737. A feltétel szerint $b^2=ac$, ezért $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2+ac}{ac+c^2}=\frac{a(a+c)}{c(a+c)}=\frac{a}{c}$.

738. A feltétel szerint: $ab+ac+bc=-b^2$, ezért $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+ac+bc}{abc}=$ $=-\frac{b}{ac}=\frac{-b}{-b^2-ab-bc}=\frac{1}{a+b+c}$, mivel $ac=-b^2-ab-bc$.

739. A feltételből következik: $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{2xy}{ab}+\frac{2xz}{ac}+$ $+\frac{2yz}{bc}=1$. Ebből $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{2xyz}{abc}\left(\frac{c}{z}+\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)=1$. A második feltétel miatt a zárójelben levő összeg értéke 0, így: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

740. $\left(\frac{9}{n^2}+\frac{n}{3}\right):\left(\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\right)=\frac{27+n^3}{3n^2}\cdot\frac{3n^2}{n^2-3n+9}=\frac{(3+n)(n^2-3n+9)}{n^2-3n+9}=$ $=3+n$, és ez minden, a feltételben szereplő n-re pozitív egész szám.

741. $\frac{(n-1)(n+1)^n-n(n+1)^{n-1}+1}{n^2}=\frac{(n^2-1)(n+1)^{n-1}-n(n+1)^{n-1}+1}{n^2}=$ $=\frac{n^2(n+1)^{n-1}-\left[(n+1)^n-1\right]}{n^2}$. Az első tag osztható n^2-tel, így vizsgáljuk a második tagot. $(n+1)^n-1^n=n\left[(n+1)^{n-1}+(n+1)^{n-2}+\ldots+(n+1)^2+\right.$ $\left.+(n+1)+1\right]$. A kapott szorzat második tényezőjében az n darab tag mindegyike $(n+1)$ hatványa, így n-nel osztva 1 maradékot ad. Az n tagú összeg ezért osztható n-nel, maga a szorzat pedig n^2-tel, és ezt akartuk bizonyítani.

Racionális és irracionális kifejezések

742. Egy lehetséges felírást mutatunk meg:

a) $1=(2+2+2):2-2$;

b) $7=2+2+2+2:2$;

c) $11=22:2+2-2$;

d) $34=2^{2^2}\cdot 2+2$;

e) $485=22^2+2:2$.

743. Az A kifejezés értéke 55.

a) Mivel A-ban szereplő minden műveleti jel összeadás, ezért ezt az értéket növelni a megadott módon nem lehet.

b) Ha egy szám előjelét negatívra változtatjuk, akkor az A értéke a szám értékének kétszeresével csökken. Ezért ha pl. +10-et –10-re változtatjuk, akkor $A-20$-at kapunk.

c) A *b*-ben leírtak alapján: $28-A=-27=1-2+3+4-5+6-7-$ $-8-9-10$.

d) Mivel mindig páros számmal csökken A értéke, ezért 55-tel nem csökkenthető, azaz 0 nem lehet.

IV

744. Nem, mivel három páratlan szám összege nem lehet páros.

745. A megoldás:

a) Legyen a kétjegyű szám $\overline{ab}$ alakú. A feltétel szerint:
$a+b=ab$;
$a+b-ab=0$.
Szorzattá alakítva:
$(a-1)(b-1)=1$.
Egész számok esetén csak úgy teljesülhet, ha $a-1=\pm1$, és $b-1=\pm1$.
Ha $a-1=1$, és $b-1=1$, akkor $a=2$, és $b=2$, azaz a kétjegyű szám a 22.
Ha $a-1=-1$, és $b=-1$ akkor $a=0$, és $b=0$, nincs ilyen kétjegyű szám.

b) Legyen a háromjegyű szám $\overline{abc}$ alakú.
$a+b+c=abc$, átalakítva
$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}=1.$$
Legyen $ab=x$, $ac=y$, $bc=z$ (I).
A feladat átfogalmazható úgy, hogy $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ megoldását keressük, ahol x, y, z pozitív egészek és feltehető, hogy $x\le y\le z$.
(i) $x=1$ nem lehet.
(ii) $x=2$ esetén $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ egyenlet megoldása az *a)*-hoz hasonlóan
$y=3$, és $z=6$, $\quad y=6$, és $z=3$, $\quad y=4$, és $z=4$.
Visszahelyettesítve (I)-be kapjuk, hogy:
$ab=2$; $ac=3$; $bc=6$ egyenletrendszerből: $a=1, b=2, c=3$,
$ab=2$; $ac=6$; $bc=3$ egyenletrendszerből $a=1, b=3, c=2$,
$ab=2$; $ac=4$; $bc=4$ nincs megoldása a pozitív egész számok körében.
(iii) $x=3$ esetén $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$ egyenlet megoldása az egész számok halmazán $y=3$, $z=3$. Ez azonban a; b; c-re nem egész.
(iv) $x\ge4$ esetén nincs olyan x; y érték, amelyre teljesül, hogy $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, és $x\le y\le z$. Pl.: $x=4$ esetén $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{4}$, $y,z\ge4$, ezért $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{2}{4}<\frac{3}{4}$.

746. Egy-egy példát mutatunk minden esetre
a) $a+b+c=9876+543+210$,
b) $a:b:c=4:3:2$; $a=1304$; $b=978$; $c=652$,
c) $a-bc=65\,415$; $a-bc=79\,860-321\cdot 45$.

747. Ilyenek például $21\cdot 87=1827$; $15\cdot 93=1395$; $28\cdot 81=2187$; $35\cdot 41=1435$.

748. *a)*

2	9	4
7	5	3
6	1	8

b) nem lehet ilyen bűvös négyzetet készíteni, mivel pl. a 7 prím, és nem szerepelhet minden szorzatban.

749. A feltételek szerint:
(I) $B=k^2$, ahol $k\in N^+$;
(II) $31^2\le B\le 100^2$;
(III) $B=\overline{abcd}$ alakú, ahol $a;b;c;d<7$;
(IV) $\overline{(a+3)(b+3)(c+3)(d+3)}=n^2$, ahol $n\in \mathbf{N}^+$.
Írjuk fel (I) és (IV) tízes számrendszerbeli alakját.
$1000a+100b+10c+d=k^2$;
$1000(a+3)+100(b+3)+10(c+3)+d+3=n^2$.
Vonjuk ki egymásból az utolsó két egyenletet.
$n^2-k^2=3333$.
(V) $(n-k)(n+k)=3\cdot 11\cdot 101$.
Felírva 3333 összes osztóját osztópárok segítségével: 1, 3333, 3, 1111, 11, 303, 33, 101.
Mivel $n,k\in\mathbf{N}^+$, ezért $n-k<n+k$. Így az alábbi esetek lehetségesek:

$n-k$	$n+k$	n	k
1	3 333	1 667	1 666
3	1 111	557	554
11	303	157	146
33	101	67	34

Az (V) egyenletnek a fenti számpárok a megoldásai, de a (II) feltétel szerint csak a $k=34$ a szóba jöhető megoldás. Tehát a $B=1156$. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk, hogy ez valóban jó megoldás.

750. *a)* Minden esetben igaz, ha $a,b\in\mathbf{Z}$.
b) Minden olyan esetben, mikor $a;\ b\in\mathbf{N}$, kivétel ha $a=b=0$, mert a 0^0-t nem értelmezzük.
c) Az $\frac{a}{b}$ és $\frac{b}{a}$ racionális számok, ha a és b egész, egymás reciprokai, ezért szorzatuk minden esetben 1, ha $a;\ b\neq 0$.

d) $\frac{a}{b}$ tört $b \neq 0$.

i. pozitív akkor, ha $a > 0$ és $b > 0$ vagy $a < 0$ és $b < 0$.

ii. egész szám akkor, ha $b \mid a$ teljesül.

e) Ha a, b egész és $a \neq 0$, akkor a $\frac{b}{a}$ tört mindig racionális.

f) $a - b < 0$ akkor teljesül, ha $a < b$.

