I. ANALÍZIS

1. SOROZATOK, SOROK

Írjuk fel a következő sorozatok néhány tagját (1.1. - 1.14.):

1.1. a: n a $\dfrac{n}{2n-1}$, $n \in \mathrm{N}^+$.

1.2. a: n a $\dfrac{n-1}{n}$, $n \in \mathrm{N}^+$.

1.3. a: n a $\dfrac{2n^2}{n^2+1}$, $n \in \mathrm{N}^+$.

1.4. a: n a $2+\dfrac{3}{n}$, $n \in \mathrm{N}^+$.

1.5. a: n a $\dfrac{5n+1}{3n+2}$, $n \in \mathrm{N}^+$

1.6. a: n a $1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathrm{N}^+$.

1.7. a: n a $\sin n\dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathrm{N}^+$.

1.8. a: n a $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, $n \in \mathrm{N}^+$.

1.9. a: n a $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^k}$, $n \in \mathrm{N}^+$.

1.10. a: n a $\dfrac{1+2+\mathrm{L}\ +2n}{n}+2$, $n \in \mathrm{N}^+$.

1.11. a: n a $\begin{cases} 1, & \text{ha } n \in \mathrm{N}^+ \text{ és } \textit{páratlan} \\ \dfrac{n}{2}, & \text{ha } n \in \mathrm{N}^+ \text{ és } \textit{páros.} \end{cases}$

1.12. $a_1 := 0$, $a_2 := 1$, $a_3 := 2$, $a_n := \dfrac{1}{n^2-5n+6}$, $n \in \mathrm{N}^+ \setminus \{1,2,3\}$.

1.13. $a_1 := 1$, $a_2 := 2$, $a_n := \dfrac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2}$, $n \in \mathrm{N}^+ \setminus \{1,2\}$.

1.14. $a_1 := 4$, $a_n := \dfrac{a_{n-1}}{2}$, $n \in \mathrm{N}^+ \setminus \{1\}$.

Vizsgáljuk meg a következő sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából (1.15. - 1.20.):

1.15. $a_n = \dfrac{1-2+3-4+\ \mathrm{L}\ +(-2n)}{1+2+3+\ \mathrm{L}\ +2n}$.

1.16. $a_n = \dfrac{1+2+\mathrm{L}\ +n}{n+4}-\dfrac{n}{2}$.

1.17. $a_n = \dfrac{1+2+\mathrm{L}+n}{(n+2)(n+5)}$.

1.18. $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

1.19. $a_n = \dfrac{n!}{n^2}$.

1.20. $a_n = \dfrac{3^{n+1}-1}{3^n}$.

Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét (1.21. - 1.77.)

1.21. $\left(\dfrac{2n+3}{3n-1}\right)$.

1.22. $\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

1.23. $\left(\dfrac{n^2-1}{2n^2+1}\right)$.

1.24. $\left(\dfrac{n^2+2n}{n+3}\right)$.

1.25. $\left(\dfrac{(n+1)^2}{3n^2}\right)$.

1.26. $\left(\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{n^3+4n^2+3}\right)$.

1.27. $\left(\dfrac{2-3^n}{5^{n+1}}\right)$.

1.28. $\left((-3)^n\right)$.

1.29. $\left(\dfrac{n^3-3n^2+2}{n^2+n+1}\right)$.

1.30. $\left(\dfrac{n^2-4n+3}{5n^2+1}\right)$.

1.31. $\left(\dfrac{5n^4-3}{n^5+2}\right)$.

1.32. $\left(1+(-1)^n\dfrac{2n}{3n+5}\right)$.

1.33. $\left(\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\dfrac{n+1}{2n-3}\right)$.

1.34. $\left(1+(-1)^n\ \dfrac{n+1}{n}\right)$.

1.35. $\left(\dfrac{1+2+3+\mathrm{L}+n}{(n+1)(n+2)}\right)$.

1.36. $\left(\dfrac{10^n-10^{-n}}{10^n+10^{-n}}\right)$.

1.37. $\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+5}\right)$.

1.38. $\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{3n-2}-\sqrt{n}\right)\right)$.

1.39. $\left((1{,}1)^n\right)$.

1.40. $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10}\right)$.

1.41. $\left(\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n\right)$.

1.42. $\left(\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{2n}\right)$.

1.43. $\left(\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n\right)$.

1.44. $a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

1.45. $a_n = \frac{1}{n\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)}$.

1.46. $a_n = \frac{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}{n+2+\sqrt{n+1}}$.

1.47. $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$.

1.48. $a_n = \sqrt[3]{2+n^6}-n^2$.

1.49. $a_n = \frac{\sqrt[5]{n^5+3n+1}}{\sqrt{n^2+6n+2}}$.

1.50. $a_n = \frac{n-\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

1.51. $a_n = \frac{n}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$.

1.52. $a_n = \frac{n(n+1)}{5n-4} - \frac{n+7}{5}$.

1.53. $a_n = \frac{(n+1)\left(2n^2+3n\right)}{\left(n^2+1\right)\left(n^2-2\right)}$.

1.54. $a_n = \frac{5^{n+1}+(-1)^n}{5^n}$.

1.55. $a_n = \left(1-\frac{3}{n}\right)^n$.

1.56. $a_n = \left(\frac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$.

1.57. $a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$.

1.58. $a_n = \left(\frac{n-\sqrt{3}}{8n}\right)^n$.

