823. A helyesen kitöltött keresztrejtvény: 823. ábra.
A prímek összege: $2 + 5 + 2 = 9$;

823.

[1] 1	6	
2		[2] 1
[3] 8	5	2

IV

824. *a)* 2^{-1}, 2^{-4}, 5^{-3}, 3^{-5}, $2\cdot 5^{-4}$, $4\cdot 3^{-8}$;
b) $3\cdot 2^{-3}$, $5\cdot 3^{-3}$, $9\cdot 2^{-4}$, $11\cdot 7^{-1}$, $16\cdot 5^{-1}$, $12\cdot 10^{-2}$;
c) a^{-3}, $3\cdot x^{-4}$, $a^{-5}b^{-4}$, $(x+1)^{-3}$, $(a+2b)^{-1}$.

825. *a)* $2\cdot a^2$, $x\cdot k^3$, $(x^2-y^2)^3$, $a^2b^5x^{-3}y^4$, b^3a^{-3};
b) $p^2q^{-4}r^{-3}s^4$, $m^4n^{-5}k^3l^{-7}$, $(a+b)^{-7}$, $(x-y)^{-8}$;

826. $(a+b)^{-7}$, $(x-y)^2(x+y)^{-1}$.

827. $\dfrac{4}{a^2}$, $\dfrac{6}{b^{10}}$, $\dfrac{1}{y^6}$, $\dfrac{1}{a^2b^4}$, $\dfrac{1}{p^6q}$, $\dfrac{1}{xy^2z^3y^4}$.

828. *a)* $\dfrac{y^2}{x^2}$, $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{6}{x^3y^2}$, $\dfrac{b^4}{p^6}$, $\dfrac{x^2y^2}{x+y}$.
b) $\left(\dfrac{a+b}{ab}\right)^2$, $\dfrac{x-y}{x+y}$, $\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}\right)^2$.

829. $\dfrac{1+a}{1-a}$, $\dfrac{p^3+q^3}{p^3-q^3}$, $x^2+y^2+z^2$.

830. $3{,}8\cdot ab = -1{,}9$.

831. *a)* $\dfrac{1}{3}\cdot x^3y^3 = -\dfrac{1}{3}$; *b)* $\left(\dfrac{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b}}\right)^{-1} = \dfrac{b+a^2}{b-a^2} = \dfrac{73}{71}$;
c) $\dfrac{(p^2-1)(p+1)}{p^2+1} = \dfrac{25}{26}$.

832. A helyesen kitöltött keresztrejtvény (a függ. 4. első két számjegye felcserélhető): 832. ábra.
A számjegyek összege: 43.

832.

[1] 1	[2] 8	6	
[3] 3	1		[4] 1
3			2
[5] 1	7	2	8

833. A helyesen kitöltött keresztrejtvény: 833. ábra.
A számjegyekkel felírható legnagyobb hatjegyű szám: 999 411.

833.

	[1] 9	
[2] 4	9	
[3] 9	1	1

834. *a)* x^{-2}, a^{10}, p^{14}, b^{-7}, 1;
b) a^{13}, x^8, q^{-1}, 1;
c) $1+x+x^2$, $2a^3+2a^2+2a^7$, $6y^7+4y^3-3y^2$;
d) a^{15}, b^{60}, x^{-4}, p^2, 1.

835. *a)* $a^{-2}b^{20}x^5$, $p^{30}q^{-14}r^8$, $x^{-15}y^{-12}s^{18}$;
b) $\dfrac{a^3b^5c^{11}x^8}{y^6}$, $\dfrac{p^{10}q^4k^{-8}}{x^{16}y^2}$.

836. *a)* a^2b^2, $\quad x^4y^{-5}+x^3y^2+xy$;

b) $pq(p+q)(1+p^2q^2)$, $\quad a^4-b^4+ab(a-b)+\dfrac{a^2}{b^2}(a^3-b^3)$;

c) $a^5b^{-1}+\dfrac{ab}{x^6}$, $\quad \dfrac{x^3}{y^3}-\dfrac{1}{xy^4}+x^4-1+\dfrac{1}{x^4y}-xy^3$.

837. *a)* $20^{100}>100^{20}$; *b)* $10^{16}>16^{10}$;

c) egyenlők; *d)* $\dfrac{5}{7^{10}\cdot 3^{11}}<\dfrac{12}{7^{11}\cdot 3^{10}}$.

838. *a)* Ha $q<1$, akkor az első szám, ha $q>1$, akkor a második szám a nagyobb, $q=1$ esetén a két szám egyenlő.

b) Az első szám a nagyobb.

839. *a)* hamis, *b)* hamis, *c)* igaz, *d)* igaz.

840. *a)* igaz, *b)* igaz.

841. A hatványozás azonosságai alapján a tört ilyen alakra hozható:

$$\frac{23(23^n-7^n)-4\cdot 4^n(19^n-3^n)}{41(41^n-25^n)}.$$

Innen pedig – tudva, hogy a^n-b^n minden n-re osztható $a-b$-vel – már következik az állítás.

842. A hatványozás azonosságai alapján a tört így alakítható:

$$\frac{7\cdot 49^n+34\cdot 8^n}{18\cdot 2^n+23\cdot 43^n}=\frac{7(41+8)^n+34\cdot 8^n}{18\cdot 2^n+23(41+2)^n}=\frac{7\cdot 41K+7\cdot 8^n+34\cdot 8^n}{18\cdot 2^n+23\cdot 41M+23\cdot 2^n}=$$

$$=\frac{7\cdot 41K+41\cdot 8^n}{23\cdot 41M+41\cdot 2^n}.$$

843. Legyenek a háromszög oldalai: $2^k<2^n<2^r$. Elég belátni, hogy nincs olyan k, n, r pozitív egész számhármas, melyre

$$2^k+2^n>2^r$$

teljesülne. Ha ugyanis ez igaz lenne, akkor

$$2^{k-r}+2^{n-r}>1$$

teljesülne, ami a feltételek miatt nyilván lehetetlen.

A négyzetgyök fogalma és azonosságai

844. *a)* 4, 13, 70, 50;

b) $|x|$, $\quad y^2$, $\quad |a-1|$, $\quad |b+3|$;

c) $|a+1|$, $\quad |2x-1|$, $\quad |3x-1|$;

d) $3|a|$, $\quad 6|b|$, $\quad |a|$, $\quad 9y^6$.

845. *a)* $|ac|$, $\dfrac{|a|b^2}{x^2|y^3|}$, $\dfrac{x^4r^2}{3|a^3|b^2}$, $\dfrac{|a+b|}{x^6y^8}$;

b) $\dfrac{x^2y^4z^6}{a^2|b^3|c^4}$, $|x+y|$, $\dfrac{p^2q^2|p+q|}{|x^3|y^4(x+y)^2}$.

846. *a)* $x\geq 1$, $x\geq -3$, $x\geq 6$, $x\leq -2$, $x\leq -3$ vagy $x\geq 3$;

b) $x\geq -\dfrac{1}{2}$, $x\geq 1$, minden valós szám, minden valós szám, minden valós szám;

c) $x=2$, $x=-3$, $x\leq 1$ vagy $x\geq 7$, $-6\leq x\leq 0$.

IV

847. *a)* $x<-3$ vagy $x\geq 2$, $x<-2$ vagy $x\geq \dfrac{1}{2}$, $-2\leq x<1$ vagy $x\geq 2$, $x\geq 2$, $|x|\geq 2$;

b) $x>-3$, de $x\neq 3$, $x\leq -\dfrac{2}{a}$ vagy $x>0$, $x<2$ vagy $x\geq \dfrac{5}{b}$, $x<2$ vagy $x\geq \dfrac{b}{a}$.

848. $|x|\geq 4$ vagy $|x|<1$, $1\leq x<3$ vagy $6\leq x<8$, $6\leq x<8$.

849. *a)* $A\cap B=:\left\{x\geq\sqrt{5}\right\}$, $A-B=:\left\{\dfrac{1}{2}\leq x<\sqrt{5}\right\}$;

b) $A\cap B=:\{-2\leq x\leq 0\}$, $A-B=:\{-0<x\leq 2\}$.

850. $A\cap B=:\{x\leq -2\cup -1\leq x\leq 1\cup 4\leq x\}$, $A-B=:\{-2<x<-1\}$.

