1575. *a)* $x \geq \frac{1}{3}$, $x \geq \frac{1}{2}$;

b) $x < -2$ vagy $x \geq 3$, $x \leq -\frac{3}{5}$ vagy $x > 4$.

1576. *a)* $x_1 = 2$, $x_2 = -6$, $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{7}{3}$, $x_4 = 5$;

b) nincs megoldás;

c) $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$;

d) $x = -1$.

Abszolútértékes egyenlőtlenségek

1577. *a)* $-1 \leq x \leq 1$, $x \leq -5$ vagy $x \geq -1$, $-2 < x < 14$, $x < -13{,}5$ vagy $x > 4{,}5$;

b) $x \leq -1$ vagy $x \geq 2$, $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$, $-2 \leq x \leq \frac{10}{3}$;

1578. *a)* $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$, $x \leq -\sqrt{2}$ vagy $x \geq \sqrt{2}$, $-3 < x < 3$;

b) $x \leq -3$ vagy $x \geq 5$.

c) $-5 < x < -1$;

d) $x = 5$.

1579. *a)* nincs megoldás;

b) minden valós szám megoldás;

c) nincs megoldás.

1580. *a)* $-2 \leq x \leq 2$;

b) $x \leq -\sqrt{5}$ vagy $-1 \leq x \leq 1$ vagy $x \geq \sqrt{5}$;

c) $x \leq -\sqrt{14}$ vagy $x = 0$ vagy $x \geq \sqrt{14}$;

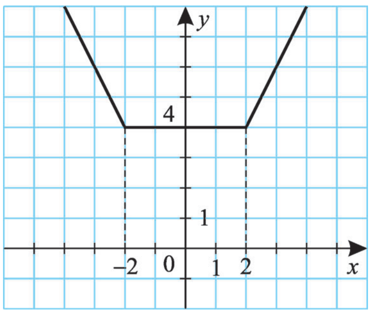
d) $x \leq -\frac{7}{2}$ vagy $x \geq \frac{3}{2}$.

1581. *a)* $x < -2$ vagy $x > 2$;

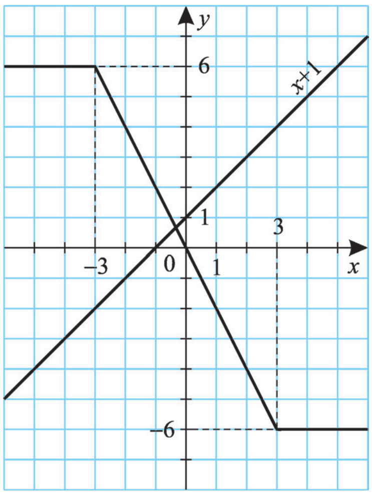
b) $x > -\frac{1}{3}$;

c) $x < \frac{5}{2}$ vagy $x > \frac{7}{2}$.

1581/a.

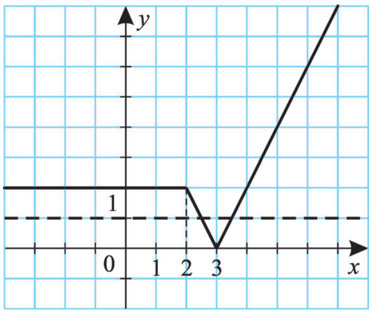


1581/b.

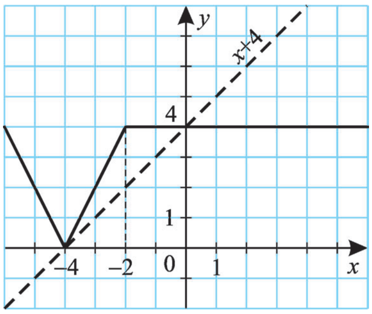


IV

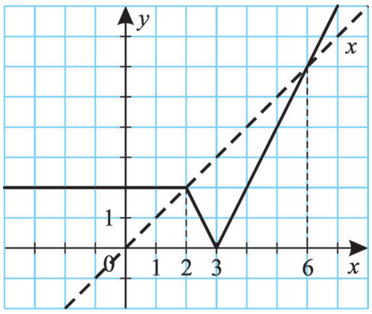
1581/c.



1582/a.



1582/b.

