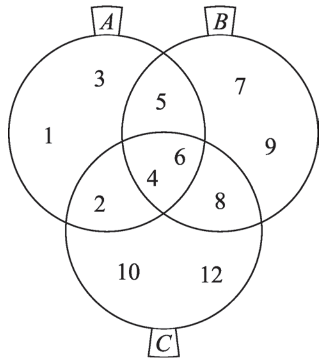
Halmazelmélet

II

Halmazok megadása

145. Amikor a halmazt körülírással vagy valamilyen tulajdonságával adjuk meg, bármilyen elemről egyértelműen el kell tudnunk dönteni, hogy beletartozik a halmazba vagy sem. Ezért nem határoznak meg halmazt az *a)*, *b)*, *l)* körülírások.
Pl. a *b)* esetben egy szőkésbarna hajú lányról nem dönthető el egyértelműen, hogy a halmazba tartozik vagy sem.
A *d)* esetben pl. a bejelentett lakcím alapján dönthetünk, a *k)* pedig üres halmaz, hiszen nincs legnagyobb prímszám.
A *c)* és *d)* csak adott időpontban határoz meg egyértelműen egy halmazt, hiszen mind az osztály összetétele, mind Budapest lakossága folyamatosan változhat.
Az *e)* és *j)* körülírást is pontosítani kell, hiszen különböző időszakokban más-más elemek tartoztak a halmazba. Pl. *e)*: Budapest hídjai napjainkban; *j)*: olimpiai versenyszámok Sydneyben, 2004-ben.
A többi esetben a körülírások, illetve diagramok halmazt határoznak meg. Pl.: az *f)* halmaz: {a gízai piramisok; Babilon falai; Szemirámisz függőkertje; az olümpiai Zeusz-szobor; az epheszoszi Artemiszion; a halikarnasszoszi Mauszóleion; a rhodoszi kolosszus}; vagy a *g)* halmaz „elemei”: *Lénárd Fülöp* (1862–1947), *Bárány Róbert* (1876–1936), *Zsigmondy Richard Adolf* (1865–1929), *Szent-Györgyi Albert* (1893–1986), *Hevesy György* (1885–1966), *Békésy György* (1899–1972), *Wigner Jenő* (1902–1995), *Gábor Dénes* (1900–1979), *Polányi János* (sz. 1929), *Wiesel Elie* (sz. 1928), *Harsányi János* (1920–2000), *Oláh György* (sz. 1927), *Kertész Imre* (sz. 1929), *Avram Hershko* (sz. 1937).

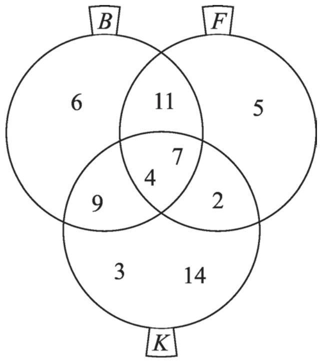
146.



146. *a)* Pl.: $A = \{x \in \mathbf{N}^+ \mid x \le 6\}$, $B = \{b \in \mathbf{N} \mid 4 \le b \le 9\}$, $C = \{2k \mid 1 \le k \le 6$ és $k \in \mathbf{Z}\}$.
b) Pl.: 146. ábra.
147. $A = \{2, 3, 5, 7\}$; $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$. A C halmaz elemeit adott időpontban, a konkrét osztály esetén sorolhatjuk fel.
148. Egy halmazban egy elemet csak egyszer sorolunk fel. Ezért a diákok lehetséges testmagasságainak halmaza cm-ben {158, 159, 161, 162, 165, 170, 171, 173, 174, 176, 177, 181}, ez 12 elemű halmaz. A diákok halmaza 16 elemű.

II

149.



149. Hivatkozzunk a tanulókra a sorszámukkal! Ekkor $B = \{4, 6, 7, 9, 11\}$, $F = \{2, 4, 5, 7, 11\}$, $K = \{2, 3, 4, 7, 9, 14\}$, s a Venn-diagram: (149. ábra).

150. *a)* A = {Belgium, Franciaország, Hollandia, Luxemburg, Németország, Olaszország, Nagy-Britannia, Dánia, Írország, Görögország, Spanyolország, Portugália, Ausztria, Finnország, Svédország, Ciprus, Csehország, Észtország, Lengyelország, Lettország, Litvánia, Magyarország, Málta, Szlovákia, Szlovénia};

b) $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$;

c) a végződések utolsó számjegye periodikusan ismétlődik, $C = \{1, 2, 4, 8, 6\}$;

d) $D = \{0, 3, -3\}$;

e) $E = \emptyset$;

f) $F = \{11, 14, 17, 20\}$;

g) $G = \emptyset$.

151. Az *a)*, *d)*, *e)*, *f)*, *g)*, *h)*, *l)* esetben racionálisak a számok.

A *b)* és *c)* esetben a $\sqrt{n}$ kifejezés ($n \in \mathbf{N}$) akkor, és csak akkor racionális, ha n négyzetszám; az *i)* esetben pedig a tizedes tört végtelen, nem szakaszos.

152. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Igaz állítások: *a)*; *d)*; *g)*.

$1 \in A$ és $A \in B$, de ebből nem következik, hogy $1 \in B$; általában ha $x \in A$ és $A \in B$, akkor ebből még nem következik, hogy $x \in B$.

153. Az alábbi táblázatban *i*-vel jelöltük a megfelelő halmazokra vonatkozó igaz állításokat.

	$\mathbf{Z}^+$	$\mathbf{Z}^-$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{Q}^*$	P
a)	*i*	*i*	*i*		
b)	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*
c)	*i*		*i*		
d)	*i*		*i*	*i*	
e)			*i*		
f)	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*

Néhány érdekesebb eset a 30-ból:

Az *a)* és *c)* esetek a halmazok zártságára kérdeznek rá; $\mathbf{Q}^*$ nem zárt sem az összeadás, sem a szorzás műveletére nézve. Vagyis két irracionális szám összege és szorzata is lehet racionális. Pl. π és $(1 - \pi)$ irracionális számok, összegük racionális; $\sqrt{2}$ és $\sqrt{8}$ irracionális számok, szorzatuk racionális. A *d)* esetben nem

II

tudunk olyan prímszámokat mondani, melyek szorzata is prímszám lenne; ez a definícióból következik. Az *e)* esetben a kivonás művelete általában kivezethet a halmazból: (–2) és (–5) negatív egész számok, $(-2)-(-5)$ már nem az; vagy pl. $(1+\sqrt{2})$ és $\sqrt{2}$ irracionális számok, de különbségük racionális. Az *f)* esetben ha $(p+2)$ és p ikerprímek, különbségük 2, ami prím; vagy $(p+2)-2=p$ is két prímszám különbsége ekkor.

154. $A=\{-2, 2\}$, $B=\{2\}$, $C=\{0, 2\}$, $D=\{2\}$, $E=\{0\}$, $F=\{2\}$, $G=\{2\}$.
Egyenlő halmazok: $B=D=F=G$.
A *h)* esetben az $(x-1)^2=0$ egyenletnek egyetlen kétszeres gyökével számoltunk: $x=1$. A matematikai szóhasználat (ebben és a hasonló esetekben) nem következetes: az $(x-1)(x-1)=0$ egyenletet úgy is tekinthetjük, mintha két gyöke lenne, s ezek egyenlők: $x_1=x_2=1$. Ekkor $H=\{2\}$, s $B=D=F=G=H$.

155. Üres halmazok: A, B, C, E, F, I (jelenlegi tudásunk szerint), J, K. Az üres halmazok egyenlők (csak egyetlen üres halmaz van). A G és H halmazoknak egy-egy elemük van, de nem egyenlők egymással.

156. *a)* 32; *b)* 12; *c)* 5; *d)* 3; *e)* 0; *f)* 0; *g)* ∞; *h)* ∞; *i)* ∞; *j)* 1; *k)* 8; *l)* 24.

Megjegyzések:

c) az utolsó számjegy periodikusan ismétlődik (ez igaz tetszőleges egész szám hatványainak utolsó számjegyére is);

g) már Euklidész i. e. 300 körül bebizonyította, hogy végtelen sok prímszám van (Euklidész: Elemek, IX. 20. tétel);

l) a negatív osztókkal is számolni kell.

157. *a)* $2\left(\sqrt{2}\text{ és }-\sqrt{2}\right)$; *b)* 0; *c)* 1.

158. *a)* 0; *b)* 0; *c)* 1; *d)* 1; *e)* 1; *f)* 1; *g)* 2; *h)* 3.
Nem ugyanazt jelenti pl. $\{\}$ és $\{\emptyset\}$; az előbbi az üres halmaz, az utóbbi pedig az a halmaz, amelynek egy eleme van, s ez az üres halmaz.
Az *f)* feladatban az üres halmazt kétszer soroltuk fel elemként, de ez csak egy elemnek számít.

159. $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, így $|A|=7$, $|B|=6$, $|C|=6$. Az igaz állítások: *a)*; *d)*.

160. *a)* $\{\}$ vagy $\emptyset$;

b) $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$;

c) $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$;

d) $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$;

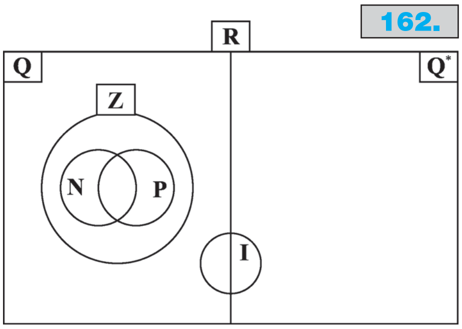
e) $\{a, b, c, d\}$;

f) A-nak 5 (vagy több) elemű részhalmaza nincs.

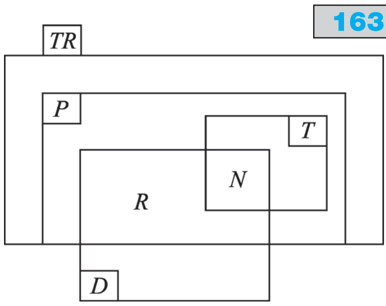
Észrevehetjük, hogy pl. az 1 elemű és a 3 elemű részhalmazok kiegészítik egymást, párba állíthatók, így ugyanannyian vannak.

161. Az elemszámok: $|A|=8$, $|B|=10$, $|C|=4$, $|D|=4$, $|F|=20$. E nem része H-nak, F pedig nem valódi részhalmaza.

162.



163.



162. A racionális és irracionális számok halmazának nincs közös eleme, egyesítésük a valós számokat adja. $\mathbf{I}\subseteq\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}^*\subseteq\mathbf{R}$, $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$, $\mathbf{P}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$; így pl. $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Q}$ stb. is teljesül.

163. Az egyes halmazokat téglalapokkal szemléltetve a 163. ábra Venn-diagramját kapjuk.
Részhalmazok: Pl. $N\subseteq R\subseteq P\subseteq TR$ vagy $N\subseteq T\subseteq P\subseteq TR$.

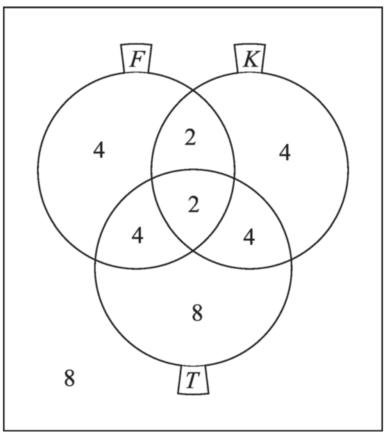
164. Igaz állítások: *a)*; *c)*; *i)*; *k)*; *l)*; *m)*; *o)*; *q)*; *s)*; *u)*.
Megjegyzések:
d) $1\in A$ és $A\in B$, de ebből nem következik, hogy $1\in B$; általában ha $x\in A$ és $A\in B$, akkor ebből még nem következik, hogy $x\in B$.
k), *o)*: Minden halmaz része önmagának.
u) Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

165. *a)* Igaz.
b) Nem eldönthető, pl. $A=\{1,\ \{a\}\}$ esetén $a\notin A$, míg $A=\{a,\ \{a\}\}$ esetén $a\in$ A.
c) $A=B$.

166. Igaz állítások: *a)*; *b)*. A *c)* állítás hamis, ellenpélda pl. $A=B$; míg a *d)* állítás csak véges halmazokra igaz.

167. *a)* 3-féle alak, 3-féle szín, 2-féle méret és 2-féle kitöltés lehetséges. A kombinatorika szorzási szabálya miatt $3\cdot 3\cdot 2\cdot 2=36$ darabból áll a készlet.

167.



$|F|=12$, $|K|=12$, $|T|=18$;
a szorzási szabály alapján
$|F\cap K|=4$, $|F\cap T|=6$,
$|K\cap T|=6$, $|F\cap K\cap T|=2$.
Szemléltessük az F, K, T halmazokat, majd írjuk be a megfelelő helyre az egyes tartományok elemszámát! Az $F\cap K\cap T$ tartomány elemszámának meghatározásával kezdhetjük s „belülről kifelé” haladhatunk. A belső tartományok elemszámainak összegzése után a külső $\overline{F\cup K\cup T}$ tartomány elemszámára 8 adódik. (Ezt egyébként számolhatjuk az $\overline{F}\cap\overline{K}\cap\overline{T}$ képlettel is.)
Az elemszámok: *b)* 12; *c)* 4; *d)* 20; *e)* 8; *f)* 12; *g)* 28; *h)* 10.

168. *a)* $|A| = 5$; *b)* $D \subseteq C$; $D \subseteq A$; *c)* $|\overline{A}| = 5$; *d)* a legnagyobb elemszám: $|C| = 6$.

