III. Számelmélet

Oszthatósági alapfogalmak, oszthatósági szabályok

305. *a)* hamis, *b)* igaz, *c)* igaz, *d)* igaz, *e)* igaz, *f)* igaz, *g)* hamis, *h)* igaz, *i)* igaz, *j)* hamis, *k)* igaz, *l)* hamis, *m)* igaz, *n)* hamis, *o)* hamis, *p)* igaz, *q)* igaz, *r)* hamis.
306. *a)* páros, *b)* páros, *c)* páratlan, *d)* páratlan, *e)* páros, *f)* páratlan, *g)* páros, *h)* páratlan, *i)* páros, *j)* páros, *k)* páros, *l)* páros, *m)* páros, *n)* páros.
307. *a)* igaz, *b)* hamis, *c)* igaz, *d)* igaz, *e)* hamis, *f)* igaz, *g)* igaz, *h)* igaz, *i)* hamis.
308. *a)* 0, *b)* 2, *c)* 2, *d)* 2, *e)* 0, *f)* 0, *g)* 0.
309. *a)* 5, *b)* 6, *c)* 1, *d)* 3, *e)* 1, *f)* 0.
310. $n=5r$, $k=5s$, így $n+k=5(r+s)$, $n-k=5(r-s)$.
311. $20a+9b=14a+6a+9b=14a+3(2a+3b)$.
312. $3a-5b-2c=3(a+2b+3c)-11(b+c)$.
313. $b(2b+3)+a(4b+3)+19a^2=2b^2+3b+4ab+3a+19a^2=$
$=3(a+b)+2(a+b)^2+17a^2$.
314. $12a(a-b)+3b(5+b)-4a=12a^2-12ab+15b+3b^3-4a=$
$=3(2a-b)^2-2(2a-b)+13b$.
315. $5a-4b=17k$ és $9a+3b=17r$. Az első egyenlőség -2-szeresét a másodikhoz hozzáadva azt kapjuk: $11b-a=17(r-2k)$.
316. $2a+b=13s$ és $5a-4b=13r$. Az első egyenlet -2-szeresét adjuk hozzá a második egyenlethez: $a-6b=13(r-2s)$.
317.

	3-mal	4-gyel	5-tel	9-cel
7	1	3	2	7
14	2	2	4	5
216	0	0	1	0
1 848	0	0	3	3
2 005	1	1	0	7
13 367	2	3	2	2
521 966	2	2	1	2
123 456	0	0	1	3
654 321	0	1	1	3

318. A 2-vel való osztási maradék csak 1 lehet, így az első számjegy 1-es. Ekkor a 6-tal való osztási maradék 5 vagy 3 vagy 1. Ha 5 vagy 3, akkor hamar ellentmondásra jutunk. Ha a 6-tal való osztási maradék 1, akkor az 5-tel való

III

osztási maradék is 1, így a 4-gyel való osztási maradék 3, s ezzel a 3-mal való osztási maradék 1. A keresett szám: 11 311.

319. A bizonyításokat az olvasóra bízzuk.

320. $\overline{abc} - \overline{cba} = 99a - 99b = 99(a - b)$.

321. *a)* $a = 4$,
b) $b = 0, 3, 6, 9$,
c) $b = 0, 3, 6, 9$,
d) $y = 0{,}5$; $x =$ tetszőleges,
e) $y = 0$, $x = 0, 3, 6, 9$, vagy $y = 2$, $x = 1, 4, 7$, vagy
$y = 4$, $x = 2, 5, 8$, vagy $y = 6$, $x = 0, 3, 6, 9$, vagy
$y = 8$, $x = 1, 4, 7$.
f) $y = 0$, $x = 2, 5, 8$, vagy $y = 5$, $x = 0, 3, 6, 9$,
g) $y = 0$, $x = 2, 5, 8$,
h) $y = 5$, $x = 8$ vagy $y = 0$, $x = 4$.

322. Igen: 36 720.

323. $X = 9$ vagy $X = 0$.

324. Három egymást követő egész szám között van páros és valamelyik 3-mal is osztható.

325. Négy egymást követő pozitív egész között biztosan van 3-mal osztható és 2 db páros. E két páros szám közül az egyik nemcsak 2-vel, de 4-gyel is osztható, így a szorzat biztosan osztható $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$-gyel.

326. $(2k + 1)^2 - (2r + 1)^2 = 4k(k + 1) - 4r(r + 1)$. Mivel k és $k + 1$ valamelyike páros, így $4k(k + 1)$ és $4r(r + 1)$ is biztosan osztható 8-cal.

327. *a)* Lehet; pl.:$3 + 6 + 9$,
b) lehet, pl.: $3 + 5 + 7$,
c) nem lehetséges,
d) lehet, pl.: $4 + 4 + 4$.

328. *a)* Lehet, pl.: $4 + 8 + 12 + 16$,
b) nem lehetséges,
c) lehet, pl.: $4 + 8 + 5 + 11$,
d) lehet, pl.: $4 + 5 + 5 + 10$,
e) lehet, pl.: $5 + 9 + 13 + 17$.

329. *a)* 1, *b)* 2, *c)* 5, *d)* 6, *e)* 1, *f)* 2, *g)* 1, *h)* 5.

330. *a)* 0, *b)* 9, *c)* 6, *d)* 7, *e)* 1, *f)* 8, *g)* 2, *h)* 8.

331. Ha a p egész szám nem osztható 3-mal, akkor $p = 3k + 1$ vagy $p = 3k + 2$. Ezek négyzete: $(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$ vagy $9k^2 + 12k + 4$. Tehát bármely 3-mal nem osztható szám négyzete 3-mal osztva 1 maradékot ad. Ebből már következik a feladat állítása.

332. $n^4 - 1 = (n - 1)(n + 1)\left(n^2 + 1\right)$. Ha n nem osztható 5-tel, akkor 1, 2, 3, vagy 4 maradékot ad 5-tel osztva. Ha 1-et, akkor $n - 1$, ha 4-et, akkor $n + 1$ osztható 5-tel. Ha 2-t vagy 3-t ad 5-tel osztva maradékul, akkor $n^2 + 1$ osztható 5-tel.

333. Azt kell megmutatni hogy

$$nkm(n - k)(n + k)(n - m)(n + m)(k - m)(k + m)$$

3-mal, 8-cal és 5-tel is osztható.

Ha n, k, m valamelyike osztható 3-mal, akkor a szorzat is. Ha egyik sem osztható 3-mal, akkor n, k, m közül kell lennie kettőnek, melyek 3-mal osztva ugyanazt a maradékot adják, így ezek különbsége osztható 3-mal.
Ha n, k, m mindegyike páros, akkor a szorzat osztható 8-cal. Ha két páros van közöttük, akkor ezek összege is, különbsége is osztható 2-vel, így a szorzat osztható 8-cal. Ha egy páros van közöttük, akkor a két páratlan összege és különbsége is osztható 2-vel, így a szorzat megint osztható 8-cal. Ha mindhárom páratlan, akkor bármely kettő összege és különbsége is páros, tehát a szorzat osztható 8-cal.
Ha n, k, m valamelyike osztható 5-tel, akkor a szorzat is osztható 5-tel. Ha egyik sem, de van közöttük kettő, melyek 5-tel osztva ugyanazt a maradékot adják, ekkor ezek különbsége osztható 5-tel. Ha mind a három más-más maradékot ad 5-tel osztva, akkor ezek a maradékok 1, 2, 3 vagy 4. Ha 1, 2, 3, akkor $2 + 3$ osztható 5-tel, ha 1, 2, 4, akkor$1 + 4$ osztható 5-tel, ha 1, 3, 4, akkor $1 + 4$, ha 2, 3, 4, akkor $2 + 3$ osztható 5-tel.

334. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 számokat négyzetre emelve azt kapjuk, hogy 2-re, 3-ra, 7-re és 8-ra nem végződhet négyzetszám.

335. *a)* 6, *b)* 1, *c)* 6, *d)* 5, *e)* 6, *f)* 1, *g)* 8, *h)* 9.

336. *a)* 7, *b)* 7, *c)* 8, *d)* 8, *e)* 5.

337. Nem lehet, mert az első tag 1-re, a második 4-re, a harmadik 7-re, tehát az összeg 2-re végződik.

338. Az egyes tagok utolsó számjegye: 1, 4, 7, 6, 5, 6, így az összeg utolsó számjegye 0.

339. Minden természetes szám $n = 8k$ vagy $8k \pm 1$ vagy $8k \pm 2$ vagy $8k \pm 3$ vagy $8k + 4$. Ezek négyzete 8-cal osztva rendre 0, 1, 4, 1, vagy 0 maradékot ad, tehát a maradék minden esetben négyzetszám.

340. Alkalmazzuk az előző feladatban ismertetett gondolatmenetet!

341. Igen. Alkalmazzuk a 35. feladatban ismertetett gondolatmenetet!

342. Két megoldás van: 342. ábra.

343. *a)* $n = 2k$, *b)* $n = 3k + 2$,
c) $n = 4k + 2$, *d)* $n = 5k + 4$,
e) $n = 1$, *f)* $n = 2$ vagy 3,
g) $n = 5$, *h)* $n = 1$, 9 vagy 25,
i) $n = 1$, *j)* $n = 36$,
k) $n = 16$, *l)* nincs megoldás,
m) $n = 4$ vagy 44, *n)* nincs megodás,
o) $n = 1$, 6 vagy 13,
p) $n = 2$ vagy 8, *q)* $n = 4$, 5, 10 vagy 17,
r) $n = 4$, *s)* $n = 2$, vagy 4.

342.

	^{1}9	^{2}1
	^{3}7	2
^{4}2		3
^{5}7	2	6

	^{1}9	^{2}1
	^{3}7	2
^{4}2		3
^{5}7	8	6

III

Számjegyes feladatok

344. $17+71=26+62=35+53=44+44=88$.
345. $91-19=72$.
346. $102+201=303$.
347. a és b olyan pozitív számjegyek, melyekre $a+b=8$.
348. $\overline{ab}+a+b=81$, azaz $11a+2b=81$. A jobb oldal páros, így a páratlan, és nyilván $6<a<8$. Így a megoldás $72+7+2=81$.
349. $\dfrac{\overline{ab}+\overline{ba}}{2}=\overline{cc}$, ahonnan $a+b=2c$. A feltételek alapján $\overline{ab}=93$, 84, 75, 95, 86, 97.
350. $\overline{abc}\cdot 9=\overline{dabc}=1000d+\overline{abc}$, ahonnan $8\cdot\overline{abc}=1000d$, azaz $\overline{abc}=125d$.
351. $\overline{19ab}-\overline{19ba}=63$, azaz $a-b=7$. A feltételekből csak $a=9$, $b=2$ lehetséges. Tehát 71 éves volt.
352. $\dfrac{\overline{ab}+\overline{axb}}{2}=\overline{ba}$. Csak $a=1$ lehetséges, ellenkező esetben ugyanis a jobb oldal háromjegyű lenne. Részletesen kiírva $108+10x=18b$, ahonnan látható, hogy x-nek 9-cel oszthatónak kell lennie. $x=9$ esetén b-re kétjegyű számot kapunk, így csak $x=0$ lehetséges. Tehát az egyedüli megoldás: $\dfrac{16+106}{2}=61$.
353. *a)* $101\cdot 11=1111$,
b) $25^2=625$,
c) Csak $b=2$ lehetséges, azaz $\overline{a2}^2=\overline{acc}$, ahonnan $12^2=144$,
d) Csak $p=2$ lehetséges, ahonnan $222^2=49\,284$,
e) $111a+222b=1110b$, ahonnan $a=8b$, tehát $a=8$, $b=1$;
$811+181+118=1110$,
f) A bal oldal legfeljebb 72, így $a\le 3$. Az $a=1, 2, 3$ eseteket kipróbálva $a=2$, $b=6$,
g) $1111a+111b+11c+d=2005$. Innen csak $a=1$ és $b=8$ lehetséges. Innen pedig $\overline{abcd}=1806$.
354. $111a+222b=777$, azaz $a+2b=7$. Három megoldást kapunk:
$133+313+331=777$, $322+232+223=777$, $511+151+115=777$.
355. 6 db. $1010a+101b=101\cdot(10a+b)$. Tehát $\overline{ab}=15, 30, 45, 60, 75, 90$.
356. $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{cd}}+\dfrac{101\,(10c+d)}{101\,(10a+b)}=\dfrac{10a+b}{10c+d}+\dfrac{10c+d}{10a+b}\ge 2$.
357. Részletes kiírás után a $4x^2-9xy+5y^2=0$ másodfokú egyenletre jutunk. Innen $x\ne y$ miatt $4x=5y$, azaz $x=5$, $y=4$. $\dfrac{54}{45}=2-\dfrac{4}{5}$.
358. $\overline{ab}+1=2\cdot\overline{ba}$. Látható, hogy $b<5$ és páratlan. $b=1$ esetén a-ra nem adódik egész szám. $b=3$ esetén $a=7$ adódik. $73+1=2\cdot 37$.
359. $3\cdot\overline{abc}+49=\overline{cba}$, ahonnan $299a+20b+49=97c$. Innen $a=2$ vagy $a=1$. Ha $a=2$, akkor $20b=97c-647$.

Ekkor a jobb oldalnak 0-ra kell végződnie, azaz $c = 1$, ami nyilván lehetetlen.
Ha $a = 1$, akkor $20b = 97c - 348$.
A jobb oldalnak most is 0-ra kell végződnie, azaz $c = 4$, és ekkor $b = 2$.
$\overline{abc} = 124$. $3 \cdot 124 + 49 = 421$.

360. $\overline{19ab} + 1 + 9 + a + b = 2005$, ahonnan $\overline{19ab} = 1979$.

361. $\overline{19ab} + 1 + 81 + a^2 + b^2 = 2006$, ahonnan $10a + b + a^2 + b^2 = 24$. Innen csak $a = 0$, $a = 1$ vagy $a = 2$ lehet. De $a = 0$ és $a = 1$ esetén b-re nem adódik egész szám, ha pedig $a = 2$, akkor $b = 0$. $1920 + 1 + 81 + 4 = 2006$.

362. A feltételekből $2 \cdot \overline{AB} = 60 + \overline{BA}$, ahonnan $19A = 60 + 8B$. A bal oldalnak 4-gyel oszthatónak kell lennie, így csak $A = 4$ lehet, s ezzel $B = 2$. Tehát a sebesség: 84 km/h.