IV

751. *a)* $\frac{1}{16} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6}$; *b)* $-\frac{1}{24} = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{5}{6}$;

c) $\frac{37}{60} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{5} - \frac{5}{6}$; *d)* $\frac{7}{18} = \left(\frac{1}{2} : \frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{5}{6}$.

752. A növekvő sorrend:

a) $-\frac{13}{5} < -\frac{38}{14} < \frac{4}{7} < \frac{24}{27} < \frac{8}{5}$; *b)* $-\frac{23}{52} < -\frac{3}{11} < \frac{11}{43} < \frac{8}{17} < \frac{19}{7}$.

753. Az eredmények:

a) $A = \frac{5}{12}, B = \frac{11}{60}$; *b)* $C = A + B = \frac{34}{15}$;

c) $D = (-A) - (-B) = B - A = -\frac{114}{60} = -1{,}9$; *d)* $E = A \cdot B = \frac{55}{124}$;

e) $F = \frac{A}{B} = \frac{125}{11}$.

754. Legyen a tört $\frac{a}{b}$ alakú, a és b pozitív egész.

a) Állítás: $\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$, ahol $c \in \mathbf{N}^+$;

$(a+c)b < a(b+c) \Rightarrow ab + bc < ab + ac \Rightarrow b < a$ igaz mert $\frac{a}{b} > 1$.

Tehát a tört értéke csökken, de 1-nél nagyobb, mert a nevező mindig kisebb mint a számláló.

b) Az előzőhöz hasonlóan igazolható, hogy a tört értéke nő, de 1-nél kisebb szám lesz, mert a nevező mindig nagyobb, mint a számláló.

755. Alakítsuk át a megadott összegeket váltakozó előjelű, ún. teleszkópikus összeggé.

a) $A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2004 \cdot 2005}$;

$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ stb.;

$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005} = 1 - \frac{1}{2005} = \frac{2004}{2005}$.

b) Az *a)* alapján

$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{104} = \frac{102}{208} = \frac{51}{104}$;

c) $C = \frac{1}{2} - \frac{1}{77} = \frac{75}{154}$;

d) $D = \frac{12}{5 \cdot 9} + \frac{12}{9 \cdot 13} + \frac{12}{13 \cdot 17} + \dots + \frac{12}{101 \cdot 105} =$

$= 3 \cdot \left(\frac{4}{5 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{4}{101 \cdot 105} \right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{105} \right) = \frac{60}{105} = \frac{4}{7}$;

e) $E = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$;

$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ összefüggés alapján $E = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$.

756. *a)* Az állítás igaz, mert 1-hez pozitív számot adva, egynél nagyobb számot kapunk.

b) Igaz, mert egész számmal összeadást és osztást végeztünk, ez nem vezet ki a racionális számok köréből.

c) Hamis, mert 1-hez olyan törtet adtunk hozzá, amelynek a nevezője nagyobb mint a számlálója, így nem lehet az összeg 2. −2 azért nem, mert az *A* kifejezés pozitív.

d) A tört értéke pozitív az előjel változtatása után is, ezt 1evonva 1-nél kisebb számot kapunk.

e) $A = 1{,}6$.

757.

	Mindig igaz	Van amikor igaz	Soha nem igaz
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ racionális szám	X		
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ egész		X	
Ha $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, akkor $a = c$ és $b = d$		X	
$\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ racionális szám	X		

758. *a)* Pl.: 4,95 5,07; 5,095; 4,99; 4,995; minden olyan racionális szám választható, amely a $]4{,}9;\ 5{,}1[$-ban van.

b) Pl.: 1,031; 1,5; 4; 0,963; –2; minden olyan racionális szám megfelel, amely a $]-\infty;\ 0{,}97[$ vagy a $]1{,}03;\ \infty[$ intervallumba esik.

c) Pl.: −2,4; −2,49; −1,97; −1,58; −1,5001, minden racionális szám, amelyre igaz, hogy a $]-2{,}5;\ -1{,}5[$ intervallumban van.

IV

759. A megadott két racionális szám között helyezkedik el a két szám számtani közepe, ezek alapján:
a) pl.: $\frac{1}{15}$; $\frac{1}{17}$. *b)* pl.: $\frac{1}{103}$; $\frac{205}{21012}$.

760. Hozzuk közös nevezőre, majd bővítsük a törteket:

$$\frac{4}{7}=\frac{32}{56}=\frac{320}{560};\ \frac{5}{8}=\frac{35}{56}=\frac{350}{560}.$$

Ilyen alakban megadott törteknél már könnyen látható pl.: $\frac{321}{560}$; $\frac{324}{560}$ stb.
Általában is megadható ez az eljárás. Megfelelően nagy közös nevezőt választva, tetszőleges sok racionális szám adható meg a két szám között.

761. Legyen a tört $\frac{p}{q}$ alakú. A keresett törtek nevezője legalább 10 és legfeljebb 13, mert ha a számok tizedestört alakját nézzük, akkor $\frac{102}{14}<7,3<7\frac{1}{3}=$ $=7,\dot{3}$ esetben a számláló már háromjegyű.
Ha $q=10$, akkor $7\frac{1}{3}<\frac{74}{10}<7\frac{1}{2}$, de ez a tört egyszerűsíthető, ezért a nevező nem lesz kétjegyű.
Ha $q=11$, akkor $\frac{80}{11}<7\frac{1}{3}<7\frac{1}{2}<\frac{83}{11}$, ezért $\frac{p}{q}=\frac{81}{11}$; $\frac{82}{11}$ lehet.
Ha $q=12$, akkor $\frac{88}{12}=7\frac{1}{3}<7\frac{1}{2}=\frac{90}{12}$, ezért $\frac{p}{q}=\frac{89}{12}$.
Ha $q=13$, akkor $\frac{95}{13}<7\frac{1}{3}<7\frac{1}{2}<\frac{98}{13}$, ezért $\frac{p}{q}=\frac{96}{13}$; $\frac{97}{13}$.
A feladat feltételeinek 5 tört felel meg.

762. *a)* A 19 héttel való osztásánál a tizedes tört alakban a szakasz hossza 6, és a 714285 számok periodikusan ismétlődnek. A 2005 hattal való osztásakor 1 a maradék, ezért a 2005. helyen 7 számjegy áll.
b) A 43-nak 26-tal való osztásakor vegyes tizedes tört alakot kapunk. A tört alakjában a tizedesvessző után csak a második jegytől ismétlődnek a számjegyek, a periódus hossza 6, a számjegyek sorrendje 53 8461. Ezek figyelembevételével a 2005. helyen 1 áll.

763. Egy tört akkor bővíthető 10 hatvány nevezőjű törtté, ha nevezőjének prímfelbontásában csak 2, illetve 5 szerepel.
Ezek alapján a bővített tört alakok:

$$\frac{5}{10};\quad \frac{8}{10};\quad \frac{55}{100};\quad \frac{74}{100};\quad \frac{375}{1000};\quad \frac{2}{10},$$

nem alakítható át: $\frac{4}{3}$; $\frac{13}{18}$; $\frac{3}{14}$.

