3. DIFFERENCIÁLHÁNYADOS ÉS DERIVÁLT

3.1. Írjuk fel az f: $f(x) = 3x + 1$ függvény különbségihányados-függvényét az $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = -3$ pontokban!

3.2. Írjuk fel az f: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény különbségihányados-függvényét az $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ pontokban!

3.3. Írjuk fel az f: $f(x) = 2x^2 - 3$ függvény $a = 1$ pontjához tartozó különbségi-hányados-függvényét!

3.4. Írjuk fel az f: $f(x) = \ln x$, $x \in \mathrm{R}^+$ függvény $a = \mathrm{e}^2$ pontjához tartozó különbségihányados-függvényét!

3.5. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvény a 2 helyen differenciálható-e!

$$f:\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in]-\infty,\ 2] \\ 2x + 1, & x \in]2,\ +\infty[. \end{cases}$$

3.6. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvény az 1 helyen differenciálható-e!

$$f:\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in]-\infty,\ 1] \\ x, & x \in]1,\ +\infty[. \end{cases}$$

3.7. Számítsuk ki az f: $f(x) = x|x|$ függvény 0 pontbeli differenciálhányadosát!

3.8. Vizsgáljuk meg, hogy az f: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény a 0 pontban differenciálható-e!

3.9. Vizsgáljuk meg, hogy az f: $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ függvény a 0 pontban differenciálható-e!

Határozzuk meg az alábbi függvények derivált függvényét (3.10.-3.90.):

3.10. $f: f(x) = 2x + 3, \quad x \in \mathrm{R}.$

3.11. $f: f(x) = x^6, \quad x \in \mathrm{R}$

3.12. $f: f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}.$

3.13. $f: f(x) = 2x + \frac{1}{x}, \quad x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}.$

3.14. $f: f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

3.15. $f: f(x) = \sqrt[5]{x^4}, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

3.16. $f: f(x) = \frac{x^5}{\sqrt[3]{x}}, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

3.17. $f: f(x) = \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

3.18. $f: f(x) = 4x^5 - 3x^2 + 1, \quad x \in \mathrm{R}.$

3.19. $f: f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2x^5 - \sqrt{x}}{x^2}, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

3.20. $f: f(x) = \frac{x-4}{x-2}, \quad x \in \mathrm{R} \setminus \{2\}.$

3.21. $f: f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6}, \quad x \in \mathrm{R} \setminus \{-3,\ 2\}.$

3.22. $f: f(x) = \frac{x^2 - 1}{4\left(x^2 + 1\right)}, \quad x \in \mathrm{R}.$

3.23. $f: f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}, \quad x \in \mathrm{R}.$

3.24. $f\colon f(x)=\dfrac{2x+1}{x^{10}},\quad x\in \mathrm{R}\setminus\{0\}.$

3.25. $f\colon f(x)=2^{x}+\dfrac{1}{2^{x}},\quad x\in \mathrm{R}.$

3.26. $f\colon f(x)=e^{-x^{2}}+e^{\sqrt{x}},\quad x\in \mathrm{R}_{0}^{+}.$

3.27. $f\colon f(x)=5\cdot \ln\left(1+3x^{2}\right),\quad x\in \mathrm{R}^{+}.$

3.28. $f\colon f(x)=x\cdot \ln x-x,\quad x\in \mathrm{R}^{+}.$

3.29. $f\colon f(x)=\dfrac{1\mathrm{n}x}{x^{2}},\quad x\in \mathrm{R}^{+}.$

3.30. $f\colon f(x)=\dfrac{x}{1\mathrm{n}x},\quad x\in \mathrm{R}^{+}\setminus\{1\}.$

3.31. $f\colon f(x)=\log_{a}x,\quad x\in \mathrm{R}^{+}.$

3.32. $f\colon f(x)=\lg x,\quad x\in \mathrm{R}^{+}.$

3.33. $f\colon \mathrm{f(x)} = \quad f(x)=\dfrac{1}{1\mathrm{n}x},\quad x\in \mathrm{R}^{+}\setminus\{1\}.$

3.34. $f\colon f(x)=\sqrt{x}\ 1\mathrm{n}x,\quad x\in \mathrm{R}^{+}.$

3.35. $f\colon f(x)=e^{x}\ln x,\quad x\in \mathrm{R}^{+}.$

3.36. $f\colon f(x)=\dfrac{e^{x}}{1\mathrm{n}x},\quad x\in \mathrm{R}^{+}\setminus\{1\}.$