851. *a)* $5|x|$, $10|a|b\sqrt{b}$, $11a^2|b|$, $|p|qs^2\sqrt{q}$.

852. *a)* $\dfrac{4a^2|x|}{3|d|z^2\sqrt{z}}$, $\dfrac{7(p+q)\sqrt{p+q}}{3|pq|}$, $\dfrac{a^2b^2}{|a+b|}$, $\dfrac{x^2|y^3|\sqrt{x}}{ab^2\sqrt{a}}$;

b) $\dfrac{1}{xy}\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{xy}}$, $\dfrac{|ab|}{x^2y^2}$, $\dfrac{(x-y)^4}{p^2q^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{pq}}$.

853. $\sqrt{\dfrac{a+b}{x^2-3x+1}}$, $\dfrac{2|x|}{|y|}$.

854. *a)* hamis, *b)* hamis (egyenlők)

855. *a)* igaz, *b)* hamis, *c)* hamis (egyenlők), *d)* igaz, *e)* igaz.

856. *a)* $3\sqrt{2}$; *b)* $6\sqrt{3}$; *c)* $8\sqrt{2}$; *d)* $\dfrac{19}{2}\cdot\sqrt{3}$;

e) $17\sqrt{x}$; *f)* $-4\sqrt{5}$; *g)* $14\sqrt{2b}$; *h)* $38\sqrt{3y}$.

857. *a)* $4+24-20=8$; *b)* $30+45-30=45$;
c) $7-2=5$; *d)* $8-3=5$;
e) 1; *f)* 4.

IV

858. *a)* $36 + 30 + 18 - 24 = 60$;
b) $18 - 12 = 6$;
c) $a^2 b - b^2 a = ab(a - b)$;
d) $a^3 b - b^3 a = ab(a^2 - b^2)$;
e) $7\sqrt{5} \cdot 0 = 0$;
f) $\left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = -2$;
g) $x + y - (x - y) = 2y$;
h) $\dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1 - 2\sqrt{2}}{2} = 2$;
i) $\sqrt{a^2 - a^2 + 4} = 2$.

859. *a)* $|y|$; *b)* 1.

860. $\sqrt{18}$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{40}$, $\sqrt{200}$, $\sqrt{343}$.

861. *a)* $\sqrt{40}$, $\sqrt{\dfrac{15}{2}}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{\dfrac{3}{4}}$, $\sqrt{\dfrac{8}{7}}$;
b) $\sqrt{a^2 b}$, $\sqrt{x^4 y^4}$, $\sqrt{12a^4}$, $\sqrt{100p^5}$, $\sqrt{4x^9 y^5}$;
c) $\sqrt{pq}$, $\sqrt{rt}$, $\sqrt{\dfrac{a^3}{b^3}}$, $\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $\sqrt{x^2 y^2 (x + y)}$.

862. $\sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$, $\sqrt{(x + a)^2} = |x + a|$, $\sqrt{\dfrac{2(p - q)}{p + q}}$.

863. 3, 25, 45, 75.

864. *a)* $a^2 b$, $x^4 y$, $p^5 q^3$, $s^9 t^{13}$;
b) $-2\sqrt{2}$, $81\sqrt{3}$, $-12500\sqrt{2}$, 3969;
c) $4 + 2\sqrt{3}$, $9 - 4\sqrt{5}$, $7 - 2\sqrt{10}$, $30 + 12\sqrt{6}$;
d) $a + 1 - 2\sqrt{a}$, $x + y + 2\sqrt{xy}$, $pq\left(p + q - 2\sqrt{pq}\right) = pq\left(\sqrt{p} - \sqrt{q}\right)^2$;
e) $1 + x + 2\sqrt{x}$, $a + b - 2\sqrt{ab}$, $19 - 6\sqrt{2}$;
f) $2 + \sqrt{2} - 2\sqrt{1 + \sqrt{2}}$, nincs értelme, $2a + 1 + 2\sqrt{a^2 + a}$.

865. *a)* $6 + 2(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})$, $8 - 2(\sqrt{10} + \sqrt{2} - \sqrt{5})$,
$a^2 + 3a + 1 + 2\sqrt{a}\,(1 + a)$;
b) $2\sqrt{20} + 8$, $4(\sqrt{3} - \sqrt{2})$;
c) $2(a - 1)$, $\dfrac{a}{b^2} + \dfrac{b}{a^2} - \dfrac{2}{\sqrt{ab}}$, $\dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{x^2\sqrt{x}}{3}$.

866. *a)* $\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)$, $\sqrt{3}\left(1 - \sqrt{5}\right)$, $\sqrt{7}\left(1 + \sqrt{7}\right)$, $\sqrt{15}\left(\sqrt{5} + 1\right)$;
b) $\sqrt{2}\left(1 - \sqrt{3} + \sqrt{5}\right)$, $\sqrt{3}\left(1 + \sqrt{5} - \sqrt{6}\right)$, $\sqrt{5}\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$.

867. *a)* $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)$, $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1+\sqrt{y}\right)$, $\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$,
$\sqrt{p}\left(\sqrt{p}+1\right)(p+1)$;
b) $\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$, $\sqrt{p}\left(q\sqrt{p}+1\right)$, $\sqrt{x-y}\left(1+\sqrt{x+y}\right)$,
$\sqrt{x+y}\left(x-y\sqrt{x-y}\right)$;
c) $\left(\sqrt{y}+\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{p}\right)$, $\sqrt{x}\left(y\sqrt{x}-2\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)$.

868. *a)* $ab\left(a+b-\sqrt{ab}\right)$, $\sqrt{pq}\left(pq+q^2-p^2+pq\sqrt{pq}\right)$;
b) $\left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)^2$, $\left(x-\sqrt{x}\right)^2$, $\left(p\sqrt{q}+q\sqrt{p}\right)^2$;
c) $\sqrt{x}(x-1)\left(\sqrt{x}-1\right)$, $\left(2\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(1+\sqrt{a}+\sqrt{ab}\right)$.

869. *a)* $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$; *b)* $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; *c)* $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

870. *a)* $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$; *b)* $\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}$; *c)* p; *d)* $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

871. *a)* $\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$.

872. *a)* $\left(4\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(4\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)=43$;
b) $\left(7\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\left(7\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)=86$;
c) $\dfrac{\left(10\sqrt{3}-1\right)\left(10\sqrt{3}+1\right)}{11}=\dfrac{299}{11}$;
d) $2\left(\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-4\sqrt{2}\right)=-58$;
e) $\dfrac{2}{5}\left(4\sqrt{6}-3\right)\left(4\sqrt{6}+3\right)=\dfrac{174}{5}$;
f) $\left(12+\sqrt{10}\right)\left(12-\sqrt{10}\right)=134$;
g) $\dfrac{\left(23-5\sqrt{7}\right)\left(23+5\sqrt{7}\right)}{3}=118$;
h) $25\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=125$.

873. *a)* $\left(13-\sqrt{5}\right)\left(13+\sqrt{5}\right)=164$;
b) 4;
c) $\sqrt{4\sqrt{2}+2}$.

IV

874. *a)* $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $4\sqrt{3}$, $3\sqrt{8}$, $\sqrt{11}$;

b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\frac{\sqrt{35}}{7}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, 1;

c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\frac{5\sqrt{7}}{21}$, $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{5}$, $\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}$, $\frac{2\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}$.

875. *a)* $\sqrt{a}$, $\frac{\sqrt{ab}}{a}$, $\frac{p\sqrt{pq}}{q}$, $\frac{\sqrt{ab}}{b}$, $x\sqrt{y}$;

b) $\frac{\sqrt{ab}}{b}$, $b\sqrt{a}$, $\sqrt{a}+1$, $\frac{a\sqrt{ab}+b\sqrt{a}}{ab}$, $2q\sqrt{pq}$;

c) $\frac{\sqrt{x-y}}{x-y}$, $\frac{(x-y)\sqrt{x+y}}{x+y}$, $\sqrt{p-q}$, $\frac{(a-b)\sqrt{a+b}}{2}$,

$\frac{(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})\sqrt{a+b}}{a+b}$;

d) 1, $2\sqrt{2}-1$, 25.

