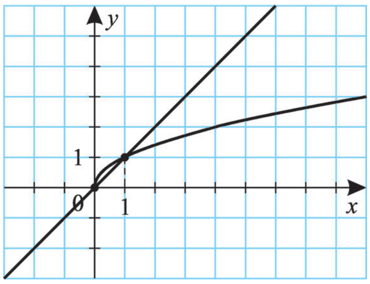
Irracionális egyenletek, egyenlőtlenségek

Irracionális egyenletek

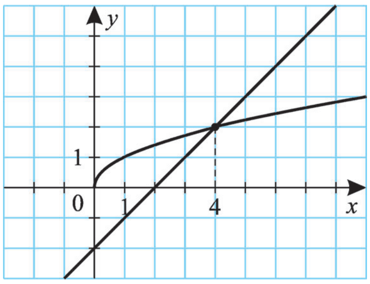
IV

1522/I.



1522. *a)* Az egyenlet bal oldala a nemnegatív számok halmazán, a jobb oldal minden valós szám esetén értelmezett, ezért az egyenlet $x \geq 0$ esetén értelmezett.
A metszéspont $x = 0$-nál van. Ez megoldása az egyenletnek.

1522/II.

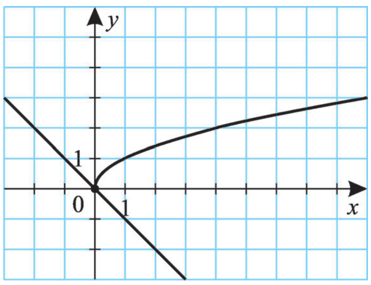


b) Az *a)* részhez hasonlóan az egyenlet értelmezési tartománya $x \geq 0$.

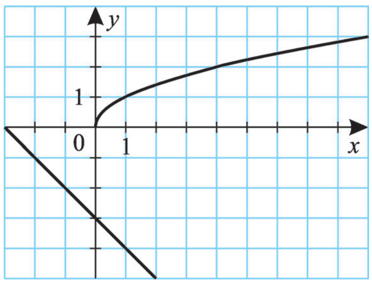
A grafikonról leolvasható, hogy $x = 4$. Ez jó megoldás.

c) Hasonlóan az előzőekhez $x = 0$ az egyenlet megoldása.
Az értelmezési tartomány $x \geq 0$.

1522/III.



1522/IV.

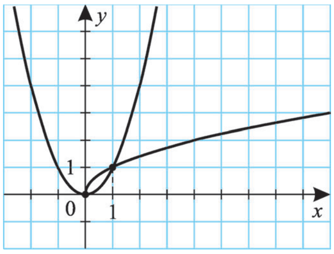


A függvények grafikonjai nem metszik egymást, az egyenletnek nincs megoldása.

1523. *a)* Az egyenlet értelmezési tartománya:
$x \geq 0$.

A grafikonról leolvasható, hogy $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

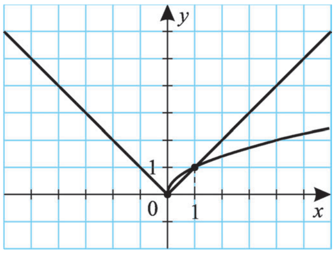
1523/a.



b) Az egyenlet értelmezési tartománya:
$x \geq 0$.

A grafikonról leolvasható, hogy $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

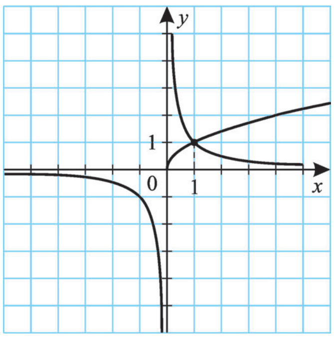
1523/b.



c) Az egyenlet értelmezési tartománya:
$x > 0$.

A grafikonról leolvasható, hogy $x = 1$.

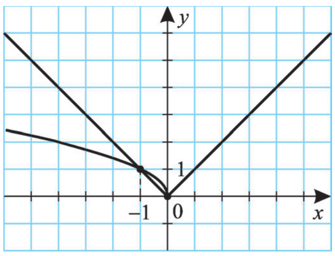
1523/c.



d) Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \leq 0$.