363. Ha $\overline{abc} - a - b - c = 9(11a + b)$, akkor látszik, hogy 9-cel osztható. Mivel jegyei egyenlők, ezért e szám vagy 666, vagy 333, vagy 99.
Ha $9(11a + b) = 666$, azaz $11a + b = 74$, akkor $a = 6$, $b = 8$, így a keresett szám $\overline{68c}$. De $\overline{68c} + 6 + 8 + c = 694 + 2c$ jegyei nem lehetnek azonosak.
Ha $9(11a + b) = 333$, azaz $11a + b = 37$, akkor $a = 3$, $b = 4$, tehát a keresett szám: $\overline{34c}$. De $\overline{34c} + 3 + 4 + c = 347 + 2c$ szintén nem lehet olyan, melynek jegyei egyenlők.
Ha $9(11a + b) = 99$, azaz $11a + b = 11$, akkor $a = 1$, $b = 0$, tehát a keresett szám: $\overline{10c}$. $\overline{10c} + 1 + 0 + c = 101 + 2c$. Ez akkor és csak akkor lesz olyan, melynek számjegyei egyenlők, ha 111, és ekkor $c = 5$.
Tehát a keresett szám: 105.

$105 + 1 + 0 + 5 = 111$ és $105 - 1 - 0 - 5 = 99$.

364. A keresett szám csak 2- vagy 3-jegyű lehet. Ha kétjegyű, akkor $10a + b = 11(a + b)$, ahonnan $-10b = a$, ami lehetetlen. Ha a szám háromjegyű, akkor $100a + 10b + c = 11(a + b + c)$, azaz $89a = 10c + b$. Innen csak $a = 1$, $c = 8$, $b = 9$.

$198 = 11(1 + 9 + 8)$.

Prímszámok. A számelmélet alaptétele

365. 2, 5, 7, 41, 127, 361, 1237, 1997, 1999, 2003, 7741.

366. Csak $p = 3$ lehetséges. Ha ugyanis $p \neq 3$, akkor $p = 3k + 1$ vagy $p = 3k + 2$ alakú. Első esetben $p + 14$, a második esetben $p + 4$ osztható 3-mal.

367. Ha $k = ab$, ahol $a > 1$, $b > 1$, akkor $2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1^b$ és ez osztható a $2^a - 1 > 1$ természetes számmal.

368. Egy prímszám 30-cal osztva nem adhat 2 maradékot (kivéve a $p = 2$-t), mert akkor páros lenne, de nem lehet a maradék 3 sem (kivéve a $p = 3$-t), mert akkor p osztható lenne 3-mal. Így tovább haladva azt kapjuk, hogy egy p prímet 30-cal osztva a maradék csak az 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 természetes számok valamelyike lehet.

III

369. $p(10)=4$, $p(20)=8$, $p(45)=14$, $p(50)=15$, $p(73)=20$.

370. $\frac{p(100)}{100}=\frac{26}{100}>\frac{1}{4}$.

371. $p+3$ lehet $(2+3=5)$, $p+11$ lehet $(2+11=13)$,
$p+13$ nem lehet, $p+6$ lehet $(5+6=11)$.

372. Nincs ilyen prímszám. $p=2$-re $4p^4+1=65$. Ha $p\neq 5$ prím, akkor utolsó jegye 1, 3, 7 vagy 9. De az ilyen számok negyedik hatványa mindig 1-re végződik, így $4p^4+1$-nek 5-re kell végződnie. Végül, ha $p=5$, akkor $4p^4+1=2501=41\cdot 61$.

373. Ha $p>3$, akkor $p=3k+1$ vagy $p=3k+2$. Ezek négyzete 3-mal osztva mindig 1 maradékot ad:

$$(3k+1)^2=9k^2+6k+1,\quad (3k+2)^2=9k^2+12k+4.$$

374. Csak $p=3$ lehetséges. Ha ugyanis $p\neq 3$, akkor négyzete 3-mal osztva 1 maradékot ad (lásd előző feladat). Így $8p^2+1=8\cdot(3k+1)+1=24k+9$, ami osztható 3-mal.

375. $p^2-1=(p-1)(p+1)$. Azt kell bizonyítanunk, hogy ez 3-mal és 8-cal is osztható.
A $p-1$, p, $p+1$ számok szomszédos számok, így valamelyikük osztható 3-mal. De az nem lehet a p, így vagy $p-1$ vagy $p+1$ osztható 3-mal.
A $p-1$ és $p+1$ számok mindegyike páros, a páros számok sorozatában szomszédos számok. Mivel minden második páros szám nem csak 2-vel, de 4-gyel is osztható, így $(p-1)(p+1)$ osztható 8-cal.

376. Ha három prím összege páros, akkor valamelyikük a 2. Legyen $p=2$. Ekkor $q+r=20$. Ez csak a 3, 17 vagy 7, 13 prímekre teljesül. Tehát a keresett prímek: 2, 3, 17 vagy 2, 7, 13.

377. Valamelyik prímnek párosnak kell lennie. Legyen $p=2$. Ekkor $q^2+r^2=130$. Egy prímszám négyzete 3-mal osztva csak 1 maradékot adhat (lásd 69. feladat), így az egyenlőség bal oldala 3-mal osztva 2, míg a jobb oldala 3-mal osztva 1 maradékot ad. Ez lehetetlen, így q és r valamelyike csak 3 lehet. Ha $q=3$, akkor $r^2=121$. Tehát a keresett prímek: 2, 3, 11.

378. Ha p és $q=p+2$ 3-nál nagyobb ikerprímek, akkor a köztük levő $p+1$ szám biztosan páros és 3-mal is osztható, azaz $6k$ alakú. Ezek szerint $p=6k-1$ és $q=6k+1$, vagyis $p+q=12k$.

379. Azt kell megmutatni, hogy $p^2+(p+2)^2$ nem lehet semmilyen egész számnak négyzete.

$$p^2+(p+2)^2=2p^2+4p+4.$$

A kapott egyenlőség jobb oldala páros, de 4-gyel nem osztható, így nem lehet négyzetszám.

380. $p=2$-re és $p=3$-ra $2p-1$ és $2p+1$ ikerprímek. Egyéb ilyen prím nem lehetséges. Ha ugyanis p 3-mal osztva 1 maradékot ad, akkor $2p+1$ osztható 3-mal, ha pedig p 3-mal osztva 2 maradékot ad, akkor $2p-1$ osztható 3-mal.

381. Bármely 5-nél nagyobb ikerprímpár nagyobbik tagja csak $6k+1$ alakú lehet. Ennek 4-szereséből 1-et levonva: $4(6k+1)-1=24k+3$, ami osztható 3-mal.

382. Legyenek p, $q = p + 2$, $r = p + 4$ hármasiker prímek. Ha p 3-mal osztva 1 maradékot ad, akkor q osztható 3-mal. Ha p 3-mal osztva 2 maradékot ad, akkor r osztható 3-mal.

383. Nem lehetséges. A 2004-nél kisebb legnagyobb prímszám a 2003. Ez valamelyik csoportban lenne, így e csoportban levő számok prímtényezős felbontásában szerepelne a 2003, de a másik csoport szorzatában nem.

384. Csak $p = 5$ jöhet szóba. Minden más prímszám negyedik hatványa 1-re végződik, így ehhez 4-et hozzáadva 5-tel osztható számot kapunk. De $5^4 + 4 = 629 = 17 \cdot 37$.

385. $p = 2$ esetén $p^2 + p + 1 = 7$, $p^2 - p + 1 = 3$. $p = 3$ esetén $p^2 + p + 1 = 13$, $p^2 - p + 1 = 7$. Ha p 3-mal osztva 1 maradékot ad, akkor $p^2 + p + 1$ osztható 3-mal, ha 3-mal osztva 2 maradékot ad, akkor $p^2 - p + 1$ osztható 3-mal. Tehát csak $p = 2$ vagy $p = 3$ lehet. Ha $p = 2$, akkor

$1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = 31$ prímszám,

ha $p = 3$, akkor

$1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = 121$ négyzetszám.

386. 1, 40, 3, 38, 5, 36, 7, 34, …, 39, 2.

387. Legyenek p és $q = p + 2$ ikerprímek. Ekkor az

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, p - 1$

számok az alábbi módon rakhatók sorba a feltételeknek megfelelően:

$1,\ p - 1,\ 3,\ p - 3,\ 5,\ p - 5, \ldots\ p - 2,\ 2.$

388. Ha $4p + 1 = k^3$, akkor k csak páratlan lehet, azaz
$4p + 1 = (2n + 1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1$, ahonnan $2p = n(4n^2 + 6n + 3)$.
Ez csak akkor teljesülhet, ha $n = 1$, és $4n^2 + 6n + 3$ egy prímszám kétszerese (ez nem teljesül), vagy, ha $n = 2$ és ezzel $4n^2 + 6n + 3$ egy prímszámmal egyenlő. Ez pedig: 31. Tehát $p = 31$, és ekkor $4 \cdot 31 + 1 = 125 = 5^3$.

389. Ha $6p + 1 = k^3$, akkor k csak páratlan lehet, azaz $6p + 1 = (2n + 1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1$, ahonnan $3p = n(4n^2 + 6n + 3)$.
Ez csak akkor teljesülhet, ha $n = 1$, és $4n^2 + 6n + 3$ egy prímszám háromszorosa (ez nem teljesül), vagy, ha $n = 3$ és ezzel $4n^2 + 6n + 3$ egy prímszámmal egyenlő, de ez sem teljesül.

390. Ha $p + q + r$ három prímszám összege osztható 20-szal, akkor valamelyikük páros, azaz 2. Legyen $p = 2$. Ekkor $r + q = \ldots 8$ és $r - q = \ldots 8$. Ez csak úgy lehetséges, hogy r 3-ra, q pedig 5-re végződik, azaz $q = 5$. Így a feltételeknek eleget tevő prímszámok:

2, 5, 13 vagy 2, 5, 53 vagy 2, 5, 73.

391. A keresett szám első jegye 2 és számjegyeinek összege legfeljebb 7. Így a szóbajöhető számok: 2111 vagy 2311, ezek pedig valóban prímek.

392. $\dfrac{p^2 - 1}{p - 1} = p + 1$ ez pedig csak $p = 2$ esetén lesz prímszám.

III

393. $20^n-6\cdot 4^{n+1}+5^n-24=5^n(4^n+1)-24(4^n+1)=(4^n+1)(5^n-24)=p$ prímszám. Ez csak úgy lehetséges, ha $5^n-24=1$, azaz $n=2$ és ugyanakkor $4^n+1=$prímszám. Ez pedig teljesül, mert $4^2+1=17$ valóban prím.

394. $p\neq 2$. $p=3$-ra $8^3+3^2=521$ prímszám. Ha $p>3$, akkor négyzete 3-mal osztva 1 maradékot ad. $8^p=(9-1)^p=9K-1$. Tehát $8^p+p^2=$ $=9K-1+3N+1=3M$, így nem lehet prím. Tehát a kifejezés csak $p=3$ esetén lesz prímszám.

395. A feltételek szerint $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{2}{q}$,

ahonnan

$$2pr-qr-pq=0,$$

$$pr-\frac{1}{2}qr-\frac{1}{2}pq=0,$$

$$\left(p-\frac{q}{2}\right)\left(r-\frac{q}{2}\right)=\frac{q^2}{4},\quad \text{ahonnan}\quad (2p-q)(2r-q)=q^2.$$

Innen vagy $2p-q=1$ és $2r-q=q^2$, de ekkor $r=pq$ lenne, ami kizárt, hiszen p, q, r prímek, vagy $2p-q=q$ és $2r-q=q$, ahonnan $p=q=r$, ami szintén nem lehetséges.
Tehát nincsenek a feltételeknek eleget tevő prímszámok.

396. $\sqrt{\dfrac{n+p}{n-p}}$ akkor és csak akkor lesz egész, ha a négyzetgyök alatt négyzetszám szerepel.

$$\frac{n+p}{n-p}=\frac{n-p+2p}{n-p}=1+\frac{2p}{n-p}.$$

Így $n-p=1,\ 2,\ p,\ 2p,\ -1,\ -2,\ -p,\ -2p$.
Mindent figyelembe véve csak $\dfrac{n+p}{n-p}=1+p$ vagy $\dfrac{n+p}{n-p}=1+2p$ jöhet számításba.
Ha $1+p=k^2$, akkor $p=(k-1)(k+1)$, ahonnan $k=2$, $p=3$, és ekkor $n=5$.
A másik esetben nem kapunk megoldást, így a megadott kifejezés csak akkor lesz egész, ha $p=3$ és $n=5$.

397. Azt kell megmutatnunk, hogy ha három db 5-nél nagyobb prímszám egy számtani sorozat egymást követő elemei, akkor a differencia osztható 6-tal. Hogy a differencia páros, az nyilvánvaló, így azt kell bizonyítani, hogy osztható 3-mal. Legyenek e prímek

$$p,\quad p+d,\quad p+2d.$$

Ha p 3-mal osztva 1 maradékot ad és d is 3-mal osztva 1 maradékot ad, akkor $p+2d$ osztható 3-mal, ha d 3-mal osztva 2 maradékot ad, akkor $p+d$ osztható 3-mal.

Ha p 3-mal osztva 2 maradékot ad és d 3-mal osztva 1-et, akkor $p+d$ osztható 3-mal, ha d 3-mal osztva 2-t ad maradékul, akkor pedig $p+d$ osztható 3-mal. Tehát d-nek 3-mal oszthatónak kell lennie (ilyen sorozat pl.: 5, 1, 17).

398. A $(p-3)\cdot(p-2)\cdot(p-1)\cdot p\cdot(p+1)$ szorzatról kell belátni, hogy osztható 5-tel, 3-mal és 16-tal. Öt db egymás utáni szám között biztosan van 5-tel, illetve 3-mal osztható, tehát a szorzat 15-tel biztosan osztható.

III

Mivel p prím, ezért $(p-3)$, $(p-1)$ és $(p+1)$, biztosan párosak, s mivel a páros számok sorozatának ők egymást követő elemei, ezért valamelyikük biztosan osztható 4-gyel is, vagyis szorzatuk osztható 16-tal.

399. Mivel bármely 5-nél nem kisebb prímszám négyzete 3-mal és 4-gyel osztva is 1 maradékot ad, ezért 12 db ilyen szám összege osztható 12-vel.

400. A három számjegy nem lehet azonos, mert akkor a szám osztható lenne 3-mal. Így a szóba jöhető számok: 449, 949, 499. De $949 = 73\cdot 13$, míg 449 és 499 prímek. Így a keresett eredmény: 1805 vagy 2005.

