4. FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT

Határozzuk meg, hogy a következő függvényeknek van-e és hol zérushelye, továbbá helyi szélsőértéke és abszolút szélsőértéke (4.1. - 4.12.):

4.1. $f: f(x) = x - x^2, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.2. $f: f(x) = 2x^3 - 5x^2, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.3. $f: f(x) = 2x^3 - 5x^2, \quad x \in [-1,\ 2].$

4.4. $f: f(x) = \left(x^2 - 1\right)^3 + 1,\ x \in \mathrm{R}.$

4.5. $f: f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.6. $f: f(x) = x^2 e^{-x^2}, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.7. $f: f(x) = \left(1 + x^2\right)e^{-x^2},\ x \in \mathrm{R}.$

4.8. $f: f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

4.9. $f: f(x) = x - 2\sqrt{x}, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

4.10. $f: f(x) = (1-x)^2 + (2-x)^2 + (3-x)^2 + (4-x)^2,\ x \in \mathrm{R}.$

4.11. $f: f(x) = \sqrt[3]{\left(x^4 - 1\right)^2},\ x \in \mathrm{R}.$

4.12. $f:\ f(x) = \begin{cases} 10+0{,}1x+0{,}5\sqrt{x}, & \text{ha } x \in [0,\ 10[, \\ 20+0{,}1x+0{,}5\sqrt{x}, & \text{ha } x \in [10,\ 20[, \\ 25+0{,}1x+0{,}5\sqrt{x}, & \text{ha } x \in [20,\ 40[, \\ 30+0{,}1x+0{,}5\sqrt{x}, & \text{ha } x \in [40,\ 80[, \\ 50+0{,}1x+0{,}5\sqrt{x}, & \text{ha } x \in [80{,}100[, \\ 70+0{,}1x+0{,}5\sqrt{x}, & \text{ha } x = 100. \end{cases}$

Vizsgáljuk meg, hogy a következő függvényeknek van-e és hol helyi szélsőértéke és abszolút szélsőértéke! Az értelmezési tartomány felbontható-e olyan intervallumokra, amelyeken monoton vagy szigorúan monoton a függvény? Egyben határozzuk meg ezeket a monotonitási intervallumokat is (4.13.-4.17.):

4.13. $f: f(x) = x - x^3, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.14. $f: f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}.$

4.15. $f: f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 7, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.16. $f: f(x) = x - 3 \cdot \sqrt[3]{x}, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.17. $f: f(x) = -3x \cdot \ln x, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

Határozzuk meg, hogy a következő függvényeknek van-e és hol inflexiós pontja!
Írjuk fel azokat az intervallumokat, amelyekben a függvény konvex, illetve konkáv (4.18.-4.26.):

4.18. $f: f(x) = 3x - x^3, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.19. $f: f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.20. $f: f(x) = (1 - x)^3 (1 + x)^3, \ x \in \mathrm{R}.$

4.21. $f: f(x) = 1n^2 x, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

4.22. $f: f(x) = -xe^x, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.23. $f: f(x) = \dfrac{x}{e^x(x-1)}, \quad x \in \mathrm{R} \setminus \{1\}.$

4.24. $f: f(x) = e^{2-x^2}, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.25. $f: f(x) = x^3 \cdot \ln x, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

4.26. $f: f(x) = \ln(x^2 + 1), \quad x \in \mathrm{R}.$

A l'Hospital-szabály függvény határértékének kiszámítására

Mielőtt teljes függvényvizsgálatot végeznénk, ismertetjük a l'Hospital szabályt. Ennek ismeretében bizonyos függvények határértékét egyszerűbben meg tudjuk majd határozni.