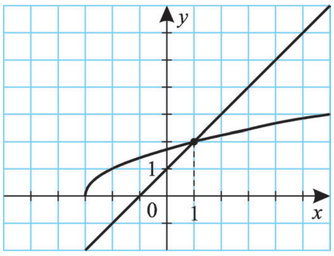
A grafikonról leolvasható, hogy $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

1523/d.



IV

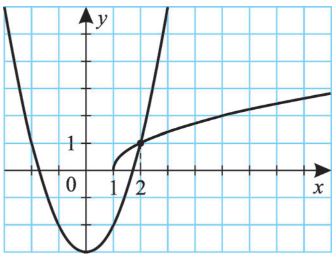
1523/e.



e) Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \geq -3$.

A grafikonról leolvasható, hogy $x = 1$.

1523/f.



f) Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \geq 1$.

A grafikonról leolvasható, hogy $x = 2$.

1524. *a)* Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \geq -5$. Mivel mindkét oldal nemnegatív, így mindkét oldalt négyzetre emelve az egyenlet megoldása: $x = -4$, amely eleme az értelmezési tartománynak.

b) Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \geq 7$, négyzetre emelés után az egyenlet megoldása $x = 16$.

c) Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \leq 4$. Az egyenlet megoldása: $x = -2{,}25$.

d) Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \geq -3$. Az egyenletnek nincs megoldása, mert az egyenlet bal oldalának értékkészlete, nemnegatív, jobb oldal -2.

1525. *a)* Kikötés: $x \geq 4$.

Négyzetre emelve azt az egyenletet kapjuk, hogy:
$4(x-4) = 1$, ebből $x = 4{,}25$, ami valóban megoldás.

b) Kikötés: $x \leq 5{,}5$.

Elosztva 3-mal, majd négyzetre emelve, kapjuk, hogy $x = 3{,}5$.

c) Kikötés: $x \geq -1$.

Rendezzük az egyenletet: $2\sqrt{x+1} = 8$. Négyzetre emelés után az egyenlet gyöke $x = 15$.

d) Kikötés: $x \geq -3{,}5$.

Rendezzük az egyenletet a következő módon: $2\sqrt{x+3{,}5} = 5$, majd négyzetre emelve kapjuk, hogy az egyenlet megoldása $x = 2{,}75$.

e) Kikötés: $x \geq -\frac{1}{9}$.
Rendezzük az egyenletet:
$\frac{3}{2}\sqrt{x+\frac{1}{9}} = 5$. Négyzetre emelés után: $x = 11$ megoldást kapjuk.

1526. *a)* Az egyenlet értelmezési tartománya $x \geq \frac{3}{2}$. Vezessük be az $a = 2x - 3$ jelölést, ekkor $\sqrt{a} = a$ egyenlethez jutunk, amelynek megoldása az $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Visszahelyettesítve kapjuk, hogy $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 2$.

b) Az egyenlet értelmezési tartománya $x \geq \frac{3}{2}$. Az egyenlet bal oldalának értékkészlete nemnegatív, így a jobb oldalnak is nemnegatívnak kell lenni. Ebből adódik, hogy $3 - 2x \geq 0$, azaz $x \leq \frac{3}{2}$. Összevetve az értelmezési tartománnyal $x = \frac{3}{2}$ megoldást kapjuk.

1527. *a)* Az egyenlet értelmezési tartománya: bal oldal: $x \geq -2$, jobb oldal: $x \geq 3$, tehát $x \geq 3$.
Négyzetre emelés után: $x = -7$ adódik, ami nem eleme az értelmezési tartománynak, tehát nem megoldása az egyenletnek.

b) Bal oldal: $x \geq \frac{1}{15}$, jobb oldal: $x \leq \frac{7}{12}$, tehát az értelmezési tartomány:
$\frac{1}{15} \leq x \leq \frac{7}{12}$.
Négyzetre emelés után: $x = \frac{38}{105}$ adódik, és ez megoldása a feladatnak.

1528. *a)* Mivel a négyzetgyök alatt teljes négyzet áll, ezért az egyenlet minden valós számra értelmezhető.
Átalakítva: $\sqrt{(x-3)^2} = x - 3$, ebből
$|x - 3| = x - 3$, melynek megoldása $x \geq 3$.

b) Minden valós számra értelmezett. Átalakítás után: $|x - 2| = 2x + 3$ abszolútértékes egyenletet kapjuk.
Az abszolútérték felbontása után kapott egyenletek:
Ha $x \geq 2$, akkor $x - 2 = 2x + 3$, melynek az adott intervallumon nincs megoldása.
Ha $x \leq 2$, akkor $-x + 2 = 2x + 3$, melynek az adott intervallumon a megoldása $x = -\frac{1}{3}$.