401. Az összeg páratlan, így p és q valamelyike 2 kell, hogy legyen (pl. $q=2$). Ekkor

$$p(1+p+p^2) = 2379 = 3\cdot 13\cdot 61 = 13\cdot(1+13+13^2).$$

402. Szükséges feltétel, hogy a diszkrimináns négyzetszám legyen: $n^2-4p=k^2$, azaz

$$(n-k)(n+k) = 4p^2 = 1\cdot 4p = 2\cdot 2p = 4\cdot p = p\cdot 4.$$

Az egyes eseteket megvizsgálva arra jutunk, hogy csak $n-k=2$ és $n+k=2p$ lehetséges, ahonnan $n=1+p$. Innen pedig csak $p=2$ és $n=3$ jöhet szóba. Az $x^2-3x+2=0$ egyenlet gyökei valóban egész számok.

403. Az $m_a+m_b=m_c$ egyenlet így is írható: $\frac{2T}{a}+\frac{2T}{b}=\frac{2T}{c}$, ahonnan $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{p}$, azaz $ab-pa-pb=0$, vagy másképpen $(a-p)(b-p)=p^2$.

Ekkor

vagy $a-p=1$ és $b-p=p^2$, azaz $a=p+1$ és $b=p^2+p$;

vagy $a-p=p$ és $b-p=p$, azaz $a=2p$ és $b=2p$.

De az első eset nem lehetséges a háromszög-egyenlőtlenség miatt, tehát a háromszög oldalai: p, $2p$, $2p$.

404. p és q valamelyike csak páros, azaz 2 lehet. Legyen $p=2$, ekkor 2^q+q^2 prímszám. Ha $q\neq 3$, akkor q^2 3-mal osztva 1 maradékot ad, míg $2^q=(3-1)^q=3K-1$. Tehát 2^q+q^2 nem lehet prím. Ha $q=3$, akkor $2^3+3^2=17$ prímszám.

405. Bármely 5-nél nagyobb prím utolsó számjegye 4-féle lehet: 1, 3, 7 vagy 9. Az utolsó előtti számjegy 10-féleképpen, az az előtti számjegy ugyancsak 10-féleképpen alakulhat. Így, ha vesszük p-nek 401 db különböző olyan hatványát, melyek legalább négyjegyűek, azok között kell lennie kettő olyannak, melyek utolsó 3 számjegye megegyezik. Legyenek ezek p^k és p^n $(k>n)$. Ezek különbségére

$$p^k-p^n=K\cdot 1000,$$

$$p^n\cdot(p^{k-n}-1)=K\cdot 1000.$$

Ezek szerint 1000 osztója a bal oldalnak. De p és 1000 relatív prímek, így 1000 osztója $p^{k-n}-1$-nek, azaz $p^{k-n}=N\cdot 1000+1$.

406. Ha van racionális gyök, akkor a diszkrimináns négyzetszám:

$q^2+4pr=k^2$.

Mivel p, q, r 2-nél nagyobb prímek, ezért mindegyikük és így k is páratlan:

$(2r+1)^2+4\,(2s+1)(2n+1)=(2d+1)^2$.

Mivel egy páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1 maradékot ad, ezért a jobb oldal 8-cal osztva 1 maradékot ad, míg a bal oldal 8-cal osztva 5 maradékot ad.

407. *a)* $340=2\cdot 5\cdot 17$, *b)* $2222=2\cdot 11\cdot 101$, *c)* $6912=2^8\cdot 3^3$,
d) $1232=2^4\cdot 7\cdot 11$, *e)* $3400=2^3\cdot 5^2\cdot 17$, *f)* $4550=2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 13$,
g) $2004=2^2\cdot 3\cdot 167$, *h)* $2005=5\cdot 401$, *i)* $1234=2\cdot 617$,
j) $8505=3^5\cdot 5\cdot 7$, *k)* $12\,465=3^2\cdot 5\cdot 277$, *l)* $32\,316=2^2\cdot 3\cdot 2693$.

408. $10!=2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$.

409. 8-cal akkor osztható, ha a prímtényezős felbontásban 2 hatványkitevője legalább 3, 9-cel akkor osztható, ha a prímtényezős felbontásban 3 hatványkitevője legalább 2.

410. Egy természetes szám akkor és csak akkor négyzetszám, ha prímtényezős felbontásában szereplő valamennyi prím hatványkitevője páros.

411. Nem, pl.: 9 osztója 36-nak, de 9 nem osztója 6-nak.

412. $A\cdot B=2^7\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^4\cdot 11^4\cdot 13$.

413. $4410=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2$, így $2\cdot 5\cdot 4410$ négyzetszám. $\dfrac{4410}{10}=441=21^2$.

414. $360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$. Ezt $3\cdot 5^2=75$-tel szorozva köbszámot kapunk. $2^3\cdot 360$.

415. Igaz. A keresztrejtvényben szereplő számjegyek összege 19.

416. Igaz. A keresztrejtvényben szereplő számjegyek összege 29.

417. A keresztrejtvényben szereplő számjegyek szorzatának prímtényezős felbontása:

$2^2\cdot 3^5\cdot 5^3\cdot 7^3$.

415.

	^{1}1	^{2}7
^{3}4		4
^{4}1	1	1

416.

^{1}1	1	^{2}3
6		6
^{3}9	3	

417.

	^{1}2	^{2}5	^{3}7
^{4}7		^{5}5	3
^{6}1	^{7}6		3
^{8}5	3	3	7

Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, osztók száma

418. *a)* 5, *b)* 25, *c)* 12, *d)* 128, *e)* 12, *f)* 81, *g)* 17, *h)* 120, *i)* 16, *j)* 75, *k)* 14, *l)* 1.
419. *a)* pq^2, *b)* pqr, *c)* l^3m, *d)* xyq, *e)* x^7y, *f)* km^3s^2.
420. *a)* 99, *b)* 90, *c)* 2178, *d)* 10 890, *e)* $2^2\cdot 3^4\cdot 5\cdot 11^2\cdot 17$, *f)* 21 780, *g)* 1, *h)* 1, *i)* 9.
421. 1. hamis, 2. hamis, 3. igaz, 4. igaz, 5. hamis, 6. hamis , 7. igaz, 8. hamis, 9. hamis, 10. igaz.
422. A megadott számok közül az alábbiak relatív prímpárok:

5; 9,	5; 21,	5; 24,	5; 42,	5; 72,	5; 102,
9; 10,	9; 35,	9; 55,	9; 215,	10; 21,	15;24,
21; 55,	21; 215,	24; 35,	24; 55,	24, 215,	35; 72,
35; 102,	42; 55,	42; 215,	55; 72,	55; 102,	72; 215,
102; 215.					

423. $(a+b;\ a-b)=2$ vagy $(a+b;\ a-b)=1$.
424. Az állítások bizonyítását megtehetjük pl. indirekt módon.
a) Legyen $(a;\ a+b)=d>1$. Ekkor $a=kd$, $a+b=rd$, így $kd+b=rd$, ahonnan látszik, hogy b is osztható d-vel, tehát nem lehetnek a és b relatív prímek.
b) Legyen $(a;b^2)=d>1$ és legyen p a d-nek egy prímosztója. Ekkor a is és b is osztható p-vel ami ellentmond annak, hogy $(a;b)=1$.
c) Legyen $(a+b;b^2)=d>1$ és legyen p a d-nek egy prímosztója. Ekkor p osztója b-nek és p osztója $a+b$-nek, amiből p osztója a-nak is következne.
d) Legyen $(b;\ b-a)=d>1$. Ekkor d osztója b-nek és d osztója $b-a$-nak, tehát d osztója a-nak is. Ellentmondás.
e) Legyen $(a^2;a-b^2)=d>1$, és legyen p a d-nek egy prímosztója. Ekkor p osztója a-nak, p osztója $a-b^2$-nek, tehát p osztója b-nek is, így a és b nem lehetnek relatív prímek.
425. *a)* $n+1=kd$ és $n-1=rd$. A két egyenlet különbségéből $2=d(k-r)$, ahonnan $d>1$ miatt csak $d=2$ lehet. Tehát a tört csak 2-vel lehet egyszerűsíthető.
b) Az előzőek mintájára a tört csak 5-tel lehet egyszerűsíthető.
c) A tört 5-tel egyszerűsíthető.
d) A tört 2-vel, vagy 7-tel, vagy 14-gyel egyszerűsíthető.
426. A feltételek szerint n is és k is 4-gyel nem osztható páros számok: $n=4r+2$, $k=4s+2$, tehát $n+k=4r+4k+4=4(r+k+1)$, ahonnan $(n+k;\ 4)=4$.
427. Tegyük fel, hogy $(2^n+1;\ 2^n-1)=d>1$; d csak páratlan szám lehet. Ekkor $2^n+1=kd$, $2^n-1=rd$, ahonnan $2=d\,(k-r)$, azaz $d=2$, ami lehetetlen.
428. Tegyük fel, hogy $\left(2^n+1;\ 4^n+1\right)=d>1$, azaz $2^n+1=kd$, $4^n+1=rd$; d csak páratlan szám lehet. A két egyenletből $4^n-2^n=2^n\left(2^n-1\right)=d\,(r-k)$. Mivel 2^n és 2^n-1 relatív prímek, ezért d osztója 2^n-1-nek is, ami lehetetlen (lásd előző feladat).

III

429. $\overline{ab} = 9h + m = 5m + h$, ahol $h < 5$, tehát $2h = m$. Innen $h = 1$, $m = 2$ vagy $h = 2$, $m = 4$, vagy $h = 3$, $m = 6$ vagy $h = 4$, $m = 8$. A keresett számok: 11, 22, 33 vagy 44.
430. $\overline{abc} = 19p + q = 11q + p$, ahol $p < 11$, tehát $9p = 5q$. Innen $p = 5$, $q = 9$ vagy $p = 10$, $q = 18$. A keresett számok: 104, 208.
431. $3n - m = kd$ és $5n + 2m = rd$. Az első egyenlet kétszeresét a másodikhoz adva: $11n = d(2k + r)$; d osztója a bal oldalnak, de n-nel relatív prím, ellenkező esetben n és m nem lennének relatív prímek. Tehát d osztója 11-nek, azaz $d = 11$.
432. Ha a tört egyszerűsíthető $d > 1$-gyel, akkor $11m + 2k = rd$ és $18m + 5k = sd$. Az első egyenlet 5-szöröséből kivonva a második 2-szeresét: $19m = d(5r - 2s)$. Innen d osztója 19-nek, azaz $d = 19$ (d és m relatív prímek, mert ellenkező esetben d valamely prímosztója – pl. az első egyenletből – osztója lenne m-nek és k-nak is, ami nem lehetséges).
433. Ha a tört egyszerűsíthető $d > 1$-gyel, akkor $3n + 2 = dr$ és $4n + 1 = ds$. Az első egyenlet négyszereséből kivonva a második 3-szorosát: $5 = d(4r - 3s)$, ahonnan csak $d = 5$ lehet. Ezek szerint a számláló is és a nevező is 5-re vagy 0-ra végződik, tehát $3n$ utolsó jegye 3 vagy 8, míg $4n$ utolsó jegye 4 vagy 9. Mindebből következik, hogy n utolsó jegye 1 kell, hogy legyen. Tehát a tört egyszerűsíthető, ha $n = 10k + 1$.
434. Az előző feladat gondolatmenetét használva azt kapjuk, hogy $1 = d(3r - 2s)$, vagyis a tört nem egyszerűsíthető.
435. Indirekt tegyük fel, hogy valamely n-re $(f_n;\ f_{n+1}) = d > 1$. Ekkor $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$ is osztható d-vel, s így – az eljárást „lefelé” folytatva arra jutunk, hogy a sorozat minden f_n-t megelőző tagja is osztható d-vel, ami nyilván lehetetlen.
436. A sorozat első 10 tagja: 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, …. A kilencedik és a tizedik tag egyaránt osztható 3-mal.
437. A sorozat 16. és 17. tagja 3777, 7425; mindkettő osztható 3-mal.
438. *a)* 1, *b)* 25, *c)* 15, *d)* 1, *e)* 17, *f)* 1, *g)* $p \cdot q$, *h)* $k \cdot r^2$, *i)* $x \cdot y$.
439. 1. igaz, 2. hamis (pl.: $a = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $b = 5 \cdot 7 \cdot 11$, $c = 2 \cdot 11 \cdot 13$), 3. igaz, 4. igaz.
440. Legyenek p, q, r, s különböző prímek. A feltételeknek eleget tevő számok:

$$a = p \cdot q \cdot r, \quad b = p \cdot q \cdot s, \quad c = p \cdot r \cdot s, \quad d = q \cdot r \cdot s.$$

441. Legyenek $p_1, p_2, \ldots, p_k$ különböző prímek. A feltételeknek eleget tevő k db szám:

$$a_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-1},$$
$$a_2 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-2} \cdot p_k,$$
$$a_3 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-3} \cdot p_{k-1} \cdot p_k,$$
$$\vdots$$
$$a_k = p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k.$$

442. *a)* 56, *b)* 450, *c)* 1260, *d)* 41 412, *e)* 2850, *f)* 156 400, *g)* p^2qr, *h)* $a^3b^2cd^2$, *i)* $k^2l^2m^3n^5$, *j)* $x^3y^4p^2q^3s^2$, *k)* $x^9y^3p^2q$, *l)* $k^2m^4s^3tq^2$.

443.

1. hamis (pl.: $[n; n]=n$),
2. igaz,
3. hamis,
4. hamis (pl.: $[n; n]=n$),
5. hamis (pl.: $[6; 8]=24<48$),
6. igaz,
7. igaz,
8. igaz,
9. igaz,
10. igaz.

444. *a)* $k=5166$, *b)* $k=80$, *c)* $k=3, 6, 12, 24$ vagy 48, *d)* $k=60m+15$, *e)* $k=27, 54, 108, 135, 270$ vagy 540, *f)* $k=7$.

445. *a)* 13; 2002, 143; 182, 26; 1001, vagy 91; 286, *b)* 26; 4784 vagy 208; 598, *c)* 90; 8, *d)* p; pq^2.

446. *a)* $[(A; B); B]=B$, *b)* $2^4\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^4\cdot 11^2\cdot 13\cdot 19$, *c)* 45, *d)* $[(A; B; C); [A; D]]=[A; D]$, *e)* 45, *f)* 45.

447. $n-1$ osztható 2, 3, 4, 5, 6, 7-tel. $[2; 3; 4; 5; 6; 7]=420$, tehát $n=421$.

448. $n=7k+6=8l+7=9r+8$. Így $n+1$ osztható 7-tel, 8-cal és 9-cel. Ezek legkisebb többszöröse: $[7; 8; 9]=504$, tehát $n=503$.

449. $[12; 40]=120$ méter.

450. Mivel $60984=2^3\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11^2$, ezért – a feltételeket figyelembe véve – a keresett számok: $n=2^3\cdot 7\cdot 11^2=6776$, $k=3^2\cdot 7\cdot 11=693$, $m=2\cdot 3^2\cdot 7=126$.

