IV. Algebra

Algebrai átalakítások. Polinomok

624. *a)* Öttel osztható számok pl: -10; -5; 0; 5…általánosan $5 \cdot l$ alakú, ahol l tetszőleges egész szám. Matematikai jelöléssel: $5 \cdot l$; ahol $l \in \mathbf{Z}$;
b) $3 \cdot k + 1$; vagy $3 \cdot k - 2$; ahol $k \in \mathbf{Z}$;
c) $4 \cdot m - 2$ vagy $4 \cdot m + 2$ alakú, ahol $m \in \mathbf{Z}$;
d) $7 \cdot n + 6$ vagy $7 \cdot n - 1$ alakú, ahol $n \in \mathbf{Z}$.

625. *a)* Ezek a páratlan számok, így pl.: -21; 5; 17; 101.
b) Az ilyen alakú számok hárommal osztva 2-t adnak maradékul. Ilyenek pl.: 2; 5; -1; -10.
c) Az ilyen alakban megadott számok 7-tel osztva ötöt adnak maradékul. Pl.: 5; 12; 33; -2.
d) Ez megegyezik a *c)* résszel.

626. $11 \cdot l + 10$, vagy $11 \cdot l - 1$ alakú, ahol $l \in \mathbf{Z}$.

627. A feltételek alapján az oldalak csökkenő sorrendben: $2 \cdot k + 1$, $2 \cdot k$, $2 \cdot k - 1$ alakúak. A háromszög kerülete a három oldal összege. $K = 2 \cdot k + 1 + 2 \cdot k + 2 \cdot k - 1 = 6k$. Pl: 3, 4, 5 vagy 9, 10, 11.

628. *a)* Legyen a két szám a, b; $(a + b) + (a - b) = 2a$. Így igaz az állítás.
b) A feltételek szerint a három szám közül a középső $2k$ alakú, a két szomszédos szám $2k + 1$, illetve $2k - 1$ alakú. A három szám számtani közepe: $\dfrac{2k - 1 + 2k + 2k + 1}{3} = \dfrac{6k}{3} = 2k$. Az állítás igaz.
c) Legyen a két szám a, b; $(a + b) - (a - b) = a + b - a + b = 2b$. Az állítás hamis.

629. *a) A*, *b) C*, *c) B*, *d) C*, *e) B*, *f) A*, *g) A*, *h) A*.

630. *a)* $-3x^6 + \dfrac{1}{2}x^5 + 2x^2 + 7x - 5$;
b) $\dfrac{7}{8}y^9 + 16y^8 + 4y^5 + \dfrac{3}{4}y^3 - 16y^2 - 0{,}3y + 1$;
c) $-z^{12} - 3z^{11} + 6z^{10} - 7z^7 + 8z^3 - 5z^2 + 2z + 4$.

631. *a)* a szerint: $-2ab^3 + 9a^2b^2 - 8a^3b^4 - 7a^4b^5 + a^5b$;
b szerint: $a^5b + 9a^2b^2 - 2ab^3 - 8a^3b^4 - 7a^4b^5$.
b) c szerint: $-88 + \dfrac{1}{11}d^5 + 3d^6 + \dfrac{2}{3}cd^2 - \dfrac{3}{2}c^2d - 11c^4 + 3c^9d^{10}$;
d szerint: $-88 - 11c^4 - \dfrac{3}{2}c^2d + \dfrac{2}{3}cd^2 + \dfrac{1}{11}d^5 + 3d^6 + 3c^9d^{10}$.

632. $-\dfrac{3}{2}x^{66} - x^7 + \dfrac{2}{3}x^5 + \dfrac{5}{4}x^3 + 100x$.

IV

633. *a)* $2xy$; $17xy$; $-2xy$;
$-xy^2$; $\frac{9}{7}xy^2$;
$\frac{1}{8}x^2y$; $9x^2y$; $4x^2y$.
b) $5a^2bc$; $7a^2bc$; $-6a^2bc$;
ab^2c; $2ab^2c$; $-6ab^2c$; $5ab^2c$;
$9abc^2$; $-abc^2$;
$-3abc$; $3abc$.

634. a^2; $\frac{7}{5}x$; b^5a; axy; $\frac{x}{2}$; $-2y^{13}$; $2a(1-x)$.

635. *a)* $2ab=-2$; $-3a^3=-\frac{3}{8}$; $0{,}6x^2=0{,}15$; $-\frac{2}{5}y=-\frac{1}{10}$; $-3b=6$;
b) $3x^2y=\frac{1}{3}$; $2xy^2=\frac{1}{12}$; $-x^3y=-\frac{2}{27}$; $-x^2y^2=-\frac{1}{36}$; $5xy=\frac{5}{6}$;
c) $abc=-2$; $2a^2bc^2=-4$; $-3ab^3=12$; $4abc^2=-16$; $4a^2bc=-4$.

636. *a)* $2a-2b$; *b)* $2x-2y$; *c)* $3y-5$; *d)* $-3m-9+3n$; *e)* $5a^2-12a$.

637. *a)* $6c+23d$; *b)* $10x^3-x^2$; *c)* $-19b^2$; *d)* $x^2y+14xy^2$.

638. *a)* $28x-21y+25z$; *b)* $5m^2-3mn-3n^2$; *c)* $14ab-53bc-13cd$;
d) $20abc-17bcd-24cde$.

639. *a)* $1\frac{1}{6}x+1\frac{1}{6}y-\frac{9}{20}z$; *b)* $ab-\frac{1}{14}bc-\frac{7}{15}ac$;
c) $1{,}1ab-3bc+2cd$; *d)* $2abc-0{,}3bcd+0{,}5acd$.