764. A lehetséges nevezők: $2^n\cdot 5^m$ alakúak, ahol $n;\ m\in\mathbf{N}^+$, azaz 10; 16; 20; 25; 32; 40; 50, 64; 80.

765. Hozzuk tovább nem egyszerűsíthető alakra.
Tizedes tört alakja:

i. véges, ha a közönséges tört nevezőjében csak 2 és 5 hatványai szerepelnek, ilyenek: $\frac{3}{20}, \frac{647}{400}, \frac{152}{125}$;

ii. tiszta szakaszos végtelen tizedes tört, ha nevezőjében nem szerepel 2 és 5 hatvány: $\frac{5}{7}, \frac{67}{81}, \frac{92}{108} = \frac{23}{27}$;

iii. vegyes szakaszos végtelen tizedes tört, ha 2 és 5 hatvány mellett szerepel más prímhatvány is: $\frac{5}{12}, \frac{42}{225}$.

766. *a)* $0{,}24 = \frac{6}{25}$; *b)* $0{,}625 = \frac{5}{8}$; *c)* $0{,}\dot{3} = \frac{1}{3}$;
d) $2{,}072 = \frac{259}{125}$; *e)* $0{,}\dot{6} = \frac{2}{3}$; *f)* $0{,}5215 = \frac{1043}{2000}$;
g) $1{,}\dot{3} = \frac{4}{3}$; *h)* $3{,}26 = \frac{163}{50}$; *i)* $1{,}\dot{1} = \frac{10}{9}$.

767. Egy üveg üdítő = 1 db + $\frac{1}{10}$ db + $\frac{1}{100}$ db + … = $1{,}\dot{1} = \frac{10}{9}$ üdítőt ér.

768. *a)* Hamis, pl.: $\frac{12}{5}$.
b) Hamis pl.: $\frac{24}{25}$.
c) Igaz, mert $b = 2^n \cdot 5^m$ alakú nevező esetén kaphatunk véges tizedes törtet.
d) Igaz, mert ha $b \neq 0$, akkor az adott egyenlet megoldása racionális szám.
e) Hamis, *c)* szerint.

769. *a)* Hamis, pl.: $\frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3$.
b) Hamis, pl.: $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2} = 6$.
c) Hamis, pl.: $\frac{20}{6} - \frac{1}{3} = 3$.
d) Igaz, mert a szorzás művelete nem vezet ki a racionális számok köréből.
e) Igaz.

Legyen feltétel szerint $a = \frac{p}{q}$, $(p;\, q) = 1$ és $a^2 = k$, akkor az állítás $a \in \mathbf{Z}$, ahol $k;\ l \in \mathbf{Z}$.

Ekkor $a^2 = \frac{p^2}{q^2} = k$, azaz $p^2 = q^2 k$. Ez csak akkor teljesülhet, ha k négyzetszám.

Tehát $k = n^2$, $\Rightarrow a^2 = n^2 \Rightarrow a = \pm n$. Ezzel az állítást beláttuk.

IV

770. Legyen $a+b=k$, (I)

és $ab=n$, k; $n\in\mathbf{Z}$.

Képezzük az $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=k^2-4n$ kifejezést.

Az egyenlőség jobb oldala egész, ezért $(a-b)^2$ egész, és $a,b\in Q$ miatt racionális. Ha egy racionális szám egész, akkor a szám is egész [lásd előző feladat *e)* rész], ezért $|a-b|$ is egész.

Tehát $a-b=\pm\sqrt{k^2-4n}$ egész, (II)

azaz $\pm\sqrt{k^2-4n}=\pm l$, $l\in\mathbf{N}$.

Az (I) és (II)-ből $a=\dfrac{k\pm l}{2}$, és $b=\dfrac{k\pm l}{2}$ adódik.

Ha k páratlan, akkor k^2-4n is páratlan, így l is páratlan azaz a; b egész.
Ugyanígy k párossága esetén is belátható, hogy a; b egész.

771. *a)* Hamis.

b) Hamis, mert $x=\dfrac{bc}{ad}$, racionális, feltéve hogy $a\neq 0$. Ha $a=0$ akkor, és $c\neq 0$ akkor nincs megoldás, ha $a=0$ és akkor minden valós szám megoldás.

c) Igaz, ha a; c; $d\neq 0$, és $c=0$.

d) Hamis.

e) Hamis, lásd *b)*-t.

f) Igaz.

772. Végezzük el a szorzást:

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)\cdot\left(\frac{d}{c}-\frac{b}{a}\right)=\frac{ad}{bc}+\frac{bc}{ad}-2 \qquad \text{(I)}$$

vezessük be az $x=\dfrac{ad}{bc}$ jelölést. Eszerint a megadott kifejezés:

$x+\dfrac{1}{x}-2.$

Mivel $x+\dfrac{1}{x}\geq 2\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}-2=h$, ahol $h>0$;

$x^2-(h+2)x+1=0.$

Ennek a másodfokú egyenletnek akkor van racionális gyöke, ha a diszkrimináns négyzetszám.

$D=(h+2)^2-4=k^2$, $k\in\mathbf{Z}$;

$(h+2)^2-k^2=4.$

Két négyzetszám különbsége csak úgy lehet 4, ha $(h+2)^2=4$, és $k^2=0$.
Ezek alapján $h=0$, ami ellentmond annak a feltételnek, hogy h pozitív egész.

773. Először alakítsuk szorzattá a középső számot.

$$\frac{n^3+n^2}{n^2+3n+2}=\frac{n^2(n+1)}{(n+2)(n+1)}.$$

Összeszorozva a három kifejezést, majd egyszerűsítve:
$\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n^2(n+1)}{(n+2)(n+1)}\cdot\frac{n+1}{n}=n+1$, amely mindig természetes szám, ha $n\in\mathbf{N}^+$.

774. A legkisebb nevező, ami feltételeknek megfelel a 100 + 101.
Indoklás:
Alakítsuk át az egyenlőtlenséget:

$$99\cdot 101q<100\cdot 101p<100^2q.$$

(I) Az egyenlőtlenség első részéből az következik, hogy $99\cdot 101q$ legalább 101-gyel kisebb mint $100\cdot 101p$, hiszen mindkettő 101-nek többszöröse.
(II) Ugyanígy $100\cdot 101p$ legalább 100-zal kisebb, mint 100^2q.
Az (I)-ből és (II)-ből következik, hogy
$100q^2-99\cdot 101q\geq 100+101=201$, ebből
$q=201$.
Meg kell mutatni, hogy létezik 201 nevezőjű tört, ami a feltételeknek megfelel.
Mivel $\frac{99}{100}=\frac{198}{200}$, és $\frac{100}{101}=\frac{200}{202}$, ezért a keresett tört csak a $\frac{199}{201}$ lehet.
Erre teljesül a feltétel, és 201 nevezőjű törtek közül csak ez az egy felel meg, mert $\frac{100}{101}-\frac{99}{100}=\frac{1}{100\cdot 101}<\frac{1}{201}$.

775. A két megadott egyenlőtlenségből keressünk korlátot p-re, q-ra $(p;\ q\in\mathbf{Z}^+)$:

$90<p+q<100$ (I), ebből

$\frac{90}{q}<1+\frac{p}{q}<\frac{100}{q}$ (II),

$0{,}9<\frac{p}{q}<0{,}91$ (III).

Vonjuk ki (II)ből a (III)-ast, és vizsgáljuk az egyenlőtlenség első részét:

$$\frac{90}{q}-0{,}9<1\Rightarrow q>47{,}1.$$

A kivonás után most nézzük az egyenlőtlenség második részét:

$$1<\frac{100}{q}-0{,}91\Rightarrow q<\frac{100}{1{,}91}<52{,}35.$$

Így q értéke $48\leq q\leq 52$.

IV

A p értékét a (III) átalakított alakjából határozzuk meg:
$0{,}9q < p < 0{,}91q$.
Ezek után a lehetséges q értékek mellett a következőket kapjuk:
ha $q = 48;\ 49;\ 50$, akkor nincs megoldás,
ha $q = 51$, akkor $p = 46$,
ha $q = 52$, akkor $p = 47$.
A feledat megoldása: $\frac{46}{51};\ \frac{47}{52}$.

