

## Exponenciális és logaritmusos egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

### Exponenciális egyenletek

#### IV

**1603.** a)  $x = 4$ ; b)  $x = 3$ ; c)  $x = 3$ ; d)  $x = 0$ ; e)  $x = 2$ ; f)  $x = 2$ ;  
g)  $x = \frac{4}{3}$ ; h)  $x = -\frac{1}{4}$ .

**1604.** a)  $x = \frac{7}{10}$ ; b)  $x = \frac{19}{36}$ ; c)  $x = \pm \frac{3}{2}$ ; d)  $x = \pm \frac{8}{3}$ ; e)  $x = 3$ ;  
f)  $x = 0$ .

**1605.** a)  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 2$ ; b)  $x = \frac{2}{3}$ ; c)  $x = -4$ ; d)  $x = -6$ ;  
e) nincs megoldás; f)  $x = 30$ .

**1606.** a) nincs megoldás; b)  $x = 3$ ; c)  $x = \frac{10}{3}$ ; d)  $x = \frac{11}{4}$ ; e)  $x = 0$ ;  
f)  $x = 0$ ; g)  $x = -\frac{3}{2}$ ; h)  $x = -4$ .

**1607.** a)  $x_1 = -7$ ,  $x_2 = 5$ ; b)  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = -7$ ; c)  $x = -\frac{4}{9}$ ;

d) nincs megoldás  $\left( x = \pm \frac{\sqrt{17}}{2} \right)$ ; e)  $x = -2$ ; f) nincs megoldás.

**1608.** a)  $x = -\frac{13}{6}$ ; b)  $x = -\frac{15}{2}$ ; c)  $x = \frac{3}{2}$ ; d) nincs megoldás;

e)  $x = -\frac{1}{2}$ ; f)  $x = 1$ .

**1609.** a)  $x = \frac{11}{3}$ ; b)  $x = 5$ ; c)  $x = -\frac{39}{2}$ ; d)  $x = 15$ ; e)  $x = 13$ ;

f)  $x = -\frac{3}{4}$ .

**1610.** a)  $x = \frac{23}{11}$ ; b)  $x = -\frac{111}{53}$ ; c)  $x = -\frac{41}{23}$ ; d)  $x = -\frac{15}{6}$ ;

e)  $x = 14$ ; f)  $x = -\frac{1}{3}$ .

**1611.** a)  $x = \frac{1}{3}$ ; b)  $x = -57$ ; c)  $x = \frac{89}{5}$ ; d)  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -3$ ;

e)  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -6$ ; f)  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -7$ .

**1612.** a)  $x = 1$ ; b)  $x = 1$ ; c)  $x = 2$ ; d)  $x = 0$ .

**1613.** a)  $x = \frac{1}{2}$ ; b)  $x = 5$ ; c)  $x = 0$ .

**1614.** a)  $x = 2$ ; b)  $x = 6$ ; c)  $x = \frac{5}{9}$ .

**1615.** a)  $x = 3$ ; b)  $x_1 = 2, x_2 = -3$ ; c)  $x_1 = 1, x_2 = -4$ .

**1616.** a)  $x_1 = 0, x_2 = 2$ ; b)  $x_1 = 0, x_2 = 1$ ; c)  $x_1 = 1, x_2 = \log_2 \frac{9}{4}$ .

**1617.** a) nincs megoldás; b)  $x = 2$ ; c)  $x = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$ ; d)  $x = 0$ .

**1618.** a)  $x = \frac{1}{5}$ ; b)  $x = 0$ ; c)  $x_1 = 2, x_2 = -2$ .

IV

## Exponenciális egyenletrendszerek

**1619.** a)  $x = 2, y = 1$ ; b)  $x = 1, y = \log_2 28$ .

**1620.** a)  $x = -2, y = 1$ ; b)  $x = 3, y = -1$ ; c)  $x = \frac{1}{2}, y = 1$ ;  
d)  $x = 3, y = -1$ .

**1621.** a)  $x = y = 0$ ; b)  $x = 1, y = \frac{1}{2}$ .

**1622.** a)  $x = 2, y = 3$ ; b)  $x_1 = -2, y_1 = 4, x_2 = \frac{3}{2}, y_2 = \frac{1}{2}$ ;  
c)  $x_1 = y_1 = 1, x_2 = 4, y_2 = -4$ .

**1623.** a)  $x = \frac{12}{7}$ ; b)  $x = \frac{3}{5}$ .

**1624.** a)  $x = \frac{12}{13}$ ; b)  $x = \frac{15}{8}$ .

**1625.** a)  $x = \frac{20}{7}$ ; b)  $x = \frac{pqr}{rq + rp + pq}$ .

## Exponenciális egyenlőtlenségek

**1626.** a)  $x > 3, x \geq 7, x \leq 2, x < 2$ ;

b)  $x \leq -1, x > -2, x > -2, x \geq -2$ ;

**1627.** a)  $x \leq 1, x > 2, x < 2, x > -2$ ;

b)  $x > \frac{5}{2}, x \leq -\frac{1}{4}, x \leq \frac{1}{4}, x \leq -\frac{4}{3}$ ;

c)  $x < 0, x < \frac{2}{3}, x \geq -\frac{7}{2}, x \geq 2$ ;

**1628.** a)  $x < -\frac{3}{2}$  vagy  $x > \frac{3}{2}$ ,  $x < -\frac{7}{2}$  vagy  $x > \frac{7}{2}$ ,  $x \leq -\frac{3}{4}$  vagy  $x \geq \frac{7}{4}$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ ;

b)  $x \leq 0$ ,  $x < 1$ ,  $x > -2$ ,  $x > \frac{1}{5}$ .

IV

**1629.** a)  $x > 5$ ,  $-\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$ ,  $15 \leq x < 16$ ;

b)  $0 < x < 2$ ,  $x < 3$  vagy  $x > 5$ ,  $x < 2$ .

Pihenő

**1630.** A számjegyek szorzata 0, összege 9, tehát az összeg a nagyobb.

	<sup>1</sup> 2	<sup>2</sup> 1	<b>1630.</b>
<sup>3</sup> 0		2	
<sup>4</sup> 1	2	1	

**1631.** A keresztrejtvényben 9 db prímszám szerepel.

	<sup>1</sup> 3	<sup>2</sup> 5	<sup>3</sup> 7	<b>1631.</b>
		<sup>4</sup> 3	7	
<sup>5</sup> 1	<sup>6</sup> 3		7	
<sup>7</sup> 3	2	1	6	

Logaritmusos egyenletek

**1632.** a)  $x = 2$ ,  $x = \frac{1}{3}$ ,  $x = \frac{1}{8}$ ,  $x = \pm 1$ ;

b)  $x = 0$ ,  $x = -45$ ,  $x = 2$ .

**1633.** a)  $x = \frac{14}{9}$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pm 8$ ;

b)  $x = 0$ ,  $x = \frac{51}{5}$ ,  $x = \pm 5$ .

**1634.** a)  $x = 2$ ; b)  $x = 18$ ; c)  $x = \frac{7}{2}$ ; d) nincs megoldás.

**1635.** a)  $x = -\frac{1}{5}$ , b)  $x_1 = -5$ ,  $x_2 = 7$ ; c)  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 5$ ; d)  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ .

**1636.** a)  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 7$ ; b) nincs megoldás.

**1637.** a)  $x = 4$ ; b)  $x = -1$ .

**1638.** a)  $x = 2$ ; b)  $x = \frac{1}{3}$ .

**1639.**  $x = 9$ ,  $x = 5$ .

**1640.** a)  $x = \frac{1}{32}$ ,  $x = 128$ ; b)  $x = 6$ ,  $x = 8$ .

**1641.** a)  $x = 3$ ; b)  $x = 4$ ; c)  $x = -1$ .

**1642.** a)  $x = 2$ ; b)  $x = 8$ .

**1643.** a)  $x = 14$ ; b)  $x = 1$ .

IV

*Pihenő*

**1644.** A helyesen kitöltött keresztrejtvény:

	<sup>1</sup>	3	
<sup>2</sup>	5	7	
<sup>3</sup>	2	5	6

**1644.**

Tehát a megoldandó egyenlet:

$$\log_7 x + \log_{28} 28 = 2, \text{ ahonnan } x = 7.$$

**1645.** A helyesen kitöltött keresztrejtvény:

	<sup>1</sup>	2	7
<sup>2</sup>	1	4	
<sup>3</sup>	3	5	2

**1645.**

A  $\log_{24} x + \log_{24} 2 + \log_{24} 4 = 1$  egyenlet megoldása:  $x = 3$ .

**1646.** a)  $x = 4$ ,  $x = \frac{27}{2}$ ; b)  $x = 81$ ,  $x = 5$ ; c)  $x = \frac{9}{5}$ ,  $x = 100$ .

**1647.** a)  $x = \frac{5}{2}$ ,  $x = 3$ ; b)  $x = 13$ ,  $x = 8$ .

**1648.** a)  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 3 + \sqrt{2}$ ; b)  $x = \frac{5}{8}$ .

**1649.** nincs megoldás.

**1650.** a)  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 5$ ; b)  $x = 18$ ; c)  $x = 9$ .

**1651.** a)  $x = 10$ ; b)  $x = 2$ .

**1652.**  $x = -1$ .

**1653.** a)  $x = -17$ ; b)  $x = 2\sqrt{2}$ .

**1654.**  $x = 2$ .

**1655.** a)  $x = \frac{5}{3}$ ; b)  $x = 2$ ; c)  $x = \frac{1}{10}$ .

**1656.** a)  $x_1 = 10$ ,  $x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ; b)  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ .

## IV

**1657.**  $x = \frac{13}{4}$ .

**1658.** a)  $x = \pm \frac{1}{10^4}$ ,  $x_2 = \pm \sqrt{10^5}$ ; b)  $x = 1$ ; c)  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = \frac{1}{4}$ ;

d)  $x_1 = 27$ ,  $x_2 = \frac{1}{9}$ .