876. *a)* $\sqrt{3\sqrt{6}}$, $2\sqrt{\sqrt{2}}$, $2\sqrt{6\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt{a}}$, $\sqrt{pq\sqrt{q}}$;

b) $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{5}+1$, $\frac{6\left(4-\sqrt{6}\right)}{5}$, $5\left(\sqrt{2}+1\right)$, $2\left(2\sqrt{3}+3\right)$;

c) $3+\sqrt{3}$, $6-3\sqrt{2}$, $10-4\sqrt{5}$, $-\frac{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}{2}$;

d) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2$, $\frac{\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{5}$, $-\frac{(3\sqrt{5}+5\sqrt{3})^2}{30}$, $\frac{\left(\sqrt{17}+\sqrt{15}\right)^2}{2}$;

e) $\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$, $\frac{a\left(\sqrt{a}+1\right)}{a-1}$, $\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{x-y}$, $\frac{\left(p\sqrt{q}+q\sqrt{p}\right)^2}{pq(p-q)}$;

f) $\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)\sqrt{1-x}}{1-x}$, $\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^2$, $\frac{\sqrt{p-1}+\sqrt{q-1}}{p-q}$,

$\frac{\sqrt{p^2+1}+\sqrt{q^2+1}}{p-q}$;

g) $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{6}$, $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}-2\right)$,

$4\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{2}}}\left(\sqrt{3+\sqrt{2}}-2\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$.

877. *a)* $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2=2$, $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$, tehát a kifejezés étéke: 0;

b) a kifejezés negatív;
c) a kifejezés értéke: 0;
d) a kifejezés negatív;
e) a kifejezés értéke: 0.

878. *a)* a kifejezés értéke: 0.

879. *a)*A helyesen kitöltött keresztrejtvény: 879. ábra.

879.

	${}^{1}8$	${}^{2}1$
${}^{3}6$		2
${}^{4}4$	4	1

A képezhető hétjegyű számok száma: $\dfrac{7!}{2!\cdot 2!}=1260$.

880. *a)* $\left|5-\sqrt{2}\right|+\left|5+\sqrt{2}\right|=10$;

b) $\dfrac{1}{\left|\sqrt{10}-3\right|}-\dfrac{1}{\left|\sqrt{10}+3\right|}=\dfrac{\sqrt{10}+3-\sqrt{10}+3}{1}=6.$

881. $\dfrac{\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}+1\right)-2}{a-1}\cdot\dfrac{a-1}{\sqrt{a}+3}=\sqrt{a}.$

882. *a)* Emeljünk négyzetre, és használjuk fel, hogy $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=1$.

A kifejezés értéke: $\sqrt{6}$;

b) A zárójelben szereplő kifejezés. $\dfrac{-2\sqrt{p^2-q^2}}{q}$. A végeredmény: q^2-p^2;

c) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$;

d) A zárójelben szereplő kifejezés. $\dfrac{x+y}{x-y}$. Így az eredmény: $\sqrt{x}-\sqrt{y}$;

e) A kifejezés második tagja: $\dfrac{1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$. A végeredmény: $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$;

f) A kifejezés első tagja: $\dfrac{\sqrt{p}-\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$. A végeredmény: 1;

g) Az első zárójelben szereplő kifejezés: $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$. A végeredmény: 1.

883. *a)* Mindkét oldalt négyzetre emelve adódik az egyenlőség.
b) Mindkét oldalt négyzetre emelve adódik az egyenlőség.

884. A bal oldal mindkét törtjének nevezőjét gyöktelenítve, a zárójeleket felbontva és összevonva a bizonyítandó egyenlőség:

$$\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^3}+\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^3}=3\sqrt{6}.$$

Innen négyzetre emelés után adódik az egyenlőség.

885. A belső négyzetgyökök alatt teljes négyzetek szerepelnek:

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{a}}{a}\left(\sqrt{a}-2+\sqrt{a}+2\right)}=\sqrt{4}=2.$$

886. Szorozzuk meg mindkét oldalt a $\sqrt{(c+a)(c+b)}$ közös nevezővel. Innen átrendezés, kiemelés, négyzetre emelés, majd összevonás után a $c^2\left(c^2-b^2-a^2\right)=0$ alakra jutunk, amiből már következik a bizonyítandó állítás.

887. Megmutatjuk, hogy ha $a>1$, akkor

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}<2\sqrt{a}.$$

Ugyanis négyzetre emelés után

$$2a+2\sqrt{a^2-1}<4a, \quad \text{azaz} \quad a^2-1<a^2.$$

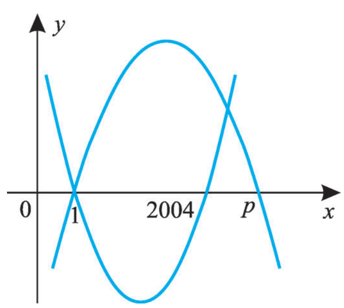
Ezen ötlet alapján a feladat *a)*, *b)* része már könnyen igazolható.

888. Az előző feladat alapján ez is könnyen igazolható.

889. Emeljük négyzetre mindkét oldalt, majd összevonás után használjuk fel, hogy $ad=bc$.

890. A $\dfrac{-x^2+px-p+x}{x^2-2005x+2004}\geq 0$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Ábrázoljuk a számlálóban és a nevezőben szereplő másodfokú kifejezéseket egy koordináta-rendszerben. A nevező zérushelyei: 1 és 2004, a számláló zérushelyei: 1 és p.

890.

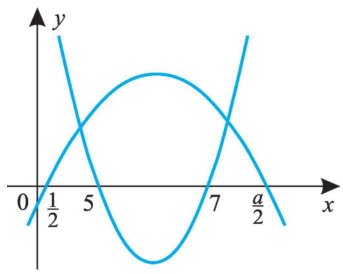


Ha $p\leq 2004$, akkor az értelmezési tartomány egyetlen prímet sem tartalmaz. Ha $p>2004$, akkor az értelmezési tartomány: $2004<x\leq p$. Mivel a 2004 utáni első prímszám 2011, ezért a megadott kifejezés értelmezési tartománya akkor nem fog egyetlen prímet sem tartalmazni, ha $p<2011$.

891. Most a $-x^2+(2+p)x-2p\geq 0$ és $-x^2+2005>0$ egyenlőtlenségeknek kell teljesülniük. A számláló zérushelyei: 2 és p. A nevező zérushelyei: 0 és 2005. Az értelmezési tartománynak mindenképpen eleme a 2, ezért $p<3$ kell, hogy legyen.

892. A $-4x^2 + 2(a+1)x - a \geq 0$ és $x^2 - 12x + 35 > 0$ egyenlőtlenségeknek kell teljesülniük. A nevező zérushelyei: 5 és 7, a számláló zérushelyei $\frac{1}{2}$ és $\frac{a}{2}$ (*lásd ábra*).

892.



Az értelmezési tartomány: $\frac{1}{2} \leq x < 5$ vagy $7 < x \leq \frac{a}{2}$.

Az értelmezési tartományban akkor lesz pontosan 5 db prímszám, ha

$$17 \leq \frac{a}{2} < 19, \quad \text{azaz} \quad 34 \leq a < 38.$$

893. A feltételek szerint: $10a + b = a^2 + b^2 + 2ab$, azaz

$$a^2 + 2a(b-5) + b^2 - b = 0.$$

Ennek az a-ban másodfokú egyenletnek csak akkor lehet egész megoldása, ha a diszkriminánsa négyzetszám:

$$4(b-5)^2 - 4(b^2 - b) = K^2, \quad \text{ahonnan} \quad 25 - 9b = R^2.$$

Ez csak $b = 1$-re teljesül, ahonnan pedig $a = 8$. $\sqrt{80} = 8 + 1$.

894. $|b| \leq 2005$. Azt vizsgáljuk, hogy az első két tag összege milyen b esetén lesz nagyobb a harmadik tagnál:

$$\sqrt{2005 + \sqrt{2005^2 - b^2}} - \sqrt{2005 - \sqrt{2005^2 - b^2}} > \sqrt{6}.$$

Négyzetre emelés után a következőre jutunk:

$$4010 - 2\sqrt{b^2} > 6, \quad \text{azaz} \quad |b| < 2002.$$

Ezek szerint

ha $|b| < 2002$, akkor a kifejezés értéke pozitív,

ha $|b| = 2002$, akkor a kifejezés értéke 0,

ha $2002 < |b| \leq 2005$, akkor a kifejezés értéke negatív.