776. Tegyük fel, hogy van A egész szám, amelyre $\frac{A}{1989}$ tizedestörtalakja négy darab szomszédos 9-es számjegyet tartalmaz valahol a tizedesvessző után. Ekkor szorozzuk meg tíz olyan hatványával, amelynél $\frac{10^k \cdot A}{1989}$ tizedestörtalakjában közvetlenül a tizedesvessző után áll a négy darab 9-es. Ekkor a hányados törtrésze legalább 0,9999, de ez nem lehet, hiszen az osztásnál keletkező maradék legfeljebb 1988, és $\frac{1988}{1989} < 0{,}9995$.
Az azonban nem igaz, hogy $\frac{A}{1989}$ tizedestörtalakjában sehol sem szerepelhet négy szomszédos 9-es. Ha $A = 9 \cdot 1989 + 1988$, akkor $\frac{A}{1989} = 9{,}999\,49\ldots$

777. Tegyük fel, hogy létezik olyan racionális szám, ami a megadott egyenletnek megoldása. Legyen ez x.
Írjuk fel a megadott egyenletet a törtrész definíciója segítségével:
$\{x^2\} + \{x\} = x^2 - [x^2] + x - [x]$.
A feltétel szerint a bal oldal egész $(=1)$, a jobb oldalt $x^2 + x - \left([x^2] + [x]\right)$ alakba írva a zárójelben lévő kifejezés szintén egész, ezért az $x^2 + x$ is egész és pozitív.
Írjuk fel erre a következő egyenletet:
$x^2 + x = n$, ahol n pozitív egész. Az egyenlet megoldása:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4n}}{2}.$$

Vizsgáljuk a $\sqrt{1+4n}$ -et:

$$\sqrt{1+4n} = \pm(2x+1).$$

Egyrészt racionális, mert a jobb oldal racionális, másrészt egész, mert egész szám gyöke és racionális. Mivel $\sqrt{1+4n}$ egész, ezért biztosan páratlan, így a $-1 \pm \sqrt{1+4n}$ páros. Ezekből következik, hogy az $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4n}}{2}$ egész.

Ez pedig azt jelenti, hogy a lehetséges megoldásra: $\{x^2\}+\{x\}=0$, ami ellentmond az eredeti állításnak.

778. A feladat feltételei szerint ha $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\in\mathbf{Z}$, akkor $a+b\in\mathbf{Z}$ is teljesül.
(I) Ha két racionális szám összege egész, akkor a két szám tovább nem egyszerűsíthető alakjában a nevezők abszolútértéke egyenlő.
Indoklás: Legyen a két racionális szám $a=\frac{p_1}{q_1}$, és $b=\frac{p_2}{q_2}$.

IV

Ha $\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}$ egész, és $(p_1;\ q_1)=1$, és $(p_2;\ q_2)=1$, akkor

$q_1q_2 \mid (p_1q_2+p_2q_1)$.

Ebből következik, hogy $q_1 \mid p_1q_2$, és $(p_1;q_1)=1$ miatt $q_1 \mid q_2$, ugyanígy belátható hogy $q_2 \mid q_1$. A két nevező osztója egymásnak, tehát abszolútértékük egyenlő.
(II) A feltétel szerint a számok reciprokainak összege is egész, így (I) alapján a számlálók abszolútértéke is egyenlő.
Az (I) és (II)-ből következik, hogy a két racionális szám abszolútértéke egyenlő.
Ez egyrészt teljesülhet úgy hogy a két szám egymásnak ellentettje, ilyen esetben az összeg 0.
Teljesülhet úgy, hogy a számok egyenlők, azaz $a=b$.
$\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{2}{a}=\frac{4}{2a}$, mivel $2a$ egész, ezért $2a \mid 4$. Ebből $|a|=2;\ 1;\ \frac{1}{2}$.
A keresett (a,b) számpárok tehát: $(a,\ -a)$; $(2;\ 2)$; $(-2;\ -2)$; $(1;\ 1)$; $(-1;\ -1)$; $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$.

779. Tegyük fel, hogy eredetileg n db számot írtunk fel, a letörölt szám legyen k. A feltétel szerint $\frac{602}{17}=35\frac{7}{17}=\frac{1+2+3+\ldots+n-1+n-k}{n-1}=A$;
$1\le k\le n$.

Az első $(n-1)$ pozitív egész szám összege $\frac{n(n-1)}{2}$, így

$$A=\frac{n(n-1)}{2(n-1)}+\frac{n-k}{n-1}=\frac{n}{2}+\frac{n-k}{n-1};$$

$0\le\frac{n-k}{n-1}\le 1 \Rightarrow 34\frac{7}{17}\le\frac{n}{2}\le 35\frac{7}{17}$. Az $\frac{n}{2}$ vagy egész, vagy egy egész szám fele. Ezért $\frac{n}{2}$ értéke 34,5 vagy 35.

Ha $\frac{n}{2}=34{,}5$ $n=69$, ebből $\frac{602}{17}=\frac{69}{2}+\frac{69-k}{68}$, ahonnan $k=7$.

IV

Ha $\frac{n}{2} = 35$, $n = 70$, ebből $\frac{602}{17} = \frac{70}{2} + \frac{70-k}{69}$, ahonnan $k = \frac{707}{17}$, ami nem megoldás mert k nem egész szám.
Tehát a 7-et hagytuk ki.

780. (1) Nézzük azt az esetet, amikor az a racionális:

a) Ha b racionális, akkor minden racionális x esetén y is racionális, tehát végtelen sok racionális számpár illeszkedik az egyenesre. Ilyen pl.: $y = 2x - \frac{1}{2}$.

b) Ha b irracionális, akkor x racionális esetén y irracionális. Ebben az esetben tehát nincs olyan pont, amelynek mindkét koordinátája racionális. Pl.: $y = 3x + \sqrt{2}$.

(2) Most legyen a irracionális. Belátható, hogy legfeljebb egy olyan pont van az egyenesen, amelynek mindkét koordinátája racionális.
Tegyük fel, hogy létezik két különböző ilyen tulajdonságú pont: $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, ahol $x_1 \neq x_2$, ebből következően $y_1 \neq y_2$, és $x_1;\ x_2;\ y_1;\ y_2 \in \mathbf{Q}$.
Mivel az $y = ax + b$ egyenletű egyenesre illeszkednek, ezért $y_1 = ax_1 + b$; $y_2 = ax_2 + b$.
Kivonva a két egyenletet:
$y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2)$, és $x_1 - x_2 \neq 0$. Ebből $a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, ami azt jelenti, hogy két racionális szám hányadosa egyenlő egy irracionális számmal. Ez pedig ellentmondás. Tehát legfeljebb egy racionális koordinátájú pont található az egyenesen. Ilyen pl.: $y = \sqrt{3}\,x - 2$. Ennek egyetlen racionális megoldása a $(0; -2)$ pont.

781. Válasszuk ki a felbontásban szereplő $\frac{1}{c}$, $c \neq 0$ alakú törtek közül a legkisebbet. Ez $\frac{1}{c}$ alakú tört felbontható $\frac{1}{c+1} + \frac{1}{c(c+1)}$ alakra, ahol mind a két összeadandó kisebb, mint $\frac{1}{c}$, így az eredeti felbontásban biztos nem szerepelt. Ezzel beláttuk, hogy létezik n-nél több különböző, $\frac{1}{c}$ alakú felbontás.

782. Az adott számok esetén megtehető az „egyszerűsítés”, mivel $\frac{19^3 + 65^3}{46^3 + 65^3} = \frac{281484}{371961} = \frac{84}{111} = \frac{19 + 65}{46 + 65}$.