451. A feltételekből következik, hogy az első, illetve a második szakaszon a sebességek aránya 3 : 4. Ezek szerint valamely k pozitív egész számra $3k$ és $4k$ legkisebb többszöröse 72. Mivel $4=2^2$ és $72=2^3\cdot 3^2$, így k prímtényezős alakjában kell lennie pontosan egy db 2-esnek és pontosan 1 db 3-asnak, azaz $k=2\cdot 3=6$. Tehát a sebességek: $v_1=24$, $v_2=18$. Ezzel az AB távolság: $1\cdot 24+4\cdot 18=96$ km.

452. A helyesen kitöltött keresztrejtvény $(3960; A)=180$, $[3960; A]=2^3\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11$.

452.

^{1}3	6	
5		^{2}1
^{3}7	5	6

453. A helyesen kitöltött keresztrejtvény

453.

	^{1}1	^{2}1	^{3}3
^{4}1		^{5}4	6
^{6}4	^{7}8	4	
^{8}4	1	4	7

454. *a)* 1, *b)* 3, *c)* 4, *d)* 6, *e)* 8, *f)* 6, *g)* 9, *h)* 4.

455. Mivel $p_1^{k_1}$ osztói:

$1;\ p_1;\ p_1^2;\ \ldots;\ p_1^{k_1} \Rightarrow d\left(p_1^{k_1}\right)=k_1+1.$

$p_2^{k_2}$ osztói: $1;\ p_2;\ p_2^2;\ \ldots;\ p_2^{k_2} \Rightarrow d\left(p_2^{k_2}\right)=k_2+1.$

Tehát $d\left(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\right)=(k_1+1)(k_2+1)$.

Ebből következik az állítás.

456. *a)* 4, *b)* 24, *c)* 11, *d)* 15, *e)* 5, *f)* 25.

457. Egy természetes szám osztóinak a száma akkor és csak akkor páratlan, ha a kérdéses szám négyzetszám.

458. Ha p, q, r különböző prímek, akkor

a) 4, 25, p^2; *b)* 8, pq, p^3; *c)* 72, p^3q^2, p^{11};

d) 128, p^3q, p^7;

e) 1536, p^4qr, p^9q; *f)* 120, p^{15}, p^3q^3.

459. *a)* 4, *b)* 16, *c)* 12, *d)* 24, *e)* 48, *f)* 60.
460. A kérdéses szám prímtényezős felbontásában a 2, 3 és 7 prímek (és csak ezek) szerepelhetnek. $N = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 = 4032$.
461. A felsoroltak közül négyzetszámok: *b)* $2^6 \cdot 5^4 \cdot 11^{10}$; *d)* $p^4 \cdot q^6 \cdot r^2$.
462. *a)* 1, *b)* 2, *c)* 30, *d)* 154, *e)* 14.
463. *a)* 3, *b)* 6889, *c)* 25, *d)* 100, *e)* $4p^2$.
464. Nem. Ha egy természetes számnak 5 db osztója van, akkor annak prímtényezős alakja csak p^4 lehet, vagyis csak egyetlen p prímosztója lehet. Ha viszont osztható 6-tal, akkor 2-vel és 3-mal is oszthatónak kell lennie.
465. $(x+1) \cdot 3 \cdot 2 = 24$, ahonnan $x = 3$ és $(y+1) \cdot 3 \cdot 4 = 60$, ahonnan $y = 4$. Így $A \cdot B = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^4$, $d(A \cdot B) = 450$.
466. $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Ha tehát egy szám osztható 105-tel, akkor legalább 3 különböző prímmel osztható. De ha egy számnak 6 osztója van, akkor annak prímtényezős alakja csak p^5 vagy $p^2 \cdot q$ lehet, vagyis legfeljebb 2 különböző prímosztója lehet.
467. Ha $d(d(N)) = 3$, akkor $d(N) = p^2$. Így N prímtényezős alakja $N = q^{p^2-1}$ vagy $N = q^{p-1} \cdot r^{p-1}$, vagyis N-nek csak két különböző prímosztója lehet. Ha viszont egy szám osztható 30-cal, akkor 2-vel, 3-mal és 5-tel is oszthatónak kell lennie.
468. A feltételek szerint

$$(x+1)(y+2)(z+1) - (x+1)(y+1)(z+1) = 15 \text{ és}$$

$$(x+3)(y+1)(z+1) - (x+1)(y+1)(z+1) = 24, \text{ ahonnan}$$

$$(x+1)(z+1) = 15 \quad \text{és} \quad (y+1)(z+1) = 12.$$

A két egyenlet megoldásait egybevetve azt kapjuk: $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$, vagyis a keresett szám: $N = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 10\,800$.

469. A megadott egyenlet $(x-n)(y-n) = n^2$ alakra hozható. Mivel n^2-et kell két pozitív egész szám szorzatára bontani, így az egyenletnek annyi megoldása van, ahány osztója van n^2-nek, vagyis a megoldások száma páratlan.
a) $p(2005) = d(2005^2) = d(5^2 \cdot 401^2) = 9$,
b) mivel 2005 nem négyzetszám, így nincs olyan n, melyre $p(n) = 2005$.
470.

a) 1 megoldás van: $n = 4$, $k = 3$;
b) 1 megoldás van: $n = 10$, $k = 8$;
c) 3 megoldás van: $n = 19$, $k = 5$ vagy $n = 11$, $k = 7$ vagy $n = 9$, $k = 3$;
d) 1 megoldás van: $n = \dfrac{p+1}{2}$, $k = \dfrac{p-1}{2}$;
e) 3 megoldás van: $n = \dfrac{3p^2+1}{2}$, $k = \dfrac{3p^2-1}{2}$; vagy $n = \dfrac{p^2+3}{2}$, $k = \dfrac{p^2-3}{2}$;
vagy $n = 2p$, $k = p$.

471.

	^{1}1	^{2}5	
	^{3}6	3	^{4}1
^{5}2		^{6}3	2
^{7}8	4	5	1

471. A helyesen kitöltött keresztrejtvény a 471. ábra. A számjegyek összege 41; $d(41) = 2$.

472. A helyesen kitöltött keresztrejtvény a 472. ábra. A számjegyek szorzata $2^8 \cdot 3^5 \cdot 5$; $d(2^8 \cdot 3^5 \cdot 5) = 108$.

472.

	^{1}4	^{2}6	
^{3}2		5	
^{4}1	^{5}6	6	^{6}1
^{7}6	1	1	6

473. *a)* 1, *b)* 6, *c)* 18, *d)* 60, *e)* 217,
f) 255, *g)* 1530, *h)* $p + 1$,
i) $pq + p + q + 1$,
j) $(1 + p)(1 + q + q^2 + q^3)$,
k) $(1+p+p^2)(1+q+q^2+q^3)$,
l) $(1+p+p^2+\ldots+p^k)(1+q+q^2+\ldots+q^n)$.

474. *a)* $S(72) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 9 + 12 + 18 + 24 + 36 + 72 = 195$,
$S(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$, $S(9) = 1 + 3 + 9 = 13$, $15 \cdot 13 = 195$.

b) $2^n \cdot 3^k$ osztói:

$$\begin{array}{lllll}
1, & 2, & 2^2, & \ldots & 2^n; \\
3, & 3 \cdot 2, & 3 \cdot 2^2, & & 3 \cdot 2^n; \\
3^2, & 3^2 \cdot 2, & 3^2 \cdot 2^2, & & 3^2 \cdot 2^n; \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
3^k, & 3^k \cdot 2, & 3^k \cdot 2^2, & & 3^k \cdot 2^n.
\end{array}$$

Ezek összege: $(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^k)(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k) = S(3^k) \cdot S(2^n)$.

475. A bizonyítás gondolatmenete megegyezik az előző feladatban ismertetett gondolatmenettel.

476. *a)* 28 nála kisebb osztói: $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$;

b) 496 nála kisebb osztói:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 2 \cdot 31 + 4 \cdot 31 + 8 \cdot 31 = 496;$$

c) 8128 nála kisebb osztói:
$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 2 \cdot 127 + 4 \cdot 127 + 8 \cdot 127 + 16 \cdot 127 + 32 \cdot 127 = 8128$.

477. Bármely p prímszám osztóinak a száma $1 + p \neq 2p$.

478. Ha $2^{k+1} - 1 = p$ prím, akkor a $2^k(2^{k+1} - 1) = 2^k \cdot p$ szám nála kisebb osztói:

$1, 2, 2^2, \ldots, 2^k$;
$p, 2p, 2^2 p, \ldots, 2^{k-1} p$.

Ezek összege (vegyük észre, hogy egy-egy mértani sorozatról van szó):

$$\frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1} + \frac{p\left(2^k - 1\right)}{2 - 1} = \left(2^{k+1} - 1\right) + p\left(2^k - 1\right).$$

Az első zárójelben levő szám éppen p-vel egyenlő, így kapjuk:

$$p + p\left(2^k - 1\right) = p + p \cdot 2^k - p = 2^k \cdot p,$$

tehát a kérdéses szám valóban tökéletes szám.

479. Azt kell megmutatni, hogy

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)=2,$$

azaz

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k-1}{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}=1,\quad \left(1-\frac{1}{2^k}\right)=\frac{p-1}{p}\cdot\frac{p}{p+1},$$

vagyis $(p+1)(2^k-1)=(p-1)\cdot 2^k,\ \ p\cdot 2^k+2^k-p-1=p\cdot 2^k-2^k,$

ahonnan $2^{k+1}-1=p.$

480. $672=2^5\cdot 3\cdot 7$, így $S(672)=2016$; $\frac{2016}{672}=3.$

481. $S(220)=1+2+4+5+2\cdot 5+4\cdot 5+11+2\cdot 11+4\cdot 11+$
$+5\cdot 11+2\cdot 5\cdot 11+4\cdot 5\cdot 11=504$, tehát $S(220)-220=284$;
$S(284)=1+2+4+71+2\cdot 71+4\cdot 71$, tehát $S(284)-284=220$.
Tehát 220 nála kisebb osztóinak összege 284, és 284 nála kisebb osztóinak összege 220.

482. $S(1184)-1184=1+2+4+8+16+32+$
$+37(1+2+4+8+16+32)-1184=1210$,
és $S(1210)-1210=1184$.

Diofantoszi problémák, diofantoszi egyenletek

483. Az egész számok halmazán végtelen sok megoldás van, a természetes számok halmazán 13 megoldás van, ha $n\neq k$, akkor 12 megoldás van.

484. 1, 3, 11, vagy 1, 5, 9, vagy 3, 5, 7. Ha a számok nem feltétlen különbözők, akkor a fenti megoldásokhoz még hozzájönnek az alábbi megoldások: 1, 1, 13, vagy 3, 3, 9, vagy 1, 7, 7, vagy 5, 5, 5.

485. 2, 4, 16, vagy 2, 6, 14, vagy 2, 8, 12, vagy 4, 6, 12, vagy 4, 8, 10.

486. Ha $3n=7k+2$, azaz $n=\frac{7k+2}{3}$. Ekkor $n=21m+3$, azaz n 21-gyel osztva 3 maradékot ad.

487. Ha $n=3k+2=5m+3$, akkor $n=15l+8$, azaz n 15-tel osztva 8 maradékot ad.

488. Ha $n=7k+5=6m+3$, akkor $n=42k+33$, azaz 42-vel osztva 33 maradékot ad.

489. *a)* $n=3,\ k=5$, vagy $n=6,\ k=3$, vagy $n=9,\ k=1$;
b) $k=5,\ n=1$;
c) $n=7,\ k=2$;
d) $p=3,\ q=8$ vagy $p=6,\ q=3$;

e) $k = 3$, $m = 18$ vagy $k = 6$, $m = 16$ vagy $k = 9$, $m = 14$ vagy $k = 12$, $m = 12$ vagy $k = 15$, $m = 10$ vagy $k = 18$, $m = 8$ vagy $k = 21$, $m = 6$ vagy $k = 24$, $m = 4$ vagy $k = 27$, $m = 2$;

f) $x = 5$, $y = 1$, $z = 2$.

490. *a)* Ha két prím összege páratlan, akkor valamelyikük 2 kell, hogy legyen, p és q egyike 2, a másik 17.

b) A p, q és r prímek az alábbiak lehetnek (valamilyen sorrendben): 2, 5, 19 vagy 2, 7, 17, vagy 2, 11, 13.

c) $q = 2$, $p = 13$.

d) $q = 5$, $p = 7$ vagy $p = 11$, $q = 2$.

e) $r = 2$, $p = 3$, $q = 13$, vagy $r = 2$, $p = 13$, $q = 3$, vagy $r = 2$, $p = 11$, $q = 5$ vagy $r = 2$, $p = 5$, $q = 11$ vagy $p = 2$, $q = 11$, $r = 3$, vagy $q = 2$, $p = 11$, $r = 3$.

f) $p(p + 1) = 131$; két szomszédos egész szám szorzata biztosan páros, így nincs megoldás.

491. Legyen l a lovak, k a kacsák, t a tehenek száma. A feltételek szerint

$$t = \frac{l + k}{3}, \quad l > k, \quad 5l + 3k = 100.$$

Az utolsó egyenlőségből következik, hogy k 5-tel osztható, az $l > k$ egyenlőtlenségből pedig $k \le 10$, azaz $k = 5$ vagy $k = 10$. Csak a $k = 10$, $l = 14$ ad t-re pozitív egész megoldást. A farmon 8 tehén van.

492. Legyen n a négyfejűek, h a háromfejűek, $ö$ az ötfejűek száma. A feltételek szerint

$$n - 1 = ö, \quad 4n - 1 = 3h \quad \text{és} \quad 3h + 4n + 5ö \le 132.$$

Innen $4n - 1 + 4n + \dfrac{5(n - 1)}{2} \le 132$, ahonnan $n \le 12$. Minden feltételt figyelembe véve:

$$n = 7, \quad ö = 3, \quad h = 9.$$

493. Az egyik oldalnak 2-nek kell lennie. Így – figyelembe véve a háromszög-egyenlőtlenséget – az egyedüli megoldás: 2, 1999, 1999.

494. $(n - 3)^2 + (n - 2)^2 + (n - 1)^2 = n^2 + (n + 1)^2$, ahonnan $n = 13$. Tehát a keresett számok: 10, 11, 12, 13, 14.

495. $(n - 3)^2 + (n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 = (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^2$, ahonnan $n = 24$. Tehát a keresett számok: 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27.

