IV

1775. Legyenek a befogók: a, b. Ekkor $9=\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$. A maximális terület $\dfrac{ab}{2}=40{,}5\,\text{cm}^2$, az átfogó hossza $\sqrt{81}$ cm.

1776. $21=\dfrac{a+b}{2}\leq\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, azaz $a^2+b^2\geq 882$, tehát a keresett minimális érték: 882. Ezt fel is veszi, ha $a=b=21$.

1777. Legyen a keresett szakaszok hossza: x cm, illetve $50-x$ cm.
A négyzetek területének összege: $x^2+(50-x)^2$.
$\dfrac{x+(50-x)}{2}=25\leq\sqrt{\dfrac{x^2+(50-x)^2}{2}}$. Tehát a minimális terület: 625 cm^2, ekkor a négyzetek oldala: $x=y=25$ cm.

1778. Legyenek a levágott darabok: x cm és $160-x$ cm. A négyzetek oldalai: $\dfrac{x}{4}$ cm és $\dfrac{160-x}{4}$ cm. $\dfrac{\dfrac{x}{4}+\dfrac{160-x}{4}}{2}=20\leq\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{x}{4}\right)^2+\left(\dfrac{160-x}{4}\right)^2}{2}}$.
Tehát a minimális terület: 800 cm^2, ekkor a négyzetek oldalai: 20–20 cm hosszúak.

1779. Becsüljük xy értékét közepekkel!
$\sqrt{xy}\leq\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{17}{2}$, melyből $xy\leq\left(\dfrac{17}{2}\right)^2$, az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x=y=8{,}5$. Ez nem eleme az alaphalmaznak. Létezik-e ekkor egyáltalán megoldása a feladatnak? Természetesen igen, az $x=8$, $y=9$ vagy fordítva.
A feladat általánosítható: $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=c$ és n nem osztója c-nek esetekre hasonló a megoldás gondolatmenete.

1780. (1) Ha x pozitív valós szám és tart 0-hoz, akkor $\dfrac{1}{x}$ tart végtelenhez, így S is tart végtelenhez.

(2) $\sqrt{\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2}{2}}\geq\dfrac{x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}}{2}$;

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2\geq 2\left(\frac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{2}\right)^2=\frac{\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2}{2}\geq\frac{\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{(x+y)^2}{4}}\right)^2}{2}=$$

$=\dfrac{(1+4)^2}{2}=12{,}5$, tehát $S\geq 12{,}5$, s ezt az értéket fel is veszi ha $x+\dfrac{1}{x}=y+\dfrac{1}{y}$, vagyis ha $x=y=\dfrac{1}{2}$.

1781. Vizsgáljuk meg S értékét, ha $x=y=z$ és a feltételnek megfelelően, tehát:
$x^2+y^2+z^2=1$.
Alkalmazzuk a négyzetes és a harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget!

$$\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\leq\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vegyük mindkét oldal reciprokát!

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3\cdot\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}.$$

Ekkor $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ esetén az egyenlőség teljesül, így a kifejezés minimuma $S=3\sqrt{3}$.

1782. Alakítsuk át az első tagot, és a nevezőben alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{x^2}{x+y}=\frac{x^2+xy-xy}{x+y}=x-\frac{xy}{x+y}\geq x-\frac{xy}{2\sqrt{xy}}=x-\frac{\sqrt{xy}}{2}.$$

Átalakítás után alkalmazzuk ismét a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$S=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}\geq x-\frac{\sqrt{xy}}{2}+y-\frac{\sqrt{yz}}{2}+z-\frac{\sqrt{zx}}{2}=$$
$$=x+y+z-\frac{1}{2}=\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2}-\frac{1}{2}\geq\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Azaz $S\geq\dfrac{1}{2}$, így tehát S minimuma $\dfrac{1}{2}$, ha $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

1783. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget $2a+1$ és 1-re.

$$\frac{(2a+1)+1}{2}\geq\sqrt{(2a+1)1},\ \text{azaz}\ a+1\geq\sqrt{2a+1}.$$

Tehát:
$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\le a+1+b+1+c+1=a+b+c+3=4.$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $2a+1=1$, vagyis ha $a=0$, illetve hasonlóan $b=0, c=0$. Ez viszont ellentmond a kezdeti feltételeknek, így csak felső korlát adható, de maximuma nincs.