Általánosítva:

(I) $\frac{a^3 + b^3}{c^3 + b^3} = \frac{a + b}{c + b} \cdot \frac{a^2 - ab + b^2}{c^2 + cb + b^2}$.

A számokkal leírt egyszerűsítés akkor helyes, ha a jobb oldalon a második tört értéke 1.

$a^2 - ab + b^2 = c^2 - cb + b^2$;
$a^2 - c^2 - ab + cb = 0$.

Szorzattá alakítva:
$(a-c)(a+c-b) = 0$, ahol $a \neq c$, mert ellenkező esetben mindig megtehető az egyszerűsítés.
Tehát $a - b + c = 0$, azaz $b = a + c$ esetben teljesül az (I) összefüggés.

783. Végezzük el a beszorzást: $\left(x+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(y+\frac{1}{x}\right) = xy + \frac{1}{xy} + 2$, $xy \neq 0$. Ebből $xy + \frac{1}{xy}$ egész szám. Legyen ez k, $k \in \mathbf{Z}$.

$$xy + \frac{1}{xy} = k;$$
$$(xy)^2 - kxy + 1 = 0.$$

Ennek az xy-ban másodfokú egyenletnek akkor lesz racionális megoldása, ha $D = k^2 - 4$ négyzetszám.

$k^2 - 4 = l^2$ $k, l \in \mathbf{Z}$;
$k^2 - l^2 = 4$.
$(k-l)(k+l) = 4$ lehetséges megoldásai:

$k-l$	1	4	2	−1	−4	−2
$k+l$	4	1	2	−4	−1	−2

Ebből pedig csak $k = \pm 2$ lehet.
Ha $k = 2$, akkor $xy = 1$, és $y = \frac{1}{x}$. Ebből az eredeti kifejezés értéke: $(x+x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right) = 4$.

Ha $k = -2$, akkor $xy = -2$, így $y = -\frac{1}{x}$. Ekkor a kifejezés értéke $(x-x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right) = 0$, de ez a feladat feltételei miatt nem lehetséges.

Így tehát az adott kifejezés minden $\left(x; \frac{1}{x}\right)$ számpár esetén egész, ahol $x \in Q$, $x \neq 0$.

784. *a)* Tegyük fel, hogy az $a + b + c + d$ összeg racionális szám.

Legyen pl. az $(a + c)$ racionális. Ekkor a $(c + d)$ is racionális, mert két racionális szám különbségeként előállítható. Még pontosan egy racionális összegnek kell lennie. Legyen ez az $(a + d)$. Az előzőekhez hasonlóan belátható, hogy akkor a $(b + d)$ is racionális. Ellentmondásra jutottunk, tehát az $(a + b + c + d)$ összeg nem lehet racionális szám.

b) Az *a)* rész alapján a négytagú összeg irracionális, így négy eset lehet:

i. Pontosan egy racionális szám van a négy szám között. Legyen ez az a. Ebből következően $(a + b)$, $(a + c)$, $(a + d)$ irracionális. A többi három összeg racionális, amiből következik, hogy a $(b + c + d)$ is racionális. Ez viszont ellentmondás, mert az $(a + b + c + d)$ is racionális.

ii. Pontosan kettő racionális szám van a négy között.
Legyen ez a két racionális szám $a; b$. Ekkor az $(a + b)$ racionális, és ebből következően $(a + c)$, $(a + d)$, $(b + c)$, $(b + d)$ irracionális. Ez ellentmond annak, hogy pontosan három összeg lehet irracionális.

iii. Pontosan három racionális szám van a négy szám között. Ez megvalósulhat pl.: $a = 1; b = 4; c = 5; d = \pi$.

iv. Mind a négy szám irracionális. Ilyen számnégyes is létezik pl.: $a = \sqrt{2}$, $b = 1 - \sqrt{2}$, $c = 3 + \sqrt{2}$, $d = -3 + \sqrt{2}$.

785. Az egységnyi befogójú egyenlő szárú háromszög átfogója $\sqrt{2}$, az egységnyi és $\sqrt{2}$ befogójú derékszögű háromszög átfogója $\sqrt{3}$.

A megadott számközben racionális szám pl.: 1,6, $\frac{3}{2}; \frac{5}{3}$.

Irracionális szám: $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}; \frac{5}{7} \cdot \sqrt{5}; \frac{4}{9}\sqrt{11}$.

786. *a)* $3 < \sqrt{15} < 4 \Rightarrow 0 < \sqrt{15} - 3 < 1$;

b) $2\sqrt{13} = \sqrt{52} \Rightarrow 7 < 2\sqrt{13} < 8 \Rightarrow 9 < 2\sqrt{13} + 2 < 10$;

c) $0 < 11 - \sqrt{110} < 1$;

d) $23 - 2\sqrt{6} = 23 - \sqrt{24} \Rightarrow 18 < 23 - 2\sqrt{6} < 19$.

787. *a)* Igaz.

b) Igaz.

c) Hamis.

d) Hamis.

788. Bizonyítás indirekt módon:

Tegyük fel, hogy $\dfrac{\sqrt{2}-3}{5}=q$ racionális szám.

Ebből: $\sqrt{2}=5q+3$.
A bal oldal irracionális, a jobb oldal racionális, ez ellentmondás, tehát q irracionális szám.

789. *a)* $\sqrt{3\sqrt{29}-6}\cdot\sqrt{3\sqrt{29}+6}=\sqrt{\left(3\sqrt{29}\right)^2-6^2}=\sqrt{261-36}=15,$

tehát racionális.

b) $\sqrt{4\sqrt{5}+3}\cdot\sqrt{4\sqrt{5}-3}=\sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2-9}=\sqrt{71}$, irracionális.

c) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Észrevehető, hogy a gyök alatt teljes négyzetté lehet alakítani.

$3+2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}+1\right)^2$ és $3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$, ezért

$\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\sqrt{2}+1+$

$+\sqrt{2}-1=2$ racionális.

d) Az előző alapján:

$\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}=\sqrt{\left(\sqrt{6}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{6}-1\right)^2}=$

$=\sqrt{6}+1+\sqrt{6}-1=2$ racionális.

e) Legyen $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}=x;$

$x^3=5+2\sqrt{13}+3\left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}+$

$+3\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}\left(\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}\right)^2+5-2\sqrt{13};$

$x^3=10+3\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}\,\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}\left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}\right).$

A zárójelben lévő kifejezés x, a szorzótényezője:

$\sqrt[3]{\left(5+2\sqrt{13}\right)\left(5-2\sqrt{13}\right)}=\sqrt[3]{-27}=-3;$

$x^3=10-9x.$

IV

Rendezve az egyenletet:
$x^3 + 9x - 10 = 0;$
$(x-1)\left(x^2 + x - 10\right) = 0.$
Ennek az egyenletnek egy valós gyöke van, az $x = 1$. Mivel a vizsgált szám valós, ezért értéke $x = 1$, tehát racionális szám.

f) Alakítsunk szorzattá a gyökjel alatt:
$28 + 16\sqrt{3} = \left(1+\sqrt{3}\right)^4$, és $28 - 16\sqrt{3} = \left(1-\sqrt{3}\right)^4$;
$$\sqrt[4]{28+16\sqrt{3}} - \sqrt[4]{28-16\sqrt{3}} = \sqrt[4]{\left(1+\sqrt{3}\right)^4} + \sqrt[4]{\left(1-\sqrt{3}\right)^4} = 2,$$
a kérdezett szám racionális.