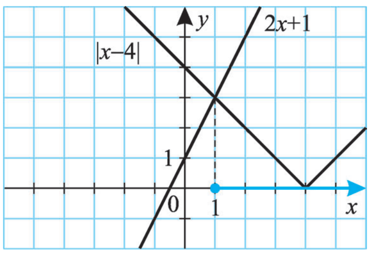


1582. *a)* $x = -4$ vagy $x \geq 0$;
b) $x \leq 2$ vagy $x \geq 6$.

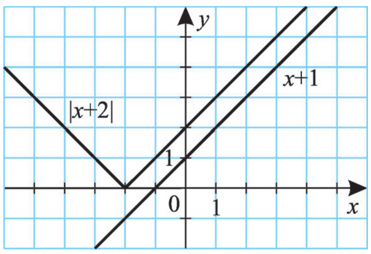
1583. Az abszolútérték definíciója alapján
a) $-2 \leq a \leq 2$;
b) $b \leq -0{,}6 \vee b \geq 0{,}6$;
c) $c < -2 \vee c > 8$;
d) $-10 < d < 6$.

1584. *a)* $x \geq 1$;
b) Nincs megoldás.
c) $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén igaz.
d) $x \geq 1$.

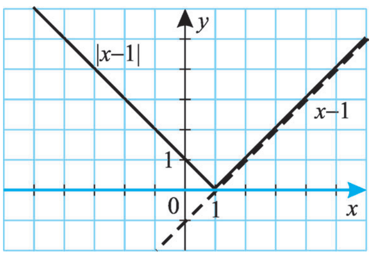
1584/a.



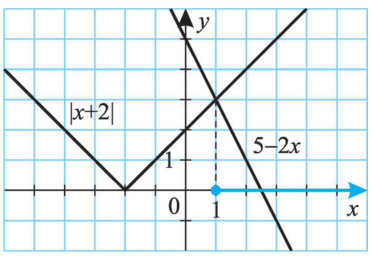
1584/b.



1584/c.



1584/d.



1585. A megoldásnál használjuk fel: $|a| = \begin{cases} a, \text{ha } a \geq 1, \\ -a, \text{ha } a < 0. \end{cases}$

Az abszolútérték felbontása után a kapott egyenlőtlenséget vessük össze a vizsgált intervallummal, hiszen ezek közös megoldása adja a feladat megoldását. Nézzük pl.: a *d)* rész megoldását:

Az abszolútérték jelen belüli kifejezések zérushelyei: $x = -1$, $x = 5$.

I. Ha $x < -1$; $\quad -x - 1 - x + 5 \leq 7$; $\quad x \geq -\dfrac{3}{2}$.

Összevetve a vizsgált intervallummal: $-\dfrac{3}{2} \leq x < -1$.

II. Ha $-1 \leq x \leq 5$; $\quad x + 1 - x + 5 \leq 7$; $\quad 6 \leq 7$ igaz az adott intervallumon. Összevetve a vizsgált intervallummal: $-1 \leq x \leq 5$.

III. Ha $x > 5$; $\quad x + 1 + x - 5 \leq 7$; $\quad x \leq \dfrac{11}{2}$.

Összevetve a vizsgált intervallummal: $5 < x \leq \dfrac{11}{2}$.

A feladat megoldása: $-\dfrac{3}{2} \leq x \leq \dfrac{11}{2}$.

A megoldások:

a) $x > 3$; *b)* Nincs megoldás.

c) $x < -2 \lor x \geq \dfrac{3}{2}$;

d) $5 < x \leq \dfrac{11}{2}$; *e)* $x < -\dfrac{1}{2}$;

f) $-3 < x < -1$.

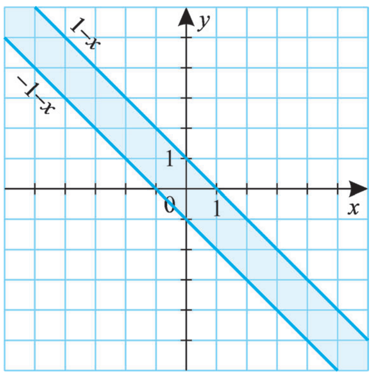
1586. *a)* $-1 - x \leq y \leq 1 - x$;

b) $y \geq -|x| + 1$;

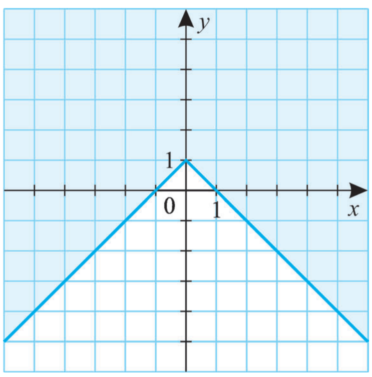
c) $-x - 2 \leq y \leq y - x + 2$;

d) $y \leq x - 2$ vagy $y \geq x + 2$.