**1659.** a)  $x = \log_7 5$ ; b)  $x = 2$ ; c)  $x_1 = \frac{3}{5}$ ,  $x_2 = \frac{3}{7}$ .

**1660.** a)  $x = -2$ ; b) nincs megoldás.

**1661.** a) Vezessük be a  $\log_2^2 x - 3 \log_2 x = a$  új ismeretlent;  $x_1 = 16$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ ,  $x_3 = 4$ ,  $x_4 = 2$ ; b)  $x = 5$ .

**1662.** a)  $x = 3$ ; b)  $x = 16$ ; c) Vezessük be a  $\sqrt{\log_2 x \log_2 x} = a$  új ismeretlent;  $x = 16$ .

## Pihenő

**1663.** A helyesen kitöltött keresztrejtvény:

<sup>1</sup> 9	9	
3		<sup>2</sup> 1
<sup>3</sup> 1	2	5

**1663.**

Ezek szerint a  $\log_{30}(x^2 + x - 60) = 1$  egyenletet kell megoldanunk. Az egyenlet megoldása:

$x_1 = -10$ ,  $x_2 = 9$ .

**1664.** A helyesen kitöltött keresztrejtvény:

	<sup>1</sup> 9	<sup>2</sup> 6	<sup>3</sup> 1
<sup>4</sup> 9		<sup>5</sup> 1	5
<sup>6</sup> 6	<sup>7</sup> 1		1
<sup>8</sup> 1	2	4	8

**1664.**

**1665.** a)  $x = 16$ ,  $x = 27$ ,  $x > 0$ ; b)  $x = 5$ ,  $x = \sqrt[3]{9} - 1$ ; c)  $x = 16$ ,  $x = 25$ .

**1666.** a)  $x = \frac{1}{2}$ ; b)  $x = \frac{1}{\sqrt[5]{7^6}}$ ; c)  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = \frac{1}{9}$ .

**1667.** a)  $x = a^2$ ;

b) Írjuk át az összes tagot 2-es alpra, majd vezessük be a  $\log_2 x = a$  új ismeretlent. Ekkor a

$$\frac{3}{a} - \frac{4}{1+a} = \frac{3}{2+a}$$

egyenlethez jutunk, ahonnan  $a_1 = -\frac{3}{2}$ ,  $a_2 = 1$ ; ezzel az eredeti egyenlet megoldásai:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{8}};$$

c) A bal oldal második tényezőjét írjuk át 19-es alpra.  $x = 5$ .

**1668.** a) A bal oldal második tényezőjét írjuk át  $x$  alpra, majd alkalmazzuk a logaritmus megfelelő azonosságait. Kapjuk:

$$\sqrt{1 + \log_x 6} \cdot \frac{1}{\log_x 6} = \sqrt{2}, \quad \text{ahonnan } 2 \log_x^2 6 - \log_x 6 - 1 = 0 \Rightarrow x = 6.$$

b) Térjünk át a bal oldalon minden tagban 5-ös alpra, majd vezessük be a  $\log_5 x = a$  új ismeretlent. Kapjuk:

$$\frac{6}{a} + \frac{3}{2+a} + \frac{1}{1+a} = 0, \quad \text{ahonnan } a_1 = -\frac{3}{2}, \quad a_2 = -\frac{4}{5}.$$

Ezzel az eredeti egyenlet megoldásai:  $x_1 = \frac{1}{\sqrt{125}}$ ,  $x_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{625}}$ .

c) A bal oldal értéke 1. Így a következő egyenlethez jutunk:

$$\log_5^2 x + 2 \log_5 x + 1 = 0, \quad \text{ahonnan } x = \frac{1}{5}.$$

**1669.** a) Először írjuk át a jobb oldalt 2-es alpra, majd emeljük négyzetre mindkét oldalt:

$$\log_4^2 x = \log_2 x = \log_4 x^2 = 2 \log_4 x, \quad \text{innen } x = 16.$$

b) Járjunk el ugyanúgy, mint az előző feladatban.  $x = a^4$ .

c) Írjunk át a bal oldalon minden tagot  $x$  alpra, majd vezessük be az  $\log_x a = y$  új ismeretlent:

$$y^2 + \frac{1}{y^2} + 2 \left( y + \frac{1}{y} \right) + \frac{3}{4} = 0.$$

Ha most  $y + \frac{1}{y} = b$ , akkor  $y^2 + \frac{1}{y^2} = b^2 - 2$ , tehát kapjuk:  
 $4b^2 + 8b - 5 = 0$ , azaz  
 $b = y + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$  vagy  $b = y + \frac{1}{y} = -\frac{5}{2}$ .

## IV

Első esetben nem kapunk megoldást, a második esetben  $y_1 = -\frac{1}{2}$ ,  
 $y_2 = -2$ . Az eredeti egyenlet megoldásai:  $x_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}$ ,  $x_2 = \frac{1}{a^2}$ .

- 1670.** a) Írjunk minden tényezőt azonos (pl. 2-es) alpra.  $x = 8$ .  
 b) A bal oldal első két tagjában 2-es alpra áttérve ezt kapjuk:  
 $(1 - 5^{x-3}) \cdot \log_2(x^2 + 2x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = \sqrt{5} - 1$ .  
 c) Mindkét négyzetgyök alatt teljes négyzet szerepel. Bevezetve a  $\log_2 x = a$  új ismeretlent, ezt kapjuk:  
 $|a - 1| + |a + 1| = 2$ , ahonnan  $-1 \leq a \leq 1$ , tehát  $\frac{1}{2} \leq x \leq 2, x \neq 1$ .
- 1671.** a) A négyzetgyök alatt teljes négyzet szerepel. Bevezetve a  $\log_3 x = a$  új ismeretlent, ezt kapjuk:  
 $|3a - 1| = 2a$ , ahonnan  $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{5}$ , tehát  $x_1 = 3, x_2 = \sqrt[5]{3}$ .  
 b) A bal oldal második tényezőjét írjuk át  $|x - 4|$ -es alpra.  $x = -2$ .  
 c) Hasonlóan járjunk el, mint az előző feladatban.  $x = 10$ .
- 1672.** a) A bal oldal mindkét tagját írjuk át 2-es alpra.  $x_1 = -1, x_2 = -4$ .  
 b) Az első tag második tényezőjét írjuk át  $x$  alpra, majd vezessük be a  $\log_x a = b$  új ismeretlent. Kapjuk:  $24b^2 - 2b - 1 = 0$ . Innen  $x = \frac{1}{a^6}$ .
- 1673.** a) Vegyük észre, hogy  $(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 1$ . Így, ha  
 $\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x = a$ , akkor  
 $a - \frac{1}{a} = \sqrt{32}$ , ahonnan  $a_1 = 2\sqrt{2} - 3, a_2 = 2\sqrt{2} + 3$ .  
 A negatív gyök nem lehetséges, így  $x = 2$ .  
 b) Mivel  $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$ , ezért az egyenlet  $a + \frac{1}{a} = 4$  alakban írható. Innen  
 $a_1 = 2 + \sqrt{3}, a_2 = 2 - \sqrt{3}$ , tehát  $x_1 = 2, x_2 = -2$ .

**1674.** a) A bal oldal minden tagjában térjünk át 10-es alpra. Ezzel egyenletünk így írható:

$$\lg \frac{3^{\frac{x}{2}} \cdot \left(2^x + 3^{\frac{x}{2}}\right)}{21} = \frac{x-2}{\log_4 2 + \log_4 5}, \text{ azaz } \lg \frac{3^{\frac{x}{2}} \cdot 2^x + 3^x}{21} = \lg 4^{x-2}.$$

Innen  $16 \cdot 3^{\frac{x}{2}} \cdot 2^x + 16 \cdot 3^x = 21 \cdot 2^{2x}$ . Mindkét oldalt  $3^{\frac{x}{2}} \cdot 2^x$ -nel elosztva  $16b^2 + 16b - 21 = 0$  alakú egyenlethez jutunk. Innen  $b_1 = -\frac{7}{4}$ ,

$b_2 = \frac{3}{4}$ . A negatív gyök nem jöhet számításba, így kapjuk:  $x = 2$ .

b)  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 100$ .

**1675.** A jobb oldali négyzetgyök alatt  $-(3 \cdot 3^y - 1)^2$  szerepel, így az egyenletnek csak akkor van értelme, ha  $y = -1$ . Ezt az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve  $x = 1$  adódik.

IV

### Logaritmus egyenlőtlenségek

**1676.** a)  $0 < x < 2$ ,  $x > \sqrt{3}$ ,  $0 < x \leq \frac{1}{5}$ ; b)  $2 < x < 3$ ,  $x > -2$ ,  $x \geq \frac{5}{2}$ .

**1677.** a)  $4,5 < x < 5$ ,  $x > \frac{11}{4}$ ,  $x \geq \frac{3}{2}$ ;

b)  $4 < |x| < \sqrt{17}$ ,  $|x| > \sqrt{3}$ ,  $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x < 0$  vagy  $1 < x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

**1678.** a) nincs megoldás,  $x < \frac{-1-5\sqrt{5}}{2}$  vagy  $x > \frac{-1+5\sqrt{5}}{2}$ ,

$1 < |x| < 2$ ;

b)  $\frac{1}{2} < x$ ,  $x \neq 1$ ,  $x > 3$ ,  $\frac{1}{2} < x < 1$ .

**1679.** a) nincs megoldás,  $x < 5 - \sqrt{26}$ ,  $-3 < x < -2$  vagy  $\frac{3}{2} \leq x < 6$ ;

b)  $3 < x < \frac{1+\sqrt{29}}{2}$ ,  $x > 5$ .