Az *n*-edik gyök fogalma és azonosságai

895. *a)* 3, -3, 2, 5, -4;

b) 0,3 -2, 3, -3, -2;

c) $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$;

d) nincs értelme, nincs értelme, nincs értelme, 3, $-\frac{5}{2}$.

IV

896. $a,\quad |b|,\quad |c|,\quad |a|,\quad x^2.$

897. *a)* $2\cdot\sqrt[3]{3},\quad 2\cdot\sqrt[4]{2},\quad 3\cdot\sqrt[3]{2},\quad 2\cdot\sqrt[5]{2},\quad 3\cdot\sqrt[3]{3};$

b) $2\cdot\sqrt[3]{b^2},\quad 2\cdot\sqrt[4]{4x^3},\quad 2b\cdot\sqrt[3]{2a^2b},\quad pq\cdot\sqrt[4]{pq^2}.$

898. *a)* $a\cdot\sqrt[k]{a},\quad b^2\cdot\sqrt[n]{b},\quad x\cdot\sqrt[p]{x^q},\quad k\cdot\sqrt[n+1]{k^2};$

b) $ab\cdot\sqrt[n]{a^2b},\quad c^3d^2\cdot\sqrt[k]{cd^3},\quad x^2y\cdot\sqrt[k+2]{xy}.$

899. $\sqrt[3]{16},\quad \sqrt[3]{135},\quad \sqrt[4]{48},\quad \sqrt[5]{729},\quad \sqrt[4]{\frac{1}{8}},\quad \sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$

900. *a)* $\sqrt[3]{a^4},\quad \sqrt[4]{b^5},\quad \sqrt[5]{c^{11}},\quad \sqrt[3]{d^{11}},\quad \sqrt[4]{a^6b^7};$

b) $\sqrt[3]{p^7q^5},\quad \sqrt[8]{x^{35}y^{47}},\quad \sqrt[3]{\frac{a^5}{b^5}},\quad \sqrt[4]{\frac{m^3}{n^3}}.$

901. *a)* $\sqrt[6]{\frac{a^3}{p^4q^2}},\quad \sqrt[6]{\frac{x^9}{y^{10}z^{14}}},\quad \sqrt[3]{\frac{a^4b^7c^{10}}{x^4y^{13}}},\quad \sqrt[4]{(x+y)^3};$

b) $\sqrt[3]{8\left(x^3+x^4+x^5\right)},\quad \sqrt[4]{81\left(m^{10}+m^{11}\right)},\quad \sqrt[3]{8\left(a^8b^3-3a^7b^4+2a^4b^5\right)};$

c) $\sqrt[3]{p+q},\quad \sqrt[3]{\frac{a+b}{a-b}}.$

902. *a)* $10,\quad 12,\quad 4\sqrt{2},\quad 6;$

b) $\frac{3}{2},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{1}{15},\quad \frac{2}{3};$

c) $20,\quad 10,\quad 15,\quad 14.$

903. *a)* $144,\quad ab,\quad p^2q^2;$

b) $\sqrt[n]{x^{3n}y^{4n}}=x^3y^4,\quad \sqrt[k]{m^{k^2+4k}n^{3k}}=m^{k+4}n^3;$

c) $\sqrt[3]{144-19}=5,\quad \sqrt[4]{100-19}=3,\quad \sqrt[5]{64-32}=2;$

d) $\sqrt[3]{49-22}^{\,5}=243,\quad \sqrt[4]{121-57}^{\,3}=16\sqrt{2}.$

904. *a)* $\frac{2a^2}{3b^3},\quad \left(\frac{xy}{z}\right)^2,\quad \frac{p^3q^2}{2r};$

b) $x-y,\quad m-n.$

905. *a)* $\sqrt[3]{27}=3,\quad \sqrt[4]{16}=2,\quad \sqrt[5]{32}=2,\quad \sqrt[3]{27}=3;$

b) $\frac{1}{10},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{2}.$

906. *a)* $2a,\quad 2x,\quad 2p;$

b) $a^2b,\quad x^2y^5,\quad m^4n^4k^3.$

907. $\frac{ab}{c},\quad \frac{3x^4y^7}{z^3},\quad \frac{2p^4q^6}{3r^2}.$

908. Az $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ és $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ azonosságok alapján
a) 7; *b)* 6.

909. Az előző feladat azonosságai alapján *a)* $p+q$; *b)* $p-q$.

910. *a)* $\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[12]{3}$, $\sqrt[10]{7}$, $\sqrt[12]{5}$, $\sqrt[42]{10}$;
b) $\sqrt[6]{a}$, $\sqrt[12]{b^5}$, $\sqrt[15]{x^4}$, $\sqrt[14]{y^5}$, $\sqrt[24]{z^3}$;
c) $\sqrt[6]{3^4}$, $\sqrt[12]{48}$, $\sqrt[15]{135}$, $\sqrt[12]{432}$, $\sqrt[15]{224}$.

911. *a)* $\sqrt[6]{a^4}$, $\sqrt[9]{a^4}$, $\sqrt[12]{b^8}$, $\sqrt[15]{x^{11}}$;
b) $\sqrt[12]{2^9}$, $\sqrt[24]{3^{11}}$, $\sqrt[12]{2^{10}}$;
c) $\sqrt[12]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}$, $\sqrt[12]{\left(\frac{5}{7}\right)^4}$, $\sqrt[15]{\left(\frac{2}{9}\right)^5}$, $\sqrt[15]{\left(\frac{3}{11}\right)^4}$.

912. *a)* $\sqrt[12]{a^9}$, $\sqrt[36]{a^{19}}$, $\sqrt[6]{b^{25}}$;
b) $\sqrt[9]{\left(\frac{a}{b}\right)^4}$, $\sqrt[6]{\frac{p^{13}}{q^{11}}}$, $\sqrt[8]{\frac{1}{x^3}}$, $\sqrt[15]{\frac{m^{11}}{n^{14}}}$;
c) $\sqrt[24]{a^{17}}$, $\sqrt[36]{a^{29}}$, $\sqrt[90]{x^{98}}$.

913. $\sqrt[24]{\frac{x^7}{y^6}}$, $\sqrt[60]{\frac{p^{31}}{q^{42}}}$, $\sqrt[36]{\frac{p^5}{q^5}}$.

914. *a)* igaz, *b)* igaz, *c)* hamis, *d)* igaz, *e)* igaz.

915. *a)* hamis, *b)* hamis, *c)* igaz, *d)* igaz, *e)* hamis, *f)* igaz, *g)* igaz.

916. *a)* $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[12]{3^4\cdot 4^3}$, $\sqrt[6]{5^5}$, $\sqrt[10]{4\cdot 5^5}$;
b) $\sqrt[12]{9\cdot 5^3}$, $\sqrt[15]{3^5\cdot 4^3}$, $\sqrt[12]{2^4\cdot 7^3}$, $\sqrt[21]{2^7\cdot 3^3}$.

917. *a)* $\sqrt[6]{\left(\frac{3}{2}\right)^5}$, $\sqrt[6]{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^3}$, $\sqrt[12]{\left(\frac{5}{2}\right)^7}$;
b) $\sqrt[12]{\frac{2}{27}}$, $\sqrt[20]{\frac{1}{162}}$, $\sqrt[15]{\frac{5^2}{3^7}}$, $\sqrt[12]{\left(\frac{2}{3}\right)^{13}}$;
c) $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[12]{b^7}$, $\sqrt[30]{x^{11}}$, $\sqrt[24]{p^{11}}$;
d) $\sqrt[12]{a^{17}}$, $\sqrt[12]{x^{25}}$, $\sqrt[40]{p^{57}}$, $\sqrt[30]{m^{53}}$;
e) $\sqrt[15]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}$, $\sqrt[12]{\frac{x^{11}}{y^{10}}}$, $\sqrt[30]{\frac{q^{19}}{p^3}}$, $\sqrt[20]{\frac{m^{47}}{n^{37}}}$.