A függvények hányadosának határértékére vonatkozó tételben feltettük, hogy a nevező határértéke nem 0. Ha a számláló határértéke 0-tól különböző, a nevező határértéke 0, akkor a hányadosnak nincs véges határértéke. Ha számláló és a nevező határértéke 0, akkor eddigi ismereteink alapján nem tudunk a hányados határértékére következtetni. Hasonlóképpen nem tudunk a hányados határértékére következtetni, ha a számlálónak is, a nevezőnek is ∞ a határértéke. Ezekben az esetekben alkalmazható az alábbi tétel:

TÉTEL

Legyen f és g: $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$, az $]a, b[$ nyílt intervallumban differenciálható és $g'(x) \neq 0$, ha $x \in]a, b[$.

a.) Ha $\lim_a f = \lim_a g = 0$, és ha létezik a $\lim_a \frac{f'}{g'}$ határérték, akkor az $\frac{f}{g}$ függvénynek is van a-ban határértéke, és

$$\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f'}{g'} .$$

b.) Ha $\lim_a f = \lim_a g = \infty$, és ha létezik a $\lim_a \frac{f'}{g'}$ határérték, akkor az $\frac{f}{g}$ függvénynek is van a-ban határértéke, és

$$\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f'}{g'} .$$

A tételek bizonyítására nem térünk ki.

Megjegyzések

1. Mindkét tétel érvényes nemcsak véges a helyen, hanem a $+\infty$-ben, illetve a $-\infty$-ben vett határértékre is.
2. A most vizsgált hányadosok mellett gyakran előfordulnak olyan $f \cdot g$ szorzatok, ahol a $\lim_a f = 0$ és $\lim_a g = +\infty$.
   Ezek az $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}} = \frac{g}{\frac{1}{f}}$ azonosság alapján visszavezethetők a már tárgyalt típusokra.
3. Az f helyett a $-f$, illetve g helyett a $-g$ függvényt véve, a tételből egyszerűen adódik $\lim \frac{f}{g}$ ha $\lim f = -\infty$ és $\lim g = +\infty$, illetve $\lim f = +\infty$ és $\lim g = -\infty$.
4. A tétel nemcsak határértékre, hanem bal oldali határértékre, illetve jobb oldali határértékre is érvényes.
5. Ha $\lim_a f' = \lim_a g' = 0$, akkor f'-re, illetve g'-re alkalmazzuk a tételt, és a második deriváltak hányadosának határértékét képezzük. Az eljárást ismételhetjük addig, amíg valamelyik magasabb rendű deriváltak hányadosának határértéke már megállapítható.

4.27. Számítsuk ki $\lim\limits_{+\infty} \frac{1\mathrm{n}x}{x}$ értékét!

4.28. Számítsuk ki $\lim\limits_{0} \frac{(1+x)^5 - 1}{x}$ értékét!

Végezzük el a teljes függvényvizsgálatot (4.29.-4.65.):

4.29. $f\colon f(x) = x^2 - x^4, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.30. $f\colon f(x) = 5x^3 - 4x^4, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.31. $f\colon f(x) = x^3 - 5x^2, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.32. $f\colon f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 6, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.33. $f\colon f(x) = (x+1)(x-2)^2, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.34. $f\colon f(x) = x^3\left(x^2-1\right), \quad x \in \mathrm{R}.$

4.35. $f\colon f(x) = 1 + (x-1)^4, \quad x \in [-1;5].$

4.36. $f\colon f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}, \quad x \in \mathrm{R}.$

4.37. $f\colon f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}, \quad x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}.$

4.38. $f\colon f(x) = 2 \cdot \frac{x}{x+3}, \quad x \in \mathrm{R} \setminus \{-3\}.$

4.39. $f\colon f(x) = 3 \cdot \frac{x-3}{x-1}, \quad x \in \mathrm{R} \setminus \{1\}.$

4.40. $f\colon f(x) = x + \frac{2}{x+1}, \quad x \in \mathrm{R} \setminus \{-1\}.$

4.41. $f\colon f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}.$

4.42. $f\colon f(x)=\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2-3,\quad x\in \mathrm{R}\setminus\{1\}.$

4.43. $f\colon f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2},\quad x\in \mathrm{R}.$