**1680.** a)  $\frac{1}{3} \leq x < 1$  vagy  $x \geq 3$ ,  $x > \frac{19}{7}$ ; b)  $\frac{1}{3} < x < 1$ ,  $x < -2$ .

**1681.** a)  $1 \leq x < 2$  vagy  $x \geq 4$ ,  $-2 < x < 5 - \sqrt{29}$  vagy  $x > 5 + \sqrt{29}$ ;

b)  $-1 + \sqrt{3} < x < 2$ ;

c)  $-1 < \log_2(x-4) < 1$ , ahonnan  $4,5 < x < 6$ .



## IV

**1682.** a)  $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) \geq 2$  vagy  $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) \leq -2$ , ahonnan  
 $-2 < x \leq -\frac{17}{9}$  vagy  $x \geq 7$ ; b)  $-2 \leq x < -1$  vagy  $4 < x \leq 6$ .

**1683.** a)  $3 \leq x \leq 4,5$ ; b)  $\frac{1}{2} < |x| \leq \frac{4}{5}$ .

**1684.** a) Először a jobb oldalt írjuk át 2-es alapra, ezt kapjuk:

$$\log_4 x \leq \sqrt{\log_2 x} = \sqrt{2 \log_4 x}, \Rightarrow \log_4^2 x \leq 2 \log_4 x.$$

Mivel  $\log_4 x > 0$ , így  $1 < x \leq 16$ .

b) Az értelmezési tartomány ( $x < -2$  vagy  $x > 4$ ) miatt a logaritmus alapja minden szóba jöhető  $x$ -re kisebb, mint 1. Az egyenlőtlenség megoldása:

$$1 - \sqrt{10} \leq x < -2 \text{ vagy } 4 < x \leq 1 + \sqrt{10}.$$

**1685.** a)  $x < 1$  vagy  $x > \frac{3}{2}$ ; b)  $2 < x \leq \frac{65}{32}$ .

**1686.** Először hozzuk az egyenlőtlenséget az alábbi alakra:

$$\left(1 + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\right)(x - \sqrt{x}) \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq \sqrt{2}.$$

## Exponenciális és logaritmikus egyenletrendszerek

**1687.** a)  $x = 1, y = 2$ ; b)  $x = 1, y = 0$ .

**1688.** a)  $x = 1, y = 2$ ; b)  $x = 100, y = 10$ .

**1689.** a)  $x = 10, y = \frac{1}{10}$ ; c) nincs megoldás.

**1690.** a)  $x = 1, y = 8$ ; b)  $x = 7, y = 3$ .

**1691.** a)  $x = 13, y = 11$ ; b)  $x = 5, y = 1$ .

**1692.** a)  $x = 2, y = 6$ ; b)  $x = 4, y = 9$ ;

c) térjünk át mindkét egyenletben a bal oldalon 2-es alapú logaritmusra:

$$x = 64, y = 8.$$

**1693.** a) A második egyenletből  $x = \frac{1}{y^2}$ . Ezt az első egyenletbe helyettesítve

kapjuk:

$$x = 4, y = \frac{1}{2}.$$

b) Az első egyenletből – a logaritmus definícióját felhasználva:

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{7}{4}, \text{ ahonnan } x = \frac{11}{3}y. \text{ Ezt felhasználva a második egyenlet-}$$

ben, azt kapjuk, hogy:  $x = 11, y = 3$ .

c) Az első egyenletből:  $x^2 + \sqrt{x^2 - y + 3} = y + 9$ , amit így is írhatunk:  
 $x^2 - y + 3 + \sqrt{x^2 - y + 3} = 12$ . Bevezetve a  $\sqrt{x^2 - y + 3} = a \geq 0$  új ismeretlent, azt kapjuk, hogy:  $x^2 - y - 6 = 0$ . Ezt és a második egyenletet felhasználva:  $x = 4$ ,  $y = 10$ .

**1694.** a) A második egyenletből:  $xy - x^2 = x^2 - y^2$ , azaz  $(x - y)(2x + y) = 0$ . Mivel  $x$  és  $y$  pozitív, ezért csak  $x = y$  lehetséges. Ezt az első egyenletbe helyettesítve, kapjuk:  $x = y = \sqrt[3]{49}$ .

b) Az első egyenletből  $x = 2y$ . Ezt a második egyenletbe helyettesítve:

$$x_1 = -2, \quad y_1 = -1, \quad x_2 = \frac{5}{4}, \quad y_2 = \frac{5}{8}.$$

c) Mivel  $\log_2^2 x^2 = (2 \log_2 x)^2 = 4 \log_2^2 x$ , ezért az első egyenlet bal oldala így írható:

$$4 \log_2^2 x - 4 \log_3 y + 32 - \sqrt{\log_2^2 x - \log_3 y + 8} = 60.$$

Most vezessük be a  $\sqrt{\log_2^2 x - \log_3 y + 8} = a \geq 0$  új ismeretlent, akkor  $4a^2 - a - 60 = 0$ , innen pedig  $\log_2^2 x - \log_3 y - 8 = 0$ . A második egyenletben vegyük mindkét oldal 3-as alapú logaritmusát:

$$\log_2 x = 3 \log_3 y. \text{ Ezt felhasználva: } x_1 = 8, \quad y_1 = 3, \quad x_2 = 2^{-\frac{8}{3}}, \quad y_2 = 3^{-\frac{8}{9}}.$$

**1695.** a) Az első egyenletből:  $x = 3y$ . Ezt a második egyenletben felhasználva:  $x = 1503$ ,  $y = 501$ .

b) Az első egyenletből:  $x + 2 = (x + y)^2 - y$ , azaz

$$(x + y)^2 - (x + y) - 2 = 0. \text{ Ebből az } x + y \text{-ban másodfokú egyenletből: } x + y = 2. \text{ Ezt felhasználva a második egyenletben:}$$

$$x = 3, \quad y = -1.$$

### Pihenő

**1696.** Vízsz. 1.:  $256 + 25 = 281$ . Függ. 2.:  $x_1 = 18$ ,  $x_2 = 4$ .

A helyesen kitöltött keresztrejtvény:

<sup>1</sup> 2	8	<sup>2</sup> 1
8		8
	<sup>3</sup> 1	4

**1696.**

A megoldandó egyenlet:  $\log_{32}(2x - 6) = \frac{1}{5}$ .

$$x = 4.$$

**1697.** Vízs. 3.:  $2 \cdot \frac{8!}{5!} = 672$ . Függ. 1.: 16. Függ. 2.: 12, 5.

A helyesen kitöltött keresztrejtvény:

<sup>1</sup> 1		<sup>2</sup> 1
<sup>3</sup> 6	<sup>4</sup> 7	2
	<sup>5</sup> 1	5

**1697.**

A számjegyek szorzata:  $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ . A legkisebb szám, amellyel ezt meg kell szoroznunk, hogy négyzetszámot kapjunk:  $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ .

IV

**1698.** Vízs. 1.: 122. Függ. 2.: 2, 31.

A helyesen kitöltött keresztrejtvény:

	<sup>1</sup> 1	<sup>2</sup> 2	<sup>3</sup> 2
<sup>4</sup> 6		<sup>5</sup> 3	2
<sup>6</sup> 4	4	1	

**1698.**

$$25^{\log_{25} 8} = 8^{\frac{2}{3}} = 4.$$

**1699.** Vízs. 1.: 3125. Vízs. 9.: 5, 6, 7. Függ. 3.:  $64 \cdot 4 + 30 = 286$ . Függ. 8.: 3, 5.  
A helyesen kitöltött keresztrejtvény:

		<sup>1</sup> 3	<sup>2</sup> 1	<sup>3</sup> 2	<sup>4</sup> 5
<sup>5</sup> 6		<sup>6</sup> 3	4	8	1
<sup>7</sup> 5	<sup>8</sup> 3		<sup>9</sup> 5	6	7
<sup>10</sup> 4	5	5	4		1
3			<sup>11</sup> 3	<sup>12</sup> 5	1
<sup>13</sup> 2	6	4	3	9	

**1699.**

A számjegyek összege:

$$114 = 2 \cdot 3 \cdot 19.$$

Tehát a keresett szám:

$$114 \cdot 18 - 2(2 + 3 + 19) = 2004.$$

Nehezebb feladatok a témakörből

**1700.**  $x > 1$ . A feltételek szerint

$$\frac{\log_p x + \log_p(\log_{p^2} x)}{2} = \log_{p^2} x \Rightarrow \log_p(x \cdot \log_{p^2} x) = \log_{p^2} x^2 = \log_p x,$$

$$\log_{p^2} x = 1, \text{ ahonnan } x = p^2.$$

**1701.** A feltételekből

$$\log_x 3 = \frac{1}{a}, \quad \log_x 4 = \frac{1}{b}, \quad \log_x 167 = \frac{1}{c}.$$

E három egyenlőséget összeadva

$$\log_x 3 \cdot 4 \cdot 167 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc},$$

$$\text{ahonnan } \log_{2004} x = \frac{abc}{bc + ac + ab}.$$

**1702.**  $a > 1$ ,  $a \neq 2$ . Ha  $a > 2$ , akkor a logaritmus alapja 1-nél nagyobb, tehát

$$x^2 + 3 \geq a - 1, \quad \text{azaz } x^2 + 4 - a \geq 0.$$

Ez utóbbi akkor teljesül minden  $x$ -re, ha  $4 - a \geq 0$ , tehát  $2 < a \leq 4$ .

Ha  $1 < a < 2$ , akkor

$$x^2 + 3 \leq a - 1.$$

Ez azonban semmilyen  $a$ -ra nem teljesül minden  $x$ -re.