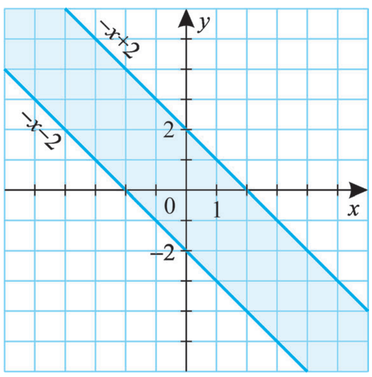
1586/a.



1586/b.

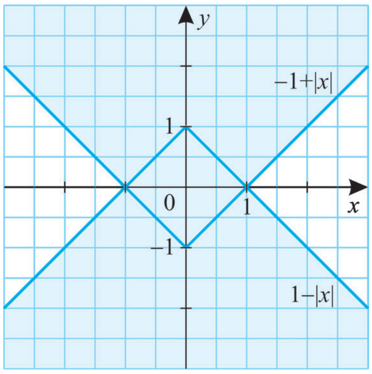


1586/c.

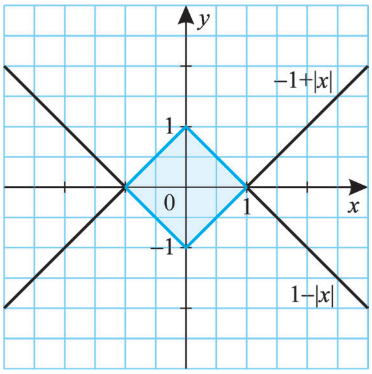


IV

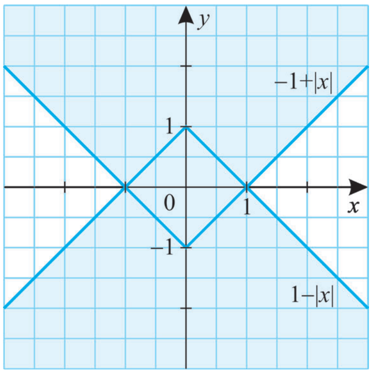
1586/d.



1587/a.



1587/b.



1587. *a)* $-1+|x|\le y\le 1-|x|$;

b) Ha $y\ge 0$, akkor $y\ge |x|-1$, ha $y<0$, akkor $y\le 1-|x|$;

c) Ha $y\ge 1$, akkor $y\ge |x-1|-3$, ha $y<1$, akkor $y\le 5-|x-1|$;

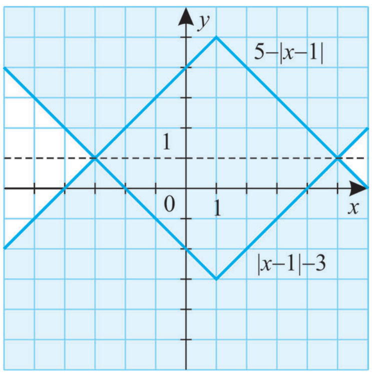
d) Ha $x\ge 0$, $y\ge 0$, akkor $(x-1)^2+(y-1)^2\le 4$. Hasonlóan kapjuk a többi tartományba eső pontokat is.

1588. *a)* $x\ge -2$ és $y\le -\dfrac{x}{2}+1$;

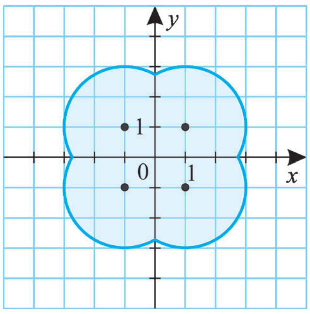
b) $y\ge |x|$ vagy $y<-|x|$;

c) $x\ne y$ és $y<-x$.

1587/c.