640. *a)* $\frac{5}{6}x^2y^2-\frac{3}{4}ab-1\frac{5}{6}a^2b^2-\frac{3}{4}$;
b) $-2\frac{1}{3}x^3-2\frac{2}{3}x^2y-2\frac{1}{4}xy^2-2\frac{1}{2}y^3-\frac{1}{3}$.

641. *a)* $8a^2-ab-b^2$; *b)* $-11x^3+13x^2-4x-1$.

642. *a)* $9a^2-5b^2$; *b)* $10a-8c+9b$; *c)* $18m-9n$; *d)* $20a^2-3a$.

643. *a)* $6a$; *b)* $4a$; *c)* $-2a^2$; *d)* $14k^3l^2$; *e)* $-\frac{43}{30}b^2c$; *f)* $-6x^2y^3$;
g) $3a^n-2a^2$.

644. *a)* $14b+2$; *b)* $2c+2d$; *c)* $-19i+29j-4k$; *d)* $-2x^2-6xy-2y^2$;
e) a^3+7a^2-9a-2.

645. *a)* $6x^5$; *b)* $8a^4$; *c)* $15m^3$; *d)* $12p^6$; *e)* $-18c^3$; *f)* $16d^4$; *g)* $3t^3$;
h) $-20b^4$; *i)* $3a^6$; *j)* $2a^{2n+3}$; *k)* $-3x^{3n}$.

646. *a)* $-6a^3b^2$; *b)* $16x^3y^3$; *c)* $-\frac{1}{2}c^5d^3$; *d)* $-\frac{5}{9}m^5n^3$; *e)* $-0{,}3x^5y^6$;
f) $-1{,}2k^5b^4$; *g)* $0{,}32a^{2n+1}b^{3m}$; *h)* $-\frac{1}{2}x^ky^{k+3}$.

647. *a)* a^8; *b)* $10b^{17}$; *c)* $8c^{13}$; *d)* $-32e^5d^7$; *e)* $\frac{2}{3}g^{11}h^7$; *f)* i^3;
g) $\frac{1}{2l^2}$; *h)* $\frac{2}{3}j^3$; *i)* $4\frac{l}{k^4}$.

648. *a)* $G^2=\frac{49m^4}{81n^6r^6}$; *b)* $H^3=\frac{3^{12}n^3}{7^6m^9r^3}$; *c)* $G\cdot H=\frac{9}{7n^2mr^4}$;
d) $\frac{G}{H}=\frac{7^3m^5}{3^6n^4r^2}$; *e)* $\frac{G^4}{H^5}=\frac{7^{14}m^{23}}{3^{28}n^{17}r^7}$.

IV

649. *a)* $2a^2-8ab$; *b)* $-15c^2+20c$; *c)* $12x^3-24x^2+20x$;
d) $12i^4-8i^3-6i^2$; *e)* $-6p^3q+4p^2q^2-8pq^3$;
f) $-\frac{4}{3}r^5s^3-\frac{14}{15}r^4s^2+\frac{7}{2}r^3s^2+\frac{7}{4}r^2s^3$.

650. *a)* $a^{2k}-3a^{k+3}$; *b)* $-10b^{2n}+6b^{2n-1}+14b^{n+2}$;
c) $-12i^{2k-4}-6i^{2k}+15i^{2k-1}$; *d)* $21x^{3n}-15x^{3n-1}+9x^{3n-2}$.

651. *a)* $a^2-7a+12$; *b)* $-2b^2-b-15$; *c)* $10c^2+7cd-12d^2$;
d) $-6p^3+12p^2q+4pq-8q^2$; *e)* $3u^3v^3-9u^2v^2-u^2v^3+3uv^2$;
f) $6x^4-19x^3y+19x^2y^2-6xy^3-6x^2+4xy$.

652. *a)* $2a^2-30$; *b)* $4b+14$; *c)* $c^4+2c^3+c^2-1$; *d)* d^4-1; *e)* $9e^2-36$.

Nevezetes azonosságok

A következő feladatoknál a nevezetes azonosságok felismerése a cél.

653. A következő párosításokat lehet megtenni:
a – C; b – B; c – D; e – C.
Nincs párja: d, A, E kifejezéseknek.

654. A lehetséges párosítások:
A – d; B – c; C – d; D – c; F – a; G – e;
Nincs párja az E, b, e kifejezéseknek.

655. Zárójelfelbontás után látható, hogy $(b-1)^2-4=b^2-2b-3$.
Ha a két tag négyzetének különbségére vonatkozó azonosságot alkalmazzuk, akkor $(b-1)^2-4=(b-1)^2-2^2=(b-1-2)(b-1+2)=(b-3)(b+1)$.
Így tehát az *a)*, illetve *c)* kifejezéssel egyenlő.

656. *a)* $(c-1)^2$; *b)* $(b+3)^2$; *c)* $(l-10)^2$; *d)* $(7z-8r)^2$; *e)* $(12j+5i)^2$;
f) $\left(\frac{4}{3}l-\frac{3}{4}k\right)^2$; *g)* $(a^2-2)^2$; *h)* $(d^3+5)^2$; *i)* $(2p^2-3q^3)^2$.

657.

A-hoz választható:	*c)*, *d)*;
B-hez választható	*b)*, *e)*;
C-hez választható:	*c)*, *d)*;
D-hez választható:	*g)*.