**1703.**  $\sin x > 0$ ,  $\sin x \neq 1$ ,  $\cos x > 0$ ,  $\cos x \neq 1$ .

$$\log_{\cos x} \sin x + \frac{4}{\log_{\cos x} \sin x} = 4.$$

Bevezetve a  $\log_{\cos x} \sin x = a$  új ismeretlent:

$$a^2 - 4a + 4 = 0, \quad \Rightarrow \quad a = \log_{\cos x} \sin x = 2, \quad \text{ahonnan } \cos^2 x = \sin x,$$

$$1 - \sin^2 x = \sin x \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \Rightarrow \quad x \approx 0,6662 + 2k\pi. \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

**1704.** A megadott egyenlőség így írható:

$$\frac{1}{2} \cdot \log_{13} a + \frac{1}{2} \cdot \log_{13} b + \frac{1}{2} \cdot \log_{13} c = 1, \quad \text{azaz } \log_{13} abc = 2.$$

Tehát a téglatest térfogata:  $V = 169$ . Mivel  $a$ ,  $b$  és  $c$  pozitív egészek és  $a \neq 1$ , ezért vagy  $a = 13$ , továbbá  $b$  és  $c$  egyike 1, a másik 13. Ekkor a felszín:

$$A = 2(13 + 13 + 169) = 390.$$

Így a keresett arány:  $\frac{A}{V} = \frac{390}{169} = \frac{30}{13}$ , vagy pedig  $a = 169$ ,  $b = c = 1$ . Ez eset-

ben a keresett arány  $\frac{A}{V} = \frac{678}{169}$ .

**1705.** Mivel  $25^{\log_5 \sqrt{2}} = 2$ , ezért szükséges, hogy

$$\sin x > 0, \quad \sin x \neq 1, \quad \text{és} \quad \sin x > \frac{1}{2}.$$

$$\text{Mindezekből} \quad \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \text{és} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Mivel a logaritmus alapja kisebb, mint 1, ezért azt kapjuk, hogy

**IV**

$$2 + 2 \log_2 \sin x \geq 1, \quad \text{ahonnan} \quad \sin x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Az eredeti egyenlőtlenség megoldása:} \quad \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + 2k\pi,$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi. \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

**1706.** Az egyenlőtlenségnek csak akkor van értelme, ha

$$\sin x > 0, \quad \text{tg } x > 0 \quad \text{és} \quad \sin x + \frac{1}{\sin x} \neq 1.$$

Mivel egy pozitív számnak és reciprokának összege legalább 2, így az egyen-

$$\text{lőtlenség értelmezési tartománya:} \quad 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi. \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Az egyenlőtlenség így alakul:

$$\text{tg } x + \frac{1}{\text{tg } x} < \sin x + \frac{1}{\sin x}, \quad \text{ahonnan} \quad \cos^2 x + \cos x - 1 > 0.$$

$$\text{Innen – a feltételeket figyelembe véve –:} \quad \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < \cos x < 1, \quad \text{amiből}$$

$$-51,82^\circ + k \cdot 360^\circ < x < 51,82^\circ + k \cdot 360^\circ.$$

**1707.**  $\log_2^2 x = (\log_4 x^2)^2 = 4 \log_4^2 x$ . Ezért az eredeti egyenlet így írható:

$$4 \log_4^2 x - 20 \log_4 x + 29 = \frac{11}{\log_4^2 x - 5 \log_4 x + 9},$$

$$4(\log_4^2 x - 5 \log_4 x + 9) - 7 = \frac{11}{\log_4^2 x - 5 \log_4 x + 9}.$$

Most vezessük be a  $\log_4^2 x - 5 \log_4 x + 9 = a \neq 0$  új ismeretlent, azt kapjuk, hogy

$$4a^2 - 7a - 11 = 0, \quad \text{ahonnan} \quad a_1 = \frac{11}{4}, \quad a_2 = -1.$$

Az  $a = -1$  esetben a  $\log_4 x$ -re adódó másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, míg a másik esetben azt kapjuk, hogy:

$$4 \log_4^2 x - 20 \log_4 x + 25 = (2 \log_4 x - 5)^2 = 0, \quad \text{ahonnan} \quad x = 32.$$

**1708.** Az alábbi feltételeknek kell teljesülniük:

a)  $x^2 - 1 > 0$ ;

b)  $-x^2 + 2x + 15 > 0$ ;

c)  $-\log_3^2(x^2 - 1) + 3\log_3(x^2 - 1) + 4 \geq 0$ .

Az a) esetben  $|x| > 1$ . A b) esetben a másodfokú alak zérushelyei:  $-3$  és  $5$ , tehát

$-3 < x < 5$ . A c) esetben a  $\log_3(x^2 - 1)$ -ben másodfokú alak zérushelyei:  $-1$ , és  $4$ , tehát

$$\log_3 \frac{1}{3} \leq \log_3(x^2 - 1) \leq \log_3 81, \quad \text{ahonnan} \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \leq |x| \leq \sqrt{82}.$$

Az összes feltételt figyelembe véve az eredeti kifejezés értelmezési tartománya:

$$-3 < x \leq -\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{vagy} \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \leq x < 5.$$

**1709.**  $x > 0$ . Mindkét esetben a  $4y^2 - 37y + 9 \geq 0$  másodfokú egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Mivel a másodfokú kifejezés zérushelyei:  $\frac{1}{4}$  és  $9$ , ezért

a) esetben

$$\log_2 x \leq \frac{1}{4} \quad \text{vagy} \quad \log_2 x \geq 9, \quad \text{ahonnan}$$

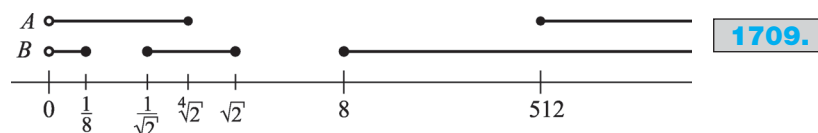
$$0 < x \leq \sqrt[4]{2} \quad \text{vagy} \quad x \geq 512.$$

A b) esetben  $\log_2^2 x \leq \frac{1}{4}$  vagy  $\log_2^2 x \geq 9$ , azaz

$$-\frac{1}{2} \leq \log_2 x \leq \frac{1}{2}, \quad \text{vagy} \quad \log_2 x \leq -3, \quad \text{vagy} \quad \log_2 x \geq 3, \quad \text{ahonnan}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \sqrt{2}, \quad \text{vagy} \quad 0 < x \leq \frac{1}{8}, \quad \text{vagy} \quad x \geq 8.$$

Ábrázoljuk mindkét halmazt egy számegyenesen:



A  $B \cap A$  halmaz elemei:  $\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq \sqrt{2}$  vagy  $8 \leq x < 512$ .

**1710.** Az egyenlőtlenségnek akkor van értelme, ha  $x > 1$ . A négyzetgyök alatti kifejezés:  $(3\log_3 x - 1)^2$ , tehát a megoldandó egyenlőtlenséggláncolat:

$$\log_3 x \leq |3\log_3 x - 1| \leq 2\log_3 x.$$

## IV

Ha  $\log_3 x \geq \frac{1}{3}$ , akkor

$$\log_3 x \leq 3 \log_3 x - 1 \leq 2 \log_3 x,$$

ahonnan  $\frac{1}{2} \leq \log_3 x \leq 1$ , tehát ez esetben  $\sqrt{3} \leq x \leq 3$ .

Ha  $0 < \log_3 x < \frac{1}{3}$ , akkor

$$\log_3 x \leq -3 \log_3 x + 1 \leq 2 \log_3 x,$$

ahonnan  $\frac{1}{5} \leq \log_3 x \leq \frac{1}{4}$ , tehát ekkor  $\sqrt[5]{3} \leq x \leq \sqrt[4]{3}$ .

Az eredeti egyenlőtlenség megoldása:

$$\sqrt{3} \leq x \leq 3 \quad \text{vagy} \quad \sqrt[5]{3} \leq x \leq \sqrt[4]{3}.$$

**1711.** Az *a)* kifejezés hatványkitevőjében szereplő másodfokú kifejezésnek  $x = 3$ -ban van maximuma, így

$$0 < \log_2(-x^2 + 6x + 55) = \log_2 64 = 6.$$

Tehát

$$\log_{\sqrt{6}} \log_2(-x^2 + 6x + 55) \leq \log_{\sqrt{6}} 6 = 2,$$

vagyis

$$5^{\log_{\sqrt{6}} \log_2(-x^2 + 6x + 55)} \leq 5^2 = 25.$$

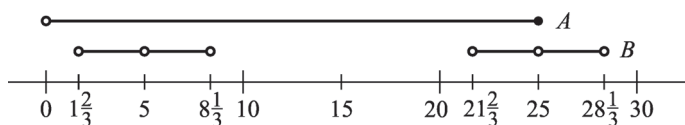
Az *A* halmaz elemei:  $0 < a \leq 25$ .

*A b)* esetben

$$2 \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) > 1 \quad \text{és} \quad 2 \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) \neq 2,$$

ahonnan a *B* halmaz elemei:  $1\frac{2}{3} + 20k < x < 8\frac{1}{3} + 20k$  és  $x \neq 5 + 20k$ .

Ábrázoljuk egy számgegyenesen a kapott eredményeket:



**1711.**

Az  $A - B$  halmaz  $y$  elemei:

$$0 < y \leq 1\frac{2}{3}, \quad y = 5, \quad 8\frac{1}{3} \leq y \leq 21\frac{2}{3}, \quad y = 25.$$

**1712.** Az egyenlőtlenség minden tagja így alakítható:

$$\log_x xyz^9 = 1 + \log_x y + 9 \log_x z, \quad \text{tehát}$$

$$\log_x y + \log_y z + \log_z x + 9 \log_x z + 9 \log_y x + 9 \log_z y > 18.$$

De

$$\log_x y + 9 \log_y x = 3 \left( \frac{\log_x y}{3} + \frac{3}{\log_x y} \right) \geq 3 \cdot 2 = 6.$$

Így már csak azt kell belátnunk, hogy

$$\frac{\log_x y}{3} = \frac{\log_y z}{3} = \frac{\log_z x}{3} = 1$$

nem lehetséges. Ugyanis ellenkező esetben arra jutnánk, hogy  $x = y = z = 0$  vagy  $x = y = z = 1$ , ami nyilván lehetetlen.