1.59. $a_n = \left(\frac{1}{n}+5\right)^n$.

1.60. $a_n = \left(\frac{n+3}{n-2}\right)^n$.

1.61. $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$.

1.62. $a_n = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n}$.

1.63. $a_n = \left(\frac{4n+3}{4n+1}\right)^{n+1}$.

1.64. $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{n-3}$.

1.65. $a_n = \left(\frac{2n+2}{2n-1}\right)^{6n-2}$.

1.66. $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{n-1}{2}}$.

1.67. $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

1.68. $a_n = \frac{\sqrt{n^3+3n^2}}{\sqrt[3]{n^3-2n}}$.

1.69. $a_n = \frac{\sqrt[3]{5n^2-2n}}{n+1}$.

1.70. $a_n = \dfrac{3^{n+1}-1}{3^n}$.

1.71. $a_n = \dfrac{2^n}{2^n+1}$.

1.72. $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n \in \mathrm{N}^+ \quad \textit{és páros} \\ 0, & n \in \mathrm{N}^+ \quad \textit{és páratlan.} \end{cases}$

1.73. $a_n = \dfrac{3+6+\mathrm{L}\ +3n}{n^2-1},\ n \in \mathrm{N}^+ \setminus \{1\}$.

1.74. $a_n = \dfrac{1+2+3+\mathrm{L}\ +n}{n^2}$.

1.75. $a_n = \left(\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}\right)^n$.

1.76. $a_n = \dfrac{1+2+3+\mathrm{L}\ +n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$.

1.77. $a_n = \dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+...+n\cdot(n+1)}{n^3}$.

Vizsgáljuk meg a következő sorozatok monotonitás és korlátosság szempontjából, és számítsuk ki a határértéküket (1.78. - 1.86.):

1.78. $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)$.

1.79. $a_n = \left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)$.

1.80. $a_n = \left(\dfrac{n^2+3}{n^2}\right)$.

1.81. $a_n = \left(\dfrac{2n-1}{2n+4}\right)$.

1.82. $a_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n(n+1)}\right)$.

1.83. $a_n = \left(\dfrac{3n+1}{n+4}\right)$.

1.84. $a_n = \left(\dfrac{n-7}{2n+5}\right)$.

1.85. $a_n = \left(\dfrac{2^n+1}{3^n}\right)$.

1.86. $a_n = \left(\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

Határozzuk meg a következő sorozatoknál, hogy a sorozat tagjai hányadik tagtól kezdve esnek a határérték ε sugarú környezetébe (1.87. - 1.99.):

1.87. $\left(\dfrac{n+1}{2n-7}\right)$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

1.88. $\left(\dfrac{1-2n}{4n-3}\right)$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

1.89. $\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

1.90. $\left(\frac{4n+3}{5n-1}\right)$, $\varepsilon = 10^{-1}$.

1.91. $\left(\frac{5n^2-2}{3n^2+1}\right)$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

1.92. $\left(\frac{3n-1}{2n^2+3}\right)$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

1.93. $\left(\frac{2n-3}{n+1}\right)$, $\varepsilon = \frac{1}{20}$.

1.94. $\left(\frac{n+5}{3n+1}\right)$, $\varepsilon = 10^{-1}$.

1.95. $\left(\frac{n+2}{n^2+3}\right)$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

1.96. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, $\varepsilon = 0{,}01$.

1.97. $\left(1+(-1)^n\ \frac{2}{3^n}\right)$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

1.98. $a_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

1.99. $a_n = \frac{4n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n-1}}$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

1.100. Határozzuk meg, hogy a $\left(\frac{6^n}{5^n}\right)$ sorozat tagjai hányadik tagtól kezdve nagyobbak, mint 1 millió!

1.101. Határozzuk meg, hogy az $\left(\frac{n^2+3}{n+1}\right)$ sorozat tagjai hányadik tagtól kezdve nagyobbak, mint 100!

1.102. Az $\left(n^2+3n\right)$ sorozat tagjai hányadik tagtól kezdve nagyobbak, mint 1000?

1.103. A (2^n) sorozat tagjai hányadik tagtól kezdve nagyobbak, mint 10^6?

1.104. Írjuk fel az

a.) $a_n = \frac{1}{n^2}$ b.) $a_n = \frac{1}{n!}$ c.) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

sorozatokból képzett (s_n) sorozatokat!

1.105. Döntsük el, hogy az

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$$

sor konvergens-e!

1.106. Mutassuk meg, hogy a

$$\sum \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \mathrm{L}$$

sor konvergens!

1.107. Állapítsuk meg az alábbi végtelen sorokról, hogy konvergensek-e, s ha igen, számítsuk ki az összegüket!

a.) $\sum \frac{1}{2^n}$, b.) $\sum \frac{11}{10^n}$, c.) $\sum \frac{10}{0{,}5^n}$,

d.) $\sum \left(-\frac{1}{3}\right)^n$, e.) $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$, f.) $\sum \left(-\frac{3}{4}\right)^n$.

Melyek konvergensek és melyek divergensek az alábbi sorok közül (1.108.-1.114.):

1.108. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$.

1.109. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

1.110. $\sum_{n=1}^{\infty} 10(-0{,}25)^{n-1}$.

1.111. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1{,}5)^n$.

1.112. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{2^{2k}}$.

1.113. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{5^{n+2}}$.

1.114. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^k} - \frac{2}{5^{k+1}}\right)$?