A teljes négyzetté átírt alak:

A. $x^2 \underline{\pm 4x} + 4 = (x \pm 2)^2$; B. $4x^2 \underline{\pm 12x} + 9 = (2x \pm 3)^2$;

C. $\frac{1}{4}x^2 \underline{\pm 4x} + 16 = \left(\frac{1}{2}x \pm 4\right)^2$; D. $4x^2 \underline{-8x} + 4 = (2x - 2)^2$.

658. *a)* $a^2 + 2a + 1$; *b)* $b^2 - 6b + 9$; *c)* $4c^2 - 20c + 25$; *d)* $16d^2 - 24d + 9$;
e) $\frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{2}e + 9$; *f)* $f^2 + 6f + 9$; *g)* $9a^4b^2 - 6a^2b + 1$;
h) $16a^2b^4 - 8a^2b^3 + 9a^2b^2$; *i)* $\frac{9}{4}x^4y^2 2x^3y^4 + \frac{4}{9}x^2y^9$;
j) $\frac{25}{49}x^8y^4 - \frac{40}{21}x^8y^6 + \frac{16}{9}x^4y^9$.

659. *a)* $(a-4)^2$; *b)* $(b-4)^2 - 1$; *c)* $(c+2)^2 - 1$; *d)* $(d - 1{,}5)^2 + 0{,}25$;
e) $(e-5)^2 - 19$; *f)* $(f - 3{,}5)^2 - 7{,}25$.

660. *a)* $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2cb$; *b)* $x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y$;
c) $mx^2 + b^2 + 9 + 2mxb + 8mx + 6b$; *d)* $ax^2 + b^2 + \frac{1}{4} - 2axb + ax - b$;
e) $4a^2 + 9b^2 + 16 - 12ab - 16a + 24b$;
f) $9a^2 + 25b^2 + c^2 - 30ab + 6ac - 10bc$.

661. *a)* $(x+y+z)^2$; *b)* $(-a+b+c)^2$; *c)* $(-c-d+e)^2$; *d)* $(2x+3y-z)^2$;
e) $(x+y\pm 2)^2$; *f)* $(m^2+m+1)^2$.

662. *a)* $(c^2+c+1)^2$; *b)* $(2x^2+3x+2)^2$; *c)* $(a-2a+3)^2$.

663. *a)* $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$; *b)* $k^3 - 3k^2l + 3kl^2 + l^2$;
c) $a^3 - 9a^2 + 27a - 27$; *d)* $c^3 + 3c^2 + 3c + 1$; *e)* $8b^3 + 36b^2 + 54b + 27$;
f) $d^3 - 12d^2 + 48d - 64$; *g)* $\frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{4}p^2q + \frac{1}{6}pq^2 - \frac{1}{27}q^3$;
h) $\frac{125}{27}x^3 + 50x^2y + 20xy^2 + 8y^3$; *i)* $8x^6y^3 - 36x^5y^5 + 54x^4y^7 - 27x^3y^9$;
j) $-\frac{27}{8}a^{12}y^3 - \frac{9}{4}a^9y^5 - \frac{1}{2}a^6y^5 - \frac{1}{27}a^3y^9$.

664. *a)* $a^2 - 1$; *b)* $b^2 - 9$; *c)* $4c^2 - 25$; *d)* $9d^2 - 25c^2$; *e)* $9f^4 - 4$;
f) $16i^2j^2 - 9k^2$; *g)* $25r^4 - 9r^2$; *h)* $a^{2n} - b^8$; *i)* $9x^4y^2 - 4$.

665. *a)* $2(a+b)$; *b)* $3(2c-d)$; *c)* $d(a+b)$; *d)* $y(15x-5z)$;
e) $3c(4d+7a)$; *f)* $y(xy-z)$.

666. *a)* $3(2-n)$; *b)* $a^3(a^2-1)$; *c)* $y^3(y+x)$; *d)* $9x(x^2-2)$;
e) $12y(2y^2-3)$; *f)* $ab^2(1+ab)$; *g)* $a^2y^2(a^2y-1)$.

667. *a)* $x^n(1-x)$; *b)* $y^{2k}(1+y^{3k})$; *c)* $7z^{n-2}(2z^2-3)$; *d)* $a^2x^{k-1}(ax^4+3)$.

IV

668. *a)* $y(a+b+c)$; *b)* $a\left(a^3-4a-2\right)$; *c)* $3mn(n+5-2m)$;
d) $5abc(7a-b+4c)$.

669. *a)* $(a+2)(x+y)$; *b)* $(j-3)(6+j)$; *c)* $(x-y)(2x-3y)$;
d) $(a-b)(5m-3n)$; *e)* $(x-y)(2a+3b)$; *f)* $(m-2)(5-m)$;
g) $(x+5)(3x-4)$; *h)* $(u-1)(7u+1)$.

670. *a)* $(2+a)(x+y)$; *b)* $(a+b)(n-m)$; *c)* $(i+j)(i-k)$;
d) $(u-v)(5a+1)$; *e)* $(a-2)(2a-1)$; *f)* $(7n+5m)(a-b)$;
g) $(2i+3k)(11i-5j)$; *h)* $x(x+1)(x-1)^2$.

671. *a)* $(a-2)(a-3)$; *b)* $(b-3)(b-5)$; *c)* $(c-4)(c+3)$;
d) $(d+10)(d-3)$; *e)* $2\left(g^2+g-2\right)=2(g+2)(g-1)$;
f) $-\left(k^2-6k+8\right)=-(k-4)(k-2)=-(4-k)(k-2)$;
g) $-\left(l^2-3l-10\right)=-(l-5)(l+2)=(5-l)(l+2)$.