**1713.**  $x \neq 0$ . Térjünk át a bal oldalon  $a$  alapra; azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\log_a a^2}{\log_a \frac{1}{a^x}} + \frac{\log_a a^x}{\log_a a^2} > x + \frac{a^2 + 1}{a}, \quad \text{vagyis} \quad -\frac{2}{x} + \frac{x}{2} > x + \frac{a^2 + 1}{a}.$$

Innen, ha  $x > 0$ , akkor

$$ax^2 + 2x(a^2 + 1) + 4a < 0.$$

E másodfokú kifejezés zérushelyei:  $-2a$  és  $-\frac{2}{a}$ . Mivel a feltételek szerint  $a > 1$ , ezért ebben az esetben nem kapunk megoldást.

Ha  $x < 0$ , akkor  $x < -2a$  vagy  $x > -\frac{2}{a}$ .

Tehát az eredeti egyenlőtlenség megoldása:

$$x < -2a \quad \text{vagy} \quad -\frac{2}{a} < x < 0.$$

**1714.** Legyen  $\log_2 7 = a$  és vizsgáljuk a

$$12 < a^2 + \frac{36}{a^2} < 13$$

egyenlőtlenségláncolatot.

Egyik irányban  $a^4 - 12a^2 + 36 > 0$ , azaz  $(a^2 - 6)^2 > 0$ . Ez utóbbi minden  $a$ -ra teljesül, csak azt kell megmutatnunk, hogy  $\log_2^2 7 \neq 6$ , azaz  $2^{\sqrt{6}} \neq 7$ . Ez azonban igaz, hiszen

$$2^{\sqrt{6}} < 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{32} < 7.$$



Másik irányban

$$a^4 - 13a^2 + 36 < 0, \text{ ahonnan } 4 < a^2 < 9, \text{ vagyis } 2 < a < 3.$$

Mivel  $2 < \log_2 7 < 3$ , ezért ez az egyenlőtlenség is igaz.

**1715.** A megadott egyenes az  $x$  tengelyt ott metszi, ahol  $y = 0$ , az  $y$  tengelyt, ahol  $x = 0$ . E metszéspontok:

$$x = \frac{9}{\log_3 a}, \quad y = \frac{9}{\log_3 a^{-2}}.$$

**IV**

Az egyenes és a tengelyek alkotta háromszög területe:

$$\left| \frac{9}{\log_3 a} \right| \cdot \left| \frac{9}{\log_3 a^{-2}} \right| \cdot \frac{1}{2} = \frac{81}{16}, \text{ ahonnan } \log_3 a = \pm 2,$$

tehát

$$a = 9 \quad \text{vagy} \quad a = \frac{1}{9}.$$

Első esetben az egyenes egyenlete:  $2x - 4y = 9$ , a tengelymetszetek:  $x = \frac{9}{2}$ ,

$$y = -\frac{9}{4}.$$

A másik esetben az egyenes egyenlete:  $-2x + 4y = 9$ , a tengelymetszetek:

$$x = -\frac{9}{2}, \quad y = \frac{9}{4}.$$

Tehát két egybevágó derékszögű háromszögről van szó. Ezek átfogója:

$$\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{9}{4} \cdot \sqrt{5}.$$

A háromszög  $K$  kerülete:  $K = \frac{9}{4} \cdot (3 + \sqrt{5})$ .

**1716.** Vizsgáljuk az egyenlet két oldalának lehetséges értékeit. A jobb oldal:

$$-y^2 + 6y - 5 = -(y - 3)^2 + 4,$$

tehát a jobb oldal értéke legfeljebb 4, és pontosan akkor 4, ha  $y = 3$ .

A bal oldalon:

$$\frac{2 \sin^2 x (1 + \operatorname{ctg}^2 x)}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

E tört értéke legalább 2, és pontosan akkor 2, ha  $\sin 2x = 1$ . Ezek szerint a bal oldal értéke legalább  $\log_{\sqrt[4]{2}} 2 = 4$ . Ezek szerint az egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha

$$y = 3 \quad \text{és} \quad \sin 2x = 1, \text{ ahonnan } x = \frac{\pi}{4} + k\pi. \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

**1717.** Az egyenlet bal oldala:

$$2 + 3 \log_x y + 2 + 3 \log_y x = 4 + 3 \cdot \left( \log_x y + \frac{1}{\log_x y} \right) \geq 10.$$

A jobb oldal:

$$\log_{\sqrt[3]{2}} \left[ -(z-4)^2 + 4 \right] \leq 10.$$

Tehát az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha  $\log_x y = 1$ , azaz  $x = y$ , és  $z = 4$ .

Ezzel a második egyenlet:  $5x^2 = 2005$ , vagyis  $x = y = \sqrt{401}$ .

**1718.** Az egyenlet bal oldalán szereplő logaritmusok alapjai egymásnak reciprokai, továbbá a négyzetgyökök alatt teljes négyzetek szerepelnek. Így az első tag:

$$\log_{3-2\sqrt{2}} \frac{1}{|x-3|} = \log_{3+2\sqrt{2}} |x-3|.$$

Vezessük be a  $\log_{3+2\sqrt{2}} |x-3| = a$  új ismeretlent, ekkor azt kapjuk, hogy

$$a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2}, \quad \text{ahonnan} \quad a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{1}{2}.$$

Ha  $\log_{3+2\sqrt{2}} |x-3| = 2$ , akkor

$$x-3 = (3+2\sqrt{2})^2 = 17+12\sqrt{2}, \quad \text{vagy}$$

$$x-3 = -(3+2\sqrt{2})^2 = -17-12\sqrt{2},$$

ha  $\log_{3+2\sqrt{2}} |x-3| = \frac{1}{2}$ , akkor

$$x-3 = \sqrt{3+2\sqrt{2}}, \quad \text{vagy} \quad x-3 = -\sqrt{3+2\sqrt{2}}.$$

Tehát az eredeti egyenlet megoldásai:

$$x_1 = 20 + 12\sqrt{2}, \quad x_2 = -14 - 12\sqrt{2}, \quad x_3 = 3 + \sqrt{3+2\sqrt{2}},$$

$$x_4 = 3 - \sqrt{3+2\sqrt{2}}.$$

**1719.** Az első egyenlet bal oldala így alakítható:

$$\log_x x^n + \log_x y^k + \log_y y^n + \log_y x^k = 2n + k(\log_x y + \log_y x) = 4\sqrt{nk}.$$

A bal oldal legalább  $2(n+k)$ . A jobb oldal viszont – a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt – legfeljebb  $2(n+k)$ . Így egyenlőség csak akkor lehet a két oldal között, ha

$$\log_x y + \log_y x = 2, \quad \text{azaz} \quad \log_x y = 1, \quad \text{ahonnan} \quad x = y.$$

De  $x^{\log_2 z} = \sqrt{z}$ , így a második egyenletből:

$$\sqrt{z} + \sqrt{z} + 1 + z - 2\sqrt{z} = 2005, \text{ ahonnan } z = 2004.$$

Tehát az egyenletrendszert kielégítő számhármassok:  $z = 2004$ ,  $x = y > 1$  tetszőleges.

## IV

### Vegyes és gyakorlati feladatok

**1720.**

3	15	11	495
17	1	5	85
9	13	7	819
$X$	195	385	

**1720.** Érdemes először a 7-tel, 11-gyel, 13-mal és 7-tel való oszthatóságot vizsgálni. Ez után már könnyen kitölthető a négyzetáló.  $X = 459$ .

**1721.**

11	7	2	20
3	5	17	25
19	13	23	55
33	25	42	

**1721.** Induljunk ki abból, hogy az első sor, illetve a harmadik oszlop összege páros.

**1722.**  $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = 1548$ ,  $\frac{1}{B} + \frac{1}{C} = 1089$ ,  $\frac{1}{C} + \frac{1}{D} = 1619$ . Az első egyenlőségből kivonva a másodikat, majd a különbséghez hozzáadva a harmadikat, ezt kapjuk:  $\frac{1}{A} + \frac{1}{D} = 1548 - 1089 + 1619 = 1998$ .

Tehát kiskutyánk 2004-ben éppen 6 éves.

**1723.**  $\sqrt{xy} = 1046$ ,  $\sqrt{yz} = 1569$ ,  $\sqrt{zq} = 2997$ . Osszuk el az első és a harmadik szorzatát a másodikkal:  $\frac{\sqrt{xy} \cdot \sqrt{zq}}{\sqrt{yz}} = \sqrt{xq} = \frac{1046 \cdot 2997}{1569} = 1998$ . Tehát a

kiscica 2004-ben éppen 6 éves lesz.

**1724.**  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1526$ ,  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1402$ ,  $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1867$ . Az első és a harmadik összegéből vonjuk ki a másodikat:

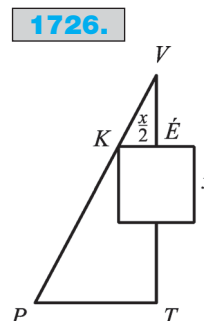
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{d} = 1526 + 1867 - 1402 = 1991.$$

Tehát az unoka 2009-ben lesz nagykorú.

**1725.** Ha egy egész számhoz egyet hozzáadva a számjegyeinek összege csökken, akkor ez a szám 9-re végződik. Ha az utolsó előtti számjegy (tízesek) nem 9, akkor a számjegyek összege 9-cel csökken és 1-gyel növekszik, tehát összesen 8-cal csökken. A gondolatsort folytatva arra jutunk, hogy egy számhoz 1-et hozzáadva, a számjegyeinek összege csak  $9k + 8$  alakú számmal csökkenhet. Tehát csak az  $e$ ) állítás lehet igaz.