3.37. $f\colon f(x) = (2x+3)(4x^{2}+5x+6),\quad x\in \mathrm{R}.$

3.38. $f\colon f(x)=4x^{3}-2x^{2}+6x-4\sqrt{x}+1,\quad x\in \mathrm{R}_{0}^{+}.$

3.39. $f\colon f(x)=\dfrac{1}{x^{2}-4x+4},\quad x\in \mathrm{R}\setminus\{2\}.$

3.40. $f\colon f(x)=\dfrac{3x}{1+x^4},\quad x\in\mathrm{R}.$

3.41. $f\colon f(x)=\dfrac{8x}{1+x^2},\quad x\in\mathrm{R}.$

3.42. $f\colon f(x)=\dfrac{6x+5}{2x+1},\quad x\in\mathrm{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}.$

3.43. $f\colon f(x)=\dfrac{5x}{x^2+4x+4},\quad x\in\mathrm{R}^+.$

3.44. $f\colon f(x)=\dfrac{x}{(x-2)^3},\quad x\in\mathrm{R}\setminus(2).$

3.45. $f\colon f(x)=\dfrac{2x^3+3x+5}{3x^2-4x-7},\quad x\in\mathrm{R}\setminus\left\{\dfrac{7}{3},-1\right\}.$

3.46. $f\colon f(x)=3^{2-x},\quad x\in\mathrm{R}.$

3.47. $f\colon f(x)=\left(2^{5x}+3x\right)^6,\quad x\in\mathrm{R}.$

3.48. $f\colon f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+8}{\sqrt[3]{x}+1},\quad x\in\mathrm{R}^+.$

3.49. $f\colon f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2},\quad x\in\mathrm{R}.$

3.50. $f\colon f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}},\quad x\in\left]-1,\ 1\right].$

3.51. $f\colon f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},\quad x\in\mathrm{R}\setminus\{0\}.$

3.52. $f\colon f(x)=e^{x^2+5x+1}\,\mathrm{ln}x,\quad x\in\mathrm{R}^+.$

3.53. $f\colon f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{4}},\quad x\in\mathrm{R}.$

3.54. $f\colon f(x)=e^{x}\ln x+(x^{2}-4)^{3}+\sqrt{x},\quad x\in \mathrm{R}^{+}.$

3.55. $f\colon f(x)=e^{-x^{2}+2x+1}\ln x,\quad x\in \mathrm{R}^{+}.$

3.56. $f\colon f(x)=x\sqrt[4]{6x^{2}+e^{2x}},\quad x\in \mathrm{R}.$

3.57. $f\colon f(x)=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right),\quad x\in \mathrm{R}^{+}.$

3.58. $f\colon f(x)=x^{3}\cdot\ln x,\quad x\in \mathrm{R}^{+}.$

3.59. $f\colon f(x)=x^{4}\cdot\ln 3x,\quad x\in \mathrm{R}^{+}.$

3.60. $f\colon f(x)=\frac{3^{x}+2x^{3}}{3x+\sqrt{x}},\quad x\in \mathrm{R}^{+}.$

3.61. $f\colon f(x)=5^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}},\quad x\in\left]\text{-}1,1\right].$

3.62. $f\colon f(x)=x^{3}\cdot e^{4x}+2^{1-x^{2}},\quad x\in \mathrm{R}.$

3.63. $f\colon f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}},\quad x\in \mathrm{R}^{+}.$

3.64. $f\colon f(x)=\frac{1}{\left(1+x^{2}\right)\sqrt{1+x^{2}}},\quad x\in \mathrm{R}.$

3.65. $f\colon f(x)=\ln\left(1+e^{x}\right),\quad x\in \mathrm{R}.$

3.66. $f\colon f(x)=\ln\ln x,\quad x\in\left]1,\infty\right[.$

3.67. $f\colon f(x)=\ln\frac{5x}{4x-3},\quad x\in \mathrm{R}^{-}.$

3.68. $f\colon f(x)=\ln\frac{1+e^{x}}{1-e^{x}},\quad x\in \mathrm{R}^{-}.$

3.69. $f\colon f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \quad x\in\left]-1,1\right[$.

3.70. $f\colon f(x)=\ln\left(x-\sqrt{1-x^2}\right), \quad x\in\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$.

3.71. $f\colon f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}}, \quad x\in\mathrm{R}^+$.

3.72. $f\colon f(x)=e^{4x}\ln x+e^{2x^4+3x}+5, \quad x\in\mathrm{R}^+$.

3.73. $f\colon f(x)=e^{x^2-5}\sqrt{x+3}, \quad x\in\left[-3,\infty\right[$.

3.74. $f\colon \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}, \quad x\in\mathrm{R}^+$.

3.75. $f\colon f(x)=\ln\left(1+3x^2\right)^4, \quad x\in\mathrm{R}^+$.