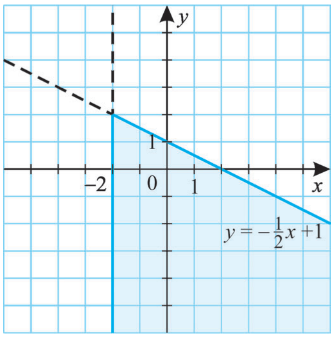


1587/d.

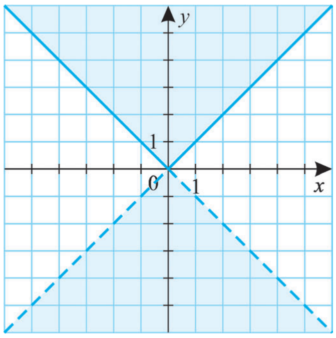


IV

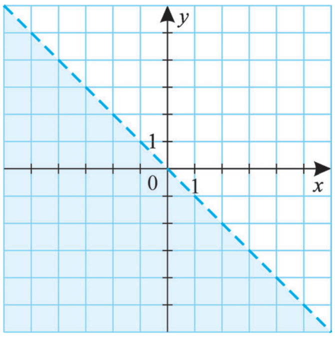
1588/a.



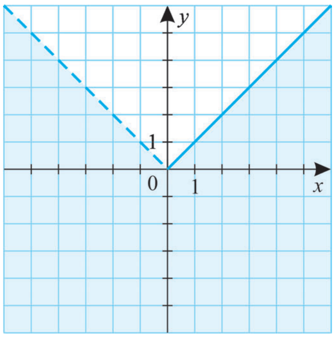
1588/b.



1588/c.



1589/a.

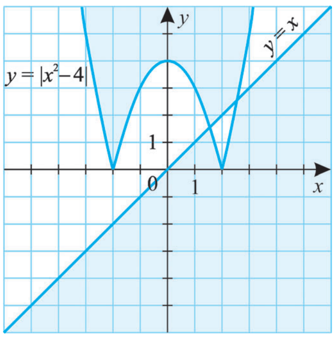


1589. *a)* $y \leq |x|$ és $y \neq -x$;

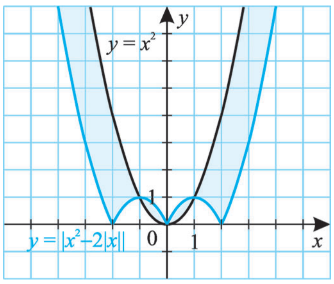
b) $y < |x^2 - 4|$ és $y < x$ vagy $y > |x^2 - 4|$ és $y > x$;

c) $y \leq |x^2 - 2|x||$ és $y > x^2$ vagy $y \geq |x^2 - 2|x||$ és $y < x^2$.

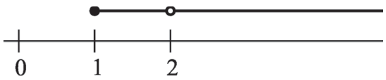
1589/b.



1589/c.

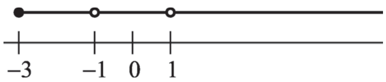


1590. *a)* $x \geq 1,\ x \neq 2;$



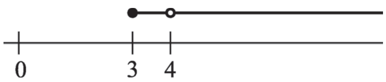
1590/a.

b) $x \geq -3,\ x \neq \pm 1;$



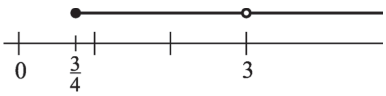
1590/b.

c) $x \geq 3,\ x \neq 4.$



1590/c.

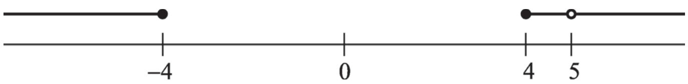
1591. *a)* $x \geq \frac{3}{4},\ x \neq 3;$



1591/a.

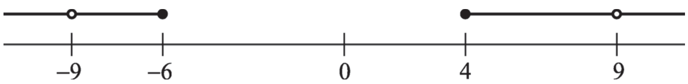
b) $x \geq 4$ vagy $x \leq -4,\ x \neq 5;$

1591/b.

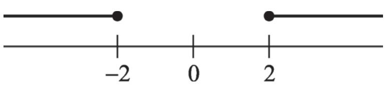


c) $x \geq 4$ vagy $x \leq -6,\ x \neq \pm 9.$

1591/c.