790. *a)* Hamis, mert pl.: $\left(\sqrt{a}+b\right)+\left(c-\sqrt{a}\right) = b + c$, ahol $a,b,c \in Q, a \geq 0$.
b) Hamis, az *a)* eset alapján.
c) Hamis, mert pl.: $\sqrt{a} \cdot \dfrac{\sqrt{a}}{b} = \dfrac{a}{b}$, ahol $a,b \in Q, a \geq 0$.
d) Igaz, lásd *a)* pont.
e) Igaz, lásd *c)* pont.
f) Hamis, bizonyítás indirekt módon.
g) Igaz.
h) Igaz, lásd *b)* pont.

791. Legyenek a és b irracionális számok. Tudjuk, hogy
a) $a + b = c$ és c racionális, $2b$ irracionális, és $a - b = c - 2b$ egy racionális és egy irracionális szám különbsége irracionális. $\Rightarrow$ $a - b$ irracionális.
b) Hasonló meggondolással igazolható, hogy az $a + 2b$ irracionális.

792. $$\left(\sqrt[6]{27} - \sqrt{6\frac{3}{4}}\right)^2 = \left(\sqrt{3} - \sqrt{\frac{27}{4}}\right)^2 = \left(\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

793. $$K = \sqrt{a+b+\sqrt{4ab}} \cdot \sqrt{a+b-\sqrt{4ab}} = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} =$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} = \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|.$$
Tehát a K kifejezés racionális, ha a és b racionális számok.

794. $$\left(3-\sqrt{5}\right) \cdot \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\left(3-\sqrt{5}\right)^3\left(9+4\sqrt{5}\right)} =$$
$$= \sqrt[3]{\left(27 - 27\sqrt{5} + 9 \cdot 5 - 5\sqrt{5}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)} = \sqrt[3]{\left(72 - 32\sqrt{5}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)} =$$
$$= \sqrt[3]{8\left(9-4\sqrt{5}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)} = \sqrt[3]{8(81-16 \cdot 5)} = 2.$$

795. Az alábbiak szerint látható, hogy mindkét számkifejezés átzárójelezhető úgy, hogy szerepeljen benne a $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ és $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ számok összege, illetve különbsége.

$$a=\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{2}-\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right);$$

$$b=\sqrt{6}-\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{6}-\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right).$$

Mivel mindkét számban a zárójelbeli kéttagúak pozitív számok, ezért négyzetük négyzetgyökével helyettesítjük.

Határozzuk meg a $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ és $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ kifejezések összegének és különbségének négyzetét!

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\pm\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=2+\sqrt{3}\pm2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}+2-\sqrt{3}=$$
$$=4\pm2\sqrt{1}=4\pm2.$$

Ezek alapján

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)=\sqrt{2}$, ezért $a=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ és

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)=\sqrt{6}$, ezért $b=\sqrt{6}-\sqrt{6}=0$.

Így mindkét szám értéke 0-val egyenlő.

796. Gyöktelenítsük a törteket:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)n}=$$
$$=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}.$$

Ez alapján teleszkopikus összeggé alakítható az összeg:

$$K=\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\ldots-\frac{\sqrt{n}}{n}+\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}=$$
$$=1-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}<0,9.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a megoldása $n>99$.

797. A bizonyítandó állítás:

$$\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-y}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-y}}{2}}.$$

IV

Az egyenlőség négyzetre emelése ekvivalens átalakítás, mert nem negatív számok összege, illetve négyzetgyöke szerepel mindkét oldalon.

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-y}}{2}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-y}}{2}+2\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x-y}\right)^2}{4}};$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x}+\sqrt{x-(x-y)};$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

Tehát a fenti egyenlőség x, y lehetséges értékei mellett azonosság.

798. $A=\sqrt{36+14\sqrt{6}+14\sqrt{5}+6\sqrt{30}}$ átalakításánál vizsgáljuk a gyök alatti kifejezést.

$$36+14\sqrt{6}+14\sqrt{5}+6\sqrt{30}=6\left(6+\sqrt{30}\right)+14\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)=$$

$$=6\sqrt{6}\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)+14\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\left(6\sqrt{6}+14\right).$$

Így ennek a szorzatnak a négyzetgyöke a vizsgált szám.

$$A=\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\left(6\sqrt{6}+14\right)}.$$

Alkalmazzuk a szorzat második tényezőjére az előző feladatban bizonyított azonosságot:

$$\text{(I)}\quad \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-y}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-y}}{2}};$$

$$\sqrt{6\sqrt{6}+14}=\sqrt{\sqrt{216}+\sqrt{196}}=\sqrt{3\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\sqrt{3\sqrt{6}-\sqrt{5}}.$$

Behelyettesítve, majd elvégezve a beszorzást

$$A=\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}\left(\sqrt{3\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\sqrt{3\sqrt{6}-\sqrt{5}}\right)=\sqrt{23+4\sqrt{30}}+\sqrt{13+2\sqrt{30}}=$$

$$=\sqrt{\sqrt{529}+\sqrt{480}}+\sqrt{\sqrt{169}+\sqrt{120}}.$$

Ismét alkalmazzuk az (I) azonosságot mindkét tagra:

$$\sqrt{\frac{23+\sqrt{529-480}}{2}}+\sqrt{\frac{23-\sqrt{49}}{2}}+\sqrt{\frac{13+\sqrt{169-120}}{2}}+\sqrt{\frac{13-\sqrt{49}}{2}}=$$

$$=\sqrt{15}+\sqrt{8}+\sqrt{10}+\sqrt{3}.$$

799. Határozzuk meg x^3 értékét!

$$x^3=\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{-\frac{1}{3}}\right]^3=$$

$$=\left(\sqrt{2}-1\right)-3\left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{2}-1\right)^{-\frac{1}{3}}+3\left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{2}-1\right)^{-\frac{2}{3}}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{-1}=$$

$$=\left(\sqrt{2}-1\right)-3\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{-\frac{1}{3}}\right]-\left(\sqrt{2}+1\right).$$

A szögletes zárójelben lévő kifejezés egyenlő x-szel, ezért $x^3=-3x-2$, azaz $x^3+3x+2=0$, ami éppen a bizonyítandó állítás.

800. Mivel minden megadott értékben szerepel az 1 összeadandóként, célszerű, ha a polinomot $(x-1)$ hatványai szerint rendezzük át. Ehhez meg kell határozni $(x-1)$ hatványainak együtthatóit.

$$P(x)\equiv Q(x-1)=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c.$$

A polinomok egyenlősége miatt minden x-re igaznak kell lennie a fenti egyenlőségnek.

Legyen az x értéke rendre 0, 1, 2. Ekkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$x=0$, ekkor $P(0)=Q(-1)$, $\quad -1=-1+a-b+c;$

$x=1$, ekkor $P(1)=Q(0)$, $\quad -6=c;$

$x=2$, ekkor $P(2)=Q(1)$, $\quad -11=1+a+b+c.$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $a=0,\ b=-6,\ c=-6$.

Így tehát az átrendezett polinom:

$$P(x)=x^3-3x^2-3x-1\equiv(x-1)^3-6(x-1)-6.$$

Ezek után az adott értékeket behelyettesítve:

a) $P(x_1)=P\left(1-\sqrt{2}\right)=Q\left(-\sqrt{2}\right)=-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}-6=4\sqrt{2}-6.$

b) $P(x_2)=Q\left(\sqrt{2}\right)=-4\sqrt{2}-6.$

c) $P(x_3)=Q\left(-2\sqrt{2}\right)=-4\sqrt{2}-6.$

d) $P(x_4)=Q\left(2\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}-6.$

e) $P(x_5)=Q\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)=\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^3-6\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)-6=$

$\quad =2+6\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{2}-6\sqrt[3]{4}-6=0.$

A polinomba való behelyettesítés után látható, hogy

$P(x_1)+P(x_2)=-12$ és $P(x_3)+P(x_4)=-12$, azaz $P(x_1)+P(x_2)=P(x_3)+P(x_4)$.