1784. Vezessük be a következő jelöléseket: $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$.
Ekkor $xyz=1$.
Az állítás bal oldalának első tagja:
$$\frac{1}{a^3(b+c)}=\frac{x^3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{x^3yz}{y+z}=\frac{x^2}{y+z}.$$

Ha elvégezzük mind a három tagra az ilyen típusú átalakításokat, és alkalmazzuk a súlyozott számtani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget az $\frac{x}{y+z}$, $\frac{y}{z+x}$, $\frac{z}{x+y}$ számokra, valamint az x, y, z súlyokra:
$$\frac{S}{x+y+z}=\frac{x\frac{x}{y+z}+y\frac{y}{z+x}+z\frac{z}{x+y}}{x+y+z}\ge\frac{x+y+z}{x\frac{y+z}{x}+y\frac{z+x}{y}+z\frac{x+y}{z}},$$
azaz
$$S\ge\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}.$$

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget, és vegyük figyelembe, hogy $xyz=1$.
$$S\ge\frac{3}{2}\frac{x+y+z}{3}\ge\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}.$$
Így tehát az állítást igazoltuk.
Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x=y=z$, azaz ha $a=b=c$.

1785. Legyen a páros indexű számok összege P, a páratlanoké pedig Q.
Ha P és Q számokat összeszorozzuk, akkor a vizsgált összeg minden egyes tagját megkapjuk. Természetesen kapunk olyan további tagokat is, melyek nem tagjai az összegnek, de a feltétel szerint ezek egyike sem lehet negatív.
Így $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\ldots+x_{n-1}x_n\le PQ$, másrészt $P+Q=1$ és P, Q nemnegatív számok.

Alkalmazzuk rájuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\ldots+x_{n-1}x_n\le PQ\le\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a vizsgált összeg nem lehet 0,25-nél nagyobb.
Ez a becslés már tovább nem javítható, mivel ha például $x_1=x_2=0,5$ és $x_3=x_4=\ldots=x_n=0$, akkor az összeg pontosan 0,25.

1786. Válasszuk a nagyság szerinti középsőszámot t-nek, megengedve az egyenlőséget is.

A másik kettő összege ekkor $1-t$, a különbségük legfeljebb $\frac{1-t}{3}$ a feltételek miatt.

Mivel minden a, b valós számra $ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$,

a két „szélső" szám szorzata nagyobb vagy egyenlő, mint $\frac{(1-t)^2-\left(\frac{1-t}{3}\right)^2}{4}=$ $=\left(\frac{2}{9}\right)(1-t)^2$.

A három szám szorzata tehát biztosan nem kisebb, mint $\frac{2}{9}t(1-t)^2$.

$2t+t+t\ge x+y+z\ge t+t+\frac{t}{2}$,

$\frac{1}{4}\le t\le\frac{2}{5}$. Tehát minden, a feltételeknek megfelelő x, y, z számhármasra van olyan $t\in\left[\frac{1}{4},\frac{2}{5}\right]$, hogy $xyz\ge f(t)=\frac{2}{9}t(1-t)^2$. A három szám szorzata tehát biztosan nem kisebb, mint az f függvény minimuma az adott intervallumon. Ez a minimum létezik, mivel f folytonos. Az $\frac{1-t}{3}$, t, $\frac{2}{3}(1-t)$ számokra teljesülnek feltételeink, így az xyz szorzatnak is létezik a minimuma és az éppen az f minimumával egyenlő, Az f függvény konkáv a vizsgált intervallumon, hiszen f második deriváltja $-\frac{2}{9}(4-6t)$ itt negatív, ezért f minimumát az intervallum valamelyik végpontjában veszi fel.

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{32}<\frac{4}{125}=f\left(\frac{2}{5}\right)$. Tehát xyz szorzat legalább $\frac{1}{32}$, és akkor pontosan ennyi, ha x, y, z számok értékei sorrendtől eltekintve: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$.