672. *a)* $(x+y)(x-y)$; *b)* $(m-n)(m+n)$; *c)* $(q-4)(q+4)$;
d) $(2r+3)(2r-3)$; *e)* $(x+1)(x-1)$; *f)* $(a+5)(a-5)$;
g) $(3-c)(3+c)$; *h)* $(b+2)(b-2)$.

673. *a)* $\left(8+c^2\right)\left(8-c^2\right)$; *b)* $\left(l^2-3k\right)\left(l^2+3k\right)$; *c)* $\left(5ur^2+4p^3\right)\left(5ur^2-4p^3\right)$;
d) $\left(7-d^2\right)\left(7+d^2\right)$; *e)* $\left(\frac{2}{3}p-1\right)\left(\frac{2}{3}p+1\right)$; *f)* $\left(\frac{5}{6}q^2-13\right)\left(\frac{5}{6}q+13\right)$.

674. *a)* $(1-xy)(1+xy)$; *b)* $\left(2p^2+3\right)\left(2p^2-3\right)$; *c)* $(p+ab)(p-ab)$;
d) $\left(a^3b-c^2d^2\right)\left(a^3b+c^2d^2\right)$; *e)* $\left(4i^2-3j\right)\left(4i^2+3j\right)$;
f) $(9uv+1)(9uv-1)$; *g)* $\left(10m^2-8n^3\right)\left(10m^2+8n^3\right)$;
h) $(1-0{,}1x)(1+0{,}1x)$.

675. *a)* $\left(0{,}2x-\frac{6}{7}y\right)\left(0{,}2x+\frac{6}{7}y\right)$; *b)* $\left(0{,}1t+0{,}5u^2\right)\left(0{,}1t-0{,}5u^2\right)$;
c) $\left(\frac{12}{5}x^k-\frac{9}{8}y^{k-1}\right)\left(\frac{12}{5}x^k+\frac{9}{8}y^{k-1}\right)$; *d)* $\left(\frac{1}{3m}-\frac{5m}{11}\right)\left(\frac{1}{3m}+\frac{5m}{11}\right)$;
e) $\left(\frac{0{,}2}{t^2}-\frac{3t}{r}\right)\left(\frac{0{,}2}{t^2}+\frac{3t}{r}\right)$.

676. *a)* $(a+b)^2$; *b)* $(x-y)^2$; *c)* $(n-3)^2$; *d)* $(c+d)^2$;
e) $(a-1)^2$; *f)* $(b+2)^2$; *g)* $(2c+1)^2$; *h)* $-(d+1)^2$;
i) $-(d+3)^2$; *j)* $-\left(3c-2d^2\right)^2$.

677. *a)* $\left(a^2+b\right)^2$; *b)* $\left(c^2-b\right)^2$; *c)* $\left(5m^2-n\right)^2$; *d)* $\left(3k^2+l\right)^2$; *e)* $-\left(i^2+j\right)^2$.

IV

678. *a)* $(a+b)(a^2-ab+b^2)$; *b)* $(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
c) $(m+n)(m^2+mn+n^2)$; *d)* $(c-d)(c^2+cd+d^2)$;
e) $(a+2)(a^2+2a+4)$; *f)* $(l+3)(l^2-3l+9)$; *g)* $(r-7)(r^2+7r+49)$;
h) $(q+1)(q^2-q+1)$; *i)* $(4-j)(16+4j+j^2)$.

679. *a)* $(1+a)(1-a+a^2)$; *b)* $(1-2b)(1+2b+4b^2)$;
c) $(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$; *d)* $(2-3i)(4+6i+9i^2)$;
e) $(5x+4y^2)(25x^2-20xy^2+16y^4)$;
f) $\left(\frac{1}{2}k-\frac{3}{5}l^2\right)\left(\frac{1}{4}k^2+\frac{3}{10}kl^2+\frac{9}{25}l^4\right)$.

680. *a)* $(a+b)^3$; *b)* $(m-n)^3$; *c)* $(p-2q)^3$; *d)* $(2c+1)^3$.

681. *a)* $(5m+1)^3$; *b)* $(4-2a)^3$; *c)* $(a+6)^3$; *d)* $\left(\frac{3}{4}ab^2-\frac{2}{3}c^2\right)^3$.

682. *a)* $11(a-b)(a+b)$; *b)* $3(c-d)(c+d)$; *c)* $7(m+1)(m-1)$;
d) $x(x-1)(x+1)$; *e)* $c^2(c+1)(c-1)$; *f)* $ab(a-b)(a+b)$.

683. *a)* $6(m-n)(m+n)$; *b)* $5(i+2j)(i-2j)$; *c)* $8r^2(p+3q)(p-3q)$;
d) $u^2v^2(4u^2-9v^2)$.

684. *a)* $2(a-b)^2$; *b)* $5(c+d)^2$; *c)* $6(m+1)^2$; *d)* $3r(s-1)^2$;
e) $2u(1-v)^2$; *f)* $2j^3k(3j+k)^2$.

685. *a)* $(a+b)^2-1=(a+b+1)(a+b-1)$
b) $(c-d)^2-4=(c-d-2)(c-d+2)$;
c) $5^2-(x-y)^2=(5-x+y)(5+x-y)$;
d) $1^2-(i+j)^2=(1-i-j)(1+i+j)$;
e) $(2a-5b)^2-36=(2a-5b-6)(2a-5b+6)$;
f) $(4m-n)^2-49=(4m-n-7)(4m-n+7)$.