496. $2n + 1$ db szomszédos pozitív egész szám közül az első $n + 1$ db négyzetének összege egyenlő az utolsó n db négyzetének összegével. Melyek ezek a számok?

$$x^2 + (x - 1)^2 + (x - 2)^2 + \ldots + (x - n)^2 = (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + \ldots + (x + n)^2.$$

$$(n + 1)x^2 - 2x(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = nx^2 + 2x(1 + 2 + 3 + \ldots + n),$$

$$x^2 - 4x \cdot \frac{n(n + 1)}{2} = 0, \quad \text{ahonnan} \quad x = 2n(n + 1).$$

A keresett $2n + 1$ db szomszédos egész szám:

$$2n^2 + n, \quad 2n^2 + n + 1, \quad 2n^2 + n + 2, \ldots, 2n^2 + 3n.$$

III

497. $(n-2)^3+(n-1)^3+n^3=(n+1)^3$, ahonnan $n^3-6n^2+6n-5=0$. Alakítsuk át a kapott egyenlőséget:

$$n^3-1-6n(n-1)=4, \quad \text{azaz} \quad (n-1)(n^2-5n+1)=4.$$

Innen $n-1=1$ vagy $n-1=2$ vagy $n^2-5n+1=1$ lehet csak. Első két esetben nem kapunk megoldást, a harmadik esetben pedig $n=5$. A keresett számok: 3, 4, 5, 6.

498. *a)* $k^3-n^3=7(k-n)$, azaz $(k-n)(k^2+kn+n^2)=7(k-n)$, tehát $k^2+kn+n^2=7$.

A feltételek miatt $k=2$ vagy $k=1$. Első esetben $n=1$ adódik, a másik esetben pedig $n(1+n)=6$, ahonnan $n=2$. Tehát n és k egyike 2, a másik 1.

b) $(k^2-n^2)(k^2+n^2)=9(k^2-n^2)$, ahonnan $k^2+n^2=9$. Mivel a 9 nem bontható fel két négyzetszám összegére, így ennek az egyenletnek nincs megoldása.

499. Nincs ilyen háromszög. Ha a befogók páratlanok, akkor azok négyzetének összege páros.

500. Igen, pl.: 3, 4, 5.

501. Tegyük fel, hogy a befogók $2k+1$ és $2n+1$. Ekkor

$$(2k+1)^2+(2n+1)^2=S^2, \quad \text{ahonnan} \quad 4(k^2+k+n^2+n)+2=S^2.$$

Az egyenlőség bal oldala 4-gyel nem osztható páros szám, ez nem lehet négyzetszám.

502. Megmutatjuk, hogy ha egyik befogó sem osztható 5-tel, akkor az átfogó osztható 5-tel.

Ha egyik befogó sem osztható 5-tel, akkor ezek négyzete 5-tel osztva csak 1 vagy 4 maradékot adhat. Ha mindkettő 1 maradékot ad, akkor az átfogó $n^2=5k+2$ alakú négyzetszám, így n^2 vagy 2-re, vagy 7-re végződik, ami lehetetlen. Ugyanígy ellentmondásra jutunk, ha mindkét befogó négyzete 5-tel osztva 4 maradékot ad. Így az egyik befogó négyzete 5-tel osztva 1, a másik négyzete 4 maradékot ad, vagyis ezek összege – s így az átfogó is – osztható 5-tel.

503. $(2mn)^2+(m^2-n^2)^2=4m^2n^2+m^4+n^4-2m^2n^2=(m^2+n^2)^2$.

504. A megadott pitagoraszi számhármasokat tanulmányozva azt figyelhetjük meg, hogy $2n+1$, $2n(n+1)$, $2n(n+1)+1$ mindig pitagoraszi számhármas. Valóban

$$(2n+1)^2+4n^2(n+1)^2=(2n^2+2n+1)^2.$$

505. $9n^2+4k^2+1+12nk+6n+4k+9n^2+4k^2+4+12nk+12n+8k=$
$=16n^2+9k^2+4+24nk+16n+12k$.

Összevonás után: $2n^2+2n+1=k^2$, azaz $n^2+(n+1)^2=k^2$.

506. *a)* $(x+1)(y+1)=12$, innen $x=0$, $y=11$ vagy $x=1$, $y=5$ vagy $x=2$, $y=3$ (és fordítva).

b) $a=0$, $b=13$ vagy $a=1$, $b=6$ (és fordítva),

c) $n=0$, $k=20$ vagy $n=2$, $k=6$ (és fordítva)

d) $x=0$, $y=0$, $z=15$ vagy $x=0$, $y=1$, $z=7$ vagy $x=0$, $y=3$, $z=3$ vagy $x=1$, $y=1$, $z=3$ (bármely megoldásban x, y, z szerepe tetszőlegesen cserélhető).

507. *a)* $n = 6,\ k = 30$ vagy $n = 30,\ k = 6$, vagy $n = k = 10$;
b) $x = 8,\ y = 56$ vagy $x = 56,\ y = 8$ vagy $x = y = 14$;
c) $a = 14,\ b = 182$ vagy $a = 182,\ b = 14$ vagy $a = b = 26$;
d) $n = 12,\ k = 264$ vagy $n = 13,\ k = 143$ vagy $n = 22,\ k = 44$ vagy $n = k = 33$ vagy $n = 132,\ k = 24$ vagy $n = 253,\ k = 23$;
e) $x = 6,\ y = 90$ vagy $x = 8,\ y = 40$ vagy $x = 10,\ y = 30$ vagy $x = y = 20$ vagy $x = 30,\ y = 18$ vagy $x = 80,\ y = 16$;
f) $a = 8,\ b = 280$ vagy $a = 12,\ b = 84$ vagy $a = 14,\ b = 70$ vagy $a = b = 42$, vagy $a = 56,\ b = 40$ vagy $a = 252,\ b = 36$.

508. *a)* $n = 4,\ k = 28$ vagy $n = k = 7$ vagy $n = 28,\ k = 4$;
b) $x = 4,\ y = 44$ vagy $x = 44,\ y = 4$;
c) $a = 4,\ b = 76$ vagy $a = 76,\ b = 4$.

509. *a)* $a = 1,\ b = 5$ vagy $a = 4,\ b = 2$ vagy $a = 11,\ b = 0$;
b) $x = 8,\ y = 3$;
c) $k = 0,\ n = 6$ vagy $k = n = 5$.

510. A feltételek szerint $\overline{ab} - 6 = ab + a + b$, ahonnan $a(9 - b) = 6$, azaz $a = \dfrac{6}{9 - b}$. Tehát $9 - b$ osztója 6-nak, vagyis $9 - b = 1, 2, 3$ vagy 6. Innen $\overline{ab} =$ $= 18, 37, 26$ vagy 13.

511. $\overline{ab} - 8 = ab + a + b$, ahonnan $\overline{ab} = 88, 47, 25$ vagy 11.

512. $\overline{ab} - 22 = ab - a - b$, ahonnan $(a - 2)(b - 11) = 0$, tehát nincs a feltételeknek eleget tevő kétjegyű szám.

513. $a \cdot b + a + b + a - b + \dfrac{a}{b} = 26$, ahonnan $a(b + 1)^2 = 26b$. Mivel b és $b + 1$ relatív prímek, továbbá 26-nak nincs 1-nél nagyobb négyzetszám osztója, ezért nincs a feltételeknek eleget tevő számpár.

514. $a \cdot b + a + b + a - b + \dfrac{a}{b} = 72$, ahonnan $a(b + 1)^2 = 72b$. Mivel 72 négyzetszám 1-nél nagyobb osztói: 4, 9, 36, így $b = 1, 2$ vagy 5. A keresett számok $a = 18,\ b = 1$ vagy $a = 16,\ b = 2$ vagy $a = 10,\ b = 5$.

515. Legyen a felszeletelt süteményben n oszlop és k sor. Ekkor a sütemények száma $n \cdot k$. A tepsi szélével nem érintkező sütemények száma $(n - 2)(k - 2)$. A feltételek szerint:

$$n \cdot k = 2(n - 2)(k - 2),$$

ahonnan

$$nk - 4n - 4k + 8 = 0,$$

azaz

$$(n - 4)(k - 4) = 8.$$

Innen $n = 5,\ k = 12$ vagy $n = 6,\ k = 8$. (Természetesen, ha a tepsit elforgatjuk 90°-kal, akkor n és k szerepe felcserélődik.)

III

516. *a)* $x \le 2$, azaz $x = 1$ vagy $x = 2$ lehet csak. $x = 1$, $y = 13$ vagy $x = 2$, $y = 4$.

b) $a \le 3$, azaz $a = 3$, 2 vagy 1; $a = 3$-ra nem adódik megoldás; $a = 2$, $b = 4$ vagy $a = 1$, $b = 5$.

c) $k = 3$, $n = 1$ vagy $k = 2$, $n = 5$ vagy $k = 1$, $n = 8$.

d) $p^3 - p + 12q = p(p-1)(p+1) + 12q = 2006$.
Mivel $p(p-1)(p+1)$ három egymást követő egész szám szorzata, így valamelyik tényező biztosan osztható 3-mal, illetve egyik tényezője biztosan osztható 2-vel, így e szorzat osztható 6-tal. Tehát az egyenlőség bal oldala osztható 6-tal, a jobb oldal nem, így nincs megoldás.

e) $2x^2 + y^2 + 4x + y = 2x(x+2) + y(y+1)$, ami nyilván páros, tehát nem lehet 2005. Nincs megoldás.

f) $ab^2 + 2ab + a - 75b = 0$, azaz $a(b+1)^2 = 75b$. Mivel $(b+1; b) = 1$, ezért $(b+1)^2$ osztója a 75-nek. De 75 1-nél nagyobb négyzetszám osztója csak a 25, ezért $b = 4$, $a = 12$.

Számrendszerek

517. *a)* 256; *b)* 511; *c)* 14-féleképpen; *d)* 1 krajcár + 1 fabatka; *e)* 1 tallér + 1 pityke + 1 peták; *f)* 1 beuró + 1 pengő + 1 tallér + 1 pityke + 1 garas + 1 peták .

518. Osszunk 6-tal maradékosan! 4 labda kimarad; végül 1 piros, 1 sárga, 4 zöld, 1 kék, 4 fehér dobozt látunk és a 4 kimaradt labdát.

519. *a)* 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 kg-os súlyok megfelelőek. 6 súly nem elég, mert minden súlyt vagy használunk, vagy nem; ez súlyonként két lehetőség, így 6 súly esetén legfeljebb $2^6 = 64$-féle tömeget mérhetünk.

b) 1, 3, 9, 27, 81 kg-os súlyok megfelelőek. 4 súly nem elég, mert minden súlyt vagy az egyik serpenyőbe, vagy a másikba tesszük, vagy nem használjuk. Ez súlyonként három lehetőség, így 4 súly esetén legfeljebb $3^4 = 81$-féle tömeget mérhetünk.

520. *a)* $12 = 1100_2 = 110_3 = 30_4 = 22_5 = 10_{12}$;
b) $64 = 1\,000\,000_2 = 2101_3 = 1000_4 = 224_5 = 54_{12}$;
c) $100 = 1\,100\,100_2 = 10\,201_3 = 1210_4 = 400_5 = 84_{12}$;
d) $128 = 10\,000\,000_2 = 11\,202_3 = 2000_4 = 1003_5 = (10)8_{12}$;
e) $321 = 101\,000\,001_2 = 102\,220_3 = 11\,001_4 = 2241_5 = 229_{12}$;
f) $1000 = 1\,111\,101\,000_2 = 1\,101\,001_3 = 33\,220_4 = 13\,000_5 = 6(11)4_{12}$.

521. *a)* 8; 21; 15, *b)* 64; 99; 493, *c)* 111; 176; 292, *d)* 354; 4096; 2927, *e)* 1,5; 0,25; 2,75; 66,4, 12,875.

522. $A = 123\,213_5$.

523. *a)* $12\,002_3$; $201\,211_3$; $1\,020\,012_3$, *b)* 121_9; $27\,526_9$; 7241_9, *c)* $112_3 = 14_{10} = 1110_2$; $2011_4 = 133_{10} = 10\,000\,101_2$; $111\,111_4 = 10\,101\,010\,101_2$.

524. *a)* A legnagyobb ilyen szám az $111\,111_2 = 63_{10}$, így 63 ilyen szám van.

b) Legnagyobb jó az $555\,555_6 = 6^6 - 1$, a legnagyobb rossz az $55 = 6^2 - 1$, így $6^6 - 6^2 = 46\,620$ ilyen szám van.

III

525. *a)* 11-es; *b)* 12-es; *c)* 10-es; *d)* 8-as.
526. *a)* Igaz, a kettes számrendszerbeli alak mutatja.
b) Nem igaz, pl. a 2 nem állítható elő.
c) $3^9 \approx 20\,000$, így a kb. 3^9 lehetőség közül 2^9 jó, ennyiben szerepel csak 0 és 1. ($2^9 : 3^9 \approx 0{,}026 < 3\%$).
527. $101_2 < 10_8 = 20_4 < 10_9 < 101_3$.
528. *a)* 7^7 nagyobb 1-gyel; *b)* $10\,000\,000_6$ a nagyobb 45-tel.
529. $bc_8 < cd_9 < a0c_7 < ddd_8 < abcd_8 < acdb_8$.
530. A 20. leírt szám az $1 + 19 \cdot 3 = 58 = 111\,010_2$.
531. $1 + 2 + 3 + \ldots + 20 = 210 = 11\,010\,010_2$.
532. *a)* $11\,011\,100_2$; *b)* $11\,100\,000_2$; *c)* $110\,110\,110_2$; *d)* $1\,101\,101\,100_2$.
533. *a)* 4134_5; *b)* $10\,000_7$; *c)* $130\,113_9$; *d)* $30\,607_8$; *e)* $1101\,101_2$; *f)* $100\,200_4$; *g)* $14\,022_8$.
534. *a)* 2-es, $a = 1$; 5-ös, $(a; b) = (1; 4) = (2; 3) = (3; 2) = (4; 1) = (5; 0)$;
7-es, $a = 3$, $b = 1$, $c = 4$,
b) 12-es; 8-as; 4-es.
535. Mindhárom helyes.
536. Az első nagyobb 1-gyel.
537. *a)* 1230; *b)* 1230_4; *c)* $12\,300_5$; *d)* 3535_7; *e)* $123\,123_6$.
538. *a)* Négyjegyű; *b)* hatjegyű.
539. Az $A = 1$ vagy 2, mert $ABC \cdot A$ háromjegyű szám. $A = 1$ nem jó, mert $A \cdot C$ D-re végződik, és $A = 1$ esetén $C = D$ lenne. Így $A = 2$. Ekkor $B \geqq 4$. $B \cdot C$ C-re végződik. A nyolcas számrendszerbeli szorzótáblát használva innen kiderül, hogy $ABC = 256$ lehet csak.
540. *a)* Páratlan, páratlan, páros, páros, páratlan, páros, páros, *b)* 2-es számrendszerben a 0-ra végződőek, 4-esben a 0-ra vagy 2-re végződőek, 3-asban és 5-ösben azok a számok, melyekben páros sok páratlan számjegy van.
541. 4210_6, 1357_9, $23\,210\,312\,341\,523_9$.
542. *a)* $xxyy_7 = 8 \cdot y + 392 \cdot x$ páros, így 0 maradékot ad; *b)* $xyxy_7 = 350 \cdot x + 50 \cdot y$ szintén 0 maradékot ad; *c)* $xxxyy_7 = 8 \cdot y + 2793 \cdot x$, így x-től függ a maradék. Ha x páros akkor 0, ha páratlan, akkor 1 maradékot ad.
543. $aaabb_5$ páros, így 238. c*)* alapján a is páros. Hasonlóan: b páratlan. Így $aaabbb_5$ páratlan.
544. Minden helyiérték páratlan szám, és páratlan sok páratlan szám összege páratlan.
545. $abab_3 = 30a + 10b$, így igaz.
546. *a)* 4-gyel, 2-vel; *b)* 6-tal, 3-mal, 2-vel; *c)* 3-mal.
547. $123\,020_4$; $221\,200_4$. Négyes számrendszerben felírt szám pontosan akkor osztható nyolccal, ha 00-ra, vagy 20-ra végződik.
548. Az alapszám nem lehet 5-tel, 6-tal, 3-mal és 2-vel osztható. Így csak a 11 és a 7 lehet.
549. *a)* és *b)* A helyiértékek 9-cel és 3-mal osztva 1 maradékot adnak, így a számjegyek alaki értékének 9-es és 3-as maradéka megegyezik a valódi értékük 9-es és 3-as maradékával.
c) Hasonlóan, de a 8-cal (4-gyel, 2-vel) oszthatóságot mutatja meg. A helyiértékek 9^n alakúak. 9^n minden pozitív egész n-re 8-cal osztva 1 maradékot ad, hiszen $(a - b) \mid a^n - b^n$.