169. $A = B$ akkor és csak akkor, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$. Tehát az A és B halmazok egyenlőségekor két állítást kell bizonyítanunk:
1. Minden $a \in A$ esetén $a \in B$ is teljesül (vagyis $A \subseteq B$).
2. Minden $b \in B$ esetén $b \in A$ is teljesül (vagyis $B \subseteq A$).
Thalész tétele és a tétel megfordítása a következő: a síkon azon pontok halmaza, amelyekből egy adott CD szakasz derékszög alatt látszik, a CD átmérőjű kör, kivéve a CD szakasz két végpontja.
Ez alapján két állítást kell igazolnunk:
i) a CD átmérőjű kör C-n és D-n kívüli tetszőleges P pontjára $CPD\sphericalangle = 90°$ (Thalész tétele);
ii) ha egy Q pontra $CQD\sphericalangle = 90°$, akkor Q rajta van a CD átmérőjű körön.
Halmazokkal megfogalmazva: ha
az A halmaz: a CD átmérőjű kör C-n és D-n kívüli pontjainak halmaza;
a B halmaz: azon Q pontok halmaza (a síkon), amelyekre $CQD\sphericalangle = 90°$;
akkor az $A = B$ egyenlőséget két lépésben igazolhatjuk.
Megmutatjuk, hogy
I. [1.-nek és i)-nek megfelelően]: ha $P \in A$, akkor $P \in B$ is teljesül; valamint
II. [2.-nek és ii)-nek megfelelően]: ha $Q \in B$, akkor $Q \in A$ is igaz.

170.

k	0	1	2	3	4	5
k elemű részhalmazok száma	1	5	10	10	5	1
$5 - k$ elemű részhalmazok száma	1	5	10	10	5	1

A táblázat alapján észrevehetjük, hogy egy 5 elemű halmaznak ugyanannyi k elemű, mint $5 - k$ elemű részhalmaza van; vagy a 0 és 5, az 1 és 4 stb. elemű részhalmazok száma megegyezik.
A páros elemszámú és a páratlan elemszámú részhalmazok száma egyenlő (16).
Az összes részhalmaz száma 32 $(= 2^5)$.
Mind az öt állítás általánosítható tetszőleges n elemszámú A halmazra $(n \in \mathbf{Z}^+)$.

Műveletek halmazokkal

171. Az igaz állítások: *a)*; *d)*; *h)*; *k)*.
(A *b)*, *c)*, *f)* esetekben a halmazműveletek eredménye nem halmaz.)

172. $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, így:
a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; *b)* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
c) $\{4, 5, 6\}$; *d)* $\{4, 5, 6\}$;
e) $\{1, 2, 3\}$; *f)* $\{7, 8\}$.

173. *a)* $\mathbf{Q}^*$; *b)* $\mathbf{R}_0^-$ (a negatív valós számok és a 0); *c)* azon valós számok, melyek nem egészek; *d)* $\{x \in \mathbf{R} \mid x \le -2 \text{ vagy } 3 < x\}$; *e)* $\mathbf{Q}$; *f)* $\emptyset$; *g)* $\mathbf{R}$.

II

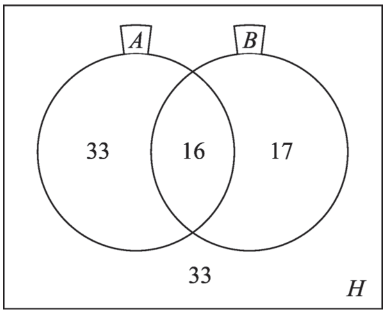
174. *a)* $\mathbf{Z}^{-}$;
b) pozitív páros számok halmaza;
c) a 6-nál nem kisebb természetes számokat és a 0-t tartalmazó halmaz;
d) $\{6k+3 \mid k \in \mathbf{Z}\}$.
e) A műveletet nem értelmezzük (általában $\overline{A}$ a H alaphalmazon csak $A \subseteq H$ esetén értelmezett).
Megjegyzés:
A feladat másképpen is értelmezhető: *először* tekintsük a $\{6k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ alaphalmazt, majd *ezután* ebből azokat az elemeket, amelyek nem $3k$ alakúak. Ekkor a $6k \pm 1$ és $6k \pm 2$ $(k \in \mathbf{Z})$ alakú számok halmaza a megoldás.
f) {6-nál nem kisebb természetes számok};
g) a negatív egész számokat, a 6-nál nem kisebb természetes számokat és a 0-t tartalmazó halmaz;
h) $\{6, 7, 8, 9, 10\}$;
i) $\overline{\overline{A}} = A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
j) $\overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{A} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

175. Az alaphalmaz elemszáma 99.
a) 49; *b)* 80; *c)* 66; *d)* 9; *e)* 89; *f)* 5; *g)* 91; *h)* 25; *i)* nem értelmezzük.

176. *a)* $\overline{B}$ = azon tanulók halmaza ebből a csoportból, akiket nem hívtak be biológiából a szóbeli fordulóra. (Vagy: a biológiából legfeljebb 18 pontot elért tanulók halmaza.) Hasonlóan értelmezhetjük az $\overline{F}$ és $\overline{K}$ halmazokat is.
b) $|B| = 12$, $|\overline{B}| = 15 - |B| = 3$; hasonlóan $|F| = 12$, $|\overline{F}| = 3$, $|K| = 5$, $|\overline{K}| = 10$.

177. *a)* és *b)*: legfeljebb kétjegyű, 2-vel vagy 3-mal osztható pozitív egész számok;
c) és *d)*: legfeljebb kétjegyű, 2-vel és 3-mal osztható pozitív egész számok (vagyis a 6-tal osztható számok);
e) azok a legfeljebb kétjegyű pozitív egész számok, amelyek párosak, de 3-mal nem oszthatók (vagyis a $6k+2$ és $6k+4$ alakú számok);
f) azok a legfeljebb kétjegyű pozitív egész számok, amelyek 3-mal oszthatók, de 2-vel nem (vagyis a $6k+3$ alakú számok);
g) azok a legfeljebb kétjegyű pozitív egész számok, amelyek a 2 és 3 közül legfeljebb az egyik számmal oszthatók (vagyis nem oszthatók 6-tal);
h) azok a legfeljebb kétjegyű pozitív egész számok, amelyek sem 2-vel, sem 3-mal nem oszthatók.
$|H| = 99$, $|A| = 49$, $|B| = 33$, $|A \cap B| = 16$. Szemléltessük a halmazokat!
A 177. ábrán az egyes tartományokba a részhalmazok elemszámát írtuk, a kitöltést az $A \cap B$ tartománnyal kezdtük.
Ez alapján az elemszámok: *a)* és *b)*: 66; *c)* és *d)*: 16; *e)* 33; *f)* 17; *g)* 83; *h)* 33.

177.



178. Igaz állítások: *b)*; *c)*; *d)*; *e)*.
A *c)* állításban az $A \subseteq H$ kitétel felesleges, hiszen $\overline{A}$-t csak $A \subseteq H$ esetén értelmezzük.

179. *a)* Azon diákok halmaza, akik az első vagy második fordulóban legalább 35 pontot értek el.
b) Azon diákok halmaza, akik a második és a harmadik fordulóban is legalább 35 pontot értek el.
c) Azon diákok halmaza, akik az első fordulóban elértek 35 pontot, de a harmadikban nem.
d) Azon diákok halmaza, akik a második fordulóban elértek 35 pontot, de a harmadikban nem.

A tanulókra sorszámukkal hivatkozhatunk. Ekkor $A = \{4, 5, 7, 8, 12, 13\}$, $B = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 13\}$, $C = \{3, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15\}$, s ez alapján az elemszámok: *e)* 12; *f)* 6; *g)* 3; *h)* 2.

180. *a)* és *b)*: (1), (2), (3); *c)* és *d)*: (2); *e)* (1); *f)* (3).

181. Mivel $B = \{8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ és $C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, ezért:
a) és *b)*: $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$; *c)* és *d)*: $\{12\}$; *e)* $\{2, 4\}$; *f)* $\{2, 4, 6, 12\}$.

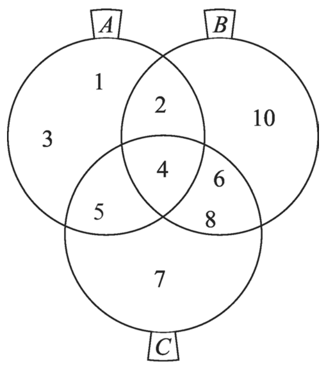
182. *a)* és *b)*: (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7); *c)* és *d)*: (4);
e) $(A \setminus B)$: (1)-es és (5)-ös tartományok; C: (4), (5), (6), (7) tartományok; így $(A \setminus B) \setminus C$: (1); *f)* A: (1), (2), (4), (5); $B \setminus C$: (2), (3); így $A \setminus (B \setminus C)$: (1), (4), (5).

183. A három művelet végrehajtásának sorrendje tetszőleges. Eredményül minden esetben az A, B, C és D halmazok egyesítését kapjuk. (Vagyis azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek legalább az egyik halmazban benne vannak.)

184. A három művelet végrehajtásának sorrendje tetszőleges. Eredményül minden esetben az A, B, C és D halmazok közös metszetét kapjuk. (Vagyis azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek mind a négy halmazban benne vannak.)

185. *a)* 185. ábra.
b) $(A \cup B) \setminus C = \{1, 2, 3, 10\}$,
$A \cup (B \setminus C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 10\}$;
c) $(A \cap B) \setminus C = \{2\}$, $A \cap (B \setminus C) = \{2\}$.

185.



186. *a)* $A \cup B$: (1), (2), (3), (4), (5), (6)-os tartományok; C: (4), (5), (6), (7); így $(A \cup B) \cap C$: (4), (5), (6);
b) (1), (2), (4), (5), (6);
c) (2), (4), (5), (6), (7);
d) (2), (4), (5);
e) $A \cup B$: (1), (2), (3), (4), (5), (6)-os tartományok; C: (4), (5), (6), (7); így $(A \cup B) \setminus C$: (1), (2), (3);
f) (1), (2), (3), (4), (5);
g) (6);
h) B: (2), (3), (4), (6); $C \setminus A$: (6), (7); így $B \cap (C \setminus A)$: (6);

II

i) (1), (2), (3), (4), (5);
j) (3);
k) (2);
l) B: (2), (3), (4), (6); $C \cap A$: (4), (5); így $B \setminus (C \cap A)$: (2), (3), (6);
m) (4), (5), (6).

187. $\overline{A}$ = {0 és a 10-nél nem kisebb egész számok}, $\overline{B}$ = {legfeljebb kétjegyű páros természetes számok} ∪ {legalább háromjegyű természetes számok}.

188. *a)* $\overline{A} = \{x \in \mathbf{Z} \mid -9 \le x \le -3, \text{ valamint } 6 \le x \le 9\}$;
b) $\overline{B} = \{x \in \mathbf{Z} \mid -9 \le x \le -6 \text{ vagy } x = 9\}$;
c) $\overline{\overline{A}} = A$;
d) Ha az alaphalmaz B, $\overline{A} = B \setminus A = \{-5, -4, -3, 6, 7, 8\}$.

189. *a)* {0};
b) $\mathbf{Z}_0^-$ (vagyis $\mathbf{Z}^- \cup \{0\}$);
c) $\mathbf{Z}^-$;
d) $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$; azon racionális számok halmaza, amelyek nem egészek (képlettel: $\frac{a}{b}$ alakú számok, ahol $a, b \in \mathbf{Z}$, $(a, b) = 1$, $b \ne \pm 1$ (és persze $a, b \ne 0$));
e) $\mathbf{Q}^*$;
f) nem értelmezzük, $\mathbf{Q} \not\subset \mathbf{Q}^*$;
g) nem értelmezzük, $\mathbf{N} \not\subset \mathbf{Q}^*$.

190. *a)* (3), (4);
b) (1), (4);
c) (4);
d) (1), (3), (4);
e) (2), (3), (4);
f) (1), (2), (4).

191. *a)* {1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19};
b) $H \setminus \{5, 10\}$;
c) $H \setminus \{1, 3, 5, 7, 9\}$;
d) {11, 13, 17, 19};
e) $H \setminus \{15\}$;
f) {1, 3, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19};
g) {11, 12, 13, … , 19}.

192. *a)* {a legalább egy fordulóban 35 pontot elért diákok};
b) {a mindhárom fordulóban 35 pontot elért diákok};
c) {azok a diákok, akik az első két fordulóban elérték a 35 pontot, de a harmadikban nem};
d) {a csak az első fordulóban 35 pontot elért diákok};
e) {a csak az első fordulóban 35 pontot elért diákok};
f) {a legfeljebb a 2. fordulóban 35 pontot elért diákok};
g) {azok a diákok, akik egyik fordulóban sem érték el a 35 pontot};
h) {azok a diákok, akik legfeljebb két fordulóban érték el a 35 pontot};

i) {azok a diákok, akik a második vagy harmadik fordulóban elérték a 35 pontot, de az elsőben nem};
j) {azok a diákok, akik az első fordulóban elérték a 35 pontot, de a másik két fordulóban nem}.

II

Észrevehetjük pl. a *d)* és *e)* válaszok alapján, hogy $(A \setminus B) \setminus C \equiv A \setminus (B \cup C)$.

193. *a)* (3), (6), (7), (8);
b) (7), (8);
c) (1), (2), (3), (5), (7), (8);
d) (1), (2), (3), (4), (5), (8);
e) (8);
f) (1), (2), (3), (5), (6), (7), (8);
g) (1), (2), (4), (5), (6), (7), (8);
h) (1), (5), (6), (7), (8);
i) (1), (2), (3), (7), (8);
j) (3), (7), (8);
k) (1), (3), (8);
l) (1), (3), (6), (7), (8).

194. *a)* $A \cup B$ tartományai: (1), (2), (3), (4), (5), (6); $(A \cup B) \setminus C$ tartományai: (1), (2), (3); $\overline{(A \cup B) \setminus C}$ tartományai: (4), (5), (6), (7), (8);
b) (6), (7), (8);
c) (1), (2), (3), (4), (5), (7), (8);
d) (1), (2), (3), (4), (5), (7), (8);
e) (6), (7), (8);
f) (1), (2), (4), (5), (6), (7), (8);
g) (1), (3), (4), (5), (6), (7), (8);
h) (1), (4), (5), (7), (8).

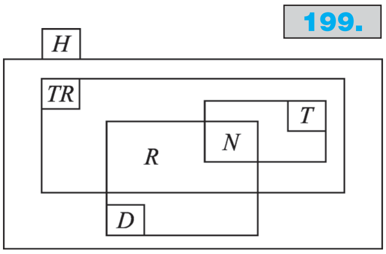
Észrevehetjük, hogy $\overline{(B \cap C) \setminus A} \equiv \overline{B \cap (C \setminus A)}$, vagyis $(B \cap C) \setminus A \equiv B \cap (C \setminus A)$.

