Gyakorló feladatok az 1. kisdolgozathoz

1. Adott a következő két függvény: $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=9-x^2$. Képezze az $f(g(x))$ és $g(f(x))$ összetett függvényeket, és adja meg az összes függvény természetes értelmezési tartományát is.

2. Írja fel az alábbi sorozatok első négy tagját.

$a_n=\frac{1}{n!}$ $\qquad$ $b_n=\frac{(-1)^n}{2n}$

$c_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{2k+1}$ $\qquad$ $d_n=\frac{d_{n-1}+3}{d_{n-1}+1}$, *if* $n\geq 2$ *and* $d_1=2$

3. Vizsgálja meg az alábbi sorozatok monotonitását, konvergenciáját és korlátosságát.

$a_n=\frac{n+1}{2n+7}$ $\qquad$ $b_n=\frac{1+2+\ldots+n}{n+3}$ $\qquad$ $c_n=\frac{n}{\sqrt{2+n^2}}$

4. Számítsa ki az alábbi sorozatok esetén a határérték $\varepsilon=10^{-2}$ sugarú környezetéhez tartozó küszöbindexet.

$a_n=\frac{4n+1}{7-5n}$ $\qquad$ $b_n=\frac{n}{2n^2-1}$

5. Számítsa ki az alábbi határértékeket.

$\lim\frac{3n^2+5n}{n+7}$ $\qquad$ $\lim\frac{n+7}{3n^2+5n}$ $\qquad$ $\lim\frac{9n^8+11}{13n^8+n}$

$\lim\left(1+\frac{3}{4n}\right)^n$ $\qquad$ $\lim\left(\frac{5n+2}{5n+7}\right)^{n+2}$ $\qquad$ $\lim\left(\frac{n-\sqrt{2}}{7n}\right)^n$

6. Vizsgálja meg az alábbi sorok konvergenciáját. Konvergencia esetén számítsa ki a határértéket is.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ $\qquad$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ $\qquad$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{0.5^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}10(-0.25)^{n-1}$ $\qquad$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}-\frac{2}{5^{n+1}}\right)$ $\qquad$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

7. Számítsa ki a következő függvények határértékét a megadott helyen.

$$\lim_{3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15} = ? \; ; \quad \lim_{5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 6x + 5} = ? \; ; \quad \lim_{2} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 6x + 8} = ? \; ;$$

$$\lim_{3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^3 - 5x^2 + 6x} = ? \; ; \quad \lim_{\infty} \frac{2x^4 - x^2}{3x^3} = ? \; ; \quad \lim_{-\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1} = ? \; ;$$

$$\lim_{\infty} \frac{2x^2 + 6x}{3x^2 - 1} = ? \; ; \quad \lim_{-\infty} \frac{-x^5 + 6x + 2}{2x^3 + 8} = ? \; ; \quad \lim_{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 1} = ? \; ;$$

$$\lim_{\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3 + x - x}}{\sqrt{x^2 + 3}} = ? \; ; \quad \lim_{-\infty} \frac{\sqrt{1 + x}}{x - 1} = ? \; ; \quad \lim_{\infty} \left(\frac{x + 5}{x - 1} \right)^x = ? ;$$

$$\lim_{\infty} \left(\frac{3x - 1}{3x + 2} \right)^{\frac{x}{3}} = ? \; ; \quad \lim_{\infty} \frac{x^3 + 3}{x^2 + 2} = ? \; ; \quad \lim_{-\infty} \frac{x^3}{\sqrt{3x + 4 - x^2}} = ? \; .$$

8. Számítsa ki az egyoldali határértékeket a következő feladatokban.

$$\lim_{-1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} \; ; \quad \lim_{0} \frac{x + 2}{x^3 + 2x^2} \; ; \quad \lim_{4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 4} \; ; \quad \lim_{3} \frac{5x}{x^3 - 6x^2 + 9x} \; .$$

9. Folytonos-e az alábbi függvény a megadott „a” helyeken?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 4}; & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{1;4\} \\ \dfrac{1}{3}; & \text{ha } x = 1 \qquad a = 1; a = 4 \\ 5; & \text{ha } x = 4 \end{cases}$$

10. A „p” paraméter mely értékeire lesznek az alábbi függvények folytonosak?

$$f: f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{ha } x \neq -2 \\ p & \text{ha } x = -2 \end{cases} \quad ; \quad f: f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x - 1)^2} & \text{ha } x \neq 1 \\ p & \text{ha } x = 1 \end{cases} \quad ;$$

$$f: f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 1}{1 + x^3} & \text{ha } x \neq -1 \\ p & \text{ha } x = -1 \end{cases} \quad .$$

11. Deriválja a következő függvényeket.

a) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$, **b):** $f(x) = \sqrt{x\sqrt[3]{x}}$, **c)** $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2+1},$

d) $f(x) = \frac{1-x}{1+x},$ **e)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt{x},$ **f)** $f(x) = (1-x^3)\left(x^2-2x\right),$

g) $f(x) = \frac{2x^2+3x}{1+2x},$ **h)** $f(x) = \frac{x}{\ln x},$ **i)** $f(x) = e^{x^2+5x-1}\ln\frac{1}{x},$

j) $f(x) = e^{x-4} + x^3 \cdot \ln(x-2).$ **k)** $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x,}\right)$ **l)** $f(x) = \ln x^2 + \ln^2 x,$

m) $f(x) = \ln\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x} + x\ln x,$ **n)** $f(x) = e^{-x} + e^{\sqrt{x}},$ **o)** $f(x) = \frac{x^2+\sqrt{e^x}}{x},$

p) $f(x) = \sqrt{x}\ln\left(x^2+1\right),$ **q)** $f(x) = \sqrt{\ln\left(x^2+1\right)},$ **r)** $f(x) = \ln\left[\left(x^2+2x+1\right)^2\right].$

12. Adja meg a következő függvények másodrendű deriváltjait.

a) $f: f(x) = 2x^6 + 5x^4 - 3x,$

b) $f: f(x) = x^4 \ln x,$

c) $f: f(x) = e^x\sqrt{x},$

d) $f: f(x) = 2^{3x},$

e) $f: f(x) = 3\ln(4x),$

f) $f: f(x) = (2x+5)^3,$

g) $f: f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$