686. *a)* $(a-b)(a+b+1)$; *b)* $(c+d)(c-d+1)$; *c)* $(e-f)(e+f+1)$;
d) $k^3+l^3-k^2l-kl^2=(k+l)(k^2-kl+l^2)-kl(k+l)=(k+l)(k-l)^2$;
e) $(i-j)(i+j)^2$; *f)* $(x+y)^2-z(x+x)=(x+y)(x+y-z)$.

687. *a)* $(a-3)(a-2)$; *b)* $(b+2)(b+4)$; *c)* $(c-3d)(c-4d)$;
d) $(e-5f)(e-2f)$; *e)* $(i-4)(i+3)$; *f)* $(g+4)(g-3)$;
g) $(k-5l)(k+3l)$; *h)* $(m+5n)(m-3n)$.

688. *a)* $2(x+3)(x+2)$; *b)* $2(x+3)(x+4)$; *c)* $2(y-2)(y-1)$;
d) $3(y+6)(y+3)$.

689. *a)* $a^3(a+1)+a(a+1)=a(a+1)(a^2+1)$;

b) $(b-2)(b^2+2b+4)+6b(b-2)=(b-2)(b^2+8b+4)$;

c) $m^3(m^2-1)+(m^2-1)=(m-1)(m+1)^2(m^2-m+1)$;

d) $(n+m)(n^2-nm+m^2)-nm(n+m)=(n+m)(n-m)^2$;

e) $d^3(d+1)+(d+1)=(d+1)^2(d^2+d+1)$;

f) $e^4(e^2-1)+4e^2(e+1)=(e+1)\left[e^4(e-1)+4e^2\right]=e^2(e+1)(e^3-e^2+4)$.

IV

690. *a)* $a^8+2a^4+1-a^4=(a^4+1)^2-a^4=(a^4+a^2+1)(a^4-a^2+1)$;

b) $(a^2+b^2)^2-a^2b^2=(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$;

c) $a^3-4a+a+2=a(a+2)(a-2)+a+2=(a+2)(a-1)^2$;

d) $a^3+2a^2+a^2-4=a^2(a+2)+(a-2)(a+2)=(a+2)(a^2+a-2)=$
$=(a+2)(a+2)(a-1)$.

691. *a)* $x^3-1+x^2-1=(x-1)(x^2+2x+2)$;

b) $x^3+x^2+7x^2+7x+12x+12=x^2(x+1)+7x(x+1)+12(x+1)=$
$=(x+1)(x+3)(x+4)$;

c) $y^4(y^2-1)+2y^2(y+1)=y^2(y+1)(y^3-y^2+2)$;

d) $y^4-9+5y^3+15y=(y^2+3)(y^2+5y-3)$;

e) $x^3+27+9x^2+27x-x-3=(x+3)(x^2-3x+9)+9x(x+3)-(x+3)=$
$=(x+3)(x^2+6x+8)=(x+2)(x+3)(x+4)$;

f) $(x^2-49)-10y(x-7)=(x-7)(x-10y+7)$.

692. Legyen n egész szám.
$(2n+3)^2-(2n+1)^2=8n+8=8(n+1)$ Mivel $n+1$ egész szám, így az állítás bizonyított.

693. Legyen k egész szám.
$(k+1)^2-k^2=2k+1$, ami minden k egész esetén páratlan.

694. Felhasználva az előző feladat megoldását:
$K=1003^2-1002^2+1001^2-1000^2+\ldots+3^2-2^2+1^2=2005+2001+\ldots+$
$+5+1=503\,506$.

695. *a)* Legyen $n=121\,212$, ekkor a tört:

$$\frac{n\cdot(2n-1)+(2n-1)(n+2)}{4n\cdot(n+1)-2n+2}=\frac{(2n-1)(2n+2)}{(4n-2)(n+1)}=1;$$

a) Jelöljük 60 000 000-t n-nel. Ekkor:

$$\frac{n\cdot(n+4)-(n+2)(n-2)}{n\cdot(n+1)-(n+1)(n-1)}=\frac{4\cdot(n+1)}{n+1}=4.$$

696. Ha a egész szám, akkor közös nevezőre hozva:
$$\frac{80a}{2(2a-5)}:\frac{(2a+5)^2-(2a-5)^2}{(2a-5)(2a+5)}=2a+5,$$ mely minden a-ra páratlan egész szám.

697. A kisebbik egész számot t-vel jelölve:
$t^2+(t+1)^2+[t(t+1)]^2=t^4+2t^3+3t^2+2t+1=(t^2+t+1)^2$, mely egy egész szám négyzete.

Algebrai törtek

698. Az $a)$, $d)$, $j)$ esetben minden valós szám esetén értelmezhető az adott kifejezés.

b) $a\neq 3$; *c)* $b\neq 2$; *e)* $d\neq -2$;

f) $e\neq 0$; *g)* $f\neq -\frac{3}{4}$; *h)* $|n|\neq 4$;

i) $h\neq 0; h\neq 3$.

699. Az $a)$, $c)$, $e)$ kifejezések esetében (-1)-szeresére változik a tört értéke, a többi esetben változatlan marad.

700. *a)* Nem változik.
b) Nem változik.
c) Kétszeresére változik.
d) Négyszeresére változik.
e) Nem változik.

701. *a)* $-\frac{1}{a-1}$; *b)* $-\frac{b}{1-b}$;

c) $-\frac{b-a}{c-d}$, vagy $-\frac{a-b}{d-c}$; *d)* $-\frac{5-a}{a-2}$, vagy $-\frac{a-5}{2-a}$;

e) $-\frac{n+m}{a+b}$.