IV

918. *a)* $\sqrt[12]{\dfrac{a^{13}}{b^{13}}}$, $\sqrt[60]{\dfrac{p^7}{q^{14}}}$, $\sqrt[30]{\dfrac{1}{m^{16}n^{34}}}$;

b) $\sqrt[12]{a^{31}}$, $\sqrt[12]{b^{27}}$, $\sqrt[30]{y^{53}}$;

c) $\sqrt[12]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^7}$, $\sqrt[30]{\dfrac{x^{65}}{y^{37}}}$, $\sqrt[24]{\dfrac{n^{25}}{m}}$.

919. *a)* $2-\sqrt[6]{2^7}+\sqrt[4]{2^5}=2\left(1-\sqrt[6]{2}+\sqrt[4]{2}\right)$;

b) $3+\sqrt[6]{3^7}-\sqrt[4]{3^5}=3\left(1+\sqrt[6]{3}-\sqrt[4]{3}\right)$.

920. *a)* $a+\sqrt[6]{a^7}-\sqrt[4]{a^5}=a\left(1+\sqrt[6]{a}-\sqrt[4]{a}\right)$;

b) $\sqrt{6}-\sqrt[4]{27}+\sqrt[6]{32}-\sqrt[12]{2^4\cdot 3^3}$;

c) $\sqrt[6]{x^{13}}-\sqrt[4]{x^{13}}+\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[12]{x^{23}}$;

d) $p-3\cdot\sqrt[6]{p^8}-\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt[6]{p^7}+\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt[6]{p^3}$;

e) $\sqrt[3]{\dfrac{x-y}{x+y}}$.

921. A szögletes zárójel első tagja: $\dfrac{\left(\sqrt[6]{m^2n^5}-\sqrt[6]{n^2m^5}\right)^2}{\sqrt[6]{m^7n^7}}=\dfrac{\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{mn}}$.

Ennek felhasználásával a kifejezés: $\dfrac{m-n}{mn}$.

922. Vigyük át a bal oldal utolsó tagját a jobb oldalra, majd emeljük köbre minkét oldalt:

$1-12\cdot\sqrt[3]{7}+6\cdot\sqrt[3]{49}=\left(2-\sqrt[3]{7}\right)^3$.

923. Legyen a kifejezés értéke k. Tegyünk úgy, mint az előző feladat esetében:

$1-27\cdot\sqrt[3]{26}+9\cdot\sqrt[3]{26^2}=\left(k-\sqrt[3]{26}\right)^3$.

A műveletek elvégzése és a megfelelő átalakítások után kapjuk, hogy csak $k=3$ lehet. Ezek után bizonyítsuk be – az előző feladathoz hasonlóan –, hogy

$\sqrt[3]{1-27\cdot\sqrt[3]{26}+9\cdot\sqrt[3]{26^2}}+\sqrt[3]{26}=3$.

924. Az egyenlet így alakítható:

$\sqrt[nk]{a^{k+2}}\cdot\sqrt[nk]{a^{n+2}}=a$, azaz $a^{n+k+4}=a^{nk}$.

Innen

$nk-n-k-4=0$, $(n-1)(k-1)=5$.

Innen pedig $n=2$, $k=6$, vagy fordítva.

925. Az előző feladathoz hasonló átalakítást végezve azt kapjuk:

$pq - 2q - 3p - 5 = 0,$

$(q-3)(p-2) = 11.$

Innen $q = 4,\ p = 13$, vagy fordítva.

926. A kifejezés így alakítható:

$$\sqrt[6]{\left(2+\sqrt{3}\right)^3} \cdot \sqrt[6]{\frac{2\left(3\sqrt{3}-5\right)^2}{4}}.$$

A megfelelő műveletek elvégzése után kapjuk, hogy a kifejezés értéke: 1.

Törtkitevőjű hatványok

927. *a)* 2, 2, 2, 3, 10;
b) 125, 81, 32, 27, 4;
c) $\frac{1}{1000},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{343},\ \frac{1}{10}.$

928. 8, 32, 3125, $\frac{16807}{32},\ \frac{32}{243}.$

929. *a)* $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{125},\ \sqrt[5]{16},\ \sqrt[6]{6},\ \sqrt[10]{10};$
b) $\frac{1}{2\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt[3]{169}},\ \frac{1}{\sqrt{54^3}},\ \sqrt[3]{\frac{4}{9}},\ \frac{8}{3\sqrt{3}};$
c) $\sqrt[4]{a},\ \sqrt[3]{b^2},\ \frac{1}{\sqrt[4]{c}},\ \frac{1}{\sqrt{x^3}},\ \frac{1}{\sqrt[3]{p^4}};$
d) $3\sqrt{x},\ \frac{\sqrt[3]{a}}{3},\ \sqrt[3]{\frac{a}{3}},\ \frac{8}{\sqrt[3]{y^2}},\ \frac{1}{4\cdot\sqrt[3]{y^2}}.$

930. $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{b},\ \frac{\sqrt[9]{y}}{\sqrt[12]{x}},\ \frac{\sqrt[8]{n}}{\sqrt[8]{m^3}},\ \frac{1}{q\cdot\sqrt[4]{p^5}}.$

931. *a)* igaz, *b)* hamis, *c)* hamis, *d)* hamis, *e)* igaz.
932. *a)* igaz, *b)* igaz, *c)* igaz, *d)* hamis.
933. *a)* igaz, *b)* hamis.

934. $a^{\frac{1}{3}},\ x^{\frac{3}{4}},\ p^{\frac{7}{5}},\ x^{\frac{r}{n}},\ m^{\frac{3}{k}}.$

935. *a)* $p^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{3}},\ r^{\frac{1}{4}}s^{\frac{3}{4}},\ x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{4}{5}},\ m^{\frac{5}{6}}n^{\frac{4}{3}},\ a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{7}{10}};$
b) $a^{\frac{3}{4}},\ b^{\frac{7}{6}},\ x^{\frac{9}{8}},\ y^{\frac{4}{3}};$
c) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{6}},\ x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{9}},\ p^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{5}},\ m^{\frac{13}{20}}.$

936. $a^{\frac{15}{16}}$, $b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{3}{8}}y^{\frac{5}{8}}$.

937. *a)* $xy^{\frac{1}{2}} - yx^{\frac{1}{2}}$, $10a^{\frac{1}{4}} + 15a^{\frac{1}{6}}$, $p - q$;

b) $m^5 - n^5$, $2a + b^{\frac{1}{2}}a^{\frac{2}{3}} - 4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{2}} - 2b^2$, $x^{\frac{1}{2}} - x^2$.

938. *a)* $-b - 3b^{\frac{1}{2}}$, $-25x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}} + 6$;

b) $p^{\frac{1}{12}}$, $m^{-\frac{23}{24}}$, $p^{-\frac{29}{24}}$, $x^{\frac{5}{4}}$.

939. *a)* $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$; *b)* $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{3}{4}}}{x - x^{\frac{1}{2}}}$.

940. *a)* $p^{\frac{1}{3}} \cdot q^{\frac{7}{18}}$; *b)* $\dfrac{b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} - c}{b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}$.

941. *a)* $\dfrac{2\left(m^2 + n^2\right)}{(m-n)^2}$; *b)* $\dfrac{1}{rs}$; *c)* $2y^{\frac{3}{5}}$.

A logaritmus fogalma és azonosságai

942. *a)* 3, 2, 1, 2, 0;
b) 2, 2, 2, 2, 5;
c) -1, $-\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$, -6;
d) $-\dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{1}{2}$, -4, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{2}{3}$;
e) $-\dfrac{1}{6}$, -8, 8, $-\dfrac{1}{4}$, $-\dfrac{5}{2}$.

943. *a)* $\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{6}{5}$, $\dfrac{2}{21}$, $\dfrac{1}{2}$;

b) 3, -4, $\dfrac{2}{3}$, $-\dfrac{4}{3}$, $-\dfrac{1}{25}$.

944. *a)* igaz, *b)* igaz, *c)* hamis,
d) igaz, *e)* igaz, *f)* hamis,
g) igaz, *h)* igaz, *i)* hamis,
j) igaz, *k)* igaz, *l)* igaz,
m) hamis, *n)* igaz, *o)* hamis,
p) igaz, *q)* hamis.

945. 132, 7, 8, 5, 3, 1.