IV

801. $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ egyenletben kell meghatározni az x, illetve y értékét. Mivel mindkét oldal nemnegatív, ezért ekvivalens átalakítást végzünk, ha négyzetre emelünk.

$7+2\sqrt{10}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2;\qquad 7+2\sqrt{10}=x+y+2\sqrt{xy}.$

Legyen:

$$\left.\begin{aligned}x+y&=7\\ xy&=10\end{aligned}\right\}.$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása:

Az $y=7-x$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe, azt kapjuk hogy:

$x^2-7x+10=0$, melynek gyökei: $x_1=5$, és $x_2=2$.

Ekkor $y_1=2$, és $y_2=5$.

Így a megadott szám keresett alakja: $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

802. Az előző feladatban megadott eljárás szerint:

$$\sqrt{8+4\sqrt{8}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

803. Legyenek A, B; és x, y racionális számok és tegyük fel, hogy

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}.$$

Mindkét oldal nemnegatív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.

$A\pm\sqrt{B}=x+y\pm2\sqrt{xy}$,

$x+y=A$, és $4xy=B$.

Ebből kifejezve az x-et és y-t:

$$x=\frac{A+C}{2},\text{ és } y=\frac{A-C}{2},\text{ ahol } C=\sqrt{A^2-B}.$$

Ezek alapján

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}}.$$

804. $\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}$ egyenlőségben keressük x, y értékét, ahol x, y nemnegatív racionális szám.

A megadott számot átalakítva:

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(4-2\sqrt{3}\right)}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=$$

$$=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}}=\sqrt{3}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}}-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{4}}}-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\frac{27}{4}}-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

A keresett racionális számok: $x=\dfrac{27}{4}$ és $y=\dfrac{3}{4}$.

805. A $18-4\sqrt{15}+2\sqrt{5}-4\sqrt{3}$ értéke pozitív, ezért a négyzetgyökvonás elvégezhető.
A feladat szövege szerint:

$$\left(x+y\sqrt{3}+z\sqrt{5}\right)^2=18-4\sqrt{15}+2\sqrt{5}-4\sqrt{3}.$$

Végezzük el a négyzetre emelést.
$x^2+3y^2+5y^2+2xy\sqrt{3}+2xz\sqrt{5}+2yz\sqrt{15}=18-4\sqrt{3}+2\sqrt{5}-4\sqrt{15}.$
Az x, y, z értékét úgy határozhatjuk meg, ha a racionális és irracionális tagok külön-külön egyenlők. Így a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} x^2+3y^2+5z^2&=18 &&\text{(I)},\\ 2xy&=-4 &&\text{(II)},\\ 2xz&=2 &&\text{(III)},\\ 2yz&=-4 &&\text{(IV)}. \end{aligned}$$

A három ismeretlen megoldásához négy egyenletünk van, és általában az ilyen esetben a megoldás nem határozható meg egyértelműen. Azonban a (II) (III) (IV) egyenletből meg tudjuk határozni az ismeretleneket.
Osszuk el a (II) egyenletet a (IV) egyenlettel:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{z}&=1\\ 2xz&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow 2x^2=2 \qquad \Rightarrow x=\pm 1,\ z=\pm 1,\ y=\mp 2.$$

A kapott számhármasok tehát a következők:
(1; −2; 1) és (−1; 2; −1).
A kapott értékeket behelyettesítve az I. egyenletbe, látható, hogy mindkét megoldás ezt is kielégíti.
A feladatnak azonban csak egy megoldása van, mert az első számhármas esetén az eredeti egyenlet bal oldala negatív, így nem lehet egyenlő egy pozitív szám négyzetgyökével.
Így a keresett felírás:

$$\sqrt{18-4\sqrt{15}+2\sqrt{5}-4\sqrt{3}}=-1+2\sqrt{3}-\sqrt{5}.$$

IV

806. Fejezzük ki az egyenletben a $3\sqrt{a}+\sqrt{b}$-t.

$\left(\sqrt{30}-\sqrt{18}\right)\left(3\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=12/:\left(\sqrt{30}-\sqrt{18}\right);$

$$3\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{12}{\sqrt{30}-\sqrt{18}}=\frac{12\left(\sqrt{30}-\sqrt{18}\right)}{30-18};$$

$3\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{30}+\sqrt{18}=3\sqrt{2}+\sqrt{30}.$

Emeljük négyzetre mindkét oldalt. Mivel mindkét oldal pozitív, ezért az átalakítás ekvivalens.

$9a+b+6\sqrt{ab}=48+6\sqrt{60}.$
Ez csak úgy teljesülhet, ha
$9a+b=48$ és
$ab=60$.

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása $\left(\frac{10}{3};\,18\right)$ és $(2;\,30)$. A feladatnak az egész számok halmazán tehát csak egy megoldása van: $a=2$, $b=30$.

807. Kikötés: $n\neq 28$ és $n\in\mathbf{Z}^+$.
Gyöktelenítsük a törtet.

$$\text{(I)}\quad K=\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{n}}{2\sqrt{7}-\sqrt{n}}=\frac{14+2n+5\sqrt{7n}}{28-n}.$$

Tudjuk, hogy K egész, mivel a nevező egész szám, a számlálónak is egésznek kell lenni. Ez azt jelenti, hogy az $5\sqrt{7n}\in\mathbf{Z}\Rightarrow\sqrt{7n}$ racionális szám. Mivel $7n$ egész, ez csak úgy lehet, ha a $7n$ négyzetszám, azaz $n=7k^2$ alakú ahol $k\in\mathbf{Z}$.
Helyettesítsük be az (I) egyenletbe:

$$K=\frac{14+14k^2+35k}{28-7k^2}=\frac{(2k+1)(k+2)}{(2-k)(2+k)}=\frac{2k+1}{2-k}=-2-\frac{5}{k-2}.$$

A K értéke akkor egész, ha $(k-2)\mid 5$. Ekkor

$k-2$	-5	-1	1	5
k	-3	1	3	7

A legnagyobb abszolút értékű k esetén lesz n a legnagyobb. Ez a $k=7$, ekkor $n=7\cdot 7^2=7^3$.
A legnagyobb n egész szám, amelyre a

$K=\dfrac{\sqrt{7}+2\sqrt{n}}{2\sqrt{7}-\sqrt{n}}$ egész az $n=343$, és a $K=-3$.

808. Tegyük fel, hogy van ilyen alakú előállítás, azaz:

(I) $\quad \sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{c}$, ahol a, b, c racionális és c pozitív.

Mivel $\sqrt[3]{2}$ irracionális, ezért, $b \neq 0$.

Az (I)-et köbre emelve, majd átrendezve:

(II) $\quad 2 = a^3 + 3a^2 b\sqrt{c} + 3ab^2 c + b^3\left(\sqrt{c}\right)^3 = a^3 + 3ab^2 c + \left(3a^2 + b^2 c\right) b\sqrt{c}$.

A $b\sqrt{c}$ -t (I)-ből kifejezve, majd behelyettesítve a (II)-be:

$b\sqrt{c} = \sqrt[3]{2} - a$;

$2 = a^3 + 3a^2 bc + \left(3a^2 + b^2 c\right)\left(\sqrt[3]{2} - a\right)$.

$2 + 2a^3 - 2ab^2 c = \left(3a^2 + b^2 c\right)\sqrt[3]{2}$.

Mivel $b \neq 0$ és c pozitív, ezért $\sqrt[3]{2}$ együtthatója nem nulla, ezért:

$$\sqrt[3]{2} = \frac{2\left(1 + a^3 - ab^2 c\right)}{3a^2 + b^2 c}.$$

Ez azonban ellentmondás, mert a jobb oldalon racionális kifejezése áll, ami racionális, a bal oldal pedig irracionális.