702. Az előző feladat következménye.

703. *a)* $5a$, $a\neq 0$; *b)* $\frac{a}{6b}$, $b\neq 0$; *c)* $\frac{d^2x}{5}$, $d\neq 0, x\neq 0$;

d) $\frac{6q}{5p}$, $p;q\neq 0$; *e)* $\frac{13s^6t^2}{6r}$, $r;\ s;\ q\neq 0$.

704. *a)* -1, $a\neq b$; *b)* -1, $b\neq 3$;

c) $-\frac{3a}{2b}$, $d\neq c$; *d)* $-\frac{n}{3m}$, $i\neq j$;

e) $\frac{a-b}{a+b}$, $c \neq 0$; $a \neq -c$; *f)* $\frac{1}{c+d}$, $c \neq 0$; $c \neq -d$;

g) $\frac{f}{1-f}$, $e \neq 0$; $f \neq 1$; *h)* $\frac{k^2}{i-k}$, i; $k \neq 0$; $i \neq k$;

i) $\frac{r+b}{s+t}$, $s \neq 0$; $s \neq -t$; *j)* $\frac{n+1}{a+b}$, $n \neq 0$; $a \neq -b$.

705. *a)* $\frac{a}{a-1}$, $|a| \neq 1$; *b)* $-\frac{b}{b+1}$, $|b| \neq 1$; *c)* $\frac{c-d}{c+d}$, $|c| \neq |d|$;

d) $-e-2$, $e \neq 2$; *e)* $\frac{1}{m-n}$, $m \neq n$; *f)* $\frac{a+1}{a-1}$, $|a| \neq 1$;

g) $\frac{b+3}{b-3}$, $b \neq 3$.

706. *a)* $a+1$, $a \neq 1$; *b)* $\frac{2}{3}$, $b \neq 5$;

c) $\frac{c-3}{3}$, $c \neq 3$; *d)* $\frac{d-9}{5}$, $d \neq -9$;

e) A számláló nem alakítható szorzattá, így nem egyszerűsíthető a tört.

f) $\frac{7}{2-f}$, $f \neq 0\,;2$; *g)* -1, $g \neq 5$;

h) $-\frac{k}{l}$, $l \neq 0$; $l \neq 3k$; *i)* $n(1-m)$, $m \neq -1$;

j) $\frac{c}{c-d}$, $c \neq d$; *k)* $\frac{5(3e+2f)}{2(3e-2f)}$, $e \neq \frac{2}{3}f$.

707. *a)* (x^2-y^2); *b)* $\frac{x^2-xy+y^2}{(x-y)(x^2+y^2)}$; *c)* $\frac{1}{x-y}$;

d) $\frac{(x+y)(x^2+y^2)}{x^2+xy+y^2}$; *e)* $\frac{1}{x-2}$; *f)* $\frac{1}{x+3}$;

708. *a)* $\frac{7ab}{a^2-b^2}$; *b)* $\frac{c^2-d^2}{c}$; *c)* $\frac{10}{e^2-2e+4}$;

d) $\frac{g+h}{3(g-h)(g^2+h^2)}$; *e)* $\frac{n-1}{n+1}$; *f)* $\frac{2(n-m)}{3(n^2-nm+m^2)}$.

IV

709. a) $\frac{4(a-b)}{3(a+b)}$; b) $\frac{3(c-3d)}{5(c+3d)}$; c) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$;

d) $\frac{c+d}{3}$; e) $\frac{a(m+1)}{m(m-1)}$; f) $\frac{i-2}{i}$;

g) $\frac{(u-3)^2}{u+3}$; h) $\frac{2(t+1)}{t^2-t+1}$.

710. a) $\frac{5(x-y)+a(x-y)}{4(a+5)}=\frac{x-y}{4}$;

b) $\frac{p(p-q)-x(p-q)}{(p-x)^2}=\frac{p-q}{p-x}$;

c) $\frac{(c+d)(c^2-cd+d^2)}{(c-d)(c+d)-(c+d)}=\frac{c^2-cd+d^2}{c-d-1}$.

711. a) $\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2-2ab+b^2+ab}=a+b$; b) $\frac{(x-2a)^2}{(x-2a)(x+2a)}=\frac{x-2a}{x+2a}$;

c) $\frac{x(y-2)-3(y-2)}{x(y-2)}=\frac{x-3}{x}$.

712. a) $\frac{(a+2)(a+3)}{(a+2)^2}=\frac{a+3}{a+2}$; b) $\frac{(b+1)(b+5)}{(b+2)(b+1)}=\frac{b+5}{b+2}$;

c) $\frac{(c-4)(c-3)}{(c-3)^2}=\frac{c-4}{c-3}$; d) $\frac{(d+7)(d+1)}{(d+1)^2}=\frac{d+7}{d+1}$.

Algebrai törtek összeadása, kivonása

713. a) $\frac{11m-17}{24}$; b) $\frac{6a-11b}{36}$;

c) $\frac{-17c^2-7d^2}{20}$; d) $\frac{11u-23v}{12}$;

714. a) $\frac{53n+59m}{30}$; b) $\frac{22a+65b}{24}$;

c) $\frac{xy+3y^2}{6}$.

IV

715. *a)* $\frac{19a}{5}$; *b)* $\frac{-3c-9d}{4}$;

c) $\frac{4n-2m}{3}$; *d)* $\frac{9r-5s}{8}$.