195. *a)* Azok az elemek tartoznak az $(A \cup B) \cup C$ halmazba, melyek oszlopaira igaz, hogy az első három sorának valamelyikében 1-es van. $(A \cup B) \cup C = = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$;
b) $A \cap (B \cap C) = \{4\}$ (az aktuális oszlop első három sorában 1-esnek kell lennie);
c) $(A \cap B) \cup C = \{1, 2, 4, 5, 8, 9, 10\}$;
d) $A \cup (C \setminus D) = \{1, 2, 4, 5, 8, 9, 10\}$;
e) $A \cup (C \setminus B) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$;
f) $(A \cup C) \setminus (B \cup D) = \{5, 10\}$ (A vagy C sorában 1-es áll, B és D sorában 0);
g) $\overline{A \cup B} = \{3, 5, 7\}$ (A és B sorában is 0 áll);
h) $\overline{B \cap (C \setminus D)} = \overline{\{4, 9\}} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10\}$;
i) $\overline{A \cup B \cup C} = \{3, 7\}$ (az első három sorban 0-nak kell lennie);
j) $\overline{(B \setminus C) \setminus A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$ (nem $0 - 1 - 0$ kezdetű oszlopok);
k) $\overline{A} \cap \overline{C} = \{3, 6, 7\}$ (A és C sorában is 0 van).

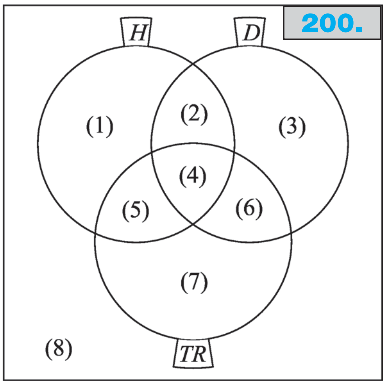
196. *a)* $[3; 7]$; *b)* $]5; 6[$; *c)* $[3; 5]$; *d)* $[6; 7]$.

II

199.



200.



197. Vegyük észre, hogy $D \subseteq C$! Ezért $C \cup D = C$, $C \cap D = D$, $D \setminus C = \emptyset$.

a) C; *b)* D; *c)* $]-2;\ 1[\ \cup \{5\}$; *d)* $\emptyset$;
e) $[-10;\ -2] \cup\ ]5;\ 10]$; *f)* D;
g) $\overline{C} = [-10;\ -2] \cup\ ]5;\ 10]$;
h) $\overline{D} = [-10;\ 1[\ \cup [5;\ 10]$;
i) $\overline{C \setminus D} = [-10;\ -2] \cup ([1;\ 10] \setminus \{5\})$; *j)* H.

198.

a) $[-5;\ -2[\ \cup\ ]7;\ 15]$;
b) $[-5;\ -2[\ \cup\ ]10;\ 15]$;
c) $[-5;\ 6] \cup\ ]10;\ 15]$;
d) $[-5;\ 7] \cup [11;\ 15]$;
e) $[-5;\ -2[\ \cup [11;\ 15]$;
f) $[-5;\ 6] \cup\ ]7;\ 15]$;
g) $\overline{(B \setminus C) \setminus A} = \overline{\emptyset} = H$;
h) $[-5;\ 1] \cup\ ]7;\ 15]$;
i) $\overline{(A \cup B) \cap C} = \overline{B \cap C} = [-5;\ 6] \cup\ ]10;\ 15]$;
j) $\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A \cup B} = [-5;\ -2[\ \cup\ ]10;\ 15]$;
k) $\overline{(A \cap B) \cup C} = \overline{B \cup C} = [-5;\ 1] \cup [11;\ 15]$;
l) $\overline{A \cap (B \cup C)} = \overline{A \cap B} = [-5;\ 1] \cup\ ]7;\ 15]$.

199. T és D közös része a négyzetek N halmazát, D és TR T-n kívüli közös része a rombuszok R halmazát adja (ábra).

200. Ha egy négyszög deltoid és trapéz is, akkor rombusz; ha pedig egy négyszög rombusz és húrnégyszög, akkor négyzet.

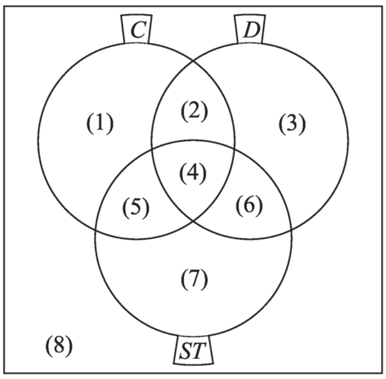
$H \cap D \cap T$ az ábra szerinti (4)-es tartomány, ez a négyzetek halmaza.

A nem négyzetek közül (2) a derékszögű deltoidok, (5) a húrtrapézok, (6) a rombuszok halmaza.

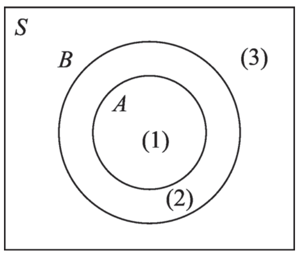
201. $C \cap T$ a rombuszok és téglalapok halmaza.

A középpontosan szimmetrikus négyszögek a paralelogrammák, C = {paralelogrammák}. A tengelyesen szimmetrikus négyszögek lehetnek deltoidok, ha a tükörtengely két csúcson megy át (jelöljük a halmazt D-vel); valamint lehetnek

201.



202.



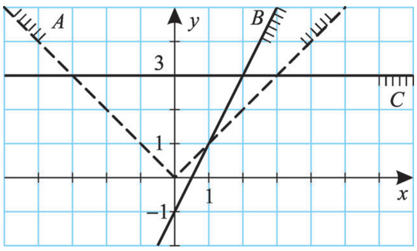
szimmetrikus trapézok, ha a tükörtengely két oldalon megy át (jelölés: ST). Ekkor $T = D \cup ST$, $C \cap T = C \cap (D \cup ST)$.
A $C \cap T$ halmaz a Venn-diagram szerinti (2)-es, (4)-es és (5)-ös tartományokat jelenti. (2) és (4) a rombuszok halmaza (ebből (4) a négyzeteké), (5) pedig azon téglalapoké, amelyek nem négyzetek.

202. $A \setminus B = \emptyset$; $B \setminus A = \{P \in S \mid 5 \text{ cm} < OP \le 8 \text{ cm}\}$ (az ábra szerinti (2)-es tartomány a belső határa nélkül); $\overline{A} = \{P \in S \mid 5 \text{ cm} < OP\}$ ((2)-es és (3)-as tartomány).

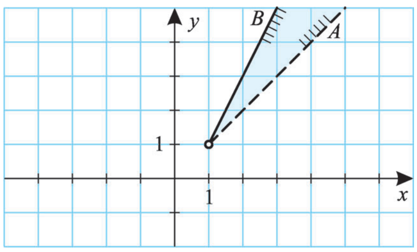
203. *a)* $\{P \in S \mid OP < 5 \text{ cm és } QP > 8 \text{ cm}\}$;
b) $\{P \in S \mid OP < 5 \text{ cm és } QP < 8 \text{ cm}\}$;
c) $\{P \in S \mid OP > 5 \text{ cm és } QP < 8 \text{ cm}\}$;
d) $\{P \in S \mid OP > 5 \text{ cm és } QP > 8 \text{ cm}\}$;
e) $\{P \in S \mid (OP < 5 \text{ cm és } QP > 8 \text{ cm}) \text{ vagy } (OP > 5 \text{ cm és } QP < 8 \text{ cm})$;
f) $\{P \in S \mid (OP < 5 \text{ cm és } QP > 8 \text{ cm}) \text{ vagy } (OP > 5 \text{ cm és } QP > 8 \text{ cm})\}$;
g) $\{P \in S \mid (OP < 5 \text{ cm és } QP < 8 \text{ cm}) \text{ vagy } (OP > 5 \text{ cm és } QP > 8 \text{ cm})\}$.

204. *a)*, *b)*, *c)*: Az A, B, C halmazok a 204/*a*. ábrán láthatók (a szaggatott vonallal jelölt határ nem tartozik a ponthalmazhoz).
d) $A \cap B$: 204/*d*. ábra, *e)* $A \cap \overline{C}$: 204/*e*. ábra, *f)* $\overline{B} \cap C$: 204/*f*. ábra

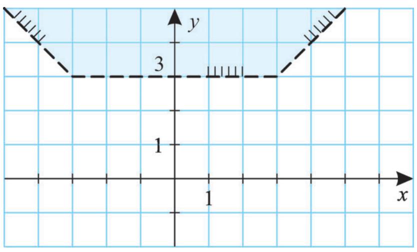
204/a.



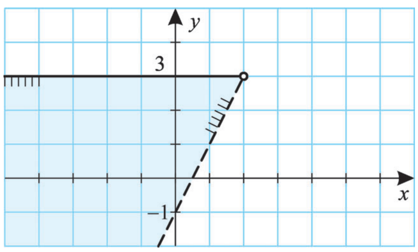
204/d.



204/e.



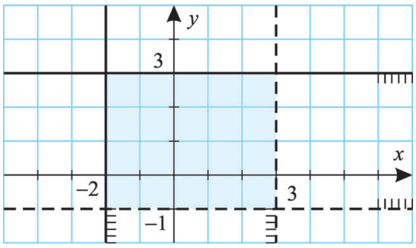
204/f.



205. *a)* $A \times B = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3)\}$;
b) $B \times A = A \times B$;
c) $A \times C = \{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (3; 2), (3; 3), (3; 4)\}$;
d) $C \times A = \{(2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (4; 1), (4; 2), (4; 3)\}$.
Általában is igaz, hogy ha $A = B$, akkor $A \times B = B \times A$.

II

206.



206. A ponthalmaz téglalap, két zárt és két nyílt oldallal.

207. *a)* $A \setminus B = \{1, 2\}$, $(B \setminus A) = \{6, 7\}$, így $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$
$= \{1, 2, 6, 7\}$;
b) $\{1, 2, 6, 7\}$;
c) $A \triangle B = \{1, 2, 6, 7\}$;
d) $(A \triangle B) \triangle C = \{1, 2, 6, 7\} \triangle$
$\triangle \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{1, 4, 7, 8, 10\}$;
e) $A \triangle (B \triangle C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \triangle$
$\triangle \{2, 3, 5, 7, 8, 10\} =$
$= \{1, 4, 7, 8, 10\}$.

Általában is igaz, hogy $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, valamint $(A \triangle B) \triangle C =$ $= A \triangle (B \triangle C)$.

208. *a)* $\emptyset$; *b)* $\emptyset$.

209. Az elemszámok: *a)* a^2; *b)* ab; *c)* 0; *d)* 0; *e)* 0 és $a + b$ közötti egész szám; *f)* a.

210. a) B; *b)* A; *c)* $\emptyset$; *d)* – *e)*: azon B-beli elemek halmaza, amelyek A-ban nincsenek benne; *f)* $\emptyset$.
A halmazok elemszáma: *a)* b; *b)* a; *c)* 0; *d)* $b - a$; *e)* $b - a$; *f)* 0.

211. Ha $A \cap B = B$, akkor $B \subseteq A$. *a)* A; *b)* azon A-beli elemek halmaza, amelyek B-ben nincsenek benne; *c)* $\emptyset$; *d)* $\emptyset$; *e)* azon A-beli elemek halmaza, amelyek B-ben nincsenek benne.

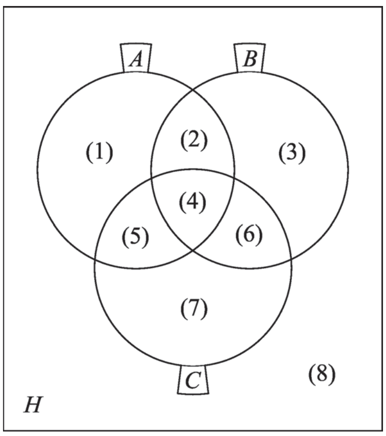
212. *a)* A; *b)* B; *c)* B; *d)* A. Az elemszámok: *a)* a; *b)* b; *c)* b; *d)* a.

213. Ha $A \setminus B = \emptyset$, akkor $A \subseteq B$. *a)* B; *b)* A; *c)* – *d)*: azon B-beli elemek halmaza, amelyek A-ban nincsenek benne; *e)* $\emptyset$.

214. Igaz mindegyik állítás, és a megfordításuk is.

215. Szemléltessük az A, B, C halmazokat Venn-diagrammal! (215–221. feladatok; az ábrán sorszámoztuk az egyes tartományokat.)
a) $A \subseteq \overline{A}$ tartományokkal felírva az $(1) \cup (2) \cup (4) \cup (5) \subseteq (3) \cup (6) \cup (7) \cup$ $\cup (8)$ tartalmazást jelenti, s ez csak akkor teljesülhet, ha $A = \emptyset$;

215–221.



b) az (1), (5), (3), (6) tartományok üres halmazok, vagyis $A = B$;
c) üres tartományok: (1), (5), (3), (6), így $A = B$.

216.
a) $(1) \cup (2) \cup (4) \cup (5) = (1) \cup (2) \cup$ $\cup (4) \cup (5) \cup (3) \cup (6)$, így (3), (6) üres halmazok, $B \subseteq A$;
b) $B \subseteq A$;
c) $(2) \cup (4) = (1) \cup (5)$, vagyis $A = \emptyset$;
d) mindig igaz.

217. *a)* $B = C$;
b) $(1) = (1) \cup (5)$, vagyis az (5) tartomány üres halmaz;
c) $(1) = ((1) \cup (5)) \cap ((1) \cup (2)) = (1)$, vagyis mindig igaz, azonosság.

218. *a)* $(1)\cup(2)\cup(5) = ((1)\cup(5))\cup((1)\cup(2)) = (1)\cup(2)\cup(5)$, tehát azonosság;
b) (2), (4), (5) üres halmazok;
c) $(2)\cup(4)\cup(5) = (2)\cup(4)\cup(5)\cup(6)\cup(7)$, innen (6), (7) üres halmazok.

219. *a)* $A\setminus(A\setminus B) = ((1)\cup(2)\cup(4)\cup(5))\setminus((1)\cup(5)) = (2)\cup(4)$, $A\cap B = (2)\cup(4)$, azonosság;
b) $(5) = ((4)\cup(5))\setminus((4)\cup(6))$ azonosság;
c) $(1)\cup(5)\cup(3)\cup(6) \subseteq (1)\cup(2)\cup(3)\cup(4)\cup(5)\cup(6)$, azonosság.