III

550. $(7-1)|18$.
551. *a)* 0, 1, 2, 3; *b)* 1, 3; *c)* a hatvannégyesek helyén 0, 1, 2, …, 7 tetszőlegesen, az egyesek helyén 0 állhat csak; *d)* 0 vagy 3; *e)* a hétszázhuszonkilencesek helyén 0, 1, 2, …, 8 tetszőlegesen, a kilencesek helyén 0, 3, 6 állhat csak; *f)* $30\,250_6$, $33\,252_6$, $31\,254_6$; *g)* az utolsó jegy lehet $36\,030_9$, $36\,430_9$, $36\,830_9$, $36\,133_9$, $36\,533_9$, $36\,236_9$, $36\,636_9$; *h)* $313\,520_8$.
552. A számjegyösszeg és a szám 7-es maradéka egyenlő, így a különbségük 7-tel osztható. Egy ilyen szám számjegyösszege is 7-tel osztható. A második számjegyösszegnél már egyjegyű 7-tel osztható számot kapunk.
553. Ötös számrendszerben igaz az: *a), b), e), f)*. Hatos számrendszerben igaz az: *a), c), d), g)*.
554. *a)* 2390 osztói a 2, 5, 10, 239, …; az $1\,101\,010_2$ osztói az 10_2, az $110\,101_2$; az $1\,101\,000_2$ osztói az 10_2, az 100_2, az 1000_2, az $1\,101\,100_2$, az $110\,110_2$, az $11\,011_2$, …; az $11\,320_4$ osztói az 10_4, az 1132_4,…; a $45\,400_7$ osztói az 10_7, az 100_7, a 4540_7, a 454_7, …
b) 2302_4 osztói a 2_4, az 1121_4, …; az 1253_6 osztói a 3_6, a 255_6, … ; a 3714_8 osztói a 2_8, a 4_8, az 1746_8, a 763_8, …
c) 246_8 osztója a 2_8, a 123_8, …; a 306_7 osztója a 3_7 , az 102_7,…; a $70\,707_9$ osztói a 7_9, az $10\,101_9$, …; a $228\,404_{11}$ osztói a 2_{11}, az $114\,202_{11}$, …
555. a) $1001_5 \cdot xy_5 = xy \cdot xy_5$, így $xy_5 = 32_5$; *b)* $abab_n : ab_n = 101_n$, így $n = 2$, a és b pedig tetszőleges (n-nél kisebb természetes szám, $a \neq 0$).
556. Egy fejezet legyen n oldal hosszú. A könyv ekkor $17n + 1$ oldalas. Legyen n a kettes számrendszerben felírva k-jegyű szám. Egymás mellé írva a két szomszédos oldalszámot: $17n + 1$-et kapunk. Ha $n + 1$ is k-jegyű szám, akkor az egymás mellé írt oldalszámok értéke: $17n + 1 = n \cdot 2^k + (n + 1) = n \cdot (2^k + 1) + 1$. Innen $k = 4$ adódik. Ekkor az n legnagyobb lehetséges értéke $n = 1110_2 = 14$ ($n = 1111_2$, nem lehet, mert ekkor $n + 1$ már ötjegyű szám lenne), azaz a könyv ekkor 239 oldalas.
Ha az $n + 1$ már $k + 1$ jegyű szám lett, akkor az azt jelenti, hogy ő a legkisebb pozitív $k + 1$-jegyű szám, azaz $n + 1 = 2^k$, így $n = 2^k-1$ volt. Egymás mellé írva őket: $17n + 1 = (2^k-1) \cdot 2^{k+1} + 2^k = 2^{2k+1}-2^k$, másrészt $17n + 1 = 17 \cdot (2^k-1) + 1$, így $2^{2k+1}- 2^k = 17 \cdot (2^k-1) + 1$, ahonnan $k = 0$, vagy $k = 3$. Ha $k = 3$, akkor $n = 111_2 = 7$. A könyv ekkor 120 oldalas, $k = 0$ nyilván nem lehet. Tehát a könyv legfeljebb 239 oldalas.
557. $a = 1$, $b = 0$, $n = 2$.
558. *a)* Ha kettes számrendszerben tekintjük a számokat, akkor a pozitív páratlan számok sorozatát látjuk, azaz a számok rendre 2-vel nőnek. Folytatva: 1110, 1111, 10 001, … .
b) Ha hármas számrendszerben tekintjük a számokat, akkor a kettő pozitív egész kitevőjű hatványainak sorozatát látjuk, azaz a számok rendre duplázódnak. Folytatva: 1012, 2101, 11 202, …
c) A kettes és hármas számrendszer váltja egymást a második számtól kezdve, duplázunk, majd egyet hozzáadunk és a számot felírjuk a kettes, majd a hármas számrendszerben is: 111111, 2100, 1 111 111, …
559. $128 + 16a + 4b = 53 + 125c + 5d$, $75 + 16a + 4b = 125c + 5d$, mivel $0 < a < 4$ és $0 \leq b < 4$, így $c = 1$ lehet csak, $16a + 4b = 50 + 5d$, $a = 1$ és $a = 2$ kevés, így $a = 3$, $4b = 2 + 5d$, ahonnan $b = 3$, $d = 2$. Tehát $2330_4 = 1223_5$.

560. Nincs ilyen a, b, n számhármas. Ugyanis $abab_n = ab_n \cdot 101_n$, így az egyenletből $101_n = ab_n$ következik, ami nem lehetséges, mert $101_n > ab_n$.

561. $aaaa_n = 2000_{10}$, $a \cdot (n^3 + n^2 + n + 1) = 2000$, $a \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1) = 2000$. A 2000 osztói: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 125, 200, 250, 400, 500, 1000, 2000. Ezek közül $n^2 + 1$ alakú az 5, 10 és 50. Az $n = 2$ és 3 nem jó, $n = 7$ esetén $a = 5$.

562. *a)* 1_3, 10_3, 11_3, 100_3, … Tekintsük úgy ezeket a számokat, mint kettes számrendszerbeli számokat. A 20. leírt szám a $20_{10} = 10100_2$. Így a 20. leírt szám az 10100_3.

b) 1_4, 3_4, 11_4, 13_4, 31_4, 33_4, 111_4, 113_4, 131_4, 133_4, 311_4, 313_4, 331_4, 333_4, … 2db egyjegyű, 4 db kétjegyű, 8 darab 3 jegyű, …, 2^n db n-jegyű leírt szám van. $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126$, így a 126. leírt szám a legnagyobb leírt 6-jegyű szám. Ez a szám a $333\,333_4$.

563. Ötös vagy hatos számrendszer. Mivel négyjegyű számot kaptunk, így $n^4 > 450 > n^3 - 1$, azaz $8 > n > 4$. A 450 ebben a számrendszerben 0-ra végződne, így osztható a számrendszer alapszámával. $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. A fenti intervallumba a 450 osztóiból csak az 5 és a 6 esik. A 452 a hatos számrendszerben 2032_6, ötös számrendszerben pedig 3302_5.

564. Olyan B számot keresünk, ami 8-cal osztva 3, 9-cel osztva pedig 4 maradékot ad. Ekkor $B + 5$ osztható 8-cal és 9-cel is. A legkisebb ilyen pozitív szám a 72, így a keresett szám a 67.

565. *a)* Igaz, mert $11_n^2 = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 = 121_n$; *b)* azonosság, így $n > 3$; *c)* igaz, mert $14641_n = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = (n + 1)^4 = ((n + 1)^2)^2$.

566. *a)* Minden $n > 3$ egész számra; *b)* ha $n + 1$ négyzetszám, azaz $n = k^2 - 1$ alakú, ahol $k = 3, 4, 5, \ldots$ *c)* a *b)* miatt $p = k^2 - 1$, vagyis $p = (k - 1) \cdot (k + 1)$, ami nem lehetséges, mert p prím és $k > 2$.

567. A 0, 1, 2, 3, 4 számjegyeket használhatjuk. Az első jegy nem lehet 0. Így $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ ilyen szám van. Mivel páros sok (2 db) páratlan számjegye van mindegyiknek, így mind páros szám.

568. $n^3 \le \_\,\_\,\_\,\__n = \_\,\__{n+1} \le (n + 1)^2 - 1$, azaz $n^3 \le n^2 + 2n$, vagyis $n^2 \le n + 2$, ez csak $n = 2$-re igaz. A legkisebb négyjegyű kettes számrendszerbeli szám pont jó: $1000_2 = 22_3$. A következő már háromjegyű lenne a hármas számrendszerben. Így csak az $1000_2 = 8$ lehetséges.

569. *a)* $(n + 1)^2$, így nincsen ilyen n; *b)* $(n^2 + 1)^2$, így nincsen ilyen n; *c)* $(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$, így nincsen ilyen n; *d)* $10_n \cdot 10101_n$, így nincsen ilyen n; *e)* $(n + 1)^2(n^2 + 1)$, így nincsen ilyen n; *f)* $n = 5, 6, 7, \ldots, 39$-re prím , 40-re nem, …

570. *a)* Nincsen, mert mindegyik páros. *b)* nincsen, mert a számjegyösszeg mindegyikben 21, így mindegyik szám osztható 3-mal. (Lásd 245!)

571. Nem, mert a 11_n többszöröse.

572. *a)* A kérdéses számot jelöljük n-nel. Vegyünk n db „csupaegy” számot: 1_3, 11_3, 111_3, …, $11\ldots111_3$. Ha valamelyiknek osztója az eredeti szám, akkor készen vagyunk, ha nincs ilyen, akkor biztosan van közöttük kettő olyan, amelyik ugyanannyi maradékot ad n-nel osztva. Ezek különbsége n-nel osztható és 111...10...0 alakú, tehát megfelelő;

b) lásd *a)* csak a 2_3, 22_3, 222_3, …, $222\ldots22_3$ számokkal;

c) nem, pl. a 10_3 szám minden többszöröse 0-ra végződik!

III

573. Nincs ilyen szám. Az n db 1-esből álló $11\ldots11_2 = 2^n - 1$, ekkor a k db egyesből álló $111\ldots11_{10} = 2^n - 1$ lenne, azaz $11\ldots112_{10} = 2^n$. Egy tízes számrendszerbeli szám pontosan akkor osztható 16-tal, ha az utolsó 4 jegyéből álló négyjegyű szám osztható 16-tal. A 1112 16-tal nem osztható, de $n > 3$-ra a 2^n viszont osztható 16-tal, így a két szám egyenlő nem lehet.
$n < 3$ esetén: a 2, a 12, a 112, a kettes számrendszerben nem „csupaegy" szám.
574. *a)* Nem igaz, a páros számoknak nincs. *b)* Igaz. A kérdéses páratlan számot jelöljük n-nel ($n > 1$). Vegyünk n db „csupaegy" számot: 1_2, 11_2, 111_2, …, $11\ldots111_2$. Ha valamelyiknek osztója az eredeti szám, akkor készen vagyunk, ha nincs ilyen, akkor biztosan van közöttük kettő olyan, amelyik ugyanannyi maradékot ad n-nel osztva. Ezek különbsége n-nel osztható és $111\ldots10...0_2$ alakú. De ekkor a szám végén lévő k db 0 jegy miatt $111\ldots10\ldots0_2 = 111\ldots11_2 \cdot 2^k$, melyből a második tényező nem osztható n-nel, hiszen az páratlan, így az első „csupaegy" tényező többszöröse az n-nek.
575. *a)* Igen, pl. az $11111_3 = 121$. *b)* Nincs ilyen szám. $111\ldots111_2$ 4-gyel osztva 3 maradékot ad, de egy páratlan négyzetszám 4-gyel osztva 1 maradékot ad.
576. *a)* $1320_n = n^3 + 3n^2 + 2n = n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$, három szomszédos egész szám között mindig van 3-mal osztható és van 2-vel osztható, így a szorzatuk 6-tal osztható.
b) $100040_n - 5000_n = n^5 + 4n - 5n^3 = n \cdot (n^4 - 5n^2 + 4) =$
$= n \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 4) = n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n - 2) \cdot (n + 2) =$
$= (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$. Öt szomszédos egész között mindig van 5-tel osztható, 4-gyel osztható, 3-mal osztható, és egy 2-vel osztható (a 4-gyel oszthatótól különböző). Így a szorzatuk $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$-szal osztható.
577. $abc_9 = cba_7$. $1 \le a \le 6$, $1 \le c \le 6$, $0 \le b \le 6$.
$81a + 9b + c = 49c + 7b + a$, azaz $80a + 2b = 48c$, ahonnan $b = 8 \cdot (3c - 5a) < 8$, $3c = 5a$, azaz $b = 0$. Mivel $3|a$ és $5|c$, így $a = 3$, $c = 5$ lehet csak. Tehát a szám csak a 305_9 lehet.
578. A felírt számokat feleltessük meg a 9-es számrendszer számainak, mégpedig az alábbi átírással: 2 helyett írjunk 1-et, 3-helyett 2-t, …, 9 helyett 8-at, a 0 maradjon 0.
Ekkor a számsor: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, …18, … A 2004. pozitív egész szám a 2004: $2004_{10} = 2666_9$, ezt a számot pedig a 3777-ből kaptuk. Így a 2004 helyett a 3777-et írják II. Kázmér birodalmában.
579. Legyen: $bbbb_n = (aa_n)^2$, $b \cdot (n^3 + n^2 + n + 1) = a^2 \cdot (n + 1)^2$, azaz
$b \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1) = a^2 \cdot (n + 1)^2$, osztva $(n + 1)$-gyel $b \cdot (n^2 + 1) = a^2 \cdot (n + 1)$,
ahonnan $b \cdot (n + 1) \cdot (n - 1) + 2b = a^2 \cdot (n + 1)$; $n + 1 | 2b$, de $b < n$, vagyis $2b < 2n$, így csak $n + 1 = 2b$ lehetséges. $b = (n + 1)/2$.
$(n + 1)/2 \cdot (n + 1)(n - 1) + n + 1 = a^2(n + 1)$, ahonnan $(n + 1)(n - 1)/2 + 1 = a^2$, azaz $n^2 + 1 = 2a^2$.
Végtelen sok megoldása van . Pl. $n = 7$, $a = 5$, $b = 4$ esetén $4444_7 = (55_7)^2$.