4.44. $f\colon f(x)=\dfrac{5x}{x^2+4x+4},\quad x\in \mathrm{R}\setminus\{-2\}.$

4.45. $f\colon f(x)=\dfrac{6x}{x^2+1},\quad x\in \mathrm{R}.$

4.46. $f\colon f(x)=\dfrac{3(x-1)^2}{x^2+1},\ x\in \mathrm{R}.$

4.47. $f\colon f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-2x+1},\ x\in \mathrm{R}\setminus\{1\}.$

4.48. $f\colon f(x)=\dfrac{5x^3}{(2x+1)^2},\quad x\in \mathrm{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}.$

4.49. $f\colon f(x)=\sqrt{x^2-1},\quad x\in \mathrm{R}\setminus\,]\text{-}1,1[.$

4.50. $f\colon f(x)=x\sqrt{1-x},\quad x\in\,]-\infty,\ 1].$

4.51. $f\colon f(x)=\sqrt[3]{(x-4)^2},\quad x\in \mathrm{R}.$

4.52. $f\colon f(x)=x-2\sqrt{x},\quad x\in \mathrm{R}_0^+.$

4.53. $f\colon f(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}},\quad x\in \mathrm{R}\setminus[\text{-}1,\ 1].$

4.54. $f\colon f(x)=xe^x,\quad x\in \mathrm{R}.$

4.55. $f\colon f(x)=x^2e^{-x^2},\quad x\in\mathrm{R}.$

4.56. $f\colon f(x)=3x\cdot e^{-x},\quad x\in\mathrm{R}.$

4.57. $f\colon f(x)=x^3\cdot e^{-x},\quad x\in\mathrm{R}.$

4.58. $f\colon f(x)=\dfrac{2x}{e^x(x-1)},\ x\in\mathrm{R}\setminus\{1\}.$

4.59. $f\colon f(x)=x\cdot\ln x,\ x\in\mathrm{R}^+.$

4.60. $f\colon f(x)=x^2\cdot\ln x,\quad x\in\mathrm{R}^+.$

4.61. $f\colon f(x)=\dfrac{\ln x}{x},\quad x\in\mathrm{R}^+.$

4.62. $f\colon f(x)=\dfrac{1+1\mathrm{n}x}{x},\quad x\in\mathrm{R}^+.$

4.63. $f\colon f(x)=|x|+x^2,\quad x\in\mathrm{R}.$

4.64. $f\colon f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x-1)^2},\quad x\in\mathrm{R}\setminus\{0,1\}.$

4.65. $f\colon f(x)=e^{\frac{1}{1-x}},\quad x\in\mathrm{R}\setminus\{1\}.$

4.66. Tekintsük az $f\colon f(x)=\dfrac{2}{x-3}$ keresleti függvényt az $x\in[2;4]$ intervallumban. Határozzuk meg a hozzátartozó elaszticitásfüggvényt és annak értékkészletét!

4.67. Adott a $k: k(x) = \frac{-x^3}{26} + \frac{9}{26}x^2 - \frac{14}{13}$ költségfüggvény, ahol x az előállított mennyiséget jelenti. Határozza meg az a = 5 helyen az elaszticitásfüggvény értékét!

4.68. Határozza meg az $f: f(x) = 2^{x+1}$ függvény a: = 5 pontbeli elaszticitását!

4.69. Valamely árucikk iránti keresletet a p ártól függően az

$$f(p) = \frac{100}{p+3}, \quad p > 0$$

függvény írja le. Állapítsuk meg, hogy hány százalékkal csökken a kereslet, ha a cikk árát p = 5-ről 1%-kal növeljük. (A feladatot Denkinger-Gyurkó: Matematikai analízis c. feladatgyűjteményből vettük át.)

4.70. Egy üzlet költségeinek alakulását a

$$K: K(F) = 10{,}6 + 0{,}03F - 0{,}925 \cdot 10^{-4}F^2 + 2 \cdot 10^{-7}F^3,$$

$F \in \mathrm{R}^+$ függvény írja le, ahol F a vállalat forgalmát jelenti ezer Ft-ban, K pedig a költségeket szintén ezer Ft-ban.
Írjuk fel a K költségfüggvényhez tartozó elaszticitás-függvényt!