IV

c) Az egyenlet bal oldala $x \geq \frac{15}{4}$ esetén, a jobb oldal $x \leq \frac{1}{4}$ esetén értelmezett. A két halmaznak nincs közös része, tehát az egyenletnek nincs megoldása.

1529. Célszerű a $\sqrt{x} = y$ ismeretlen bevezetése.

a) $x \geq 0$ esetén értelmezett az egyenlet. Ekkor az új egyenlet: $3 - 4y = 5y - 15$ elsőfokú egyenletből: $y = 2$, tehát $x = 4$.

b) Értelmezési tartomány: $x \geq 0$, $x \neq 16$; 49. Az új ismeretlen bevezetése után a törtes egyenlet megoldása: $y = 10$, tehát $x = 100$.

c) Hasonlóan a *b)* részhez: $x \geq 0$, $x \neq \frac{4}{9}$. A megoldás: $x = 4$.

d) $x \geq 0$. Most célszerű az $y = 3\sqrt{x}$ bevezetése. Ekkor az egyenlet: $(y+3)^2 + (y-4)^2 = (y+5)^2$ alakban írható. Zárójelfelbontás, összevonás után:
$y^2 - 12y = 0$, melyből $y_1 = 0, y_2 = 12$. Az egyenlet megoldása: $x_1 = 0, x_2 = 16$.

1530. *a)* Kikötések: $x \geq -6, x \geq -2$, ekkor mindkét oldal nemnegatív, tehát a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.
Négyzetre emelés után az egyenlet: $x^2 + 2x - 8 = 0$. Gyökei: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$, amelyből az eredeti egyenlet gyöke: $x = 2$.

b) Kikötés: $3 \leq x \leq 5$.
Négyzetre emelés után a rendezett egyenlet: $x^2 - 5x + 4 = 0$, melynek gyökei: 4; 1. Az 1 hamis gyöke az egyenletnek, így a megoldás: 4.

c) A négyzetgyök miatt egyrészt $x \leq 5$, másrészt $\frac{1}{2}x - 3 \geq 0$, azaz $x \geq 6$ teljesülése szükséges. Ennek a két egyenlőtlenségnek nincs közös része, tehát a feladatnak nincs megoldása.

d) Kikötés $x \geq -6$.
Rendezzük az egyenletet oly módon, hogy csak a gyökös kifejezés álljon az egyik oldalon.
$\sqrt{2x + 12} = x + 2$, ekkor még az $x \geq -2$-nek is teljesülni kell.
Négyzetre emelés után:
$x^2 + 2x - 8 = 0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei: -4; 2. Ezek közül az eredeti egyenletnek csak az $x = 2$ a megoldása.

e) Kikötés: $x \leq -\frac{5}{4}$, majd rendezés után $\sqrt{-5 - 4x} = 2x + 4$ alakban $x \geq -2$, tehát az egyenlet megoldása $-2 \leq x \leq -\frac{5}{4}$ intervallumon értelmezhető.
A négyzetre emelés után: $4x^2 + 20x + 21 = 0$, melynek gyökei: $-1{,}5$; $-3{,}5$. Az eredeti egyenlet gyöke a $-1{,}5$.

IV

f) A bal oldal $\frac{4}{3}-\frac{2}{9}x \ge 0$, azaz $x \le 6$esetén értelmezhető, és a jobb oldal $x \ge 6$, kell hogy teljesüljön. Így csak az $x = 6$ lehet a megoldás, ellenőrzéssel igazolható, hogy ez valóban jó.

1531. *a)* Közös kikötés: $x \ge \frac{5}{3}$.

Négyzetre emelve, majd rendezve az egyenletet kapjuk:

$3x^2 - 23x + 14 = 0$, melynek gyökei: $7, \frac{2}{3}$.