716. *a)* $\frac{2bc+3ad}{abx}$, $a;\ b;\ x\neq 0$; *b)* $\frac{30x-14}{6x^2}$, $x\neq 0$;

c) $\frac{5p^2 3n^2}{mnp}$, $m;\ n;\ p\neq 0$; *d)* $\frac{2a-3d}{d^2}$, $d\neq 0$;

e) $\frac{6a-7b}{a}$, $a;\ b\neq 0$; *f)* $\frac{3a-4b}{a^4 b^3}$, $a; b\neq 0$;

g) $\frac{27gf^2-15e^2 f+32eg^2}{36e^2 f^2 g^2}$, $e;\ f;\ g\neq 0$;

h) $\frac{10ab-3b^2-7a^2}{a^2 b^2}$, $a;\ b\neq 0$;

i) $\frac{6a^2+2a-5}{a^2 b}$, $a;\ b\neq 0$; *j)* $\frac{-m^2-2m+4}{mn}$, $m;\ n\neq 0$.

717. *a)* $\frac{11a-3}{a(a-1)}$, $a\neq 0; 1$; *b)* $\frac{-2b-6}{b(b+2)}$, $b\neq 0; 2$;

c) $\frac{17i}{2(i-1)}$, $i\neq 1$; *d)* $\frac{9d-4}{4(d+2)}$, $d\neq -2$;

e) $\frac{7e-f}{(e-f)(e+f)}$, $|e|\neq |f|$; *f)* $\frac{-2k}{(j-k)(j+k)}=\frac{2k}{k^2-j^2}$, $|j|\neq |k|$;

g) $\frac{2b}{(2a-b)(2a+b)}=\frac{2b}{4a^2-b^2}$, $|b|\neq |2a|$.

718. *a)* $\frac{2c+8d}{(c-d)(c+d)}=\frac{2c+8d}{c^2-d^2}$, $|c|\neq |d|$; *b)* $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$, $|m|\neq |n|$;

c) $\frac{a^2+9}{a^2-9}$, $|a|\neq 3$.

719. *a)* $\frac{13}{4(x-1)}$, $x\neq 1$; *b)* 0, $a\neq -b$;

c) $\frac{2m^2+mn-3n^2}{5(m^2-n^2)}$, $|m|\neq |n|$.

720. *a)* $\frac{6x-4}{x^2-4}$, $|x|\neq 2$; *b)* $\frac{2}{a+2}$, $|a|\neq 2$;

IV

c) $\frac{m+n}{2(n-m)}$, $|m| \neq |n|$; *d)* $\frac{c-d}{2(c+d)}$, $|c| \neq |d|$;

e) $\frac{e^2-8e+3}{2e(e^2-9)}$, $e \neq 0;\ \pm 3$; *f)* $\frac{2(i^2+ij+j^2)}{3(j^2-i^2)}$, $|j| \neq |i|$;

g) $\frac{x^2+2x+2}{2x(x^2-1)}$, $x \neq 0;\ \pm 1$; *h)* 0, $u;\ v \neq 0,\quad u \neq v$.

721. *a)* $\frac{6b^2-6ab-2a^2}{2ab(2a-3b)(2a+3b)}$, $a;\ b \neq 0,\ |a| \neq \left|\frac{3}{2}b\right|$;

b) $\frac{-14b}{(b-2)^2(b+2)}$, $|b| \neq 2$; *c)* $\frac{p^2+4p+37}{2(p-3)(p+3)}$, $|p| \neq 3$;

d) $\frac{m+13}{2(m+3)^2}$, $m \neq -3$; *e)* $\frac{g+1}{5(g-4)^2}$, $g \neq 4$.

722. *a)* $\frac{a+5}{6(a+1)^2}$, $a \neq -1$; *b)* $\frac{15b+8}{4b^2-9}$, $|b| \neq \frac{3}{2}$;

c) $\frac{-6m+5}{(3m-2)(3m+2)} = \frac{6m-5}{4-9m^2}$, $|m| \neq \frac{2}{3}$;

d) $\frac{-2p^2+15p-45}{2(p+3)(p-3)^2}$, $|p| \neq 3$; *e)* $\frac{8x^2-18}{(3-2x)(3+2x)} = -2$, $|x| \neq \frac{3}{2}$.

723. *a)* $\frac{12a}{1-a^3}$, $a \neq 1$; *b)* $\frac{-4a+2}{2a(2a-1)} = -\frac{1}{a}$, $a \neq 0;\ \frac{1}{2}$;

c) $\frac{10a^2+10}{(a+1)^2(a-1)^2} = \frac{10(a^2+1)}{(a^2-1)^2}$, $|a| \neq 1$; *d)* $\frac{2(a-b)}{a^2+ab+b^2}$, $a \neq b$.

724. *a)* Használjuk fel az $a-b=-(b-a)$ összefüggést. Közös nevezőre hozás után kapjuk:

$$\frac{b^2c-bc^2-a^2c+ac^2+a^2b-ab^2}{abc(a-b)(a-c)(b-c)},\ \text{ahol } a;\ b;\ c \neq 0,\quad a \neq b;\ c,\quad b \neq c.$$

A számláló szorzattá alakítható a következőképpen: $(b-c)(a-b)(a-c)$.

A tört értéke egyszerűsítés után: $\frac{1}{abc}$.

b) 0;
c) Az *a)* részhez hasonlóan kapjuk, hogy a tört értéke −3;
d) Két tag négyzetének különbségére vonatkozó azonosság többszöri alkalmazásával kapjuk, hogy a tört értéke: 1.