220. *a)* $(2) = ((1)\cup(2))\cap((2)\cup(3))$, azonosság;
b) $((1)\cup(2)\cup(3)\cup(4)\cup(5)\cup(6))\setminus((1)\cup(5)) = (2)\cup(3)\cup(4)\cup(6)$, azonosság.

221. *a)* $((1)\cup(2)\cup(4)\cup(5))\setminus((2)\cup(3)) = ((1)\cup(5))\setminus((4)\cup(5)\cup(6)\cup(7))$, innen $(1)\cup(4)\cup(5) = (1)$, vagyis (4), (5) üres halmazok, azaz $A\cap C = \emptyset$;
b) (2), (4), (5), (6) üres halmazok, vagyis semelyik két halmaznak sincs közös eleme.

222. *a)* $\emptyset$; *b)* A; *c)* $\emptyset$; *d)* H alaphalmaz; *e)* $\emptyset$; *f)* $\emptyset$; *g)* $A\setminus B$; *h)* $B\setminus A$; *i)* $(A\setminus B)\cup(A\cap B) = A$; *j)* $A \triangle B$.

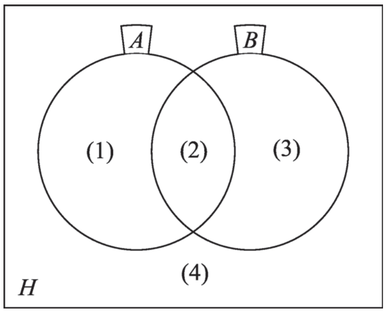
223. *a)* $A\cup B\cup C = C$, tehát hamis az állítás;
b) $A\cap B\cap C = A$, hamis az állítás;
c) $x\in A\setminus B$, hamis az állítás;
d) igaz, hiszen $x\in A$;
e) igaz a definíció alapján;
f) igaz a definíció alapján.

224. Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal, és sorszámozzuk az egyes tartományokat!

a) $A\cup B = (1)\cup(2)\cup(3)$, $\overline{A\cup B} = (4)$;
$\overline{A} = (3)\cup(4)$, $\overline{B} = (1)\cup(4)$,
$\overline{A}\cap\overline{B} = (4)$. Vagyis az egyenlet két oldala megegyezik, azonosságot kaptunk.

b) $\overline{A\cap B} = (1)\cup(3)\cup(4)$, $\overline{A}\cup\overline{B} =$
$= (1)\cup(3)\cup(4)$, azonosság.

224.



225. *a)* $(1) = \overline{\overline{A}\cup B}$, $(2) = \overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$, $(3) =$
$= \overline{\overline{B}\cup A}$, $(4) = \overline{A\cup B}$.

Ebből persze következik, hogy pl. $A \triangle B$ (és bármely kétváltozós halmazművelet) is megadható az unió és komplementer műveletek segítségével, hiszen $A \triangle B = (1), (3)$, vagyis $A \triangle B = \overline{\overline{A}\cup B} \cup \overline{\overline{B}\cup A}$.

b) $(1) = A\cap\overline{B}$, $(2) = A\cap B$, $(3) = \overline{A}\cap B$, $(4) = \overline{A}\cap\overline{B}$.
c) $(1) = A\setminus B$, $(2) = B\setminus\overline{A}$ vagy $(2) = A\setminus\overline{B}$, $(3) = B\setminus A$, $(4) = \overline{A}\setminus B$ vagy $(4) = \overline{B}\setminus A$.

226. Több megoldás is van.
a) $(1) = A\setminus(B\cup C)$ vagy $(A\setminus B)\setminus C$;
b) $(2) = (A\setminus C)\setminus(1)$, hiszen az (1) tartományt már kifejeztük;

II

c) A (2) és (5) tartományok a B és C halmazokat tekintve szimmetrikus helyzetűek, így (5) hasonlóan írható fel, mint (2).
Ezért $(4) = A \setminus ((1) \cup (2) \cup (5))$.

Figyelembe véve az egyes tartományok szimmetrikus helyzetét, az unió (és különbség) műveletek további alkalmazásaival nyilván bármely részhalmaz-kombinációk felírhatók.

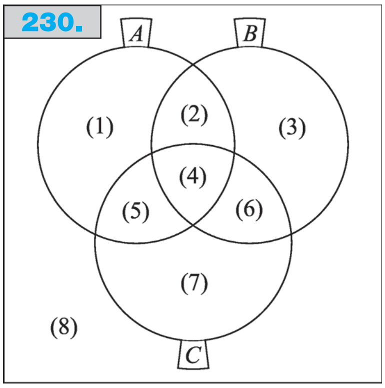
227. $A \cap B \cap C = (4)$, $\overline{A} \cap B \cap C = (6)$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C = (7)$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = (8)$.
Az $X \cap Y \cap Z$ kifejezésben rendre X helyére A-t, illetve $\overline{A}$-t, Y helyére B-t, illetve $\overline{B}$-t, Z helyére C-t, illetve $\overline{C}$-t helyettesítve a kifejezés $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ különböző értéket vehet fel, s ezek éppen az (1), (2), … , (8) tartományok lesznek. (Ez utóbbi könnyen belátható: egy adott tartomány esetén sorra el kell dönteni, hogy az A, B, C halmazoknak részhalmaza vagy sem.)
Ezzel az eljárással háromnál több halmaz esetén is bármelyik tartományt megadhatjuk. (Az n számú halmaz esetén 2^n-féle kifejezést írhatunk fel, s éppen ennyi a keletkezett tartományok száma.)

228. $B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B) = \{1, 3, 5\}$, $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

229. $B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B) = \{4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13\}$.
$A = (A \cup C) \setminus (C \setminus A) = \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11\}$.
Mivel $C \setminus A = \{12, 13, 14, 15\}$, s $A \cap B \cap C = \{11\}$, C hatodik eleme az $A \setminus B = \{1, 2, 3, 9, 10\}$ halmaz elemei közül bármelyik lehet. Öt megoldás van.

230. A tanulókra sorszámukkal hivatkozhatunk. Ekkor $A = \{4, 5, 7, 8, 12, 13\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 8, 12, 13\}$, $C = \{3, 5, 6, 8, 10, 13, 14\}$. Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal!
Az ábrán (1), (2), … , (8) jelöli az egyes tartományokat.

230.



a) $A \cup B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14\}$;
b) (1): $A \setminus (B \cup C) = \{4\}$;
c) (1), (3), (7) és (8)-as tartományok: $\{1, 2, 4, 6, 9, 10, 11, 14, 15\}$;
d) (1), (3) és (7)-es tartományok: $\{1, 4, 6, 10, 14\}$;
e) (2), (5) és (6) tartományok: $\{3, 7, 12\}$;
f) (5) és (7) tartományok: $C \setminus B = \{6, 10, 14\}$;
g) ez a körülírás nem teljesül az (1), (3) és (7)-es tartományokra, tehát a *d)* halmaz komplementerét kapjuk: $\{2, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15\}$.

Halmazműveletekkel az összes tartományt megadhatjuk. Pl. a *d)* feladatban $(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B)) = (A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$; vagy egy másik lehetőség: $(A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C))$.

Halmazok elemszáma

II

231. $A = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$, $B = \{3, 6, 9, \dots, 99\}$, $C = \{1, 4, 9, 16, \dots, 100\}$, $D = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots, 97\}$.

a) $|A| = 50$.

b) $|B| = 33$.

c) $|\overline{C}| = 90$, hiszen 10 négyzetszám van H-ban.

d) $|D| = 25$.

e) $|A \cup B| = 50 + 33 - 16 = 67$. $|A \cap B| = 16$, s ezt számoltuk $|A|$-ban és $|B|$-ban is, tehát egyszer le kell vonni. $A \cap B$ a 6-tal osztható számokat tartalmazza H-ból.

f) $|B \cap C| = 3$; $B \cap C = \{3^2, 6^2, 9^2\}$.

g) $|B \cap D| = 1$; a H-beli prímszámok közül csak a 3 osztható 3-mal.

h) $|A \setminus C| = 45$, mert $A \cap C = \{2^2, 4^2, 6^2, 8^2, 10^2\}$.

i) $|\overline{A \cup C}| = 45$, mert $|A \cup C| = 55$.

j) $|\overline{A \setminus C}| = 55$.

k) $|\overline{C \setminus A}| = 95$, mert $C \setminus A = \{1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2\}$.

l) $|\overline{C \cap D}| = 100$, mert $C \cap D = \emptyset$.

232. *a)* $|A \cap B| \in \{0, 1, \dots, 8\}$;

b) $|A \cup B| \in \{11, 12, \dots, 19\}$;

c) $|A \setminus B| \in \{0, 1, \dots, 8\}$;

d) $|B \setminus A| \in \{3, 4, \dots, 11\}$.

A szélsőértékeket $A \cap B = \emptyset$, illetve $A \subseteq B$ esetekben kapjuk.

233. $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$, $(A \cup B) \setminus A = A \setminus B$. $|A| = 5$, $|B| = 3$. Érdemes a halmazokat Venn-diagrammal szemléltetni.

234. $|A \cap B| = |A| - |A \setminus B| = 4$. Innen $|B \setminus A| = 5$, $|A \cup B| = |A| + |B \setminus A| = 12$. Másképpen: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 7 + 9 - 4 = 12$. Érdemes a halmazokat Venn-diagrammal szemléltetni.

235. Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal, s jelöljük (1), (2), (3), … , (7)-tel az egyes tartományok elemszámait (235/I. ábra)!

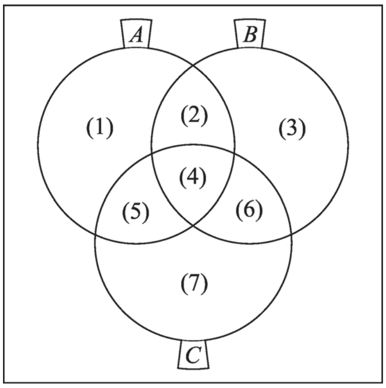
Ekkor 7 egyenletet kapunk 7 ismeretlennel:

1. (1) + (5) = 5,
2. (2) + (3) = 5,
3. (6) + (7) = 4,
4. (4) = 1,
5. (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) = 13,
6. (1) + (2) + (4) + (5) + (6) + (7) = 12,
7. (4) + (5) + (6) + (7) = 7.

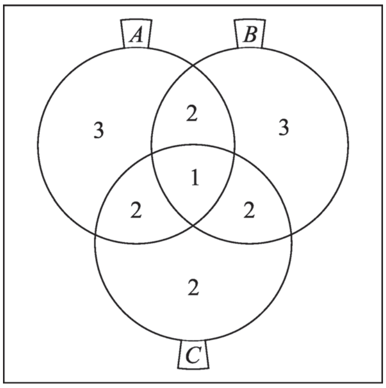
Az első 4 egyenlet összeadásából $|A \cup B \cup C| = 15$, az 5. egyenletből (7) = 2, a 6. egyenletből (3) = 3, a 7., 4. és 3. egyenletből (5) + (6) + (7) = 6, (5) = 2.

II

235/I.



235/II.



Ezután az 1., 2., 3. egyenletekből rendre meghatározhatjuk (1), (2), (6) értékeit: (1) = 3, (2) = 2, (6) = 2.

A 235/II. ábrán tüntettük fel az egyes tartományok elemszámát.

$|A| = 8$, $|B| = 8$.

236. *a)* $|A \times B| = 24$;

b) $(A \times B) \cap (B \times A) = \{4, 5, 6\} \times \{4, 5, 6\}$, az elemszám 9.

237. *a)* Igaz.

b) Hamis; csak akkor igaz, ha $A \cap B = \emptyset$.

c) Igaz. $|A \cap B| \le |A|$ és $|A \cap B| \le |B|$ egyenlőtlenségek összeadásából következik. (Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $A = B$.)

d) Igaz. (Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $A \cap B = \emptyset$.)

e) Igaz. $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ és $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$.

f) Igaz. $A \cap B$ elemeit kétszer számoltuk.

g) Hamis. Lehet egyenlőség is, ha $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset$.

h) Igaz. $|A \cap B \cap C| \le |A|$, $|A \cap B \cap C| \le |B|$ és $|A \cap B \cap C| \le |C|$ egyenlőtlenségek összeadásából következik. (Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $A = B = C$.)

238. *a)* az első három sor valamelyikében 1-es van: 8;

b) az első három sor mindegyikében 1-es van: 1;

c) 7;

d) 7;

e) 6;

f) az 1. és 3. sor valamelyikében 1-es szerepel, feltéve, hogy a 2. és 4. sorokban 0 van: 2;

g) az első két sorban 0 szerepel: 3;

h) 8;

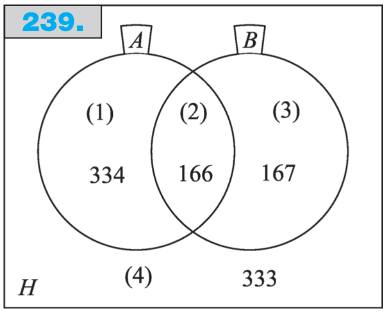
i) 2;

j) azok az elemek nem tartoznak ebbe a halmazba, amelyek B-ben benne vannak, de A-ban és C-ben nem: 9;

k) az 1. és 3. sorban 0 van: 3.

239. Legyen A és B a 2-vel, illetve 3-mal osztható számok halmaza. Ekkor $|A| = 500$, $|B| = 333$, $|A \cap B| = 166$ ($A \cap B$ a 6-tal osztható számok halmaza). Az alábbi Venn-diagramon az egyes tartományokat (1), (2), (3), (4)-gyel jelöltük, s $A \cap B$-ből kiindulva meghatároztuk az elemszámaikat.

a) 500;
b) 333;
c) 166;
d) $|A \cup B| = 667$;
e) $|A \triangle B| = 501$;
f) $|A \cup B| = 667$;
g) pontosan az egyik számmal vagy egyikkel sem osztható számok: (1), (3) és (4)-es tartományok: 834;
h) $|A \triangle B| = 501$;
i) az állítás az (1)-es tartomány számaira nem teljesül: 666;
j) az állítás az (1) és (3) tartományokra nem teljesül: 499;
k) (4)-es tartomány: 333.