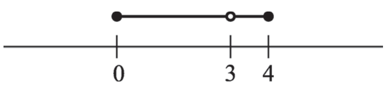


1592. *a)* $x \leq -2$ vagy $x \geq 2;$



1592/a.

b) $0 \leq x \leq 4$ és $x \neq 3;$



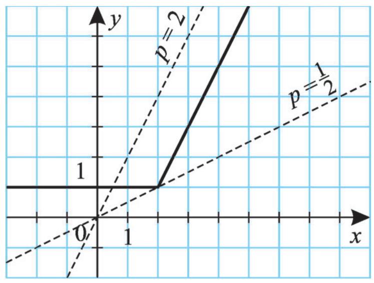
1592/b.

c) $0 \leq x \leq 100$ és $x \neq 4,\ x \neq 6.$

Nehezebb feladatok

1593. Ábrázoljuk az egyenlet bal oldalát. Két esetet vizsgálunk aszerint, hogy $x \geq 2$ vagy $x < 2$. A jobb oldal egy origón átmenő egyenes.
A két grafikonnak akkor lesz egyetlen közös pontja (vagyis az egyenletnek pontosan egy megoldása), ha $p \geq 2$ vagy $p < 0$ vagy $p = \frac{1}{2}$.

1593.



1594. Felhasználva, hogy $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$, az eredeti egyenlet így alakul:

$$\left|1 - 4\sin^2 x\right| = 1 - 4\sin^2 x, \text{ ahonnan } 1 - 4\sin^2 x \geq 0,$$

$$|\sin x| \leq \frac{1}{2}.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség megoldása (lásd 1594. ábra).

1595. Ábrázoljuk az egyenlet bal oldalát! A jobb oldal grafikus képe egy egyenes. (1595. ábra)
Az egyenletnek akkor, és csak akkor lesz végtelen sok megoldása, ha a jobb oldali egyenes képe illeszkedik valamelyik „lineáris” darabra, vagyis, ha

$a = 0$, $b = 2$; vagy $a = -2$, $b = 6$; vagy $a = 2$, $b = -6$.

1596. A feltételek szerint $b = a + c$ vagy $b = -(a + c)$. Első esetben az

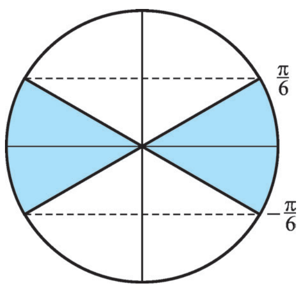
$ax^2 + (a + c)x + c = 0$ és $cx^2 + (a + c)x + a = 0$

egyenletek közös gyöke: $x = -1$. A második esetben az

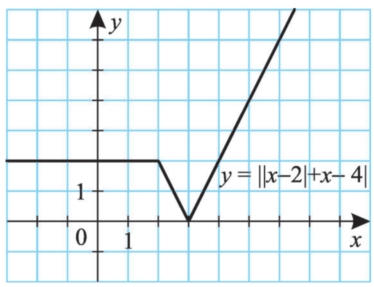
$ax^2 - (a + c)x + c = 0$ és $cx^2 - (a + c)x + a = 0$

egyenletek közös gyöke: $x = 1$.

1594.



1595.



Ha a két egyenletnek x_0 a közös gyöke, akkor

$ax_0^2 + bx_0 + c = cx_0^2 + bx_0 + a$, azaz $(a-c)(x_0^2 - 1) = 0$.

Tehát $x_0 = \pm 1$. Ha $x_0 = 1$, akkor $b = -(a+c)$, ha $x_0 = -1$, akkor $b = a + c$, tehát az állítás megfordítása is igaz: $|b| = |a + c|$.

1597. $\frac{(2x-1)^2}{x} > 0$, azaz $x > 0$ és $x \neq \frac{1}{2}$.

$$\left|\log_2 \frac{4x^2 - 4x + 1}{x}\right| = -\log_2 \frac{4x^2 - 4x + 1}{x}, \text{ ahonnan } \log_2 \frac{4x^2 - 4x + 1}{x} \leq 0.$$

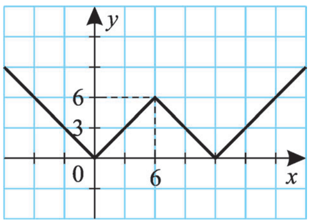
Innen

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{x} \leq 1, \text{ azaz } 4x^2 - 5x + 1 \leq 0.$$

Ezzel az eredeti egyenlet megoldása:

$$\frac{1}{4} \leq x \leq 1, \text{ de } x \neq \frac{1}{2}.$$

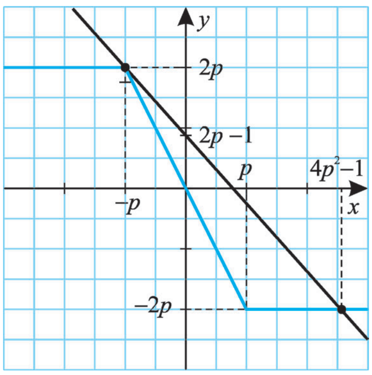
1598.