3.76. $f\colon f(x)=\ln\left(x^2+3x\right)+e^{-2x^5}, \quad x\in\mathrm{R}^+$.

3.77. $f\colon f(x)=x^x, \quad x\in\mathrm{R}^+\setminus\{1\}$.

3.78. $f\colon f(x)=(3+2x)^x, \quad x\in\mathrm{R}^+$.

3.79. $f\colon f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x, \quad x\in\mathrm{R}^+$.

3.80. $f\colon f(x)=\sqrt[x]{x}, \quad x\in\mathrm{R}^+$.

3.81. $f\colon f(x)=\left(3+x^2\right)^{x^2}, \quad x\in\mathrm{R}^+$.

3.82. $f\colon f(x)=\sqrt[x]{4x+5}, \quad x\in\mathrm{R}^+$.

3.83. $f\colon f(x)=x^{3x^2+5x-1}, \quad x\in\mathrm{R}^+\setminus\{1\}$.

3.84. $f: f(x) = (\ln x)^x, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

3.85. $f: f(x) = (\ln x)^{\ln x}, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

3.86. $f: f(x) = \ln\lg x, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

3.87. $f: f(x) = (\ln 3x)^{5x^4}, \quad x \in \mathrm{R}^+.$

3.88. $f: f(x) = x^{\sqrt{9-x^2}}, \quad x \in [2,3].$

3.89. $f: f(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathrm{R} \setminus [-1,\ 1].$

3.90. $f: f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)^2, \quad x \in \mathrm{R}.$

3.91. Határozzuk meg az f függvény differenciálhányadosát az $a = 1$ pontban!

$f:\ x \in \mathrm{R}^+, \quad f(x) = x^4 \cdot \ln x.$

3.92. Határozzuk meg az f függvény differenciálhányadosát az $a = e$ pontban!

$f:\ x \in \mathrm{R}^+, \quad f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x.$

3.93. Határozzuk meg az f függvény differenciálhányadosát az 1 pontjában!

$f: f(x) = e^x\ (x^2 + 3x), \quad x \in \mathrm{R}.$

3.94. Írjuk fel a

$$g:\ g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in \mathrm{Q}, \\ x^4, & \text{ha } x \in \mathrm{Q}^* \end{cases}$$

deriváltfüggvényét!

3.95. Lehet-e két, nem differenciálható függvény összege, szorzata differenciálható?

3.96. Határozzuk meg, hogy az $f: f(x) = 2x^3 + 3$ függvény grafikonjának melyik pontjához tartozó érintő párhuzamos az x a $6x + 5, \quad x \in \mathrm{R}$ függvény grafikonjával!

3.97. Határozzuk meg, hogy az $f: f(x)=\frac{8}{x}$, $x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$ függvény grafikonjának melyik pontjához tartozó érintő merőleges az x a $3x-2$, $x \in \mathrm{R}$ függvény grafikonjára!

3.98. Határozzuk meg az f függvény derivált függvényét, és számítsuk ki a differenciálhányadosát a 2 pontban!

$f: f(x)=\frac{2x^2+3x}{x^2-1}$, $x \in \mathrm{R} \setminus \{-1,\ 1\}$.

3.99. Határozza meg az $f: f(x) = x^2 + 6x - 1$ függvény grafikonjának az $x = 1$ abszcisszájú pontjához húzott érintő egyenletét!

3.100. Határozza meg az $f: f(x)=x-\frac{1}{x}$, $x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$ függvény görbéjének az x tengellyel alkotott metszéspontjaiba húzott érintőinek egyenleteit!

3.101. Határozza meg az $f: f(x)=x^3-6x^2+1$ függvény azon érintőjének az egyeneletét, amely merőleges az $y=\frac{x+12}{12}$ egyenletű egyenesre.

3.102. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $f: f(x)=x^2+x-6$, $x \in \mathrm{R}$ parabolát érinti és átmegy a P(3,4) ponton!

3.103. Adott az $f: f(x)=-\ln(x+2)$, $x>-2$ függvény.

a.) Határozza meg a függvény grafikonjának az x = -1 abszcisszájú pontjához húzott érintő meredekségét!

b.) Mekkora szöget zár be ez az érintő az x tengely pozitív irányával?

c.) Írja fel az érintő egyenletét!

3.104. Adott az $f: f(x)=\frac{1}{2}(1-x)^3$, $x \in \mathrm{R}$ függvény.

a.) Határozza meg a függvény grafikonjának az x = -1 abszcisszájú pontjához húzott érintő meredekségét!

b.) Mekkora szöget zár be ez az érintő az x tengely pozitív irányával?

c.) Írja fel az érintő egyenletét!