Vegyes számelméleti feladatok

580. $n^3+n^2-30n=n(n-5)(n+6)$. Ha ennek a számnak pontosan 8 osztója van, akkor prímtényezős alakja p^7, $p\cdot q^3$ vagy $p\cdot q\cdot r^2$.

$$n(n-5)(n+6)=p^7$$

lehetetlen, hiszen $n-5$ és $n+6$ egyike páros, a másik páratlan, így p^7-nek páros és páratlan prímosztójának is kellene lennie.
Ha $n(n-5)(n+6)=p\cdot q^3$, akkor csak $n(n-5)(n+6)=p\cdot q\cdot q^2$ lehetséges. Ekkor vagy p a legnagyobb vagy q^2 a legnagyobb, így

$$q^2-q-5=0,\quad \text{vagy}\quad q^2-q-6=0,\quad \text{vagy}\quad q^2-q-11=0$$

adódik, de egyik esetben sem kapunk megoldást.
Ha $n(n-5)(n+6)=p\cdot q\cdot r$, akkor $n-5$ -nek párosnak kell lennie, azaz $n=7$ és $n+6=13$. Tehát a feltételeknek eleget tevő egyetlen szám: $A=2\cdot 7\cdot 13=182$.

581. $\dfrac{p^2q+pq^2}{p^2q-q^2p}=\dfrac{p+q}{p-q}=k$, azaz $p+q=kp-kq$, ahonnan $q(k+1)=$ $=p(k-1)$.
Mivel $(p;q)=1$, ezért p osztója $k+1$-nek, q osztója $k-1$-nek, azaz

$$k+1=rp \text{ és } k-1=sq,\quad \text{tehát } qrp=psq \quad \text{vagyis}\quad r=s.$$

Ezek szerint $k=rp-1=sq+1$, ahonnan $r(p-q)=2$. Így csak $r=1$ és $p-q=2$ lehetséges. Ezek szerint p és q ikerprímek és

$$\frac{q+2+q}{q+2-q}=q+1=k,$$

tehát k éppen a közöttük levő egész szám, vagyis osztható 6-tal.

582. Elegendő megmutatni, hogy a kapott szám 3-mal osztható. 2^n utolsó jegye 2, 4, 6 vagy 8. Ha az utolsó jegy 6, akkor készen vagyunk.
Ha az utolsó jegy 2, akkor $n=4k+1$, így azt kell megmutatni, hogy $2\cdot\dfrac{2^{4k+1}-2}{10}$ osztható 3-mal.

$$2\cdot\frac{2^{4k+1}-2}{10}=2\cdot\frac{2\cdot 16^k-2}{10}=\frac{2\cdot(16^k-1)}{5}.$$

Mivel 16^k-1 osztható 15-tel, így osztható 3-mal.
Ha 2^n utolsó jegye 4 vagy 8, hasonló módon bizonyíthatjuk az állítást.

583. $(10k+9)^2-(10n+9)^2=20(k-n)[5(k+n)+9]$, tehát a különbség 20-szal osztható. Ha k és n egyszerre páros vagy páratlan, akkor $k-n$ páros, tehát készen vagyunk. Ha k és n egyike páros, a másik páratlan, akkor $k+n$ páratlan, így $5(k+n)+9$ páros.

III

584. $pq^3 + p^3q = pq\left(p^2 + q^2\right)$. Ha ennek a számnak 12 osztója van, akkor csak $p \cdot q \cdot r^2$ alakú lehet prímtényezős felbontása, azaz $p^2 + q^2 = r^2$, ahonnan

$p^2 = (r + q)(r - q)$.

Ez csak úgy lehetséges, ha $r - q = 1$, azaz $r = 3$, $q = 2$, és ekkor $r + q = 5$. Mivel az 5 nem négyzetszám, így nincsenek a feltételeknek megfelelő prímek.

585. Ha a letakaró négyzet bal felső sarkában levő szám n, akkor a letakart számok összege $4n + 18$.

a) Ez akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha n osztható 3-mal. Figyelembe véve, hogy $1 \leq n \leq 55$ és n nem lehet 8-cal osztható, így összesen 16 esetben lesz a letakart számok összege 3-mal osztható.

b) A letakart számok összege nem lehet négyzetszám, mert páros, de nem osztható 4-gyel.

586. Azt mutatjuk meg, hogy négyzetszám nem végződhet 99-re. Ha ugyanis a^2 utolsó két jegye … 99, akkor a páratlan, és páratlan szám négyzete 4-gyel osztva 1 maradékot adhat csak. A 99 4-es maradéka pedig 3.

587. $(n + k)(n - k) = 2 \cdot \overline{111......11}$ nem lehetséges. Ugyanis a jobb oldal osztható 2-vel, de 4-gyel nem, míg a bal oldal vagy páratlan (ha n és k paritása különböző), vagy 4-gyel is osztható (ha n és k egyszerre páros vagy páratlan).

588. Írjuk ki részletesen a megadott egyenlőséget: $20n + 2k - 11 = n^3 + k^3$. A bal oldal maximális értéke 187, ezért n és k legfeljebb 5 lehet. Ezek szerint n-re és k-ra az alábbi értékek adódhatnak valamilyen sorrendben:

5; 2, 4; 3, 4; 1, 3; 2, 2; 1.

Az egyes eseteket vizsgálva az egyedüli megoldás: $n = 2$, $k = 3$.

589. $n^5 + n^4 + 1 = n^5 + n^4 + n^3 - n^3 + 1 = \left(n^2 + n + 1\right)\left(n^3 - n + 1\right)$. Ha ez a szám prím, akkor csak $n^3 - n + 1 = 1$ és $n^2 + n + 1 = p$ prím lehet. Innen az egyedüli megoldás: $n = 1$.

590. Ha az eredeti szám $10^n + K$, akkor $3 \cdot (10^n + K) = 10K + 1$, ahonnan $3 \cdot 10^n - 1 = 7K$. A bal oldalon egy $n + 1$ jegyű szám szerepel, melynek első jegye 2, az összes többi jegye 9. Kérdés, melyik a legkisebb ilyen szám, amelyik 7-tel osztható. Ez a 299999, így a keresett szám: 142 857.

591. A feltételek alapján $(10b + a)^2 - (10a + b)^2 = 9 \cdot 11 \cdot (b - a)(a + b) = k^2$, azaz szükséges, hogy $11 \cdot (b - a)(a + b)$ négyzetszám legyen. Ez csak akkor teljesül, ha $a + b = 11$ és $b - a$ egyjegyű négyzetszám. Kapjuk: $a = 5$, $b = 6$. $65^2 - 56^2 = 33^2$.

592. A négyzetgyök alatt négyzetszámnak kell szerepelnie:

$$x^4 + 17x^2 + 60 = k^2,$$

ahonnan

$$\left(x^2 + \frac{17}{2} + k\right) \cdot \left(x^2 + \frac{17}{2} - k\right) = \frac{49}{4},$$

$$(2x^2 + 17 + 2k) \cdot (2x^2 + 17 - 2k) = 49.$$

A 49 szorzattá alakítása után kapjuk, hogy csak $x = \pm 2$ lehetséges, így a keresett pontok:

(2; 12), (−2; 12).

593. A feltételek szerint $a^3 + a^3 + ab + c = a^3$ és $b^3 + ab^2 + b^2 + c = b^3$. A két egyenletet kivonva egymásból azt kapjuk: $a^2 + ab + b = 0$, ahonnan

$$b = -\frac{a^2}{a+1} = -\frac{a^2-1+1}{a+1} = -\frac{a^2-1}{a+1} - \frac{1}{a+1} = -(a-1) - \frac{1}{a+1}.$$

Ez csak akkor lesz egész, ha $a = -2$ $(a \neq 0)$. Ezzel $b = 4$ és $c = 16$.

594. Vizsgáljuk általában az $n^{n+1} + (n+1)^n$ összeget $n(n+1)$-gyel való oszthatóság szempontjából.

$n^{n+1} = n \cdot n^n = n \cdot [(n+1) - 1]^n = N \cdot (n+1) + (-1)^n$.

$(n+1)^n = (n+1)(M \cdot n + 1^{n-1}) = M \cdot n \cdot (n+1) + n + 1$.

Ezek szerint – mivel $n = 2005$ páratlan –:

$n^{n+1} + (n+1)^n = n(n+1)(N+M) + 1$,

vagyis az osztási maradék 1.

595. Írjuk fel 9 tetszőleges egymás utáni egész szám négyzetének összegét:

$a_1 = n^2 = n^2$,
$a_2 = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$,
$a_3 = (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$,
$a_4 = (n+3)^2 = n^2 + 6n + 9$,
$a_5 = (n+4)^2 = n^2 + 8n + 16$,
$a_6 = (n+5)^2 = n^2 + 10n + 25$,
$a_7 = (n+6)^2 = n^2 + 12n + 36$,
$a_8 = (n+7)^2 = n^2 + 14n + 49$,
$a_9 = (n+8)^2 = n^2 + 16n + 64$.

Azt vehetjük észre $a_1 + a_6 + a_8 = a_2 + a_4 + a_9 = a_3 + a_5 + a_7 + 18$. Ennek megfelelően az alábbi csoportokat alakíthatjuk ki:

$1^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + 15^2 + 17^2 + 21^2 + 23^2 + 25^2 = 2310$,
$2^2 + 4^2 + 9^2 + 12^2 + 14^2 + 16^2 + 20^2 + 22^2 + 27^2 = 2310$,
$3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 18^2 + 19^2 + 24^2 + 26^2 = 2310$.

596. A feltételek szerint $(b-d)^3 + b^3 = (b+d)^2$, ahol b a középső kocka éle. Feltehetjük, hogy $(b; d) = 1$, ellenkező esetben mindkét oldalt egyszerűsíthetjük a legnagyobb közös osztó köbével. Az egyenlőségből $b^2(b - 6d) = 2d^3$ adódik. Ha b páros, akkor a bal oldal osztható 8-cal, így d-nek is párosnak kell lennie, ami $(b; d) = 1$ miatt lehetetlen. Ha b páratlan, akkor $b - 6d$ is páratlan, így a bal oldal páratlan, de a jobb oldal páros.

597. $\frac{a+b}{2} = 10n + k$ és $\sqrt{ab} = 10k + n$. Az első egyenletből a-t kifejezve és a második egyenletbe helyettesítve ezt kapjuk:

$b^2 - 2b(10n+k) + (10k+n)^2 = 0$.

Szükséges, hogy ennek az egyenletnek a diszkriminánsa négyzetszám legyen:

$4(10n+k)^2 - 4(10k+n)^2 = s^2$, ahonnan $11(n+k)(n-k) = r^2$.

Innen – ahogyan azt a 287. feladatban is láttuk –: $n = 65$, $k = 56$, tehát

$$\frac{a+b}{2} = 65 \quad \text{és} \quad \sqrt{ab} = 56.$$

Az egyenletrendszer megoldása a keresett két szám: 98 és 32.

III

598. $\overline{444...4} = 4 \cdot \overline{111...1}$. Mivel a 4 négyzetszám, így elegendő megmutatni, hogy az 1-en kívül nem létezik olyan négyzetszám, melynek minden számjegye 1. Az ilyen szám 4-gyel osztva 3 maradékot ad, de páratlan négyzetszám 4-es maradéka csak 1 lehet. Tehát az egyetlen $\overline{444...4}$ alakú négyzetszám a 4.

599. $\overline{aabb} = 1100a + 11b = 11(100a + b)$. Ha ez négyzetszám, akkor $100a + b$-nek, azaz $a + b$-nek 11-gyel oszthatónak kell lennie. A négyzetszámok lehetséges végződései miatt b lehetséges értékei: 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9, így az alábbi esetek lehetnek csak:

2299, 5566, 6655, 7744.

Ezek közül csak az utolsó négyzetszám, így az egyedüli megoldás: $\overline{aabb} = 7744 = 88^2$.

600. Legyen $(a;c) = n$, azaz $a = np$, $c = nq$, ahol $(p, q) = 1$. Ekkor $npb = nqd$, azaz $pb = qd$, ahonnan p osztója d-nek, vagyis $d = pd_1$. Ezek szerint $pb = qpd_1$, ahonnan $b = qd_1$. Tehát

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = n^2p^2 + q^2d_1^2 + n^2q^2 + p^2d_1^2 = (p^2 + q^2)(n^2 + d_1^2).$$

Mivel p, q, n és d_1 mindegyike pozitív egész, ezért ez nyilván nem lehet prím.

601. A feltételekből következik, hogy csak $a = 1$ és $d \leq 3$ lehetséges. Ezek szerint

$(10 + b)^2 = 100 + 20b + b^2 = 100 + 10c + d$ és

$(10b + 1)^2 = 100b^2 + 20b + 1 = 100d + 10c + 1$.

Innen $b^2 = d$, vagyis d értéke csak 1, 4 vagy 9 lehet. Ennek megfelelően a keresett számok:
$11^2 = 121$, vagy $12^2 = 144$ és $21^2 = 441$, vagy $13^2 = 169$ és $31^2 = 961$.

602. Egy páratlan szám négyzete: $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1$. Látható, hogy 8-cal osztva 1 maradékot ad.
Ha $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{221}^2 = x_{222}^2$, és mind a 222 szám páratlan lenne, akkor a jobb oldal 8-cal osztva 1 maradékot adna, míg a bal oldal 5-t, ami lehetetlen.