IV

1787. Mivel $xy=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2-\left(x^2+y^2\right)\right]$, ezért behelyettesítés és teljes négyzetté alakítás után: $xy=\frac{1}{2}\left[(2z-1)^2-\left(z^2+2z-3\right)\right]=\frac{3}{2}(z-1)^2+\frac{1}{2}$.
Tehát xy a z-ben másodfokú kifejezés.
A jobb oldalt, mint z függvényét vizsgálva $f(z)$-nek keressük z-től függő minimumát, azon z értékekre, melyekre létezik az eredeti egyenletrendszernek (x, y) valós megoldása.
$f(z)$-nek abszolút minimuma $z=1$ esetén van, de ekkor

$$\left.\begin{aligned} x+y&=1\\ x^2+y^2&=0\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek nincs valós megoldása.
Kérdés: mely z értékekre van megoldása az eredeti egyenletrendszernek?
Mivel $x=2z-1-y$, ezt behelyettesítve:

$2y^2-(4z-2)y+(3z^2-6z+4)=0$ egyenlethez jutunk.

Ennek az egyenletnek akkor és csak akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív.
$D=-8z^2+32z-28\geq 0$ megoldása:

$$2-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq z\leq 2+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Mivel $z\geq 1$ esetén $f(z)$ szigorúan monoton nő, ezért $f(z)$ ott veszi fel a legkisebb értéket, ahol z a legkisebb, azaz $z_1=2-\frac{\sqrt{2}}{2}$ esetén. Ekkor $f(z_1)=$

$$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}.$$

Tehát xy minimális értéke: $\frac{11-6\sqrt{2}}{4}$.

1788. Az eredeti egyenlet: $2x^3=x^4+\frac{27}{16}$ (1)

Alakítsuk át az egyenletet a következő módon: $x^3(2-x)=\frac{27}{16}$. (2)

Mivel (1) jobb oldala pozitív minden valós x esetén, így x szintén pozitív.
Ha $x\geq 2$, akkor (2) bal oldala kisebb vagy egyenlő 0.
Tehát $x\in\left]0,2\right[$.
Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti összefüggést a $\frac{x}{3},\frac{x}{3},\frac{x}{3},(2-x)$ számokra, így $\frac{x}{3}\frac{x}{3}\frac{x}{3}(2-x)$-et becsüljük felülről.

$$\frac{x}{3}\frac{x}{3}\frac{x}{3}(2-x) \le \left(\frac{\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+(2-x)}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

Tehát $\frac{x^3(2-x)}{27} \le \frac{1}{16}$, az egyenlőség a tagok egyenlősége esetén teljesül, azaz $x=\frac{3}{2}$.

Ez valóban gyöke az egyenletnek.

1789. Nyilván az $f(x)$-nek pontosan ott van maximuma mint a $2f(x)$-nek.

$$2f(x) = 2x(8-x)^2.$$

Becsüljük felülről $2f(x)$-et közepekkel!

$$\sqrt[3]{2x(8-x)^2} \le \frac{2x+(8-x)+(8-x)}{3} = \frac{16}{3};$$

$$2f(x) = 2x(8-x)^2 \le \left(\frac{16}{3}\right)^2 = \frac{4096}{27}.$$

Tehát $f(x) \le \frac{2048}{27}$.

Ezt az értéket fel is veszi, ha $2x = 8-x$, azaz $x=\frac{8}{3}$, ekkor $f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{2048}{27}$.

1790. D_f minden olyan valós (x, y) számpár, melyben sem x, sem y nem 0.

Alakítsuk át:

$$x^4+y^4+\frac{2}{x^2y^2} = x^4+y^4+\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{x^2y^2}.$$

Erre a négy pozitív számra alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget.

$$f(z) = x^4+y^4+\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{x^2y^2} \ge 4\sqrt[4]{x^4y^4\frac{1}{x^2y^2}\frac{1}{x^2y^2}} = 4.$$

Felveszi-e $f(z)$ a 4 minimumértéket?

Igen, ha $x^4=y^4=\frac{1}{x^2y^2}$ teljesül.

Ezek az (x,y) számpárok a következők: $(1; 1)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$, $(-1; -1)$.

IV

1791. Becsüljük alulról az $f(x) = 9x + \frac{4}{x}$ függvényt számtani és mértani közép közötti összefüggés segítségével!

$$\sqrt{\frac{4}{x}9x} \le \frac{\frac{4}{x} + 9x}{2};$$

$$12 \le \frac{4}{x} + 9x = f(x).$$

Tehát az $f(x)$ függvény nem vesz fel 12-nél kisebb értéket.

Ha $\frac{4}{x} = 9x$, azaz $x = \frac{2}{3}$, akkor a függvényérték pontosan 12. Tehát ez a minimum.

Megjegyzés: minden $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$ függvény minimuma, ha x pozitív szám, a, b szintén pozitív esetén $\min(f(x)) = 2\sqrt{ab}$ az $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ helyen.