Az eredeti egyenlet gyöke a 7.

b) Közös kikötés: $x \ge 3$. Lásd előző feladat. A kapott másodfokú egyenlet: $x^2 - 6x + 7 = 0$. Megoldás a 7.

c) Kikötés: $x > 1$, a kapott másodfokú egyenlet: $x^2 - 2x + 15 = 0$. A megoldás: $x = 5$.

d) Kikötés: $x > \frac{8}{3}$, a kapott másodfokú egyenlet: $x^2 - 7x - 44 = 0$.

Az egyenlet megoldása $x = 11$.

1532. *a)* Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \ge 4,25$. Két négyzetgyökös kifejezés összege csak akkor lehet 0, ha a két kifejezés külön-külön 0. Így tehát $x = 3$, és $x = 4,25$ egyszerre kell, hogy teljesüljön, de ez lehetetlen.

b) Kikötés: $x \ge \frac{1}{2}$. Rendezve az egyenletet kapjuk, hogy: $\sqrt{2x-1} = \sqrt{2x+1}$, melyből ellentmondásra jutunk.

c) A kikötések megtétele után vizsgálva az egyenletet ellentmondásra jutunk, hisz két nemnegatív kifejezés összege nem lehet –2.

d) A kikötések során a két egyenlőtlenségnek nincs közös része, mert $x \ge \frac{7}{3}$, és $x \le \frac{3}{4}$. Így az egyenletnek az értelmezési tartománya üres halmaz.

1533. A kikötések megtétele után rendezzük úgy az egyenleteket, hogy mindkét oldalon egy négyzetgyökös kifejezés legyen, majd ezután emeljünk négyzetre, majd a kapott egyenlet rendezése után ismételten emeljünk négyzetre.

a) Kikötés: $11 \le x \le 15$.

Rendezve az egyenletet: $\sqrt{x-11} = 2 - \sqrt{15-x}$.

Emeljünk négyzetre: $x - 11 = 4 - 4\sqrt{15-x} + 15 - x$.

Rendezés után: $x - 15 = -2\sqrt{15-x}$, melyet ha ismét négyzetre emelünk a kapott másodfokú egyenlet: $x^2 - 26x + 165 = 0$, melynek gyökei $x_1 = 15$, és $x_2 = 11$. Mindkét gyök megoldása az eredeti egyenletnek.

b) Kikötés: $x \ge 1$. Rendezés után: $\sqrt{2x+5} = 8 - \sqrt{x-1}$,

majd négyzetre emelve és rendezve: $x - 58 = 16\sqrt{x-1}$.

IV

Másodszori négyzetre emelés után: a kapott másodfokú egyenlet: $x^2 - 372x + 3620 = 0$, melynek gyökei: $x_1 = 362$, és $x_2 = 10$.
Ellenőrzés után a megoldás: $x = 10$.

c) Kikötés: $-7 \leq x \leq 2$.
Rendezés után: $\sqrt{x+7} = 3 + 2\sqrt{2-x}$.
Négyzetre emelve, majd rendezve: $5x - 10 = 12\sqrt{2-x}$.
Újból négyzetre emelve kapjuk: $25x^2 + 44x - 188 = 0$, melynek megoldásai: $x_1 = 2$, és $x_2 = -3{,}76$. Melyek közül csak a 2 megoldása az egyenletnek.

d) Kikötés: $x \geq -4$.
Rendezve kapjuk: $\sqrt{\frac{1}{5}x + 1{,}6} = \sqrt{x+4} - \frac{2\sqrt{5}}{5}$.
Négyzetre emelve, majd rendezve: $\frac{4\sqrt{5}}{5}\sqrt{x+4} = \frac{4}{5}x + 3{,}2$,
amelyből: $\sqrt{5}\sqrt{x+4} = x + 4$. Ennek az egyenletnek a megoldásai: $x_1 = 1$ és $x_2 = -4$. A két gyök közül az eredeti egyenlet megoldása az $x = 1$.