240. 70% + 80% = 150%, ezért 50% = 15. Az osztálylétszám 30. Az ellenőrzést a szövegbe való visszahelyettesítéssel végezhetjük el.

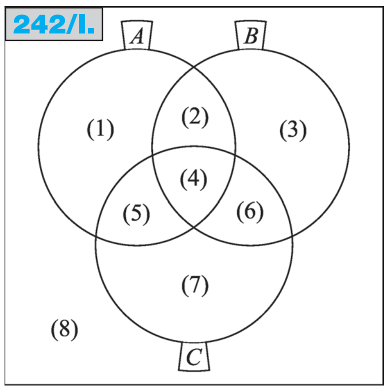
241. $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{19}{15}$, így az osztály $\frac{4}{15}$ része közepes tanuló. $30 \cdot \frac{4}{15} = 8$.

A közepesnél jobb tanulók száma $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{15}\right) \cdot 30 = 12$, jegyeik összege $4 \cdot 12 = 48$.

A közepesnél gyengébb tanulók száma $\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{15}\right) \cdot 30 = 10$, jegyeik összege $2{,}5 \cdot 10 = 25$.

Az összes tanuló jegyének összege $48 + 25 + 24 = 97$, az osztályátlag $\frac{97}{30} \approx 3{,}23$.

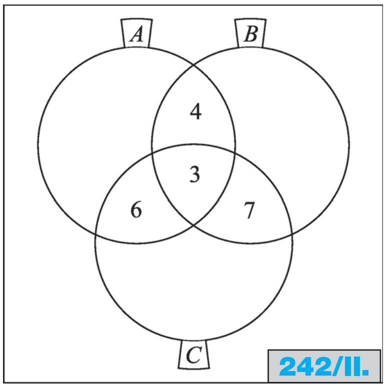
242. *Első megoldás:* Jelöljük az első, második, illetve harmadik feladatot hibátlanul megoldó tanulók halmazát rendre A, B, C-vel, és szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal! A 242/I. ábrán az egyes tartományok elemszámát (1), (2), (3), … , (8)-cal jelöltük, a feladat (8) meghatározása.



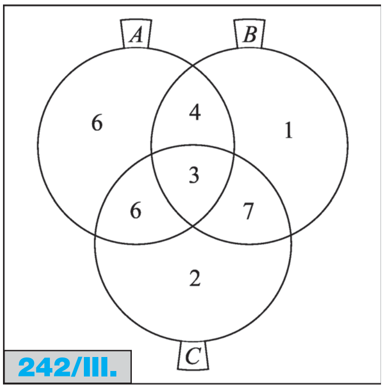
Ekkor a feltételek alapján a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

(1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + + (8) = 30,
(1) + (2) + (4) + (5) = 19,
(2) + (3) + (4) + (6) = 15,
(4) + (5) + (6) + (7) = 18,
(2) + (4) = 7,

II



242/II.



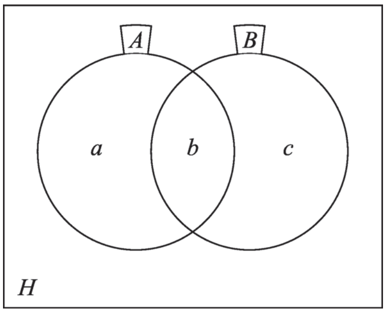
242/III.

(4) + (6) = 10,
(4) + (5) = 9,
(4) = 3.
Ebből a 8 egyenletből a 8 ismeretlent könnyen meghatározhatjuk. Az utolsó négy egyenletből (5) = 6, (6) = 7, (2) = 4, majd folytatva a visszahelyettesítést, a 2., 3. és 4. egyenletből (1) = 6, (3) = 1, (7) = 2 adódik. Végül az első egyenletből (8) = 1, vagyis egy diák nem tudott egyetlen feladatot sem megoldani.

Az egyenletrendszer megoldásának hátterében tulajdonképpen az egyes halmaztartományok elemszámának rendszeres meghatározása áll. Az $A \cap B \cap C$ halmaz elemszámát ismerve, „belülről kifelé” haladva először az $(A \cap B) \setminus C$, $(B \cap C) \setminus A$, $(A \cap C) \setminus B$ elemszámokat határozhatjuk meg (242/II. ábra).
Ezután az $A \setminus (B \cup C)$, $B \setminus (A \cup C)$, $C \setminus (A \cup B)$ tartományok következnek (242/III. ábra).
És végül $|A \cup B \cup C|$ ismeretében $\overline{A \cup B \cup C}$ meghatározható.

Második megoldás: $|A \cup B \cup C|$ meghatározásához az $|A|+|B|+|C|$ összegből le kell vonni a kétszeres tartományok elemszámát, $|A \cap B|+|B \cap C|+|A \cap C|$-t, hiszen ezeket kétszer számoltuk. Ekkor az $A \cap B \cap C$ tartományt háromszor hozzáadtuk és háromszor ki is vontuk az összegből, ezért még egyszer be kell számítanunk. Tehát: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$, s innen $\overline{A \cup B \cup C}$ számolható.

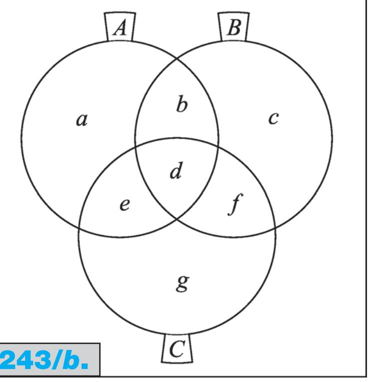
243/a.



Ha tudjuk, hogy van megoldás, akkor készen vagyunk. Egyébként az első megoldáshoz hasonló módon meg kell bizonyosodnunk arról, hogy léteznek a feltételeknek megfelelő halmazok.

243. *a)* A Venn-diagramon az egyes tartományok elemszámait rendre a, b, c-vel jelölve $a+b+c = a+b+b+c-b$ a bizonyítandó azonosság, s ez teljesül.

b) A Venn-diagramon az egyes tartományok elemszámait rendre $a, b, c, \ldots, g$-vel jelölve a bizonyítandó állítás: $a+b+c+$ $+d+e+f+g=a+b+d+e+b+c+$ $+d+f+d+e+f+g-(b+d)-(d+e)-$ $-(d+f)+d$, s ez teljesül.



243/b.

244. Jelöljük A, B, illetve C-vel az 1000-nél nem nagyobb pozitív egész számok közül a 2-vel, 3-mal, illetve 5-tel osztható számok halmazát! Ekkor $|A|=500$, $|B|=$ $=333, |C|=200$, $|A\cap B|=166$, $|B\cap C|=$ $=66$, $|A\cap C|=100, |A\cap B\cap C|=33$. (Pl. $A\cap B$ a 2-vel és 3-mal, vagyis 6-tal osztható számok halmazát jelenti.)

a) Alkalmazzuk a logikai szita formulát! $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-$ $-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|=500+333+200-166-66-100+$ $+33=734$;

b) $\overline{A\cup B\cup C}=1000-734=266$;

c) $|A|-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|=500-166-100+33=267$ (az $|A\cap B\cap C|$-t kétszer is levontuk $|A|$-ból, ezért egyszer hozzá kell adni);

d) $|A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|-3|A\cap B\cap C|=166+66+100-3\cdot 33=233$, hiszen az $A\cap B\cap C$ tartomány elemeit háromszor is számoltuk.

245. Szemléltessük a három halmazt Venn-diagrammal, s „belülről kifelé” haladva írjuk be az egyes tartományok elemszámát (ábra).

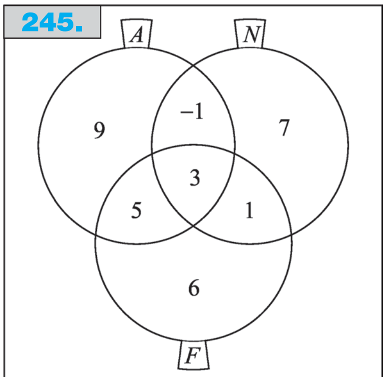
A feladatnak nincs megoldása, hiszen nem lehet negatív azon tanulók száma, akik angolul és németül tanulnak, míg franciául nem. (Az ellentmondás abból a feltételből következik, hogy angolul és németül ketten, míg mindhárom nyelven hárman tanulnak.)

Általában is igaz, hogy a logikai szita alkalmazásakor feltesszük, hogy létezik megoldás. Hogy ez valóban így van, arról ellenőrzéssel győződhetünk meg.

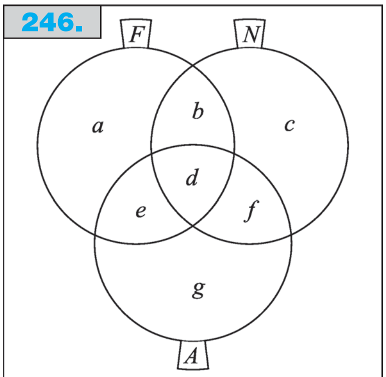
246. *a)* Mivel $20+22+25=67=2\cdot 30+7$, ezért legalább 7-en beszélnek mindhárom nyelven. A maximális érték 20, amikor az összes franciául beszélő a másik két nyelven is beszél; s minden 7 és 20 közötti érték lehetséges.

b) Az ábrán az elemszámokat $a, b, \ldots, g$-vel jelöltük. Ekkor $a+b+d+e=20$,

245.

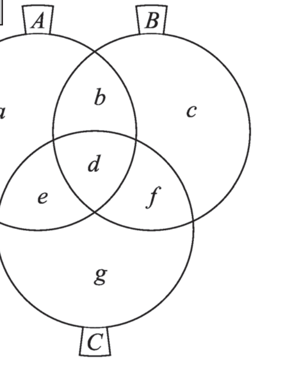


246.



II

248.



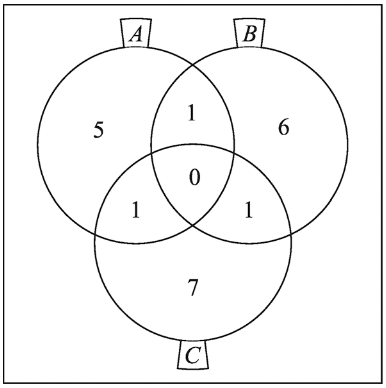
$b+c+d+f=22$, $d+e+f+g=25$, s mivel $a+b+c+d+e+f+g=30$, ezért $b+$ $+e+f+2\cdot d=37$. A kérdés $b+d+e+f$. Az *a)* feladat megoldásában láttuk, hogy $7\le d\le 20$; $b+d+e+f=37-d$, ezért a két vagy három nyelvet beszélők száma 17-től 30-ig terjedhet, vagyis legalább 17.

247. $|A|$ és $|B|$ osztója 60-nak.
$|A\cup B|\ge 10$; akkor lehet egyenlőség, ha pl. $|A|=6$, $|B|=10$ és $A\subseteq B$.
$|A\cup B|\le 61$; akkor lehet egyenlőség, ha pl. $|A|=1$, $|B|=60$ és $A\cap B=\emptyset$.
$|A\cap B|=0$, ha $A\cap B=\emptyset$.
$|A\cap B|\le 6$; akkor lehet egyenlőség, ha pl. $|A|=6$, $|B|=10$ és $A\subseteq B$.

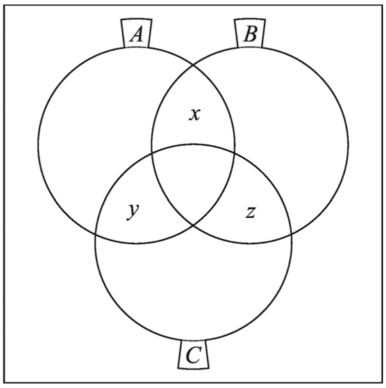
248. Az ábrán az elemszámokat $a, b, \dots, g$-vel jelöltük. Ekkor $a+b+d+e=$ $=7$, $b+c+d+f=8$, $d+e+f+g=9$, $d=3$. Innen $a+b+c+d+e+f+g=$ $=7+8+9-b-e-f-2\cdot 3$, vagyis $18-(b+e+f)$.
$|A\cup B\cup C|\le 18$; $|A\cup B\cup C|=18$ akkor lehet, ha $b=e=f=0$, vagyis $a=4$, $c=5$, $g=6$.
A $b+e$ legfeljebb 4 lehet, ha $a=0$; f legfeljebb 5 lehet, ha $c=0$.
Így $|A\cup B\cup C|=18-(b+e+f)\ge 18-(4+5)=9$.

249. *a)* $|A|+|B|+|C|=24$, de legalább három elemet kétszer számoltunk, ezért $|A\cup B\cup C|\le 21$. Ez a maximum elérhető. (A 249/I. ábrán az egyes részhalmazok elemszámait tüntettük fel.)
$|A|+|B|+|C|=24$, és minden elemet legfeljebb kétszer számolhattunk, ezért $|A\cup B\cup C|\ge 12$. A minimumot akkor kaphatjuk meg, ha minden elem pontosan két halmazhoz tartozik. (A 249/II. ábrán x, y, z-vel jelöltük a megfelelő részhalmazok elemszámait.)
Ekkor $x+y=7$, $x+z=8$, $y+z=9$. Az egyenletek összeadása után $x+y+z=$ $=12$, az egyenletrendszer megoldása $x=3$, $y=4$, $z=5$, tehát a minimum elérhető.

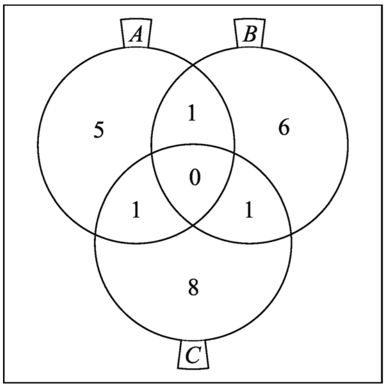
249/I.



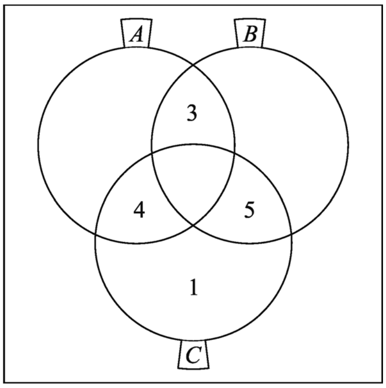
249/II.