**1726.** Az ábra alapján: a  $V\acute{E}K$  és  $VTP$  háromszögek hasonlók, így

$$\frac{4}{x} = \frac{8+x}{10,5}, \text{ ahonnan } x = 6.$$



Tehát a város lakóinak a száma:  $36 \cdot 860 = 30\,960$  fő.

**1727.** A kötvények összértéke 5500 dollár. Olyat kell elvenni belőle, hogy a megmaradók 4-gyel is, és 3-mal is, azaz 12-vel oszthatók legyenek. Ez csak a 700 dollár értékű kötvényre teljesül, tehát ez lesz az asszonyé.

**1728.** Ha a bolygók száma  $n$ , akkor  $150 < n(n-1) < 160$ . Innen  $n = 13$ .

**1729.** Az összes könyvek száma 68. Ha valamelyik gyerek hiányzott, akkor az elvitt könyvek száma: rendre 63, 59, 53, 44, vagy 55. Ezek között két olyan található, melynek van 10 és 20 közé eső osztója:  $44 = 4 \cdot 11$  vagy  $55 = 5 \cdot 11$ . Tehát az árvaháznak 11 lakója van.

**1730.** A feltételekből következik, hogy a négyzetekben szereplő számok összege 10. Tehát elég sok 0-nak kell lennie közöttük. Rövid próbálkozás után kapjuk az egyetlen eredményt:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	0.	<b>1730.</b>
2	1	0	0	0	1	0	0	0	6	

**1731.**  $\overline{19ab} + 1^2 + 9^2 + a^2 + b^2 = 1999$ , azaz  $10a + b + a^2 + b^2 = 17$ .

Innen csak  $a=0$  vagy  $a=1$  lehetséges. Ha  $a=0$ , akkor  $b + b^2 = b(1+b) = 17$ . De 17 nem bontható fel két szomszédos egész szorzatára, tehát ekkor nincs megoldás. Ha  $a=1$ , akkor  $b(1+b) = 6$ , ahonnan  $b=2$ . Tehát az illető születési éve: 1912.

**1732.** Ha  $t = \frac{S}{20}$  és  $t - 1 = \frac{S}{30}$ , akkor  $S = 60$ . Ezzel

$$t - \frac{1}{2} = \frac{S}{x}, \text{ azaz } \frac{S}{20} - \frac{1}{2} = \frac{S}{x}, \text{ vagyis } 3 - \frac{1}{2} = \frac{60}{x}, \text{ ahonnan } x = 24.$$

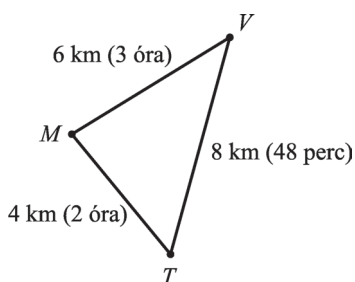
Tehát a biciklistának 24 km/h sebességgel kell haladnia.

## IV

**1733.** A sárkány legyőzésének egy lehetséges módját mutatja az alábbi táblázat:

Vágunk	Megmaradó fejek	Megmaradó farkak
1 farkat	5	8
2 fejet	3	8
2 fejet	1	8
2 farkat	2	6
2 farkat	3	4
2 farkat	4	2
1 farkat	4	3
1 farkat	4	4
2 farkat	5	2
2 farkat	6	0
2 fejet	4	0
2 fejet	2	0
2 fejet	0	0

**1734.**



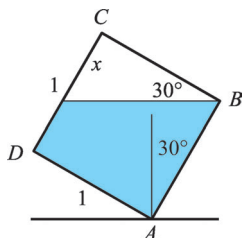
**1734.** A sematikus ábra alapján:

Ha valamely egész óra után 48 perccel indul, akkor mindegy melyik utat választja. Ha egész óra és 48 perc után indul, akkor az **M–T–V** utat kell választani, ha egész óra és 48 perc előtt indul, akkor az **M–V** utat kell választani.

**1735.** Az öt gyerek összes kártyáinak a száma 148. A kupacban levő kártyák számának 5-tel oszthatónak kell lennie, vagyis a 148-ból olyan számot kell elvenni, hogy a

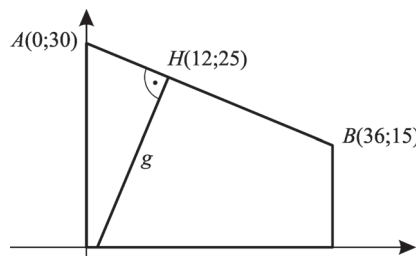
megmaradók száma vagy 5-re vagy 0-ra végződjön. Ez csak Béla vagy Elemér kártyáinak számára teljesül, tehát csak Béla hiányozhatott.

**1736/a.**



**1736.** Tekintsük az ábrákat: Az *a*) ábra alapján a kocka üres részének térfogata

**1737.**



**IV**

$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ , így a víz térfogata:

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}}$$

A *b*) ábra alapján

A megmaradó víz térfogata:  $\frac{y}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha}$ , ahonnan  $\alpha \approx 54,57^\circ$ .

**1737.** Helyezzük el az ábrát egy koordináta-rendszerben!

Az *A*, *B* és *H* pontokból a *g* gerenda egyenesének egyenlete:  $-12x + 5y = -19$ .

Ez az egyenes az *x* tengelyt a  $\left(\frac{19}{12}; 0\right)$  pontban metszi. Ezzel a gerenda hossza:

$g \approx 27,08$  m.

**1738.** Ha *S* az út, *v* a szokásos menetidő, akkor

$$\frac{\frac{Sp}{100}}{v\left(1 - \frac{p}{100}\right)} + \frac{S - \frac{Sp}{100}}{v\left(1 + \frac{2p}{100}\right)} = \frac{5}{6} \cdot \frac{S}{v}$$

Innen  $\frac{S}{v}$ -vel egyszerűsítve és a megfelelő átalakításokat elvégezve a

$$\frac{p}{100 - p} + \frac{100 - p}{100 + 2p} = \frac{5}{6}, \text{ ahonnan } 7p^2 - 275p + 2500 = 0;$$

$p_1 = 25\%$ ,  $p_2 \approx 14,29\%$ .

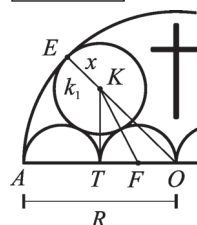
**1739.** Az ábra alapján

$$OK = R - x, OT = \frac{R}{2}, FK = \frac{R}{4} + x, FT = \frac{R}{4}.$$

$KT^2 = OK^2 - OT^2 = FK^2 - FT^2$ , azaz

$$(R - x)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{4} + x\right)^2 - \left(\frac{R}{4}\right)^2, \text{ ahonnan } x = \frac{3}{10}R.$$

**1739.**



**1740.** Legyen  $P_T$  Tom,  $P_J$  pedig Jerry pihenőideje és  $F_T$  Tom,  $F_J$  Jerry futóideje! Ekkor a feltételek szerint

$$P_T + F_T = P_J + F_J, P_T = \frac{1}{3} F_J \text{ és } P_J = \frac{1}{4} F_T.$$

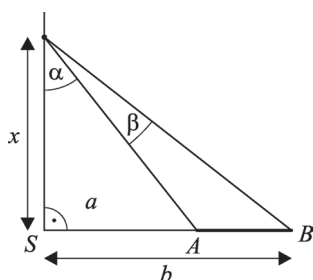
Ezek szerint

**IV**  $\frac{1}{3} F_J + F_T = \frac{1}{4} F_T + F_J$ , ahonnan  $F_J = \frac{9}{8} F_T$ .

Ha  $x$  Jerry sebessége, akkor

$$99 \cdot F_T = x \cdot F_J, \text{ vagyis } x = \frac{8 \cdot 99}{9} = 88 \text{ egység.}$$

**1741.**



**1741.** Legyen  $AB$  a gólvonal,  $S$  a szögletzászló,  $P$  a keresett pont, melyből az  $AB$  gólvonal a legnagyobb szögben látszik, és legyen  $\beta$  a keresett legnagyobb szög.

A megfelelő derékszögű háromszögekből:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{x}, \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{b}{x}.$$

Innen – felhasználva  $\operatorname{tg} (\alpha + \beta)$  kifejtését –

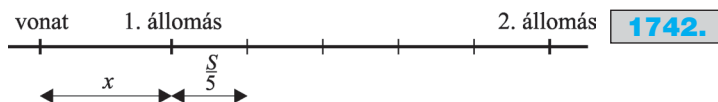
$$\frac{\frac{a}{x} + \operatorname{tg} \beta}{1 - \frac{a}{x} \operatorname{tg} \beta} = \frac{b}{x}, \text{ ahonnan } \operatorname{tg} \beta = \frac{x(b-a)}{x^2 + ab}.$$

Mivel  $\beta$  hegyesszög, ezért akkor maximális, ha  $\operatorname{tg} \beta$  a legnagyobb, azaz a reciproka a legkisebb. De a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt

$$\frac{\frac{x^2}{x(b-a)} + \frac{ab}{x(b-a)}}{2} \geq \sqrt{\frac{ab}{(b-a)^2}}.$$

Egyenlőség akkor, és csak akkor, ha  $\frac{x^2}{x(b-a)} = \frac{ab}{x(b-a)}$ , ahonnan  $x = \sqrt{ab}$ .