4.71. Különböző típusú költségfüggvényeket ismerünk. Vizsgáljuk a következőt:

K: $K(F) = c + pF + d\sqrt{F}$, $F \in \mathrm{R}^+$, ahol

F: a forgalom,

c: az állandó költség, $c \in \mathrm{R}^+$,

p: a proporcionális költségtényező, $p \in \mathrm{R}^+$,

d: a degresszív költségtényező, $d \in \mathrm{R}^+$.

Ez a függvény az állandó költség, a proporcionális költség és degresszív költség együttes alakulását vizsgálja a rendelkezésünkre álló forgalmi adatok alapján. Gyakorlatban sokszor előfordul, hogy az állandó költség bizonyos forgalmi intervallumokra más és más, azaz egy bizonyos forgalmi értéket elérve, ugrásszerűen megváltozik. Ebből következik, hogy a K: $K(F) = c + pF + d\sqrt{F}$ költségfüggvény az állandó költség megváltozásának megfelelően csak szakaszonként határozható meg.

$$K:\ K(F) = \begin{cases} c_1 + pF + d\sqrt{F}, & \text{ha } 0 \le F < F_1 \\ c_2 + pF + d\sqrt{F}, & \text{ha } F_1 \le F < F_2 \\ \qquad \text{L} & \\ c_n + pF + d\sqrt{F}, & \text{ha } F_{n\text{-}1} \le F < F_n, \end{cases}$$

$c_1,\ c_2\ \text{L}\ ,\ c_n \in \mathrm{R}^+,\ \ p, d \in \mathrm{R}^+$.

Ábrázoljuk az így definiált költségfüggvényt!

Határozza meg az alábbi függvények stacionárius pontjait (4.72. - 4.78.):

4.72. $f: f(x,y) = x^2 - 4xy + 6y^2 + 8x - 28y, \quad D_f = \mathrm{R}^2.$

4.73. $f: f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2, \ D_f = \mathrm{R}^2.$

4.74. $f: f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 3, \ D_f = \mathrm{R}^2.$

4.75. $f: f(x,y) = x^2 + xy + 4y^2 + 5x - 8y, \ D_f = \mathrm{R}^2.$

4.76. $f: f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x, \ D_f = \mathrm{R}^2.$

4.77. $f: f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2, \ D_f = \mathrm{R}^2.$

4.78. $f: f(x,y) = 3x + 4y + 6, \ D_f = \mathrm{R}^2.$

Határozzuk meg a következő függvények lokális szélsőértékeit (4.79. - 4.89.):

4.79. $f: f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + y + 5, \quad (x,y) \in \mathrm{R}^2.$

4.80. $f: f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 2, \quad (x,y) \in \mathrm{R}^2.$

4.81. $f\colon f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{xy}{125}, \quad (x,y)\in \mathrm{R}^2 \setminus \{(0,\ 0)\}.$

4.82. $f\colon f(x,y)=(1-x)^2+(2+y)^2-4, \quad D_f=\mathrm{R}^2.$

4.83. $f\colon f(x,y)=\frac{20}{x}+\frac{50}{y}+x\cdot y, \quad D_f=\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \mid x\neq 0,\ \mathrm{y}\neq 0\}.$

4.84. $f\colon f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2, \quad (x,y)\in \mathrm{R}^2.$

4.85. $f\colon f(x,y)=x^2+y^3-3xy, \quad (x,y)\in \mathrm{R}^2.$

4.86. $f\colon f(x,y)=x^3+(y+1)^3-3x(y+1), \quad (x,y)\in \mathrm{R}^2.$

4.87. $f\colon f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}, \quad (x,y)\in \mathrm{R}^2.$

4.88. $f\colon f(x,y)=x^2+2y^2-x-2y-1, \quad (x,y)\in \mathrm{R}^2.$

4.89. $f\colon f(x,y)=x^3-3x^2+2xy+y^2, \quad (x,y)\in \mathrm{R}^2.$