249/III.

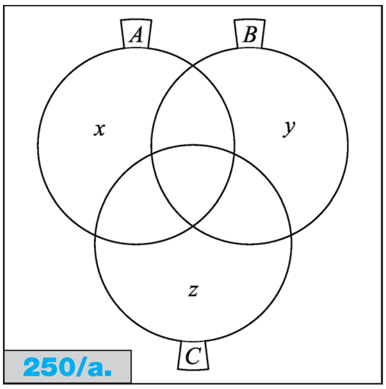


249/IV.

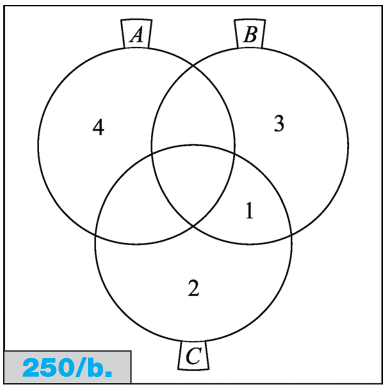


b) Az *a)* megoldás gondolatmenetével $|A \cup B \cup C| \le 22$, s ez a maximum elérhető (249/III. ábra).
A minimum meghatározásakor az $x + y = 7$, $x + z = 8$, $y + z = 10$ egyenletrendszernek nincs megoldása a természetes számok halmazán, ezért van olyan elem, amely csak egy halmazba tartozik. $|A \cup B \cup C| \ge 13$, az egyelőségre egy konstrukciót a 249/IV. ábra mutat.

250. *a)* $|A \cup B \cup C| \ge 7$; egyenlőség lehet, ha pl. $C \subseteq A \cup B$.
$|A \cup B \cup C|$ akkor lehet maximális, ha $|A \cup B| = |A| + |B|$ stb., vagyis minden elem pontosan egy halmazhoz tartozik. (A 250/a. ábrán x, y, z-vel jelöltük a megfelelő részhalmazok elemszámait.)
Ekkor az $x + y = 7$, $x + z = 7$, $y + z = 6$ egyenletrendszer megoldása $(x, y, z) = (4, 3, 3)$, $|A \cup B \cup C| = 10$.
b) $|A \cup B \cup C| \ge 8$; egyenlőség lehet, ha pl. $C \subseteq A \cup B$.
A maximum meghatározása: $|A \cup B| + |A \cup C| + |B \cup C| = 21$, páratlan szám. Nem lehetséges, hogy ebben az összegben minden elemet pontosan kétszer számoltunk; legalább egy elem két halmazhoz is tartozik. Az $|A \cup B \cup C| = 10$ maximumra egy példa a 250/b. ábrán látható.



250/a.



250/b.

II

251. *a)* $|A \triangle B| = 2$, így a lehetséges elemszámok:

$\lvert A\setminus B\rvert$	2	1	0
$\lvert B\setminus A\rvert$	0	1	2
$\lvert A\rvert$	5	4	3
$\lvert B\rvert$	3	4	5

b) $|A \triangle B| = 3$, így a lehetséges elemszámok:

$\lvert A\setminus B\rvert$	3	2	1	0
$\lvert B\setminus A\rvert$	0	1	2	3
$\lvert A\rvert$	5	4	3	2
$\lvert B\rvert$	2	3	4	5

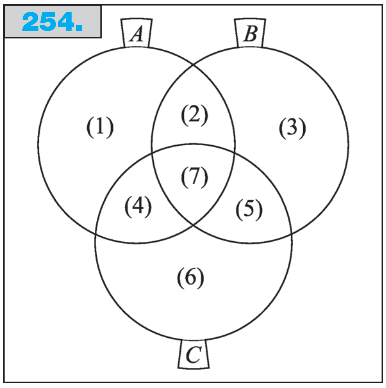
c) Az $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus$A közös elem nélküli részhalmazok elemszámának összege 5. Öt elemet három (különböző) halmazba $\binom{7}{5} = 21$-féleképpen oszthatunk szét. Ez a 21 eset bármelyike az *a)* és *b)* megoldásokhoz hasonlóan vizsgálható: $|A| = |A\setminus B| + |A\cap B|$, $|B| = |B\setminus A| + |A\cap B|$. Az $5 = |A\cup B| \geq$ $\geq |A| \geq 0$ és $5 \geq |B| \geq 0$ egyenlőtlenségekből következően A és B minden 0 és 5 közötti értéket felvehet.

252. Ha $x\in H$, akkor $\frac{1}{x}\in H$, $-x\in H$ és $-\frac{1}{x}\in H$. Ha $x\neq\pm1$, $|H|$ 4-gyel osztható. Ha $1\in H$, akkor $-1\in H$ és fordítva, $|H|$ ekkor is páros.

253. Ha $x\in$ H, akkor $\frac{1}{x}\in H$. Ha $x\neq\pm1$, $|H|$ páros. 1 és -1 reciproka önmaga, ezért $|H|$ páratlan is lehet, ha 1 vagy -1 közül (pontosan) az egyik szám H-hoz tartozik.

254. Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal, s jelöljük (1), (2), (3), …, (7)-tel az egyes tartományokat (254. ábra)!

254.



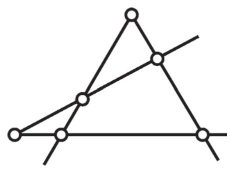
A *2. feltétel* miatt a (7) részhalmaz üres halmaz; az *1. feltétel* miatt (2), (4) és (5) nem üres halmazok; a *3.* és *4. feltétel* miatt (1), (3), (6) üres halmazok, valamint a (2), (4) és (5) részhalmazok elemszáma 1.
Pl.: $A = \{b, c\}$, $B = \{c, a\}$, $C = \{a, b\}$.

Megjegyzés:
A megoldást egyszerű geometriai konstrukcióval is megadhatjuk: legyen a három elem egy háromszög három csúcsa, s a háromszög azonos oldalain levő két-két csúcs alkossa a három halmazt.

255. Legyen az $A \cap B \cap \overline{C} \cap \overline{D}$ típusú részhalmazok elemszáma 1 (a lehető legkevesebb). Ilyen tartomány $\binom{4}{2} = 6$ darab van, s mivel bármely három halmaz metszete üres halmaz, $A \cup B \cup C \cup D$ legalább 6 elemű. Ha minden más tartomány elemszáma 0, akkor a *4. feltétel* is teljesül. Megfelelő pl. az alábbi négy A, B, C, D halmaz (a sorokban az egyes halmazoknál 1-est írtunk, ha az aktuális elem benne van a halmazban, 0-t, ha nincs):

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
A	1	1	1	0	0	0
B	1	0	0	1	1	0
C	0	1	0	1	0	1
D	0	0	1	0	1	1

255.

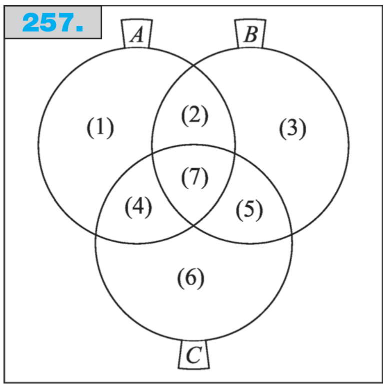


Adhatunk geometriai konstrukciót is.
Kételemű halmazokkal a feladat nem oldható meg; háromelemű halmazokra példa a teljes négyoldal. Ennek csúcsai az elemek, s egy-egy halmazba az egy egyenesen lévő pontok tartoznak (ábra).

256. Mivel $A \cap B \cap C \cap D \cap \overline{E} \neq \emptyset$, s ilyen típusú tartomány $\binom{5}{4} = 5$ darab van, ezért $|A \cup B \cup C \cup D \cup E| \geq 5$. A konstrukció meg is valósítható:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
A	1	1	1	1	0
B	1	1	1	0	1
C	1	1	0	1	1
D	1	0	1	1	1
E	0	1	1	1	1

257. *Első megoldás:* Pl. az ábra A, B, C halmazainak (i)-vel jelölt részhalmazaiba kerüljenek a $7k + i$ alakú számok, ahol $k \in \mathbf{Z}$; s a $7k$ alakú egész számokat kihagyjuk.
Második megoldás: A (7) tartomány legyen az üres halmaz; a többi (i) tartományba kerüljenek a $6k + i$ alakú egész számok ($k \in \mathbf{Z}$).
Harmadik megoldás: A = {páros számok}; B = {3-mal osztható egész számok};



II

$C = \{$6-tal nem osztható egész számok$\}$. Ekkor az (1), (3), (7) részhalmazok üres halmazok.
Negyedik megoldás: Egy megfelelő geometriai konstrukció pl. a háromoldalú hasáb; ennek a palástját alkotó három paralelogramma pontjai adják a halmazokat.
258. Pl. az $A \setminus B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ tartományokba kerüljenek rendre a $3k$, $3k + 1$ és $3k + 2$ alakú számok ($k \in \mathbf{N}$). Ekkor $A = \{3k + 1 \mid k \in \mathbf{N}\} \cup \{3k + 2 \mid k \in \mathbf{N}\}$; $B = \{3k \mid k \in \mathbf{N}\} \cup \{3k + 2 \mid k \in \mathbf{N}\}$; $C = \{3k \mid k \in \mathbf{N}\} \cup \{3k + 1 \mid k \in \mathbf{N}\}$.
259. Megfelelő pl. a 257. feladat második és harmadik típusú megoldása.
260. *a)* Pl. $H_1 = \mathbf{N} \setminus \{0\}$, $H_2 = \mathbf{N} \setminus \{1\}$, $H_3 = \mathbf{N} \setminus \{2\}$, $H_4 = \mathbf{N} \setminus \{3\}$, … ,
$H_n = \mathbf{N} \setminus \{n\}$, $n \in \mathbf{N}$, …
b) Pl. megfelelő az alábbi konstrukció:

H_1	1	2	4	7	11	…
H_2		3	5	8	12	…
H_3			6	9	13	…
H_4				10	14	…
H_5					15	…
…						

(H_n első eleme $\dfrac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbf{N}$, s az első elemtől kezdve minden n-edik, $(n+1)$-edik, $(n+2)$-edik, … természetes szám tartozik a halmazba.)

Végtelen halmazok számossága

261. Az állítások igazak. A megszámlálhatóan végtelen halmazok elemeit sorozatba rendezhetjük, s ezt véges sok elem hozzávétele esetén is megtehetjük. (Például úgy, hogy a véges sok elemet a már meglévő sorozat elejére illesztjük.)
262. Igaz állítások: *b*), *e*), *f*), *g*), *i*), *j*).
- *a)* Hamis.
- *b)* Igaz.
- *c)* Hamis; ellenpélda pl. a racionális számok halmaza. (Ugyanis bármely két racionális szám között található további racionális szám.)
- *d)* Hamis; ellenpélda pl. a]0; 1[-ban lévő racionális számok halmaza.
- *e)* Igaz. (A részhalmaz elemei részsorozatot alkotnak.)
- *f)* Igaz.
- *g)* Igaz.
- *h)* Hamis. (Pl. $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$.)
- *i)* Igaz.

II

j) Igaz. (Ha az A, illetve B halmaz elemeit $a_1, a_2, \ldots$, illetve $b_1, b_2, \ldots$ sorba rendezzük, akkor tekintsük az $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ sorozatot! Ebben $A \cup B$ minden elemét felsoroltuk, $A \cap B$ elemeit kétszer is. Ha kihagyjuk a többször szereplő elemek egyikét, megfelelő részsorozatot kapunk.)

263. *a)* Igaz, mert $A = B$.
b) Hamis; pl. $A = \mathbf{N}^+$, $B = \mathbf{N}$, s ekkor $|A| = |B|$.
c) Igaz.
d) Igaz.
e) Hamis; pl. $A = \mathbf{N}$, $B = \mathbf{N}^+$, s a leképezés $a \in A, a \leftrightarrow a + 3$ $(a + 3 \in B)$.
f) Hamis.
g) Igaz.
h) Hamis; ellenpélda pl. a racionális számok halmaza.

Az állítás megfordítása igaz: *d), f)*.
(A *h)* esetben véges számhalmaz elemei mindig sorba rendezhetők.)

264. *a)* Minden lakót átköltöztet a szobájánál 1-gyel nagyobb számú szobába, s az új vendéget a megüresedett 1-esben el tudja helyezni.
b) Minden lakót átköltöztet a szobájánál 100-zal nagyobb számú szobába.
c) Pl. minden lakót átköltöztet a szobája számánál kétszer nagyobb számú szobába.

265. *a)* Az egyes átlókban rendre 1, 2, 3, … szám található, az első n átlóban összesen $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ darab. $\frac{n(n+1)}{2} < 2004$, ha $n \le 62$. $\frac{62 \cdot 63}{2} = 1953$; így a 2004. szám a 63. átlóban az 51. helyen található. Mivel a páratlan sorszámú átlóban lévő elemeket „lentről felfelé” számoljuk össze, az átló kezdőszáma $\frac{1}{63}$, az 51. szám pedig az $\frac{51}{13}$.

b) A 109. átló „alsó” kezdőtagja $\frac{1}{109}$, a táblázat 100. sorában az átló 10. eleme található: $\frac{10}{100}$.

c) A 42. átló „felső” kezdőtagja $\frac{42}{1}$, az átló 26. eleme a $\frac{17}{26}$. Így $\frac{17}{26}$ a pozitív racionális számok sorozatának $\frac{41 \cdot 42}{2} + 26 = 887$. tagja.

d) Az $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \ldots$ sorozatból képezhetjük pl. a váltakozó előjelű $0, -1, 1, -2, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{2}, \frac{2}{2}, \ldots$ sorozatot.