946. *a)* 5, 36, $\dfrac{16}{3}$, 100, $\dfrac{1}{24}$; *b)* 9, 25, 9, 16, 8;

c) 27, 64, 16, 3^{10}, $\dfrac{1}{25}$; *d)* 2, 2, $\sqrt[3]{7}$, 3, $\dfrac{1}{5}$.

947. *a)* $36, \quad 75, \quad \frac{1}{9}, \quad 30;$

b) $57\frac{1}{2}, \quad 781\frac{13}{81}.$

948. *a)* $x > 4, \quad x > \frac{5}{2}, \quad x > -\frac{7}{3}, \quad x > \frac{18}{5};$

b) $|x| > 3, \quad |x| > 4, \quad |x| > 4, \quad |x| > 22.$

949. *a)* $x > -\frac{5}{3}, \quad x \neq 1, \quad x > 3, \quad x \neq 5, \quad |x| > 5, \quad x \neq -10, \quad |x| > 7, \quad |x| \neq 10;$

b) $-3 < x < 5, \quad 3{,}5 < x < 6, \quad x > 6;$

c) $|x| > 4, \quad |x| > 2, \quad x < 1$ vagy $x > 7, \quad x < -5$ vagy $x > 7.$

950. *a)* $x < 2 \cup x > 6, \; x \neq -4, \quad x < -2 \cup x > 5, \quad x \neq -6;$
$x < 0 \cup x > 9, \; x \neq -1, \; x \neq 10;$

b) $x < -3 \cup x > \frac{1}{2}, \quad x < \frac{2}{3} \cup x > 3, \quad 2 < x < 3, \quad x < -\frac{1}{3} \cup x > \frac{3}{2};$

c) $x < -7 \cup 5 < x < 7, \quad x < -7, \quad 0 < x < 2 \cup 5 < x < 10,$ üres halmaz;

d) $1 < x \leq 5, \quad \frac{1}{2} < x \leq \frac{9}{2}, \quad x \geq \frac{3}{2}.$

951. *a)* $5 < x < 9, \quad 2 < x \leq 3 \cup 5 \leq x < 6, \; x \neq \frac{8 \pm \sqrt{14}}{2};$

b) $x < -2 \cup -1 < x < 1 \cup x > 4,$

$x < -3 \cup -2 < x < 2 \cup 3 < x < 4 \cup x > 9, \quad x \neq \frac{13 \pm \sqrt{29}}{2}.$

952. Jelöljük R-rel az adott kifejezések értékkészletét!
a) $R \leq 0, \quad R \leq 2, \quad R \leq 8;$
b) $R \leq 2, \quad R \leq -4, \quad R \leq 4.$

953. *a)* $0 < R \leq 4, \quad R \geq \frac{1}{6}, \quad R \geq \frac{1}{25};$

b) $R \leq 0, \quad R \leq 0, \quad R > 0, \quad R \leq -1.$

954. A helyesen kitöltött keresztrejtvényt a 954. ábra mutatja.
955. A helyesen kitöltött keresztrejtvényt a 955. ábra mutatja.

954.

	[1] 1	[2] 6
[3] 2		4
[4] 7	5	3

955.

[1] 1	0	[2] 1
0		9
[3] 1	0	1

vagy

[1] 1	0	[2] 1
0		7
[3] 1	0	1

IV

956. *a)* $\lg x = \lg a + \lg b + \lg c$,
$\lg x = \lg 6 + \lg p + \lg q$,
$\lg x = \lg 10 + \lg m + 2\lg n$,
$\lg x = \lg 5 + \lg (r+s)$,
$\lg x = \lg (a+b) + \lg (a-b)$;
b) $\lg x = 2\lg a + 3\lg b + 4\lg c$,
$\lg x = \lg 2 + 6\lg p + 3\lg q + 2\lg r$,
$\lg x = \lg (m+n) - \lg (m-n)$,
$\lg x = \lg a + \lg b + \lg c - \lg 4 - \lg T$.

957. *a)* $\lg x = \lg 2 + 3\lg a - \lg 3 - 2\lg b$,
$\lg x = \lg 4 + 3\lg r + \lg \pi - \lg 3$,
$\lg x = \lg m + \lg n - 2\lg r$,
$\lg x = \lg a + 2\lg b + \lg 2 + \lg p + \lg q - 2\lg r - 3\lg s$;
b) $\lg x = \lg a + \frac{1}{2}\lg b - \lg b - \frac{1}{2}\lg a$,
$\lg x = 2\lg p + \frac{1}{3}\lg q - 3\lg q - \lg (p+q)$,
$\lg x = \lg m + \frac{1}{5}\lg n - \lg (m+n) - \lg (m-n)$,
$\lg x = 3\lg m + \frac{1}{3}\lg n - \frac{1}{2}(3\lg m + \lg n)$;
c) $\lg x = \frac{1}{2}\left[\lg a + \frac{1}{2}\lg b - 4\lg a\right]$,
$\lg x = \frac{1}{3}\left[4\lg p + \frac{3}{4}\lg q - 4\lg p - 2\lg q\right]$,
$\lg x = 5\left(4\lg m - \frac{2}{3}\lg n\right)$,
$\lg x = \frac{1}{2}\left(4\lg s + \frac{1}{3}\left(2\lg s + \lg r - \frac{1}{2}(\lg s + 3\lg r)\right)\right)$.

958. *a)* $x = ab$, $x = \frac{pq}{r}$, $x = m^2 n^3$;
b) $x = \sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}$, $x = \frac{\sqrt[3]{p^2}\cdot\sqrt[4]{q^3}}{\sqrt{r}}$, $x = \sqrt[5]{\left(\frac{a}{b}\right)^3}$.

959. *a)* $x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b^2 c}}$, $x = \sqrt[4]{\frac{p^3 q^2}{\sqrt{r}}}$.

960. *a)* 1, *b)* 3, *c)* 2, *d)* 4.

961. *a)* 3, *b)* 1, *c)* 4.

962. *a)* 4, *b)* 6, *c)* 3.

963. *a)* −2, *b)* 4, *c)* 1, *d)* 3.

964. $-\frac{3}{2}$.

965. 1 404 371; 201 533; 30,057.

966. *a)* 306,28; 20,728; 36 202 551;
b) 134 366; 17 374; $2{,}057 \cdot 10^{-3}$.

967. 4899,78; $5{,}696 \cdot 10^{-4}$; 1,0156.

968. $\lg 75 = \lg 15 + \lg 5 = a$, $\lg 45 = \lg 15 + \lg 3 = b$. E két egyenlőség összege:

$2 \lg 15 + \lg 3 + \lg 5 = 3 \lg 15 = a + b$,

ahonnan $\lg 15 = \frac{a+b}{3}$.

969. $\lg 48 = \lg 3 + 4 \lg 2 = p$, $\lg 72 = 2 \lg 3 + 3 \lg 2 = q$. A lg 3-ban és a lg 2-ben a kétismeretlenes, elsőfokú egyenletrendszer megoldása: $\lg 2 = \frac{2p-q}{5}$,

$\lg 3 = \frac{4q-3p}{5}$.

Tehát $\lg 6 = \lg 2 + \lg 3 = \frac{3q-p}{5}$.

970. $\lg (10!) = \lg 2 + \lg 3 + \lg 4 + \lg 5 + \lg 6 + \lg 7 + \lg 8 + \lg 9 + \lg 10 =$
$= 4n + 6m + k + 2$.

971. $\log_6 \sqrt{150} = \frac{1}{2}(\log_6 6 + \log_6 25) = \frac{1+2k}{2}$.