1792. Jelöljük a négyzetszámokat r^2-tel, illetve s^2-tel, azaz legyen

$15a + 16b = r^2$ és

$16a - 15b = s^2$, ahol r, s egész számok.

Ekkor $r^4 + s^4 = 225\left(a^2 + b^2\right) + 256\left(a^2 + b^2\right) + 2 \cdot 15 \cdot 16ab - 2 \cdot 15 \cdot 16ab =$

$= 481\left(a^2 + b^2\right) = 13 \cdot 37\left(a^2 + b^2\right).$

Mivel 13 és 37 relatív prímek, $r^4 + s^4$ osztható 13-mal és 37-tel is.

Ebből viszont az következik, hogy r és s is osztható külön-külön velük. Ezen állítás belátható az egész számok negyedik hatványának 13-mal, illetve 37-tel való osztási maradékainak vizsgálatával. (Alkalmazható az ismert Fermat-féle kongruenciatétel is.)

Tehát az előzőekből következik, hogy

$r \ge 481$, $s \ge 481$.

Ekkor r és s legkisebb értéke 481 lehet. Ez meg is felel feltételeinknek, mert a

$15a + 16b = 481^2$,

$16a - 15b = 481^2$

egyenletrendszernek van pozitív egész megoldása:

$a = 481 \cdot 31 = 14\,911$, $b = 481$.

A két négyzetszám minimumának legkisebb értéke ezért: $481^2 = 231\,361$.

1793. Az n db könyvet $n!$ különböző módon tehetjük fel a polcra.

Képzeletben kötözzük össze a k db kedvencet felrakás előtt. Így $n - k + 1$ db „könyvet” $(n - k + 1)!$-féleképpen tehetünk fel a polcra, tehát a kedvező esetek száma: $k!(n - k + 1)!$

Így $P(k) = \frac{k!(n - k + 1)!}{n!}$.

Ez 1-gyel egyenlő, tehát maximális, ha $k = 1$ vagy $k = n$.
Legyen $P(k)$ nagyobb mint $P(k+1)$. A minimum helyének meghatározása érdekében vizsgáljuk meg mely k-ra teljesül az egyenlőtlenség.
$\frac{P(k)}{P(k+1)} = \frac{k!(n-k+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n-k+1}{k+1}$, tehát $P(k)$ akkor, és csakis akkor nagyobb $P(k+1)$-nél, ha $(n-k+1)$ nagyobb $(k+1)$-nél, azaz $2k$ kisebb mint n.

$n-k+1 > k+1$,
azaz $2k < n$.

Ha $2k = n$ (n páros), akkor $P(k) = P(k+1)$, ha pedig $2k$ nagyobb mint n, akkor $P(k)$ kisebb mint $P(k+1)$.
Ha tehát n páros, akkor $k = \frac{n}{2}$-ig $P(k)$ monoton fogy, a $P\left(\frac{n}{2}\right) = P\left(\frac{n+2}{2}\right)$ értékek minimálisak, ezt követően $P(k)$ monoton nő.
Ha n páratlan, a minimuma $k = \frac{n+1}{2}$ értékhez tartozik.
Láttuk: $P(1) > P(2)$ és $P(n-1) < P(n)$, tehát a $k = 1$, illetve $k = n$ értékeken kívül más maximális érték nincs.
1794. A kezdeti helyzet után t másodperc múlva az A-ból induló pont a derékszög C csúcsától $100 - 8t$ méterre lesz. A B-ből induló pont pedig a derékszög C csúcsától $6t$ méterre van.
Ezért egymástól $d(t) = \sqrt{(100-8t)^2 + (6t)^2}$ méterre vannak.
Ennek a kifejezésnek ott van minimuma, ahol a
$d^2(t) = (100-8t)^2 + (6t)^2 = 100(t-8)^2 + 36$ kifejezésnek.
Ha $t = 8$, akkor a két pont távolsága minimális: 60 m.
Ekkor A pont a derékszög csúcsától 36 m-re, C pont pedig 48 m-re van.
1795. Jelöljük a négy falut a négyzet körbejárásának sorrendjében A-val, B-vel, C-vel, D-vel, az AB, CD szakaszok felezőpontját E-vel, F-fel. Mérjünk fel az EF szakaszra E-ből is, F-ből is 3–3 km-t. A kapott pontokat jelöljük G-vel, H-val. Az AG, BG, GH, HC, HD szakaszokból álló útrendszeren bármelyik faluból bármelyik faluba eljuthatunk, és az útrendszer hossza km-ben:
$s = GH + 4AG = 4 + 4\sqrt{34}$, ez kisebb, mint 27,5 km.
A rendelkezésre álló pénz tehát elegendő.
1796. Az a oldalra merőleges magasság nem lehet nagyobb, mint b és c oldalak kisebbike. Tegyük fel hogy $m_a \le b$, így a háromszög t területére felső korlátot kapunk:

$$t = \frac{am_a}{2} \le \frac{ab}{2} \le \frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

A terület el is érheti az 1 felső korlátot, ha $a = 1$, $b = 2$, illetve $m_a = b$.
Ekkor a háromszög derékszögű, befogói a, b. Átfogója $c = \sqrt{5}$, mely kielégíti feltételeinket.

1797. Ismert összefüggés, hogy a súlyvonalak négyzetösszege megegyezik az oldalak négyzetösszegének $\frac{3}{4}$-vel. (koszinusztétellel bizonyítható).

Tehát $s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{4} \ge \frac{9}{4}\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2 = \frac{k^2}{4}$, ahol a, b, c az oldalak hosszát, s_a, s_b, s_c a súlyvonalak hosszát jelöli.
Az egyenlőtlenségnél a számtani és a négyzetes közepek közötti összefüggést használtuk fel. Emiatt az egyenlőség csak $a = b = c$ esetén áll fenn.
A megoldás tehát a szabályos háromszög.

1798. Legyenek x, y, z pozitív valós számok, melyekre

$x = b + c - a;$
$y = c + a - b;$
$z = a + b - c.$

Mivel

$x + y + z = a + b + c$, és $a = \frac{y+z}{2}$, $b = \frac{z+x}{2}$, $c = \frac{x+y}{2}$, így

$$S = \frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z},$$

$$2S = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y}.$$

Egy pozitív valós szám és reciprokának összege legalább 2, így S legalább 3. Vizsgáljuk az $a = b = c$ esetet! Ekkor S értéke pontosan 3, így S minimuma 3.

1799. Ha a levágott kis négyzetek egyenlő oldalhosszúságát x jelöli, akkor az így kapott doboz térfogata:

$$V_d = (a - 2x)^2 x, \text{ ahol } 0 \le x \le \frac{a}{2}.$$

Nyilván V_d ugyanarra az x értékre veszi fel maximumát, melyre négyszerese.
Így $4V_d = 4(a - 2x)^2 x$.
Alkalmazzuk a számtani és a mértani közepek közti összefüggést az alábbi nemnegatív számokra: $a - 2x$, $a - 2x$, $4x$.

Ekkor $\sqrt[3]{(4V_d)^3} = \sqrt[3]{(a - 2x)(a - 2x)4x} \le \frac{(a - 2x) + (a - 2x) + 4x}{3} = \frac{2a}{3}$.

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a - 2x = 4x$, azaz $x = \frac{a}{6}$.

Ekkor a maximális térfogat:

$$\max(V_d) = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{2}{27}a^3.$$

1800. Legyenek az egy csúcsba futó élek: x, y, z.
Alkalmazva x^2, y^2, z^2 számokra a számtani, illetve a mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2 \geq 2xy \\ y^2+x^2 \geq 2yz \\ z^2+x^2 \geq 2zy \end{array}\right\} \Rightarrow 2\left(x^2+y^2+z^2\right) \geq 2\left(xy+yz+xz\right) = A.$$

Tehát: $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq \sqrt{\dfrac{A}{2}}$, egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x^2=y^2=z^2$, vagyis mivel pozitív számokról van szó: $x=y=z$, azaz ha a téglatest kocka.
1801. Legyenek az egy csúcsból induló élek: x, y, z. Alkalmazzuk x-re, y-ra, z-re a négyzetes, illetve a mértani közepek közötti egyenlőtlenséget!

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \sqrt[3]{xyz} = \sqrt[3]{V}.$$

$x^2+y^2+z^2 \geq 3V^{\frac{2}{3}}$, az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x=y=z$, azaz kocka estén. Az $x^2+y^2+z^2$ kifejezés geometriai jelentése a téglatest testátló négyzetének vizsgálatával ekvivalens.