266. Tegyük fel, hogy a]0; 1[számok halmaza megszámlálhatóan végtelen. Ekkor pl. tizedes tört alakjukban sorozatba rendezhetők:

$$\begin{aligned} &a_1 = 0{,}x_{11}x_{12}x_{13}\ldots x_{1n}\ldots \\ &a_2 = 0{,}x_{21}x_{22}x_{23}\ldots x_{2n}\ldots \\ &a_3 = 0{,}x_{31}x_{32}x_{33}\ldots x_{3n}\ldots \\ &\ldots \\ &a_n = 0{,}x_{n1}x_{n2}x_{n3}\ldots x_{nn}\ldots \\ &\ldots \end{aligned}$$

Tekintsük most az $a = 0{,}y_1y_2y_3\ldots y_n\ldots$ számot, ahol $y_i = 1$, ha $x_{ii} \neq 1$, és pl. $y_i = 2$, ha $x_{ii} = 1$! Mivel ennek *i.* számjegye különbözik a_i *i*. számjegyétől, sikerült olyan számot konstruálni, amely – feltevésünkkel ellentétben – nincs a felsorolt számok között. Az ellentmondásból következik, hogy a]0; 1[számok – és így a valós számok – halmaza nem megszámlálható.

267. A halmazok elemei között kölcsönösen egyértelmű leképezést kell létesítenünk, vagy megmutathatjuk, hogy a két halmaz számossága megegyezik a természetes számok halmazának számosságával. Pl.:

a) $a \in A \leftrightarrow a - 1 \in B$.

b) A 0, 1, 2, 3, 4, 5, … *B*-beli elemekhez rendeljük hozzá sorban a 0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, … *A*-beli elemeket. (Képlettel: ha n páros természetes szám, $n \leftrightarrow -\dfrac{n}{2}$; ha n páratlan természetes szám, $n \leftrightarrow \dfrac{n+1}{2}$.)

c) $a \in A \leftrightarrow a + 10 \in B$.

d) $a \in A \leftrightarrow (\mathrm{a} - 1)^2 \in B$.

e) $a \in A \leftrightarrow 3 \cdot \left(\dfrac{a}{2} - 4\right) \in B$.

f) A $p_1, p_2, p_3, \ldots$ prímszámok halmazának és a $0^3, 1^3, 2^3, \ldots$ köbszámok halmazának számossága is megegyezik a természetes számok számosságával. ($p_i \leftrightarrow (i-1)^3 \leftrightarrow i - 1 \leftrightarrow i,\ i \in \mathbf{N}^+$.)

g) *A* és *B* számossága is megegyezik **N** számosságával.

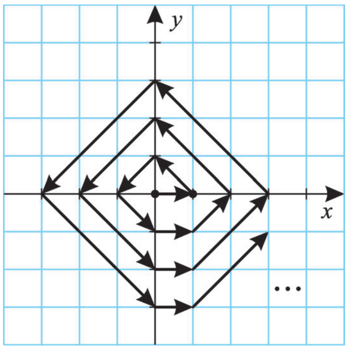
268. Az *a)* – *j)* esetben az *A* és *B* halmazok számossága egyenlő, tehát létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés elemeik között; a *k)* esetben nem.

a) $B \subseteq \mathbf{Q}$, így megszámlálható.

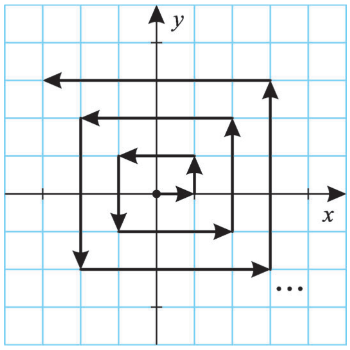
b) Pl. $a \in A \leftrightarrow \dfrac{1}{a} \in B$.

c) A *B* halmaz $(x;\ y)$ egész számokból álló számpárokat tartalmaz. Általában is igaz, hogy az egész számokból álló számpárok, számhármasok stb. halmaza megszámlálhatóan végtelen. Feleltessük meg pl. az $(x;\ y)$ elemnek az $\dfrac{x}{y}$ racionális számot! Ekkor az $(x;\ 0)$ és – ha nem engedjük meg – a $(0;\ y)$ típusú párok maradtak ki a megfeleltetésből; s mivel ezek megszámlálhatóan sokan vannak, egyesítésük is megszámlálhatóan végtelen.

268/I.



268/II.



Egy másik lehetőség, ha az $(x;\ y) \in B$ párnak a derékszögű koordináta-rendszer rácspontjait feleltetjük meg. A rácspontok „bejárására” két lehetséges módszer látható a 268/I. és II. ábrákon.

d) Pl. $a \in A \leftrightarrow 5a \in$ B.

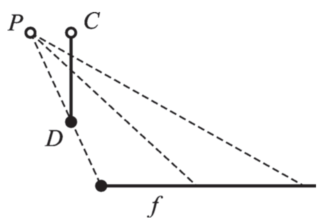
e) Pl. $x \in A \leftrightarrow \dfrac{d-c}{b-a}(x-a)+c$.

f) Pl. $x \in A \leftrightarrow \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x$.

g) Pl. az *e)* és *f)* megoldások alapján.

h) Legyen pl. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ egy A-beli sorozat; $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ pedig egy B-beli sorozat. Feleltessük meg egymásnak a sorozatok azonos indexű tagjait, az A halmaz többi eleméhez pedig önmagát rendelhetjük B-ből. A módszer általában is alkalmazható; vagyis egy végtelen halmaz számossága nem változik meg, ha kihagyunk belőle véges sok elemet, vagy kihagyjuk egy megszámlálhatóan végtelen valódi részhalmazát.

268/III.



i) Pl. a 268/III. ábrán a P pontból való vetítéssel rendeljük a CD szakasz és f félegyenes pontjait egymáshoz. (A *h)* megoldásban leírtak miatt nem okoz problémát, hogy C-nek nincs képe.)

j) Pl. két részre bonthatjuk a szakaszt, s két félegyenesre az egyenest.

269. Mindegyik esetben B számossága a nagyobb.

Vegyes feladatok

270. Több megoldás lehetséges. Pl.:

a) az 542 számjegyeinek összege nem 12;
b) 133 nem osztható 3-mal;
c) 111 nem négyzetszám;
d) 407 maradéka 3-mal osztva 2; vagy 133 osztható 7-tel;
e) a Toldi Arany János költeménye, a többi Petőfié.

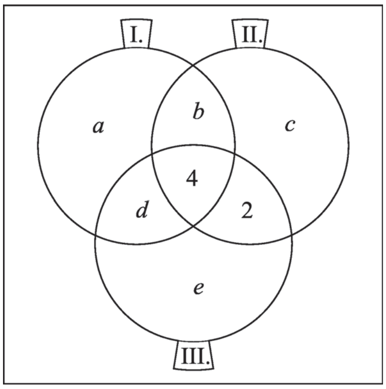
Megjegyzés:
Ezeket a „kakukktojás-típusú” feladatokat gyakran és szívesen tűzik ki a különböző vetélkedőkön. Sajnos, a feladatoknak általában több megoldása van. (Nemcsak az a megoldás lehet jó, amire a játékvezető gondol.) Néhány – elkedvetlenítő – példa:

Az *a)* esetben kakukktojás lehet
– a 192, mert kisebb, mint 200; vagy
– az 543, mert nagyobb, mint 542; vagy
– a 471, mert 460 és 473 közé esik.
A *b)* esetben kakukktojás lehet
– a 133, mert számjegyei egyike sem összetett; vagy
– a 870, mert 10-zel osztható és így tovább.

271. Nem zárt műveletet kapunk a *d), h), i), k)* esetekben.

272. Tegyük fel, hogy a kérdésekre csak igen vagy nem válaszokat adtak az akadémikusok. Jelöljük I, II, illetve III-mal az 1., 2., illetve 3. kérdésre igennel válaszoló akadémikusok halmazát, ekkor a 272/I. Venn-diagramot kapjuk.

272/I.

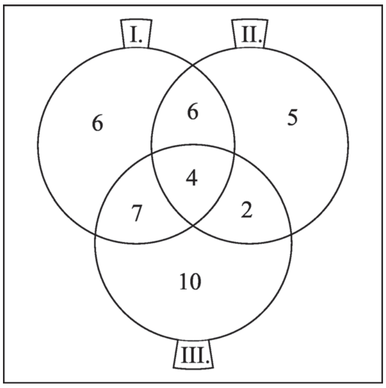


(Az egyes tartományok elemszámát rendre a, b, c, d, e-vel jelöltük.)
A feltételek szerint

(1) $a + b + d + 4 = 23$,
(2) $b + c + 4 + 2 = 17$,
(3) $4 + 2 + d + e = 23$,
(4) $a + d = 13$,
(5) $a + b = 12$.

Az (1) és (4) egyenletekből $b = 6$; az (1) és (5) egyenletekből $d = 7$; továbbá $a = 6$, $c = 5$, $e = 10$. Az egyes tartományok elemszámai a 272/II. ábrán láthatók.

272/II.



Összeadva a legalább egy igennel szavazók számát, 40-et kapunk, így 5 akadémikus szavazott mindegyik kérdésre nemmel.

273. *a)* A H_1, H_2, … H_{39} halmazokban összesen $1+2+\ldots+39=\dfrac{39\cdot 40}{2}=$
$=780$ elem van, így $H_{40}=\{781, 782, \ldots, 820\}$.

b) Az elemek összege $\dfrac{(781+820)\cdot 40}{2}=32\,020$.

274. *a)* $F\cup G$; *b)* $F\setminus G$; *c)* $F\cap G$; *d)* $F\cup G\cup H$; *e)* $(F\cup G)\setminus H$; *f)* $F\setminus(G\cup H)$; *g)* $F\cap G\cap H$; *h)* igaz.

275. Az állítás következik abból, hogy egy k elemű részhalmaz kiválasztásakor meghatároztunk egy $(n-k)$ elemű részhalmazt is (ti. azt, amelyiket a ki nem választott elemek alkotnak), s ezért a k és $(n-k)$ elemű részhalmazok párba állíthatók.

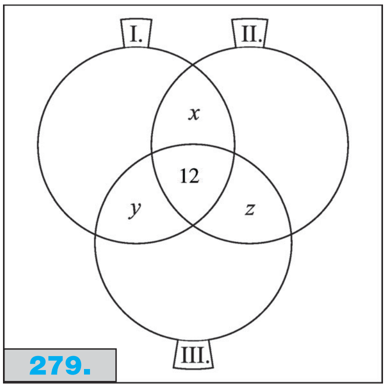
276. A H részhalmaz megadásakor minden egyes elemről eldönthetjük, hogy vagy hozzávesszük a részhalmazhoz, vagy nem. Ez 2^n lehetőség, ennyi részhalmaza van egy n elemű halmaznak. (Az üres halmaz részhalmaza önmagának.)

277. Az állítás nem igaz $n=0$-ra, de minden $n\geq 1$ természetes számra már teljesül. Indukciós gondolatmenettel bizonyíthatunk:
Ha az állítás igaz egy $k\in\mathbf{N}^+$ elemű H halmazra (vagyis ugyanannyi páros és páratlan elemszámú részhalmaza van H-nak), akkor egy $(k+1)$. elem hozzávételével az eddigi páros elemszámú részhalmazokból páratlan elemszámú új részhalmazok keletkeznek és fordítva. Vagyis H már meglévő és újonnan keletkezett részhalmazaira is igaz lesz, hogy ugyanannyi közülük a páros, mint a páratlan elemszámú. (Az állítás $n=1$ esetén igaz.)

278. Szemléltessük egy táblázattal az egyes tulajdonságokat!

Magasság	80%				20%
Barna haj	15%	85%			
		65%			
Testsúly		10%			
Bajusz			5%		
				50%	

Látható, hogy az első két tulajdonsággal a férfiak legalább 65%-a rendelkezik. Ha a 10%-nyi, 75 kg-nál nem nehezebb férfi ebből a 65%-ból kerül ki; s a maradék 55%-ból kimarad az 5% bajszos, akkor a négy tulajdonság a férfiak legalább 50%-ára igaz.



279.

279. Jelöljük az osztály létszámát n-nel! Az egyes kiránduláson részt vevő tanulókat szemléltessük egy-egy halmazzal; mivel minden tanuló részt vett legalább két kiránduláson, csak a halmazok közös részeinek elemszámát kell meghatározni.
Az ábra alapján pl. x jelöli azoknak a tanu-

lóknak a számát, akik részt vettek az első és a második kiránduláson, de a harmadikon nem.
Több megoldási gondolatmenetet is adhatunk.

Első gondolatmenet:
A Venn-diagram alapján felírható egyenletrendszer:

$x + y + 12 = 0{,}7n,$
$x + z + 12 = 0{,}8n,$
$y + z + 12 = 0{,}9n.$

Adjuk össze az egyenleteket: $2(x + y + z + 12) + 12 = 2{,}4n$. A diagram alapján az összes tanuló száma $n = x + y + z + 12$, innen $12 = 0{,}4n$, $n = 30$.
Ha az osztálylétszám 30, akkor az első kirándulásra 21, a másodikra 24, a harmadikra 27 gyerek ment el, az „összkirándulásszám” 72; valóban 12 gyerek ment el mind a három kirándulásra.

Második gondolatmenet:
Visszafelé okoskodunk: ha az első kirándulásra elment a tanulók 70%-a, akkor nem ment el 30%-uk, így $z = 0{,}3n$. Hasonlóan $y = 0{,}2n$ és $x = 0{,}1n$. Felhasználva az $n = x + y + z + 12$ összefüggést, az előző eredményt kapjuk.

Harmadik gondolatmenet:
A szita formula alapján a kirándulások összlétszáma $0{,}7n + 0{,}8n + 0{,}9n$, s ez egyenlő $2n + 12$-vel, hiszen minden gyerek kétszer, 12 pedig háromszor kirándult. A $0{,}7n + 0{,}8n + 0{,}9n = 2n + 12$ egyenlet megoldása $n = 30$.

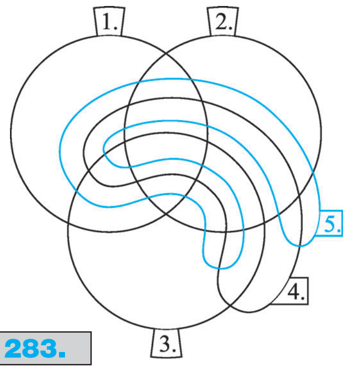
Negyedik gondolatmenet:
Mivel minden kiránduláson csak egész számú tanuló vehetett részt, $0{,}7n$, $0{,}8n$ és $0{,}9n$ egész számok. Ez csak akkor lehetséges, ha n 10-nek többszöröse. Az $n = 10$ és 20 nem, de $n = 30$ megoldást ad; bizonyítanunk kell még, hogy n növelésével nem kapunk újabb megoldást.