972. A feltételből $\log_p \frac{p}{q} = 1 - \log_p q = \frac{1}{3}$, azaz $\log_p q = \frac{2}{3}$. Írjuk át a kiszámítandó mennyiséget p alapra.

$$\frac{\log_p \frac{p^5}{\sqrt{q}}}{\log_p \frac{p}{q}} = \frac{5 - \frac{1}{2}\log_p q}{1 - \log_p q} = \frac{5 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 14.$$

973. A feltételekből

$$\log_x a = \frac{1}{p}, \quad \log_x b = \frac{1}{q}, \quad \log_x abc = \frac{2}{p+q};$$

$$\log_x a + \log_x b + \log_x c = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \log_x c = \frac{2}{p+q}.$$

Innen

$$\log_x c = \frac{2}{p+q} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{p^2+q^2}{pq(p+q)}, \quad \text{tehát} \quad \log_c x = -\frac{pq(p+q)}{p^2+q^2}.$$

IV

974. Először azt bizonyítjuk, hogy $2\sqrt{2} < \log_2 3 + 2\log_3 2$. Osszuk el mindkét oldalt $\sqrt{2}$-vel:

$$2 < \frac{\log_2 3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\log_2 3}.$$

Mivel $2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{3}{2}} < 3$, így jobb oldalon egy 1-től különböző, pozitív számnak és reciprokának összege szerepel, melyről tudjuk, hogy nagyobb 2-nél.
Az egyenlőtlenség másik oldalának bizonyításához vezessük be a $\log_2 3 = y$ ismeretlent.

$$y + \frac{2}{y} < 3, \quad \text{azaz} \quad y^2 - 3y + 2 < 0.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség megoldása: $1 < y < 2$. Mivel $1 < \log_2 3 < 2$, ezért az eredeti egyenlőtlenség igaz.

975. *a)* Térjünk át a bal oldalon a alapú logaritmusra!
b) Térjünk át a jobb oldalon a alapú logaritmusra!
c) Vegyük mindkét oldal b alapú logaritmusát, és alkalmazzuk a logaritmus megfelelő azonosságát!
d) Térjünk át a bal oldal mindhárom tényezőjében ugyanolyan alapra (pl. a alapra)!

976. *a)* Az egyenlőség jobb oldala így alakítható:

$$1 + \log_a b = 1 + \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_c a + \log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_c ab}{\log_c a} = \frac{\log_a c}{\log_{ab} c}.$$

b) Térjünk át az egyenlőség bal oldalán b alapra:

$$\frac{\log_b an}{\log_b bn} = \frac{\log_b a + \log_b n}{1 + \log_b n}.$$

c) Térjünk át az egyenlőség bal oldalán b alapra!
d) Az egyenlőség bal oldala így alakítható:

$$\log_b a + \log_b a^2 + \log_b a^3 + \log_b a^4 = \log_b (a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4) = \log_b a^{10} =$$
$$= 10 \cdot \log_b a.$$

977. Írjuk át mindkét oldal minden tagját n alapra:

$$2\log_n b = \log_n (c - a) + \log_n (c + a) = \log_n (c^2 - a^2),$$

ahonnan $b^2 = c^2 - a^2$, ez pedig Pitagorasz tétele szerint valóban igaz.

978. Az egyenlőség így alakítható:

$$2\log_x m = \log_x p + \log_x q = \log_x pq,$$

ahonnan $m^2 = pq$, ez pedig a jól ismert magasságtétel.

979. Térjünk át minden tagban és tényezőben x alapra! A bal oldal:

$$\frac{\log_x a \cdot \log_x b}{\log_x p \cdot \log_x q}.$$

A jobb oldal:

$$\frac{\dfrac{1}{\log_x q}-\dfrac{1}{\log_x p}}{\dfrac{1}{\log_x b}-\dfrac{1}{\log_x a}}=\frac{\dfrac{\log_x p-\log_x q}{\log_x p\cdot\log_x q}}{\dfrac{\log_x a-\log_x b}{\log_x a\cdot\log_x b}}=\frac{\log_x\dfrac{p}{q}}{\log_x p\cdot\log_x q}\cdot\frac{\log_x a\cdot\log_x b}{\log_x\dfrac{a}{b}}.$$

A bal oldalt és a jobb oldalt összevetve ezt kapjuk:

$$\frac{\log_x\dfrac{p}{q}}{\log_x\dfrac{a}{b}}=1,\quad \text{ahonnan}\quad \frac{a}{b}=\frac{p}{q}.$$

980. Mivel $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$, így valóban
$\log_{2+\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})=\log_{2+\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^{-1}=-1.$

981. A bal oldal mindkét tagja -1 (lásd előző feladat).

982. Térjünk át x alapra:

$$(\log_{n!}x)^{-1}=\log_x n!=\log_x 2+\log_x 3+\log_x 4+\ldots+\log_x n=$$

$$=\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+\ldots+\frac{1}{\log_n x}=\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\log_i x}=\sum_{i=2}^{n}(\log_i x)^{-1}.$$

Nehezebb feladatok a témakörből

983. Először kiszámítjuk A-t és B-t.

$$A=\left(\frac{2^9-2^4}{31}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{2^4(2^5-1)}{31}\right)^{\frac{1}{4}}=2,$$

$$B=\left(-\log_8\frac{1}{2}\right)^{-1}=3.$$

A C mennyiségnek csak akkor van értelme, ha $-p^2-4p+60>0$, ahonnan $-10<p<6$.
Mivel $-p^2-4p+60=-(p+2)^2+64$, ezért
$C=\log_8(-p^2-4p+60)\le\log_8 64=2.$
Ezek szerint csak A lehet a mértani közép: $A^2=B\cdot C$;
$4=3\cdot\log_8(-p^2-4p+60)$, azaz $p^2+4p-44=0$,
ahonnan $p=-2\pm4\sqrt{3}$.

IV

984. Ha $\log_{x^2} a = \log_{xy} b = \log_{y^2}(a+2b) = k$, akkor
$a = x^{2k}$, $b = x^k y^k$ és $a + 2b = y^{2k}$,

vagyis $x^{2k} + 2x^k y^k = y^{2k}$, azaz $\left(\frac{x}{y}\right)^k + 2 = \left(\frac{y}{x}\right)^k$.

De $\left(\frac{x}{y}\right)^k = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$, így ezt kapjuk:

$$\operatorname{tg}\alpha + 2 = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \text{azaz} \quad \operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0.$$

Innen a szóba jöhető $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} - 1$, ahonnan $\alpha = 22{,}5°$.

985. $x > 0$. A $4y^2 - 37y + 9 \ge 0$ egyenlőtlenség megoldása: $y \le \frac{1}{4}$ vagy $y \ge 9$.
Ezek szerint

a) $\log_2 x \le \frac{1}{4}$ vagy $\log_2 x \ge 9$;

b) $\log_2^2 x \le \frac{1}{4}$ vagy $\log_2^2 x \ge 9$.

Az *a)* esetben

$$x \le \sqrt[4]{2} \quad \text{vagy} \quad x \ge 2^9 = 512.$$

A *b)* esetben

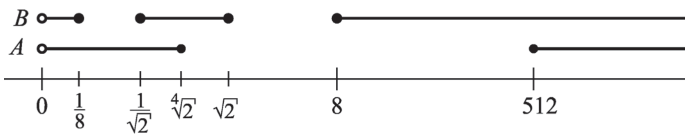
$$-\frac{1}{2} \le \log_2 x \le \frac{1}{2}, \quad \text{vagy} \quad \log_2 x \le -3, \quad \text{vagy} \quad \log_2 x \ge 3;$$

azaz

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \sqrt{2}, \quad \text{vagy} \quad 0 < x \le \frac{1}{8}, \quad \text{vagy} \quad x \ge 8.$$

Ábrázoljuk egy számegyenesen az A és B halmazok elemeit:

985.



A $B - A$ halmaz elemei:
$\sqrt[4]{2} < x \le \sqrt{2}$ vagy $8 \le x < 512$.

986. Mivel $\log_x xyz^9 = 1 + \log_x y + 9\log_x z$, ezért az egyenlőtlenség bal oldala így írható:

$$\log_x y + \log_y z + \log_z x + \frac{9}{\log_x y} + \frac{9}{\log_y z} + \frac{9}{\log_z x} > 18.$$

De

$$\log_x y + \frac{9}{\log_x y} = 3 \cdot \left(\frac{\log_x y}{3} + \frac{3}{\log_x y}\right).$$

Itt a jobb oldalon egy pozitív számnak és reciprokának összege szerepel, ami legalább 2. Ezek szerint

$$\log_x y + \frac{9}{\log_x y} = 3 \cdot \left(\frac{\log_x y}{3} + \frac{3}{\log_x y}\right) \geq 6,$$

vagyis

$$\log_x y + \log_y z + \log_z x + \frac{9}{\log_x y} + \frac{9}{\log_y z} + \frac{9}{\log_z x} \geq 18.$$

Egyenlőség akkor teljesülne, ha

$\log_x y = \log_y z = \log_z x = 3$

lenne, ahonnan $x = y = z = 0$ vagy $x = y = z = 1$ lenne, tehát az eredeti egyenlőtlenség valóban igaz.