1534. Az ilyen típusú feladatok az egyenletek kétszeri négyzetre emelésével oldhatók meg. A másodszori négyzetre emelés előtt rendezzük úgy az egyenletet, hogy az egyik oldalon csak a négyzetgyökös kifejezés szerepeljen.

a) Kikötés: $x \geq \frac{3}{4}$.
Négyzetre emelve majd rendezve:
$5x + 4 - 2\sqrt{(5x+4)(4x-3)} + 4x - 3 = 3x + 1$, illetve
$3x = \sqrt{20x^2 + x - 12}$.
Újból négyzetre emelve, majd rendezve a $11x^2 + x - 12 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei: $x_1 = \frac{3}{11}$, és $x_2 = -\frac{4}{11}$, a kikötésnek azonban ezek a gyökök nem felelnek meg.

b) Kikötés: $x \geq 6$.
Az előzőhöz hasonlóan:
$\sqrt{(x+1)(x-6)} = 12$, majd ismételt négyzetre emelés után a kapott másodfokú egyenlet: $x^2 - 5x - 150 = 0$, melynek gyökei: $x_1 = 15$ és $x_2 = -12$. Kikötés miatt csak a 15 lehet megoldás és ez valóban jó.

c) Kikötés: $x \geq -\frac{4}{7}$.
Hasonlóan az előzőkhöz a kapott másodfokú egyenlet:
$21x^2 - 58x - 15 = 0$, melynek megoldásai: $x_1 = 3$, és $x_2 = -\frac{5}{21}$, ezek közül az eredeti egyenletnek a 3 a megoldása.

d) Kikötés: $x \geq 7$.
Az előzőkhöz hasonlóan: a kapott másodfokú egyenlet:
$x^2 - 4x - 24 = 0$, melynek gyökei: $x_{1;2} = 2 \pm 2\sqrt{7}$, amelyek közül a $2 + 2\sqrt{7}$ megoldása az eredeti egyenletnek.

1535. Képletbe való behelyettesítés, majd négyzetre emelés után adódik, hogy $s \approx 16{,}5\,\text{m}$. Egy emeletes ház egy emeletének magassága 2,5–3 m között van, így a labdát az ötödik vagy hatodik emeletről ejtették ki.

1536. A megadott képlet alkalmazása során a megfelelő adatokra kell figyelni. A lejtő alján elért sebesség a lassulás kezdősebessége, majd a mozgás során a végsebesség 0. Ezek után a képletbe való behelyettesítéssel adódik: $0 = \sqrt{10^2 - 2 \cdot 3 \cdot s}$. Ebből $s \approx 16{,}7\,\text{m}$. A szánkó közelítőleg 17 m út megtétele után áll meg.

1537. A képletbe való behelyettesítéssel könnyen kifejezhető a megtett út, de a behelyettesítés előtt minden sebesség mértékegységet $\frac{\text{m}}{\text{s}}$-ba kell váltani.

a) $v_0 = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 16{,}67\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
$v = 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 8{,}33\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, ekkor a megtett út hossza közelítőleg 15 m (14,88 m).

b) $v_0 = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, ekkor a megtett út kb. 40 m hosszú (39,68 m).

1538. *a)* Kikötések: $x^2 + 5x - 7 \geq 0$, amelyből

$$x \leq \frac{-5-\sqrt{53}}{2}, \text{ vagy } x \geq \frac{-5+\sqrt{53}}{2}, \qquad \text{(I)}$$

és $x^2 + 5x - 19 \geq 0$, amelyből $x \leq \frac{-5-\sqrt{101}}{2}$, vagy $x \geq \frac{-5+\sqrt{101}}{2}$, (II)

(I) és (II) közös része $x \leq \frac{-5-\sqrt{101}}{2}$, vagy $x \geq \frac{-5+\sqrt{101}}{2}$.

Vezessünk be alkalmasan megválasztott ismeretlent: Legyen $x^2 + 5x - 19 = a$, ekkor az egyenlet: $4\sqrt{a+12} = a$ alakú lesz. ($a \geq 0$.) A kikötés miatt mindkét oldal értelmezett, és nemnegatív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens lépés. A kapott másodfokú egyenlet $a^2 - 16a - 192 = 0$, melynek gyökei $a_1 = 24$, és $a_2 = -8$. –8 a kikötés miatt nem lehet, ezért visszahelyettesítés után a kapott egyenlet: $x^2 + 5x - 19 = 24$, melynek gyökei: $x_{1;2} = \frac{-5 \pm \sqrt{197}}{2}$. Mivel az egyenlet megoldása során ekvivalens lépéseket végeztünk a megfelelő kikötések elvégzése után, ezért a kapott gyökök az eredeti egyenletnek is megoldásai.