**1742.** Legyen  $v$  Pisti sebessége,  $x$  pedig a vonat és az 1. állomás közötti távolság.



A feltételek szerint

$$\frac{S}{5v} = \frac{x}{40}, \text{ azaz } x = \frac{40S}{5v} = \frac{8S}{v},$$

$$\text{továbbá } \frac{4}{5} \cdot \frac{S}{v} = \frac{S+x}{40}.$$

A kapott eredményeket egybevetve ezt kapjuk:  $v = \frac{120}{5} = 24$  km/h.

**1743.** A  $3 \cdot \overline{abc} + 49 = \overline{cba}$  egyenletet részletesen kiírva:

$$3 \cdot (100a + 10b + c) + 49 = 100c + 10b + a,$$

$$299a + 20b + 49 = 97c.$$

Innen csak  $a = 2$  vagy  $a = 1$  lehetséges.

Ha  $a = 2$ , akkor

$$598 + 20b + 49 = 97c, \text{ azaz } 20b = 97c - 647.$$

A most kapott egyenlet bal oldala osztható 10-zel, tehát a jobb oldalnak is 0-ra kell végződnie. De a jobb oldal csak akkor végződik 0-ra, ha  $97c$  7-re végződik, azaz, ha  $c = 1$ . Ez esetben viszont a jobb oldal negatív lenne, tehát ez esetben nem kapunk megoldást.

Ha  $a = 1$ , akkor

$$299 + 20b + 49 = 97c, \text{ azaz } 20b = 97c - 348.$$

Ennek az egyenletnek – ugyanúgy, mint előbb – a jobb oldalának 0-ra kell végződnie, azaz  $97c$ -nek 8-ra kell végződnie. Ez csak akkor teljesül, ha  $c = 4$ , és ekkor

$$20b = 388 - 348 = 40, \text{ ahonnan } b = 2.$$

A keresett szám:  $\overline{abc} = 124$ . Valóban:  $3 \cdot 124 + 49 = 421$ .

**1744.** A skatulyaelv alapján a 257 papagáj között van 65 azonos színű. Ezeket négy korcsoportba lehet osztani (hiszen nincs 5 különböző korú, azonos színű), tehát – ugyancsak a skatulyaelv szerint – kell lennie 17 azonos színű és azonos korú papagájnak. Ha ezeket két részre kell osztani, akkor valamelyik részben lesz legalább 9 azonos korú és azonos színű papagáj.

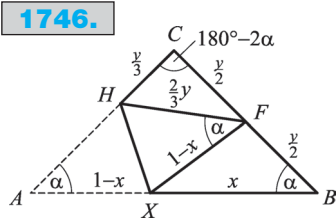
**1745.** A körfolyosó területe:  $R^2\pi - r^2\pi = \pi(R^2 - r^2)$ . A kötéel hosszának a felére:  $11,25^2 = R^2 - r^2$ . Tehát a körfolyosó területe:  $11,25^2\pi = 397,6$  m<sup>2</sup>. Így a szükséges dobozok száma:

$$\frac{397,6 \cdot 1,1}{1,6} = 273,3, \text{ vagyis } 274.$$

**1746.**  $HC = \frac{y}{3}$  és  $AH = HF = \frac{2}{3}y$ . Írjuk fel a koszinusztételt az  $FCH$  háromszögre:



1746.



$$\left(\frac{2}{3}y\right)^2 = \left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{y}{3} \cdot \frac{y}{2} \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha).$$

$$\frac{4}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}(1 - 2\cos^2 \alpha),$$

$$\text{ahonnan } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.$$

IV

$$\text{De } \cos \alpha = \frac{1}{2y}, \text{ így } \frac{1}{2y} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \text{ azaz } \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}.$$

Írjuk fel újra a koszinusztételt, most az  $XBF$  háromszögre:

$$(1-x)^2 = x^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}\right)^2 - 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \cdot \cos \alpha,$$

$$1 - 2x = \frac{1}{10} - \frac{x}{2}, \text{ ahonnan } x = \frac{3}{5}.$$

Tehát a hajtás másik vége a háromszög  $AB$  oldalát 3:2 arányban osztja:

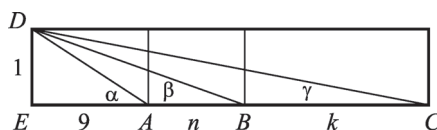
$$\frac{BX}{XA} = \frac{3}{2}.$$

**1747.** Tekintsük az ábrát.

Ha  $\alpha = \beta + \gamma$ , akkor az  $ABD$  és  $ACD$  háromszögek hasonlók, vagyis

$$\frac{n}{AD} = \frac{AD}{n+k}, \text{ azaz } n(n+k) = 82.$$

1747.



Innen  $n = 1$ ,  $k = 81$ , vagy  $n = 2$ ,  $k = 39$ .

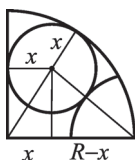
De  $n = 1$  nem lehetséges, így Béla és Csaba közül valamelyik a 12. fa tövében, a másik pedig az 51. fa tövében végezte a mérést.

**1748.**  $90 + \frac{90}{6} = 105$  gerezd fokhagymát kell ültetni.

**1749.** A megfelelő derékszögű háromszögekből

$$(R-x)^2 - x^2 = \left(\frac{R}{2} + x\right)^2 - (R-x)^2, \text{ ahonnan } x = \frac{7}{20}R.$$

1749.



**1750.** Tekintsük az ábrát.

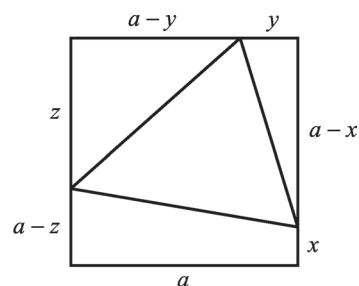
A háromszög területe:

$$T = a^2 - \left[ \frac{y(a-x)}{2} + \frac{z(a-y)}{2} + \frac{a(a+x-z)}{2} \right] =$$

$$= \frac{a^2}{2} - \left( \frac{y(a-x) + z(a-y)}{2} \right).$$

Ez akkor a legnagyobb  $\left( \frac{a^2}{2} \right)$ , ha  $y$  vagy  $a-x$

**1750.**



**IV**

és  $z$  vagy  $a-y$  egyenlő 0-val. Ez azt jelenti,

hogy a háromszög területe akkor a legnagyobb, ha két csúcsa a négyzet két szomszédos csúcsába esik, a harmadik pedig a négyzet szemközti oldalának bármely pontja.

**1751.** A kúp alakú edény és a benne levő víz (kúp) hasonló, így térfogatuk aránya a hasonlóság arányának a köbe, azaz

$$V_{\text{víz}} = \left( \frac{4}{5} \right)^3 = 0,5121.$$

A henger alakú edényben levő vízoszlop térfogata egyenesen arányos a benne levő vízoszlop magasságával, tehát

$$m_{\text{víz}} = 0,5121 \cdot 30 = 15,363 \text{ cm.}$$

**1752.** A nyomdai ív két oldalát az alábbi ábra szemlélteti:

egyik oldal				másik oldal			
8	9	16	1	2	15	10	7
27	24	17	32	31	18	23	26
28	21	20	29	30	19	22	27
5	12	13	4	3	14	11	6

**1752.**

**1753.** A feltételek szerint az  $L$  lány  $L + 6$  fiúval táncolt, és ez az összes fiúk száma. Ezek szerint  $L + 6 = F$  és  $L + F = 42$ . Innen  $L = 18$  és  $F = 24$ .

**1754.** A bankkártya:

1	8	6	5	1	8	6	5	1	8	6	5	1	8
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

**1754.**

## IV

**1755.** Nem. Mindhárman  $\frac{5}{3}$  üveg sört fogyasztottak, így András 3 üvegéből Csaba  $\frac{4}{3}$  üveggel fogyasztott, míg Béla 2 üveg söréből  $\frac{1}{3}$  üveggel. Ezek szerint az 5 eurót 4:1 arányban kell elosztani András és Béla között.

**1756.** A négy repülőgép egy olyan szabályos tetraéder csúcaiban van, melynek testmagassága 300 m. Az  $a$  oldalú szabályos tetraéder testmagassága  $a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 300$ , ahonnan az él (vagyis két repülőgép távolsága)  $\frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx 367,4$  m.

**1757.** A félgömb és a henger térfogatának egyenlőségéből, valamint a félgömb és a kúp térfogatának egyenlőségéből:

$$\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = 4^2 \cdot \pi \cdot m_{\text{henger}}, \text{ ahonnan } m_{\text{henger}} = \frac{8}{3} \text{ cm};$$

$$\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot m_{\text{kúp}}, \text{ ahonnan } m_{\text{kúp}} = 8 \text{ cm}.$$

**1758.** Ha  $l$  a lányok száma,  $3l$  a fiúk száma, akkor a kérdéses alkalommal:

$$(l - 8) \cdot 5 = 3l - 8,$$

ahonnan  $l = 16$  és  $3l = 48$ .

**1759.** Az alábbiakban mutatunk néhány megoldást:

$$100 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9;$$

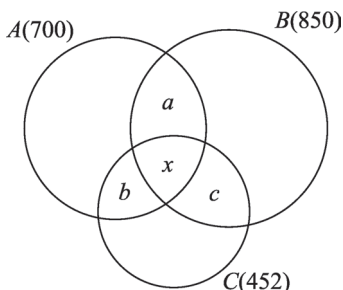
$$100 = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 - 6 + 7 + 8 \cdot 9;$$

$$100 = -1 \cdot 2 - 3 - 4 - 5 + 6 \cdot 7 + 8 \cdot 9;$$

$$100 = (1 + 2 - 3 - 4) \cdot (5 - 6 - 7 - 8 - 9).$$

**1760.** A 6 literest megtöltjük, majd átöntjük a 7 literesbe. Ezután a 6 literest újra megtöltjük, és feltöltjük vele a 7 literest, ekkor a 6 literesben 5 liter marad. A 7 literest kiürítjük, majd az 5 litert beleöntjük a 6 literesből. Aztán a 6 literest újra megtöltjük, feltöltjük vele a 7 literest, így a 6 literesben 4 liter marad. Végül a 7 literest kiürítjük, áttöltjük a 6 literesben levő 4 litert, majd a 6 literest ismét megtöltjük, és 3 litert átöntünk a 7 literesbe, így a 6 literesben éppen 3 liter marad.