809. A feltétel szerint

$$a = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right);$$

$$a^2 = \frac{r^2}{4}\left(6 - 2\sqrt{5}\right);$$

$$\frac{a^2}{4} = \frac{r^2}{16}\left(6 - 2\sqrt{5}\right).$$

Írjuk be a megadott kifejezésbe az $\frac{a^2}{4}$-et.

$$A = \sqrt{2\left(r^2 - r\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{16}\left(6 - 2\sqrt{5}\right)}\right)} = r\sqrt{2 - \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} =$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{8 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \approx 0{,}313 \cdot r.$$

810. Legyen a téglalap két oldala x és y és legyen $x > y$. Ekkor

(I) $\quad x + y = 4a$;

(II) $\quad xy = a^2$.

Vonjuk ki az (I) egyenlet négyzetéből a (II) egyenlet négyszeresét:

$(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 = 12a^2$.

(III) $\quad x - y = \pm 2\sqrt{3}\, a$.

Az $x > y$ feltétel miatt csak az $x - y = +2\sqrt{3}\,a$ jöhet szóba.
Az (I). és (III) egyenletből:

$x = 2a + a\sqrt{3}$ és $y = 2a - a\sqrt{3}$.

811. Ha a_k és a_l elemek racionális számok – k, l különböző pozitív egészek –, akkor a sorozat differenciája is racionális szám, tehát ha van az elemek között legalább két racionális szám, akkor minden elem racionális szám, vagyis nem lehet az elemek között pontosan kettő racionális szám.

812. Az előző feladat következménye.

813. Írjuk fel a háromszög területét kétféleképpen:

$$T = \frac{2x}{2} + \frac{ny}{2} + \frac{(n+1)z}{2};$$

$$T = \sqrt{\frac{2n+3}{2} \cdot \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{12n^2 + 12n - 9} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4\left(3n^2 + 3n - 3\right) + 3} = \frac{1}{4}\sqrt{4k+3}.$$

Ha x, y, z racionális számok, akkor az első esetben T racionális szám, a második esetben a gyökös kifejezés irracionális, mivel $4k + 3$ alakú szám nem lehet egy egész szám négyzete.
Tehát x, y, z nem lehetnek egyidejűleg racionális számok.

814. Vizsgáljuk meg az első néhány számra a kérdéses számjegyet.

n	1	2	3	4	5	6
$\sqrt{n^2+n+1}$	1,7…	2,6…	3,6…	4,5…	5,5…	6,5…

A sejtés az, hogyha $n \geq 4$, akkor a kérdéses számjegy 5.

$n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$, ezért

$$\left[\sqrt{n^2+n+1}\right] = n.$$

Legyen a tizedesvessző utáni számjegy a. Tehát

$n + \frac{a}{10} < \sqrt{n^2+n+1} < n + \frac{a+1}{10}$ ahol $0 \leq a \leq 9$ $a \in N$ azaz,

$10n + a < 10\sqrt{n^2+n+1} < 10n + a + 1 \quad /(\ )^2; -100n^2.$

(I) $\qquad 20na + a^2 < 100n + 100 < 20n(a+1) + (a+1)^2.$

Az (I) egyenlőtlenség első részéből:

$20n(a-5) + a^2 < 100.$

Mivel $n \geq 4$, ezért $80(a-5)+a^2<100$ egyenlőtlenséget vizsgálhatjuk. Ebből adódik, hogy

(II) $\quad a \leq 5$.

Az (I) egyenlőtlenség második részéből:

$100 < 20n(a+1)^2 \leq 20n(a-4)+10^2$, mert $a \leq 9$.

Ebből $0 < 20n(a-4)$, ami akkor és csak akkor igaz, ha

(III) $\quad a \geq 5$.

(II)-ből és (III)-ból következik, hogy $a = 5$.

A kérdéses számjegy tehát $n \geq 4$ esetén 5, ha $n = 2$; 3 akkor 5, ha $n = 1$ akkor 7.

815. Megvizsgálva az adott számokat, azt tapasztaljuk, hogy a jobb oldalakon a számok kiírt törtrésze megegyezik a $\frac{8}{9} = 0{,}888\,888...$ végtelen szakaszos tizedes tört alakjának első három jegyével. Az egész részek 9-cel növekednek, 8-tól kezdve. Ezek szerint a jobb oldalak leírt számjegyei három jegyre kerekített értékei a következő számoknak:

$8+\frac{8}{9}=(9-1)+\frac{8}{9}=9-\frac{1}{9}$;

$2\cdot 9-\frac{1}{9}$;

$3\cdot 9-\frac{1}{9}$;

$4\cdot 9-\frac{1}{9}$.

Ezen számok közös alakja

$9k-\frac{1}{9}$, ahol $k = 1, 2, 3, 4$.

Négyzetük közös alakja:

$81k^2-2k+\frac{1}{81}$.

Ennek egész része $81k^2-2k$, s ha $k = 1, 2, 3, 4$ értéket behelyettesítjük, akkor a gyökjel alatti számokat kapjuk.

Ezek után vizsgáljuk meg, hogy a $81k^2-2k$ kifejezés $k = 5, 6, 7\ldots$ értékei esetén a természetes számok négyzetgyökében az első három tizedesjegy ugyancsak 8-as-e, azaz igaz-e minden $k \geq 1$ egész számra a következő egyenlőtlenség:

(I) $\quad (9k-1)+0{,}888 < \sqrt{81k^2-2k} < (9k-1)+0{,}889$.

Az (I) egyenlőtlenség második részének helyessége könnyen bizonyítható.

$$\sqrt{81k^2-2k} < \sqrt{81k^2-2k+\frac{1}{81}} = 9k-\frac{1}{9} =$$

$$=(9k-1)+\frac{8}{9}=(9k-1)+0{,}888\ldots < (9k-1)+0{,}889.$$

A (I) egyenlőtlenség bal oldalának igazolása:

$(9k-1)+0{,}888 < \sqrt{81k^2-2k}$ egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív, ezért a négyzetre emelés elvégezhető.

$$(9k-0{,}112)^2 = 81k^2-2{,}012k+0{,}012\,544 =$$

$$=(81k^2-2k)-(0{,}016k-0{,}012\,544).$$

Az utolsó zárójelben lévő kifejezés pozitív, ha $k \geq 1$, tehát

$$(9k-0{,}112)^2 < 81k^2-2k.$$

Ezzel beláttuk, hogy a fent megadott kifejezés négyzetgyökében az első három tizedesjegy 8-as.

Hatvány, gyök, logaritmus

Egész kitevőjű hatványok

816. *a)* 9, 64, 16, 16, 125, $\frac{1}{27}$, $\frac{16}{625}$;
b) $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{32}$, 5, $\frac{100}{169}$, $\frac{36}{216}$, $\frac{625}{28561}$;
c) $\frac{9}{4}$, $\frac{16}{9}$, 12, $\frac{27}{25}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$;
d) $\frac{1}{1000}$, 1000, $\frac{8}{125}$, 1 265 625, 1 265 625.

817. *a)* 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024;
b) 3, 9, 27, 81, 243;
c) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100;
1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

818. A papírlap hajtogatás után $2^6 \cdot 0{,}1$ mm, azaz kb. 112 589 990 km vastag lesz.

819. A kihúzott számok: 1, 3, 9, 27, 81.

820. *a)* A két szám egyenlő. *b)* A két szám egyenlő.

821. *a)* Az első szám a nagyobb. *b)* Az első szám a nagyobb. *c)* A második szám a nagyobb. *d)* A második szám a nagyobb. *e)* A második szám a nagyobb. *f)* Az első szám a nagyobb.

822. *a)* A második szám a nagyobb. *b)* $10^{20} > 20^{10}$.