603. A feltételek szerint

$$S = n + n + 1 + n + 2 + \ldots + n + 8 = \frac{(2n + 8) \cdot 9}{2} = (n + 4) \cdot 9,$$

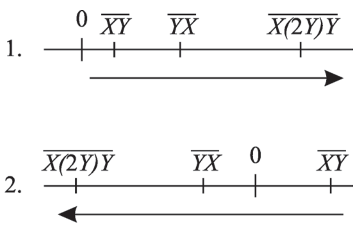
$$S = k + k + 1 + k + 2 + \ldots + k + 9 = \frac{(2k + 9) \cdot 10}{2} = (2k + 9) \cdot 5,$$

$$S = r + r + 1 + r + 2 + \ldots + r + 10 = \frac{(2r + 10) \cdot 11}{2} = (r + 5) \cdot 11.$$

Mivel $[5; 9; 11] = 495$, így $n = 51$, $k = 45$, $r = 40$.
A legkisebb ilyen szám tehát a 495 és az összegek:

$$51 + 52 + 53 + 54 + 55 + 56 + 57 + 58 + 59 = 495,$$
$$45 + 46 + 47 + 48 + 49 + 50 + 51 + 52 + 53 + 54 = 495,$$
$$40 + 41 + 42 + 43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48 + 49 + 50 = 495.$$

604.



604. Két eset lehetséges:
Első esetben: $3(\overline{YX}-\overline{XY})=\overline{X(2Y)Y}-\overline{YX}$, ahonnan $8Y=63X$. Ennek nyilván nincs szóba jöhető megoldása.
A *második esetben:* $3(\overline{YX}+\overline{XY})=\overline{X(2Y)Y}-$ $-\overline{YX}$, ahonnan $Y=3X$. De $Y<5$, így csak $Y=3$ és $X=1$ lehetséges. Tehát a kerékpáros sebessége 44 km/h.

605. $k=p^4+s^4+1$, $n=7$, tehát p^4+s^4+ $+13=$ prímszám. Mivel bármely prímszám negyedik hatványa 3-mal osztva 1 maradékot ad, ezért az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha p és s valamelyike 3. De $z<s<p$ miatt csak $s=3$ és így csak $z=2$ lehetséges. Ekkor $p^4+94==$ prím. Mivel bármely $p>5$ prím negyedik hatványa 1-re végződik, ezért csak $p=5$ jöhet szóba, és $5^4+94=719$ valóban prímszám. Tehát a dobozban levő golyók száma: $625+81+16=722$.

606. A közös nevezővel való szorzás után $bc+9c-10b=0$ alakra jutunk, melyből azt kapjuk: $(b+9)(10-c)=90$. Innen csak a $90=5\cdot 18=6\cdot 15=$ $=9\cdot 10$ szorzatok jöhetnek szóba. Ekkor $c=5$, $b=9$ vagy $c=4$, $b=6$.

Tehát a keresett számok: $\dfrac{1999\ldots99}{999\ldots995}=\dfrac{1}{5}$ vagy $\dfrac{1666\ldots66}{666\ldots664}=\dfrac{1}{4}$.

607. Azon sorszámú lábfejeket nem kell lecserélni, melyek osztóinak a száma 12-nek többszöröse. Keressük az ilyen 100-nál nem nagyobb számokat. Egy ilyen szám prímtényezős alakja: p^{11}, vagy $p\cdot q^5$, vagy $p^2\cdot q^3$, vagy $p\cdot q\cdot r^2$. Első esetben nem kapunk megoldást. A második esetben, figyelembe véve a lehető legkisebb prímeket, 96-t kaphatunk csak. A harmadik esetben csak a 72 adódik. A negyedik esetben a megoldások: 60, 84 és 90.

608. $4\cdot\overline{abcd}=\overline{dcba}$ vagy $9\cdot\overline{abcd}=\overline{dcba}$. Figyelembe véve a négyzetszámok végződéseit és azt, hogy $a<3$ kell legyen, ezért csak $a=1$ lehet, és így csak $9\cdot\overline{1bcd}=\overline{dcb1}$ adódhat. Innen $d=9$ és $b<2$. De $b=1$-re nem adódik megoldás, ezért csak $b=0$ lehet, ahonnan $c=8$. A keresett szám: 1089; $9\cdot 1089=(3\cdot 33)^2=9801$.

609. $100a+10b+c=a^3+b^3+c^3$ és $100a+10b+c+1=a^3+b^3+(c+1)^3$. (Az könnyen belátható, hogy $c\neq 9$.) A két egyenlet különbségéből
$(c+1)^3-c^3=1$, ahonnan $c=0$ adódik. Így $100a+10b=10(10a+b)=a^3+b^3$.
Vizsgálva a természetes számok köbeinek végződéseit, az
$1+9$, $2+8$, $3+7$, $4+6$, $5+5$ esetek jöhetnek szóba.
Ha $a=b=5$, akkor $110a=2a^3$, ahonnan $a^2=55$ nem megoldás. A többi esetet is megvizsgálva arra jutunk, hogy egyetlen esetben adódik csak megoldás, ha a és b egyike 3, a másik pedig 7: $3^3+7^3=370=10\cdot 37$. A keresett szám:

$370=3^3+7^3$ és ekkor $371=3^3+7^3+1^3$.

610. Ha k páros: $4^n + 9^n$. Ennek utolsó számjegye páratlan n-re 3, páros n-re 7. De ezek egyikére sem végződhet négyzetszám.
Ha k páratlan

$$2^{2n+1} + 3^{2n+1} = 2 \cdot 4^n + 3 \cdot 9^n = 2 \cdot (3+1)^n + 3 \cdot 9^n.$$

III

A kapott kéttagú összeg második tagja osztható 3-mal, az első pedig 3-mal osztva 2 maradékot ad, így az összeg hármas maradéka 2, de egy 3-mal nem osztható négyzetszám 3-mal osztva csak 1 maradékot adhat.
A $7^k + 8^k$ esetében hasonlóan járhatunk el.

611. *a)* $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 3n^2 + 2$. Egy négyzetszám 3-mal osztva csak 0 vagy 1 maradékot adhat.

b) $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 14$. A kapott eredmény páros, de 4-gyel nem osztható.

c) $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2+2)$. Ekkor $n^2 + 2$-nek 5-tel oszthatónak kell lennie, vagyis n^2-nek 3-ra vagy 0-ra kell végződnie. De sem 3-ra, sem 0-ra nem végződik négyzetszám.

d) $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 6n^2 + 6n + 19 = 6n(n+1) + 19$. Ennek első tagja osztható 4-gyel (n és $n+1$ valamelyike páros), így az összeg 4-gyel osztva 3 maradékot ad. De négyzetszám 4-gyel osztva csak 0 vagy 1 maradékot adhat.

e) $(n-3)^2 + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 7n^2 + 28$. Ha n páratlan, akkor n^2 4-gyel osztva 1 maradékot ad, így az összeg 4-gyel osztva 3 maradékot ad, de négyzetszám 4-gyel osztva csak 0 vagy 1 maradékot adhat. Ha n páros, $n = 2k$, akkor $28(k^2+1) = 4 \cdot 7 \cdot (k^2+1)$, így $k^2 + 1$-nek 7-tel oszthatónak kell lennie. De négyzetszám 7-tel osztva csak 0, 1, 2 vagy 4 maradékot adhat.

612. A definiált művelettel: $2(xy + x + y + 1) + 2 + xy + x + y + 1 + 1 = 2004$, ahonnan $xy + x + y = 666$, azaz $(x+1)(y+1) = 23 \cdot 29$. Innen

$$x = 22,\ y = 28, \quad \text{vagy} \quad x = 28, \quad \text{vagy} \quad y = 22.$$

613. *a)* A köbszám csak páratlan lehet: $4p + 1 = (2k+1)^3$, ahonnan $2p = k(4k^2 + 6k + 3)$. Ezek szerint vagy $k = 1$ és $4k^2 + 6k + 3 = 2p$ vagy $k = 2$ és $4k^2 + 6k + 3 = p$. Előbbi esetben nem kapunk megoldást, utóbbi esetben $p = 31$. $4 \cdot 31 + 1 = 125 = 5^3$.

b) Az előző megoldás gondolatmenetét követve arra jutunk, hogy nincs ilyen prímszám.

c) Az előbbi esetekben közölt gondolatmenet alapján: $p = 241$. $14 \cdot 241 + 1 = 3375 = 15^3$.

614. A kérdéses szám nem lehet egyjegyű, kétjegyű, illetve öt- vagy annál több jegyű. Ha a legnagyobb ilyen tulajdonságú szám $\overline{abcd}$ négyjegyű, akkor $\overline{ab} = a + b + c + d$, ahonnan $10a + b = a + b + c + d$, azaz $9a = c + d$. Ekkor $a \leq 2$. Ha $a = 2$, akkor $c = d = 9$. Mivel b-t tetszőlegesen választhatjuk meg, ezért a legnagyobb ilyen tulajdonságú szám a 2999.

615. A megadott számokat részletesen kiírva és összeadva azt kapjuk:

$302\,220a + 31113b = 7 \cdot 43174a + 2a + 7 \cdot 4444b + 5b.$

Ez akkor és csak akkor lesz 7-tel osztható, ha $2a + 5b$, azaz $2a - 2b = 2(a - b)$, tehát $a - b$ (vagy $b - a$) osztható 7-tel. Innen $a = 9$, $b = 2$ vagy $a = 8$, $b = 1$ vagy $a = 7$, $b = 0$ vagy $a = 2$, $b = 9$ vagy $a = 1$, $b = 8$.

616. Legyen $a_1^n + a_2^n + a_3^n = a_4^n + a_5^n + a_6^n$. Ha mindkét oldal páros, akkor mindkét oldalon a páratlanok száma 0 vagy páros, így a hat szám közül a páratlanok száma páros, tehát az összeg nem lehet prím. Ha mindkét oldal páratlan, akkor mindkét oldalon a páratlanok száma páratlan, így a hat szám között a páratlanok száma ismét páros, tehát az összeg ekkor sem lehet prím.

617. Legyen a az ágak száma. Ekkor a szaloncukrok száma a^2. Dőlés után $a - 2$ága maradt a fának. Ha minden ágról c db cukrot csent el Andris, akkor a fán maradt cukrok száma: $(a - 2)(a - c)$. A feltételek szerint $a^2 = 2(a - 2)(a - c)$, ahonnan

$a^2 - 2(2 + c)a + 4c = 0.$

Ez utóbbi egyenletnek csak akkor lehet a-ra nézve egész megoldása, ha a diszkriminánsa négyzetszám: $4(2 + c)^2 - 16c = k^2$, ahonnan $(2 + c)^2 - 4c = c^2 + 4 = r^2$ vagyis $r^2 - c^2 = 4$, azaz $(r - c)(r + c) = 4$. Ez utóbbinak csak az $r = 2$, $c = 0$ a szóba jöhető megoldása, ami érdektelen, vagyis Katinak volt igaza.

618. Ahhoz, hogy minden színből legyen a kivett golyók között, legkevesebb $(p - 1)q + 1$ darabot kell kivennünk; ahhoz, hogy valamely színből minden golyót kivegyünk legkevesebb $(q - 1)p + 1$ darabot kell kivennünk. A feltételek szerint

$q(p - 1) + 1 + 17 = p(q - 1) + 1,$ ahonnan $q - p = 17.$

De ha két prím különbsége 17, akkor csak $p = 2$ és így $q = 19$ lehet. Ezek valóban prímek, így a dobozban levő golyók száma: 38.

619. Nincs a feltételeknek eleget tevő n. Ugyanis $2^{4n+2} - 2$ utolsó számjegye minden n-re 2. De három egymást követő pozitív egész szám szorzatának utolsó számjegye csak 0, 4 vagy 6 lehet.

620. $p^n + 1 = k^2$. Ha p páros, akkor k páratlan, vagyis $2^n = 4r(r + 1)$. Ez csak úgy teljesülhet, ha $r = 1$, ahonnan $n = 3$. Ha p páratlan, akkor $k = 2r$ páros, vagyis $p^2 = (2r + 1)(2r - 1)$. Legyen $2r - 1 = p^i$, ekkor $2r + 1 = p^{2-i}$, tehát $2 = p^i\left(p^{n-2i} - 1\right)$. Ez csak úgy lehet, hogy $p^i = 1$, azaz $i = 0$, és ezzel $p^n - 1 = 2$, azaz $p = 3$ és $n = 1$. A feltételeknek tehát két prímszám felel meg: $p = 2$ és $n = 3$ $(2^3 + 1 = 3^2)$, valamint $p = 3$ és $n = 1$ $(3^1 + 1 = 2^2)$.

621. Ha $p^{2q} + q^{2p}$ prímszám, akkor p és q valamelyike páros; legyen $p = 2$. Ekkor $4^q + q^4$=prímszám. Mivel q páratlan, ezért 4^q utolsó számjegye 4. A páratlan prímek negyedik hatványai 1-re végződnek, így $4^q + q^4$ utolsó számjegye 5, vagyis nem lehet prím. Hátra van még a $q = 5$ eset: ekkor $4^5 + 5^4 = 1649 = 17 \cdot 97$, tehát ez sem prím.

622. A megadott kifejezés akkor és csak akkor egész, ha $7\sqrt{\overline{abcd}} = n^2$. De négyjegyű szám négyzetgyöke csak kétjegyű lehet, így $\sqrt{\overline{abcd}} = \overline{xy}$ és $7 \cdot \overline{xy} = n^2$.

Ezek szerint $\overline{xy} = 7r^2$, ahol csak $r = 3$ vagy $r = 2$ lehet. Ha $r = 2$, akkor $\overline{xy} = 28$, így ekkor $\overline{abcd} = 28^2 = 784$, ami nem lehetséges, hiszen ez a szám csak háromjegyű. Ha $r = 3$, akkor $\overline{xy} = 63$, ahonnan $\overline{abcd} = 63^2 = 3969$, ami megfelel a feltételeknek.

623. Egy 5-nél nagyobb prím utolsó számjegye csak 4-féle lehet. Az ezt megelőző számjegyek 10-féleképpen alakulhatnak. Így véve egy ilyen prím $10^{2005} + 1$ db hatványát, kell lenni közöttük két olyannak, melyek utolsó 2005 db számjegye rendre megegyezik. Legyenek ezek p^k és p^r $(k > r)$. Ekkor tehát $p^k - p^r = p^r(p^{k-r} - 1) = K \cdot 10^{2005}$. Mivel 10^{2005} osztója a bal oldali szorzatnak, de p^k-nal relatív prím, ezért osztója $p^{k-r} - 1$-nek, azaz $p^{k-r} = N \cdot 10^{2005} + 1$. Ennek a számnak az utolsó 2005 db számjegye pedig éppen a kívánt alakú.