1, x_2) \text{ a } \ 30 + 5x_1 - 8x_2$$

függvények írják le. Hány Ft-ban kell a darabonkénti eladási árat a gyárnak megállapítania, ha maximális profitot akar elérni?

(A feladatot Denkinger-Gyurkó: Matematikai analízis c. feladat-gyűjteményéből vettük át.)

5.38. Egy üzem kétféle terméket gyárt, darabonként 20, illetve 10 Ft-os önköltséggel. Az első termék iránti kereslet: $k_1(x_1, x_2) = \frac{10000}{x_1 x_2}$, a második iránti pedig ennek kétszerese, ahol x_1 a drágább, x_2 az olcsóbb termék eladási ára. Milyen árak mellett érné el az üzem a maximális tiszta

összhozamot?(A feladatot Denkinger-Gyurkó: Matematikai analízis c. feladatgyűjteményéből vettük át.)

5.39. Egy üzemnek az A jelű termékből meghatározott idő alatt N_1 darabot, a B jelű termékből pedig N_2 darabot kell elkészítenie. A gyártás sorozatgyártás. Ennek fix költsége az A jelű termékre k_1 Ft, a B jelűre k_2 Ft sorozatonként. A raktározási költségek az első termékre r_1 Ft-ot tesznek ki naponként és egységenként, a másodikra pedig r_2 Ft-ot. Feltételezzük, hogy egy sorozat elkészülte után a raktárt kiürítik, és hogy a termelés egyenletes ütemben folyik. Mekkora legyen a sorozat nagysága az egyes termékekből, ha azt kívánjuk, hogy a fenti költségek figyelembevételével az üzem a lehető leggazdaságosabban termeljen? (A feladatot Denkinger-Gyurkó: Matematikai analízis c. feladat-gyűjteményéből vettük át.)

5.40. Oldjuk meg az előbbi feladatot az alábbi adatok felhasználásával!
Az A jelű termékből 300 nap alatt $N_1 = 20000$ db-ot, a B jelű termékből pedig ugyanannyi idő alatt 60 000 db-ot kell elkészíteni.

A gyártás állandó költsége:
az A jelű termékre: 1000 Ft sorozatonként,
a B jelű termékre: 1200 Ft sorozatonként.

A raktározási költségek:
az A jelű termékre: 25 Ft/db/nap,
a B jelű termékre: 15 Ft/db/nap.