Algebrai törtek szorzása, osztása

725. *a)* $\dfrac{acd^3}{2b}$, $a;\ b;\ c;\ d \neq 0$; *b)* $\dfrac{5c^2}{2d}$, $d \neq 0$;

c) $\dfrac{3b}{50ac}$, $a;\ c \neq 0$; *d)* $\dfrac{9b}{5ay}$, $a;\ b;\ x;\ y;\ z \neq 0$;

e) 64, $a;\ b;\ c;\ d \neq 0$; *f)* $\dfrac{p^3 m}{12a^3 b^2 x}$, $a;\ b;\ c;\ x;\ y \neq 0$.

726. *a)* $(a-b)b$, $a;\ b \neq 0$; *b)* 1, $e;\ g \neq 0$;

c) $\dfrac{2(2p-3q)}{npq}$, $n;\ p;\ q \neq 0,\ p \neq -\dfrac{3q}{2}$; *d)* $x-y$, $x, y \neq 0, x \neq -y$;

e) $\dfrac{3}{4}$, $|c| = |d|$.

727. *a)* $\dfrac{5}{9}$, $|a| \neq |b|$; *b)* $4\left(a^2+ab+b^2\right)$, $|a| = |b|$;

c) $\dfrac{3(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}{5(x-y)^2}$, $|x| \neq |y|$; *d)* $\dfrac{1}{6}$, $|a| \neq |b|$;

e) $\dfrac{a(a-3)}{(a-2)(a+4)}$, $a \neq 2; -3; -4$.

728. *a)* $\dfrac{a-1}{2a-1}$, $a \neq \pm 1$; *b)* $\dfrac{10}{2m+1}$, $|m| \neq \dfrac{1}{2};\ m \neq 0$;

c) $\dfrac{1-3a}{2(3a+1)}$, $|a| \neq \dfrac{1}{3}$; *d)* $\dfrac{-2k}{j^2-k^2} = \dfrac{2k}{k^2-j^2}$, $|j| \neq |k|$;

e) $\dfrac{q+p}{q-p}$, $p;\ q \neq 0\ p \neq q$; *f)* x^2+1, $x \neq \pm 1$;

g) $\dfrac{1}{x}$, $|x| \neq 1, x \neq 0$.

729. *a)* $\dfrac{a+b}{ab}$, $a;\ b \neq 0,\ b \neq a$; *b)* 4, $a \neq \pm 1$;

c) $\dfrac{-b}{2(2a-3b)} = \dfrac{b}{2(3b-2a)}$, $|a| \neq \left|\dfrac{3}{2}b\right|$.

730. A feltétel miatt: $\dfrac{a-b}{a} = \dfrac{b-c}{c}$, ebből

$$1-\frac{b}{a} = \frac{b}{c}-1, \qquad 2 = b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right), \qquad \frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right),$$

ha $a \neq 0, c \neq 0, b \neq 0, b \neq c$.

IV

731. A feltétel miatt, ha $b \neq 0$, $d \neq 0$ akkor $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$, tehát

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{c}{d}\right)^2.$$

732. Legyen a és b $m \cdot n$-jegyű pozitív egész, melyekben n jegyű szám ismétlődik m-szer. Ekkor:

$$\frac{aa\cdots a}{bb\cdots b} = \frac{a\left(10^{(m-1)n} + 10^{(m-2)n} + \cdots + 10^{2n} + 10^n + 1\right)}{b\left(10^{(m-1)n} + 10^{(m-2)n} + \cdots + 10^{2n} + 10^n + 1\right)} = \frac{a}{b},$$ tehát a törtek értéke: $\frac{43}{85}$.

733. Az $a + b + c = 0$ feltételből: $a = -b - c$, $b = -a - c$, $c = -a - b$.

Ezeket a feltételeket írjuk be az állítás bal oldali nevezőibe:

$$\frac{1}{b^2 + c^2 - (-b - c)^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - (-a - c)^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - (-a - b)^2}.$$

Végezzük el a nevezőben a zárójelfelbontást, és az összevonást. A következőt kapjuk: $-\frac{1}{2bc} - \frac{1}{2ac} - \frac{1}{2ab} = 0$. Közös nevezőre hozás, majd a feltétel felhasználása után kapjuk, hogy a kifejezés 0.

734. A tört számlálója: $\left(ab + c^2\right)^2 - \left(ac + b^2\right)^2$, a nevezője pedig: $\left(ab + c^2\right) + \left(ac + b^2\right)$, így a tört értéke egyszerűsítés után: $\left(ab + c^2\right) - \left(ac + b^2\right) = a(b - c) - \left(b^2 - c^2\right) = (b - c)(a - b - c)$.

735. A háromszög oldalai: $x; y; z$. Reciprok értékek szorzata: $x = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$. Összegük fele: $y = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 + b^2}{ab}\right)$. Különbségük fele: $z = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)$. A három szám közül a legnagyobb y és teljesül $y<x+z$, ha $a \neq b$, tehát már csak azt kell igazolnunk, hogy: $y^2=x^2+z^2$, azaz: $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a^2 + b^2}{ab}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)\right) + 1$. Ha $4a^2b^2$-tel minden tagot szorzunk, akkor az így keletkezett állítás már nyilvánvaló.

736. Általánosan:

$$(xa + yb - zc)^2 + (xb + yc - za)^2 + (xc + ya - zb)^2 =$$
$$= \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2(ab + bc + ca)(xy - yz - zx).$$

Így a tört értéke $\frac{1521}{361}$ az a, b, c bármely értéke esetén.