1598. Ábrázoljuk az egyenlet két oldalát grafikusan. A jobb oldal egy egyenes, mely 3-ban metszi az y tengelyt. Egy ilyen egyenesnek akkor lesz pontosan két közös pontja a bal oldal grafikus képével, ha

$$\frac{1}{2} < k < 1 \text{ vagy } -1 < k < -\frac{1}{4}.$$

1599.

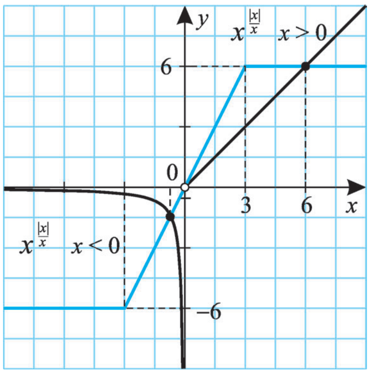


1599. Ábrázoljuk az egyenlet két oldalát. A jobb oldal egy olyan egyenes, mely az y tengelyt $2p - 1$-ben metszi. A bal oldal ábrázolásához három esetet kell vizsgálnunk aszerint, hogy $x \geq p$, $-p \leq x < p$, vagy $x < -p$.

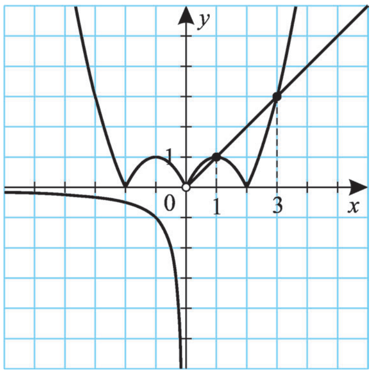
A $(0;\ 2p-1)$ ponton átmenő egyenesnek akkor, és csak akkor lesz két közös pontja a bal oldal grafikus képével, ha ez az egyenes áthalad a $(-p;\ 2p)$ ponton is. Ekkor az egyenes:

$$y = -\frac{1}{p}x + 2p - 1.$$

1600.



1601.



Ezek szerint ekkor az egyenlet egyik megoldása: $x_1 = -p$, a másik pedig a

$$-\frac{1}{p}x + 2p - 1 = -2p$$

egyenlet megoldása, azaz: $x_2 = 4p^2 - p$.

1600. $x \neq 0$. Ábrázoljuk az egyenlet mindkét oldalát. A bal oldalon három esetet vizsgálunk, aszerint, hogy $x \geq 3$, $-3 \leq x < 3$ vagy $x < -3$. A jobb oldalon két esetet vizsgálunk aszerint, hogy $x > 0$ vagy $x < 0$.

Az egyenlet egyik megoldása: $x_1 = 6$, a másik megoldás a $2x = \frac{1}{x}$ egyenlet negatív megoldása, azaz

$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

1601. $x \neq 0$. Ábrázoljuk az egyenlet mindkét oldalát.

Az egyik megoldás: $x_1 = 1$, a másik pedig az $x^2 - 2x = x$ egyenlet pozitív gyöke, azaz $x_2 = 3$.

1602. Az egyenlet bal oldalának grafikus képe:

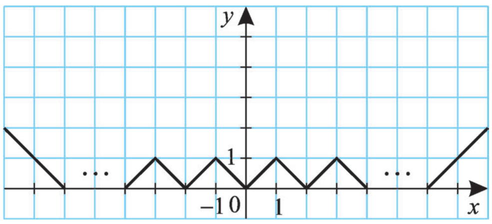
Ha n páratlan:

$x = \pm 1, \pm 3, \ldots\ldots, \pm n$.

Ha n páros:

$x = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots\ldots, \pm n$.

1602/I.



1602/II.