**1761.**



**1761.** Jelölje  $A$  halmaz a robotgéppel,  $B$  halmaz a mosógéppel,  $C$  halmaz a mosogatógéppel rendelkező családok számát.

A feltételek szerint

$$a + x \geq 550, b + x \geq 152, c + x \geq 302, \text{ ezért}$$

$$a + b + c + 3x \geq 1004.$$

De  $a + b + c \leq 1000$ , így  $3x \geq 4$ , azaz

$x \geq \frac{4}{3}$ . Tehát 1-nél több megkérdezett család rendelkezik mindhárom háztartási eszközzel.

**1762.** Tekintsük az ábrát.

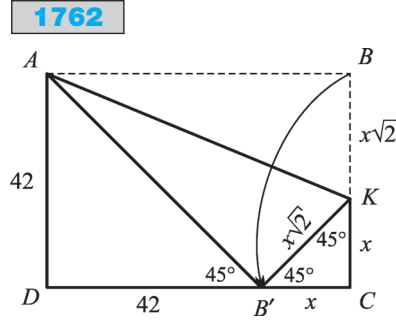
A hajtogatás jellegéből következik, hogy  $\angle KB'C = \angle B'KC = \angle AB'D = 45^\circ$ , és  $BK = B'K$ , valamint  $B'A = BA$ . Tehát az  $ADB'$  háromszög is egyenlő szárú, ezért a téglalap másik oldala  $AB = 42\sqrt{2}$ . Mivel

$$x + x\sqrt{2} = 42, \text{ ahonnan}$$

$$x = 42 \cdot (\sqrt{2} - 1),$$

ezért az összehajtott terítők területe:

$$T = \frac{[42 + 42 \cdot (\sqrt{2} - 1)] \cdot 42\sqrt{2}}{2} = 42^2 = 1764 \text{ cm}^2.$$



IV

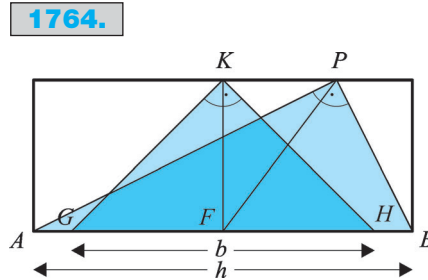
**1763.** A piramis felülnézete egy  $10 \times 10$  m-es négyzet, melynek területe  $100 \text{ m}^2$ , ami be van vonva arannyal. Ezenkívül még az öt db hasáb oldallapjai, melyek 4-esével egybevágó téglalapok. E téglalapok mindegyikének egyik oldala 1 m, a másik oldalak pedig rendre 4 m, 5,5 m, 7 m, 8,5 m és 10 m. Tehát az arannyal bevont terület:

$$100 + 4 \cdot (4 + 5,5 + 7 + 8,5 + 10) = 240 \text{ m}^2.$$

**1764.** Az ábra jelöléseivel:

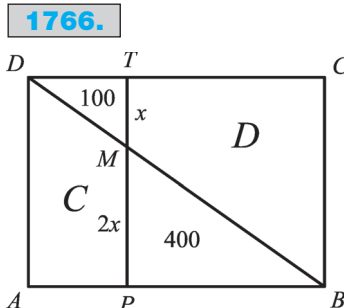
$KGH$  egyenlő szárú derékszögű háromszög, így  $KF = \frac{b}{2}$ . Thalész tételéből:  $PF = \frac{h}{2}$ . Így a keresett  $PK$  távolság:

$$PK = \frac{\sqrt{h^2 - b^2}}{2}.$$



**1765.** Gömb alakú hordó: 2. grafikon; körlapján álló kúp alakú hordó: 4. grafikon; csúcsán álló kúp alakú hordó: 1. grafikon, henger alakú hordó: 3. grafikon.

**1766.** A  $BMT$  és  $BMP$  háromszögek hasonlóak; területeikből a hasonlóság aránya  $1 : 2$ .



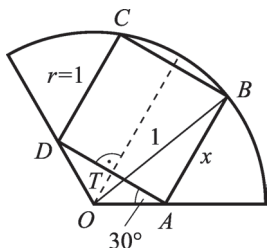
Az  $APMD$  és a  $BCTM$  trapézok területe

$$T_C = \frac{(3x + 2x) \cdot y}{2} = \frac{5}{2} \cdot xy = 500, T_D = \frac{(3x + x) \cdot 2y}{2} = 4xy = 800.$$

(Ugyanezt a gondolatmenetet követve: ha a  $DMT$  háromszög területe  $t$ , a  $BMP$  háromszög területe  $T$ , akkor az egyes trapézok területe:  $T_C = t + 2\sqrt{Tt}$ ,  $T_D = T + 2\sqrt{Tt}$ .)

## IV

**1767.** András és Béla széke között a távolság  $68 - 33 = 35$  szék. Ezek szerint, ha a legmagasabb sorszámú szék az  $x$ , akkor  $17 + x - 92 = 35$ , ahonnan  $x = 110$ .

**1768.**

**1768.** A körcikk területe:  $T_{\text{körcikk}} = \frac{1^2 \cdot \pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ .

Mivel  $\angle TAO = 30^\circ$ , tehát  $\angle BAO = 120^\circ$ , így

$$OB^2 = x^2 + AO^2 - 2x \cdot AO \cdot \cos 120^\circ.$$

De  $\cos 30^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{AO}$ , tehát  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2AO}$ , ahonnan

$$AO = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Azt kapjuk, hogy  $1 = x^2 + \frac{x^2}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ ,

$$\text{ahonnan } x^2 = \frac{3}{4 + \sqrt{3}} = \frac{3(4 - \sqrt{3})}{13}.$$

Ezzel

$$\frac{T_{\text{négyzet}}}{T_{\text{körcikk}}} = \frac{\frac{3(4 - \sqrt{3})}{13}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3(4 - \sqrt{3})}{13} \cdot \frac{3}{\pi} = \frac{9(4 - \sqrt{3})}{13\pi} \approx 0,50005.$$

$\pi = 3,14$ -gyel számolva tehát a négyzet területe nagyobb, mint a körcikk területének a fele, vagyis az építési engedélyt nem adják meg.

(Igen érdekes eredményre jutunk, ha  $\pi$ -nek nem két tizedesjegy pontosságával, hanem négy vagy több tizedesjegy pontosságával számolunk.  $\pi = 3,1415$ -tel számolva a két terület hányadosa már jóval kedvezőbb: 0,499 8, vagyis ez esetben a ház megépíthető.)

**1769.** Ha a küllő hossza  $k$ , akkor a feltételek szerint

$$(40 + k)^2 \cdot \pi = 9 \cdot 40^2 \cdot \pi, \text{ ahonnan } k = 80 \text{ cm.}$$

**1770.** A füves rét területe:  $r^2 \pi - \left(\frac{r}{2}\right)^2$ .

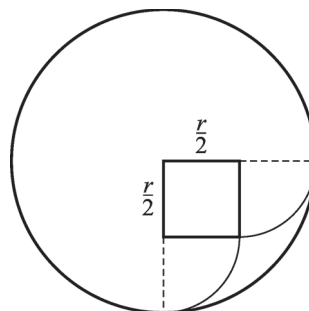
1770.

A kecske által elérhető terület az  $r$  sugarú rét  $\frac{3}{4}$ -d része, valamint 2 negyedkör, melyek sugara  $\frac{r}{2}$ , vagyis

$$\frac{3}{4} r^2 \pi + 2 \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{7}{8} r^2 \pi.$$

Ezek szerint a kecske lelegheti a rét

$$\frac{\frac{7}{8} r^2 \pi}{r^2 \pi - \frac{r^2}{4}} \approx 0,95\% \text{-át.}$$



IV

**1771.** Ha először  $k$  db papírt vágunk ketté ( $k \leq 100$ ), akkor  $100 + k$  db papírlapunk lesz. Másodszor  $2k$  papírt vágunk ketté, így ez után  $100 + 3k$  papírlapunk lesz. Harmadik alkalommal  $4k$  db papírt vágunk ketté, így  $100 + 7k$  papírlapunk lesz. Belátható, hogy az  $n$ -edik darabolás után  $100 + (2^n - 1)$  db papírlapunk lesz.

$$100 + (2^n - 1) \cdot k = 2005, \text{ azaz } (2^n - 1) \cdot k = 1905 = 3 \cdot 5 \cdot 127.$$

Mivel 1905  $2^n - 1$  alakú osztói közül csak a 127 jöhet szóba, így  $n = 7$  és ekkor  $k = 15$ . Tehát legelőször 15 db papírlapot vágunk ketté és az eljárást 7-szer ismételtük meg.

## Nevezetes egyenlőtlenségek

**1772.** Legyen  $x + y = 18$ . Ekkor  $9 = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ , tehát  $81 \geq xy$ . Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha  $x = y = 9$ . Ekkor a szorzat értéke: 81

**1773.** Legyen  $x + y = 100$ . Ekkor  $50 = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ , tehát  $2500 \geq xy$ . Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha  $x = y = 50$ , ekkor a szorzat értéke: 2500.

**1774.** Legyenek az oldalak:  $a$  és  $b$ . Mivel  $2(a+b) = 150$ ,  $37,5 = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = t_{\text{téglalap}}$ . Tehát a téglalap maximális területe:  $1406,25 \text{ cm}^2$ , ekkor az oldalak:  $a = b = 37,5 \text{ cm}$ .