Képezzük a következő függvények magasabbrendű derivált függvényét (3.105. - 3.116.):

3.105. $f: f(x) = 2x^6 + 5x^4 - 3x, \quad x \in \mathrm{R}$ $f''' = ?$

3.106. $f: f(x) = \sqrt[4]{x^3}, \quad x \in \mathrm{R}^+$ $f''' = ?$

3.107. $f: f(x) = x^4 \ln x, \quad x \in \mathrm{R}^+$ $f''' = ?$

3.108. $f: f(x) = (2x+10)^6, \quad x \in \mathrm{R}$ $f'' = ?$

3.109. $f: f(x) = x^5 - 2x^3 + 1, \quad x \in \mathrm{R}$ $f''' = ?$

3.110. $f: f(x) = 12 \ln x, \quad x \in \mathrm{R}^+$ $f''' = ?$

3.111. $f: f(x) = x^4 e^x, \quad x \in \mathrm{R}$ $f''' = ?$

3.112. $f: f(x) = 2^{5x},$ $f''' = ?$

3.113. $f: f(x) = x^3 - 8x + 2,$ $f''' = ?$

3.114. $f: f(x) = e^x \cdot \sqrt{x}, \quad x \in \mathrm{R}^+$ $f'' = ?$

3.115. $f: f(x) = 3 \cdot \ln 4x, \quad x \in \mathrm{R}^+$ $f'' = ?$

3.116. $f: f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathrm{R}$ $f''' = ?$

3.117. Legyen $f: f(x,y) = x - 2x^2y^2 + y^3, \ (x,y) \in \mathrm{R}$. Határozzuk meg a parciális deriváltfüggvényeket, majd számítsuk ki a (2;0) pontbeli parciális differenciálhányadosokat!

3.118. Számítsuk ki az f: $f(x,y) = \sqrt{4x^2 + 8y^2}$, $(x,y) \in \mathrm{R}^2$ függvény x szerinti parciális differenciálhányadosát az (1;2) pontban!

Határozzuk meg az alábbi függvények x szerinti parciális deriváltfüggvényét (3.119. - 3.121.):

3.119. $f: f(x,y) = x^3 + xy + y^3, \quad (x,y) \in \mathrm{R}^2.$

3.120. $f: f(x,y) = \sqrt[3]{y} + xe^y - x^2y + 2, \ (x,y) \in \mathrm{R}^2.$

3.121. $f: f(x,y) = 2^x + e^x y^2 + y\sqrt{x}, \quad \mathrm{D}_f = \left\{(x,y) \in R^2 \,|\, x \geq 0, \ y \in \mathrm{R}\right\}.$

Határozzuk meg az alábbi függvények parciális deriváltfüggvényeit (3.122. - 3.127.)

3.122. $f: f(x,y) = x^2y^3 + y\ln x, \quad \mathrm{D}_f = \left\{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \,|\, x > 0, \ y \in \mathrm{R}\right\}.$

3.123. $f: f(x,y) = e^{x^2+y^2}, \quad (x,\ y) \in \mathrm{R}^2.$

3.124. $f: f(x,y) = e^{xy^2}, \quad (x,\ y) \in \mathrm{R}^2.$

3.125. $f: f(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2\right), \quad \mathrm{D}_f = \left\{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 > 0\right\}.$

3.126. $f: f(x,y) = e^{x+y} \cdot \ln\left(x^2 + y^2\right), \quad \mathrm{D}_f = \left\{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 > 0\right\}.$

3.127. $f: f(x,y) = \sqrt{xy} + \sqrt{\frac{x^2}{y^3}}, \quad \mathrm{D}_f = \left(\mathrm{R}^+\right)^2.$

Határozzuk meg az alábbi függvények első-, és másodrendű parciális deriváltfüggvényeit (3.128. - 3.134.):

3.128. $f: f(x,y) = 2x^3 + 3x^2y - 2y^2, \quad (x,\ y) \in \mathrm{R}^2.$

3.129. f: $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2 + x - 4y, \quad (x,\ y) \in \mathrm{R}^2$.

3.130. f: $f(x,y) = e^{-x^2}(x - 5y + 8), \quad (x,y) \in \mathrm{R}^2$.

3.131. f: $f(x,y) = (3 - 2x + y)e^{-y^2}, \quad (x,y) \in \mathrm{R}^2$.

3.132. f: $f(x,y) = x^2 + x \cdot e^y + x^3 y^2, \quad \mathrm{D}_f = \mathrm{R}^2$.

3.133. f: $f(x,y) = y - x \cdot e^y + x, \quad \mathrm{D}_f = \mathrm{R}^2$.

3.134. f: $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}, \quad \mathrm{D}_f = \left\{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid x \in \mathrm{R} \quad \mathrm{y} \neq 0\right\}$.