280. Jelöljük A-val és B-vel azon ötjegyű pozitív egész számok halmazát, amelyekben nincs 8-as, illetve 9-es számjegy! A feladat $\overline{A \cup B}$ elemszámának meghatározása. (A H alaphalmaz az ötjegyű pozitív egész számok halmaza.) $|A| = |B| = 8 \cdot 9^4$, $|A \cap B| = 7 \cdot 8^4$, $|H| = 9 \cdot 10^4$. Innen $\left|\overline{A \cup B}\right| = |H| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = 9 \cdot 10^4 - 2 \cdot 8 \cdot 9^4 + 7 \cdot 8^4 = 13\,696$. (Az összes ötjegyű pozitív egész számból kivontuk azokat, amelyek nem tartalmaznak 8-as, illetve 9-es számjegyet; de így a sem 8-ast, sem 9-est nem tartalmazó számokat kétszer vontuk le, tehát egyszer vissza kell adni az összeghez.)

281. $3^{10} - 3 \cdot 2^{10} + 3 = 55\,980$. (Az összes számból először levonjuk azokat, amelyek legfeljebb kétféle számjegyet tartalmaznak; ekkor azonban a csupa egyforma számjegyből álló három számot kétszer vontuk le, egyszer hozzá kell őket adni az összeghez.)

282. Három kör a síkot legfeljebb 8 részre osztja. Ha a negyedik felvett kör a korábbiakat két-két pontban metszi, akkor 6 új síktartomány keletkezik, így négy kör a síkot legfeljebb 14 részre osztja. Négy halmaz esetén viszont $2^4 = 16$ halmaztartományt kellene kapnunk, tehát négy kör segítségével nem készíthető Venn-diagram.

283. Igen. Az első három halmaz lehet kör, majd ezután mindig úgy kell felvennünk a soron következő n. halmazt, hogy minden korábbi halmaztartományt kettéosszunk. Ezt megtehetjük, ha pl. az utoljára felvett $(n-1)$. halmaz „kerületére” illesztjük az n.-et.



283.

284. A feltételekből következik, hogy $Z_f \subseteq D_f$ és $Z_g \subseteq D_g$.
a) $(Z_f \cup Z_g) \cap (D_f \cap D_g)$; *b)* $(Z_f \setminus Z_g) \cap (D_f \cap D_g)$.

285. *a)* H_{39}-ig $1+2+3+\ldots+39 = \dfrac{39 \cdot 40}{2} = 780$ darab szám szerepel.
H_{40} kezdő eleme a 781. páratlan szám; $781 \cdot 2 - 1 = 1561$, így $H_{40} = \{1561, 1563, \ldots, 1639\}$. *b)* $\dfrac{(1561+1639)\cdot 40}{2} = 64\,000$.

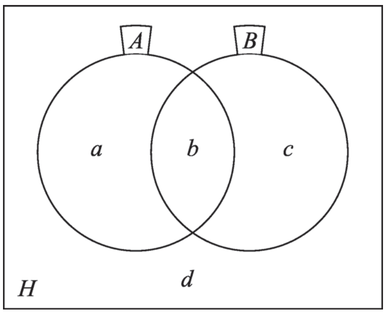
286. *a)* A feladatgyűjtemény 286-os ábrája szerinti első n „átlóban” $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ rácspont van. $\dfrac{n(n+1)}{2} < 1000$, innen $-45{,}2 < n < 44{,}2$, vagyis az 1000. racionális számnak megfelelő rácspont a 45. átlóban található. $\dfrac{44 \cdot 45}{2} = 990$, az átló 10. pontját keressük. A 45. átló rácspontjai sorra (45; 1), (44; 2), (43; 3), …; a 10. rácspont (36; 10). Ebben a sorban tehát az 1000. racionális szám a $\dfrac{36}{10}$.

b) $\dfrac{76 \cdot 77}{2} + 21 = 2947$.

Megjegyzés:
Az eljárás hasonló a 265. feladatban alkalmazotthoz.

287. Válasszunk ki egy-egy különböző színű tárgyat! Ha ezek különböző alakúak, készen vagyunk; ha egyforma alakúak, akkor válasszunk egy tőlük különböző alakú tárgyat! Ekkor a három tárgy között lesz színre és alakra eltérő.

287.



Megjegyzés:
Jelöljük A-val az ugyanolyan színű tárgyak halmazát (valamelyik színből); ugyanígy B-vel az azonos alakú tárgyak halmazát (valamelyik alakból), s az így felvehető Venn-diagram tartományait jelöljük a, b, c, d-vel! A feladat egy lehetséges átfogalmazása: ha A és $\overline{A}$, valamint B és $\overline{B}$ nemüres halmazok, akkor az a és c, valamint b és d részhalmazok sem üresek. A bizonyítás pedig úgy történt, hogy vettünk egy A és $\overline{A}$-beli x és y elemet; ha az a és c, illetve b és d részhal-

II

mazokból kerültek ki, készen vagyunk; ha pedig az a és d, illetve b és c részhalmazokból, akkor vettünk hozzájuk rendre egy z elemet b vagy c-ből, illetve a vagy d-ből.

288. A kortársak ott tévedtek, hogy ha a „Minden krétai hazudik." állítás hamis, akkor tagadása „Van olyan krétai, aki igazat mond.". Ez pedig nem jelenti azt, hogy *minden* krétai igazat mond, lehetnek közöttük hazugok is. (Hamis maga Epimenidész állítása is.)

289. Ez az ismert logikai paradoxon *Bertrand Russel* (1872–1970) angol matematikustól származik. Vizsgáljuk meg, hogy ki borotválja a borbélyt!
Ha maga borotválkozik, akkor – állítása szerint – nem borotválja önmagát; ha nem maga borotválkozik, akkor pedig – állítása szerint – saját magát borotválja. Ellentmondást kaptunk: a borbély borotválja is magát meg nem is borotválja.

290. A paradoxont 1903-ban találta Bertrand Russel. Az ellentmondást úgy oldhatjuk fel, ha feltesszük, hogy nem létezik az összes halmaz halmaza (s nem létezik az összes olyan halmaz halmaza sem, amelyek nem elemei önmaguknak).

291. *a)* $8 + |B \setminus A|$, vagyis legalább 8; *b)* $5 - |B \setminus A|$, vagyis legfeljebb 5; *c)* legfeljebb 5.

292. A két szélsőérték $|A \cup B|$ esetén 37, illetve 6; $|A \cap B|$ esetén 6, illetve 0.

293. *a)* A-nak 0 elemű részhalmaza van $\binom{10}{0} = 1$ darab; 1 elemű részhalmaza $\binom{10}{1} = 10$; 2 elemű részhalmaza $\binom{10}{2} = 45$; … ; 10 elemű részhalmaza $\binom{10}{10} = 1$. A feladat a $0 \cdot \binom{10}{0} + 1 \cdot \binom{10}{1} + 2 \cdot \binom{10}{2} + \ldots + 10 \cdot \binom{10}{10}$ összeg meghatározása.
Minden elemet a többi 9 elemből alkotható összes részhalmazban egyszer számoltunk, vagyis minden elem 2^9-szer szerepel az összegben. A részhalmazok elemszámainak összege $10 \cdot 2^9 = 5120$.
b) Minden elem 2^9-szer szerepel az összegben, így a keresett összeg értéke $(1 + 2 + \ldots + 10) \cdot 2^9 = 28\,160$.

Megjegyzés:
Ha $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, hasonlóan mutathatjuk meg, hogy az *a)* esetben $n \cdot 2^{n-1}$, a *b)* esetben $\frac{n(n+1)}{2} \cdot 2^{n-1}$ a válasz, s „mellékesen" megkaptuk a $0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \ldots + n \cdot \binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$ azonosságot is.

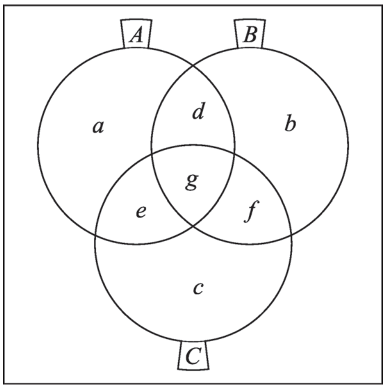
294. *a)* A 4 és 5 elemek két halmazba kerülhetnek ($A \setminus B$-be vagy $B \setminus A$-ba), ezért 4 megadási lehetőség van.
b) 8.
c) Az elemek három halmazba kerülhetnek ($A \setminus B$-be, $B \setminus A$-ba vagy $A \cap B$-be). Ha $A = B$-t nem engedjük meg, akkor a $3^5 = 243$ lehetőségből le kell vonni azt, amikor az A és B megegyezik, tehát 242 megadási lehetőség van.

295. Az A, B, C halmazok hét halmaztartományt határoznak meg (az ábrán a, b, c, d, e, f, g).

Mivel $g = \emptyset$, a 18 elem bármely 6 tartományba kerülhet, ez 6^{18} lehetőség. Azonban nem számolhatjuk azokat az eseteket, amikor $A = B$ (vagyis $a = b = e = f = \emptyset$), $B = C$, $A = C$. Ilyen van $3 \cdot 2^{18}$ darab, így összesen $6^{18} - 3 \cdot 2^{18}$ különböző A, B, C halmazhármas van. ($A = B = C$ nem lehetséges, mert $A \cap B \cap C = \emptyset$.)

Ha $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, akkor az előző gondolatmenettel kapható $7^{18} - 3 \cdot 3^{18}$ darabszámhoz hozzá kell adni 2-t, mert az $A = B = C$ esetet háromszor vontuk le, pedig csak egyszer kell.

295.



296. *a)* 2^9; *b)* 2^8; *c)* $3 \cdot 2^8$ (vagy $2^{10} - 2^8$); *d)* $3 \cdot 2^8$ (vagy $2^{10} - 2^8$); *e)* 2^8; *f)* 2^8; *g)* 2^4 (beleszámoltuk az $\{5\}$ részhalmazt is); *h)* $2^{10} - 2^5 - 1$; *i)* $2^{10} - 2^7 - 1$.

297. A $H = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_9\}$ halmaz A_1, A_2, A_3, A_4 részhalmazait pl. az alábbi táblázattal adhatjuk meg:

H	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_9
A_1	1	1	0		0
A_2	1	0	0		0
A_3	0	1	0		1
A_4	0	1	0		0

Az első sorban a H halmaz elemeit tüntettük fel; a következő sorokban az egyes részhalmazoknál 1-est írunk, ha az aktuális elem benne van a halmazban, 0-t, ha nincs. Pl. $a_1 \in A_1$, de $a_1 \notin A_3$.

A feladat feltétele alapján a táblázatban 28 darab 1-es szerepel, s meg kell mutatnunk, hogy van olyan oszlop, amelyben 4 darab 1-es van. Ez pedig nyilvánvaló: ha minden oszlopban csak 3 darab 1-es lenne, összesen $9 \cdot 3 = 27$ darab 1-es lenne a táblázatban.

298. Legyen $|M| = n$. Az A_i $(i = 1, 2, \dots, 2000)$ halmazok elemszámát összeadva legalább $\dfrac{4000n}{3}$-at kapunk (egy-egy elemet több részhalmazban is számoltunk). Ha minden elem csak legfeljebb 1333 részhalmazban fordulna elő, $1333n < \dfrac{4000n}{3}$ lenne.

299. 2^{n-1} részhalmazt kiválaszthatunk, ha pl. mindegyikben szerepel egy rögzített elem, ennél többet viszont nem lehet kiválasztani. Ha ugyanis szerepel egy R részhalmaz a kiválasztásban, akkor a $H \setminus R$ komplementer részhalmaz

II

már nem szerepelhet, hiszen nem lenne R-rel közös eleme. Vagyis legfeljebb az összes részhalmaz fele választható ki.

300. Legfeljebb 8-at.

A 2, 3 és 5 kitevői paritásuk alapján kétfélék lehetnek: párosak vagy páratlanok. Ez azt jelenti, hogy minden, a 2, 3 és 5 prímosztókkal rendelkező szám a kitevők paritása alapján 8-féle lehet. Vagyis 9 kiválasztott szám esetén már lesz közöttük két olyan, melyekben a 2, 3 és 5 kitevőjének a paritása rendre ugyanaz, s ezen számok szorzata négyzetszám.

301. Minden tíztagú összeg 55 és 955 között van, s 1023 nem üres részhalmaz létezik. A skatulyaelv miatt van két olyan nem üres részhalmaz, amikben az elemek összege megegyezik; s ha a két részhalmaznak vannak közös elemei, ezeket mindkettőből elhagyhatjuk.

302. Jelöljük az elemeket a_1, a_2, … a_{100}-zal, s tekintsük az alábbi 100 számot:

a_1;

$a_1 + a_2$;

$a_1 + a_2 + a_3$;

…

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{100}$.

Ha valamelyik összeg 100-zal osztható, készen vagyunk; ha pedig egyik sem osztható 100-zal, akkor a skatulyaelv miatt van közöttük két olyan, amelyik 100-zal osztva azonos maradékot ad. Ha ezek pl. az $S_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_i$ és $S_j = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_j$ összegek ($i < j$), akkor az $S_j - S_i$ különbség megfelel. Hasonlóan mutathatjuk meg, hogy n egész szám közül mindig kiválasztható néhány (esetleg egy) úgy, hogy összegük n-nel osztható legyen.

303. Ha a tagok között van olyan, aki legalább 7 ülésen volt jelen, akkor az ezeken rajta kívül résztvevő $7 \cdot 9 = 63$ tag mind különböző, tehát legalább 64 tagból áll a bizottság.

Az ülések összlétszáma 400. Ha mindenki legfeljebb 6 ülésen vett részt, akkor pedig legalább 67 tagja volt a bizottságnak: $\frac{400}{6} > 66$.

304. Jó megoldás pl. az $A = \{1; 5; 9; 13; \ldots\}$, $B = \{3; 7; 11; 15; \ldots\}$, $C = \{2; 4; 6; 8; \ldots\}$ három halmaz. Ha a kivett számok összege páros, C-ből lettek kiválasztva; ha összegük $4k + 1$ alakú, B-ből, ha $4k + 3$ alakú, A-ból ($k \in \mathbf{N}$).