987. A kitűzött egyenlőtlenség bal oldala:

$(2\log_a b + 4\log_b a)^2 + 3,$

tehát

$(2\log_a b + 4\log_b a)^2 + 3 > 2\sqrt{3}\,(2\log_a b + 4\log_b a),$

$$2\log_a b + 4\log_b a + \frac{3}{2\log_a b + 4\log_b a} > 2\sqrt{3},$$

$$\frac{2\log_a b + 4\log_b a}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\log_a b + 4\log_b a} > 2.$$

Már csak azt kell belátnunk, hogy

$$\frac{2\log_a b + 4\log_b a}{\sqrt{3}} \neq 1, \quad \text{azaz} \quad 2\log_a b + \frac{4}{\log_a b} - \sqrt{3} \neq 0.$$

Mivel a $2x^2 - \sqrt{3}\,x + 4 = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa -30, így az egyenlőtlenség – és ezzel az eredeti egyenlőtlenség is – teljesül.

988. Legyen $\sqrt[2005]{2} = a$, $\sqrt[2005]{3} = b$, $\sqrt[2005]{4} = c$. Azt kell belátnunk, hogy

$a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc.$

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc > 0,$

$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 > 0.$

Ez pedig nyilvánvaló.

IV

989. A feladat megoldásának gondolatmenete azonos a 974. feladat megoldásával.

990. A C mennyiségnél térjünk át közös (pl. 2-es) alapra:

$$C = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{1}{\log_2 5} = 1.$$

A másik két mennyiségre:

$$A = \log_2 3 = \log_4 9 > \log_4 8 = \frac{3}{2},$$

$$1 < B = \log_3 5 = \log_9 25 < \log_9 27 = \frac{3}{2}.$$

Tehát a sorrend: $A > B > C$.

991. Ha $a \neq 1$, akkor (áttérve minden tagban a alapra):

$$\frac{\log_a k}{1 + 2\log_a b} + \frac{\log_a k}{2 + \log_a b} = \frac{\log_a k}{1 + \log_a b} + \frac{\log_a k}{2 + 2\log_a b}.$$

Modellezve ezt az egyenlőséget:

$$\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{2+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+2x}, \quad \text{ahonnan} \quad 2x^2 + 5x + 2 = 2x^2 + 4x + 2.$$

Innen $x = \log_a b = 0$, így valóban $b = 1$.

992. Az alábbi feltételeknek kell teljesülniük:

a) $x^2 - 1 > 0$, *b)* $-x^2 + 2x + 15 > 0$,

c) $-\log_3^2(x^2 - 1) + 3\log_3(x^2 - 1) + 4 \geq 0$.

a) esetben $|x| > 1$. *b)* esetben a másodfokú kifejezés zérushelyei: 5 és -3, tehát $-3 < x < 5$. *c)* esetben a $-y^2 + 3y + 4 \geq 0$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk. E másodfokú kifejezés zérushelyei: 4 és -1, tehát

$$-1 \leq \log_3(x^2 - 1) \leq 4, \quad \text{ahonnan} \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \leq |x| \leq \sqrt{82}.$$

Mindhárom feltételt figyelembe véve az értelmezési tartomány:

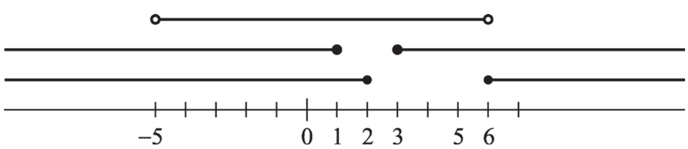
$$-3 < x \leq -\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{vagy} \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \leq x < 5.$$

993. Az alábbi feltételeknek kell teljesülniük:

$4^x - 68 \cdot 2^x + 256 \geq 0$, $16^x - 68 \cdot 4^x + 256 \geq 0$, $-x^2 + x + 30 > 0$.

Az egyenlőtlenségek megoldásait ábrázoltuk az alábbi számegyenesen:

993.



Az eredeti kifejezés értelmezési tartománya: $-5 < x \leq 1$.

994. Az $x>0,\ x\neq 1,\ -7x^2+29x-4\geq 0,\ \log_x 5>\log_5 x$ feltételeknek kell teljesülniük. Az eredeti kifejezés értelmezési tartománya: $\frac{1}{7}\leq x<\frac{1}{5}$.

995. A megadott kifejezés így írható:

$$\log_{\sqrt{2}}(a-b)-\log_{\sqrt{2}}\sqrt{ab}=\log_{\sqrt{2}}\frac{a-b}{\sqrt{ab}}=\log_2\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=$$

$$=\log_2\frac{18ab-2ab}{ab}=4.$$

996. Mivel

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\sqrt{2}}}}=2^{\frac{1}{2^n}},$$

ezért

$$-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\ldots\sqrt{2}}}}=-\log_2\log_2 2^{\frac{1}{2^n}}=-\log_2\frac{1}{2^n}=-\log_2 2^{-n}=n.$$

997. A téglalap koordinátái párhuzamosak a tengelyekkel, a megadott egyenes pedig áthalad az átlók metszéspontján. A téglalap T területe:

$$T=(\lg 8^n-\lg 2^n)(\lg 16^n-\lg 8^n)=\lg\frac{8^n}{2^n}\cdot\lg\frac{16^n}{8^n}=2n^2\cdot\lg^2 2.$$

Az átlók O metszéspontja:

$$x_O=\frac{\lg 2^n+\lg 8^n}{2}=\frac{\lg 16^n}{2}=2n\lg 2,$$

$$y_O=\frac{\lg 8^n+\lg 16^n}{2}=\frac{7}{2}n\lg 2.$$

E koordináták kielégítik az $y=x+1$ egyenletet, tehát

$$\frac{7}{2}n\lg 2=2n\lg a+1,\quad \text{ahonnan}\quad n\lg 2=\frac{2}{3}.$$

Tehát a téglalap T területe:

$$T=2n^2\lg^2 2=2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{9}.$$

998. Ha $y=0$, akkor $x=\frac{9}{\log_3 a}$. Ha $x=0$, akkor $y=\frac{9}{\log_3 a^{-2}}$.

Az egyenes és a tengelyek alkotta háromszög T területe:

$$T = \left| \frac{9}{\log_3 a} \cdot \frac{9}{\log_3 a^{-2}} \right| \cdot \frac{1}{2} = \frac{81}{16},$$

azaz

$$\log_3^2 a = 4, \quad \text{ahonnan} \quad a = 9 \quad \text{vagy} \quad a = \frac{1}{9}.$$

IV

Ha $a = 9$, akkor az egyenes egyenlete: $2x - 4y = 9$. Ennek a tengelyekkel alkotott metszéspontjai: $x = \frac{9}{2}$, $y = -\frac{9}{4}$.

Ha $a = \frac{1}{9}$, akkor $-2x + 4y = 9$. Ekkor a metszéspontok: $x = -\frac{9}{2}$, $y = \frac{9}{4}$.

Tehát két egybevágó háromszögről van szó. Ezek átfogója:

$$\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{9\sqrt{5}}{4}.$$

Tehát a háromszög K kerülete:

$$K = \frac{9}{2} + \frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{5}}{4} = \frac{9}{4} \cdot (3 + \sqrt{5}).$$

999. A V térfogat:

$V = \log_a b \cdot \log_b a \cdot \log_a ab = \log_a ab.$

Az A felszín:

$$A = 2 \cdot (\log_a b \log_b a + \log_a b \log_a ab + \log_b a \log_a ab),$$

$$A = 2 \cdot [1 + \log_a ab (\log_a b + \log_b a)] = 2 \cdot [1 + V(\log_a b + \log_b a)],$$

$$\frac{A}{V} = 2 \cdot \left(\frac{1}{V} + \log_a b + \log_b a \right).$$

De $\log_a b + \log_b a \geq 2$, így a jobb oldalon a zárójelben levő mennyiség nagyobb, mint 2, azaz

$$\frac{A}{V} > 4,$$

és éppen ezt kellett belátnunk.