IV

b) Kikötések: $x^2+7x-8\geq 0$, és $x^2+7x-12\geq 0$, melyekből

$x\leq\dfrac{-7-\sqrt{97}}{2}$, vagy $x\geq\dfrac{-7+\sqrt{97}}{2}$.

Az új ismeretlen bevezetése után: $x^2+7x-12=a$ kapott egyenlet: $3\sqrt{a+4}=a$ $(a\geq 0)$. Ennek gyökei: $a_1=12$, és $a_2=-3$. A kikötéssel összevetve csak a 12 lehet megoldás. Visszahelyettesítve a kapott másodfokú egyenlet gyökei: $x_{1;2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{145}}{2}$. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk a megfelelő kikötések elvégzése után, ezért az egyenletnek mindkét gyök megoldása.

c) Kikötés: $x^2+3x-6\geq 0$, amelyből $x\leq\dfrac{-3-\sqrt{33}}{2}$, vagy $x\geq\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}$.

Vezessünk be új ismeretlent $a=x^2+3x-6$ (I).

Az új egyenlet: $a+4\sqrt{a}=12$.

Rendezve $4\sqrt{a}=12-a$, ahol a kikötések $a\geq 0$ (II), és $a\leq 12$ (III).

(II)-ből: $x\leq\dfrac{-3-\sqrt{33}}{2}$, vagy $x\geq\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}$.

(III)-ből: $-6\leq x\leq 3$.

(II) és (III) összevetése után:

$-6\leq x\leq\dfrac{-3-\sqrt{33}}{2}$, vagy $\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}\leq x\leq 3$.

Most már négyzetre emelve az egyenletet a kapott gyökök $a_1=36$, és $a_2=4$. (III) miatt csak a 4 lehet a megoldás. Visszahelyettesítve (I)-be a kapott gyökök: $x_1=2$, és $x_2=-5$. Mivel a kikötések vizsgálata után ekvivalens átalakításokat végeztünk, ez a két gyök megoldása az eredeti egyenletnek.

1539. *a)* Kikötések: $16+x^2\geq 0$ $\forall x\in\mathbf{R}$ esetén teljesül.

$16-x\sqrt{16+x^2}\geq 0$; és $x\leq 4$.

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát:

$16-8x+x^2=16-x\sqrt{16+x^2}$.

Nullára rendezve, majd szorzattá alakítva:

$x\left(\sqrt{16+x^2}-x+8\right)=0$.

Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Így tehát $x=0$ vagy $\sqrt{16+x^2}-x+8=0$;

melyet a $\sqrt{16+x^2}=x-8$ átalakítás után megoldva $x=3$ adódik. Mindkét gyök nemnegatív és megoldása az eredeti egyenletnek.

b) Kikötések megvizsgálása után adódik: $x\geq 1$.

Az előzőhöz hasonlóan négyzetre emelve majd szorzattá alakítva adódik, hogy $x = 0$, ami a kikötés miatt nem lehet, majd $x = \frac{5}{4}$. Ez a gyök nemnegatív és megoldása az eredeti egyenletnek.

1540. Vezessük be az $y = \sqrt{x-8}$ jelölést. A nevezőben nevezetes szorzatokat vehetünk észre, a közös nevezőre hozáskor, ezért egyenletünk összevonva és rendezve így írható:

$$\frac{(2y-6)\left[9\left(y^2-16\right)+4\left(y^2-81\right)\right]}{\left(y^2-16\right)\left(y^2-81\right)} = 0.$$

A számlálóból származó gyökök: $y_1 = 3,\ y_2 = 6,\ y_3 = -6$, és ezek nem gyökei a nevezőben levő másodfokú tényezőknek.
$\sqrt{x-8}$ értékére természetesen csak a nemnegatív értékek jöhetnek szóba. Ennek megfelelően az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1 = 17$, illetve az $x_2 = 44$.

1541. Négyzetre emeléssel a bal oldalon negyedfokú tag szerepelne, így próbálkozzunk más ötlettel. A négyzetgyök alatti kifejezés 24-gyel nagyobb, mint az egyenlet bal oldalán levő, így vezessünk be új ismeretlent:

$$y = \sqrt{x^2+5x+28}\,.$$

Ekkor egyenletünk: $y^2 - 5y - 24 = 0$. Ennek nemnegatív gyöke: $y = 8$.
Visszahelyettesítve: $\sqrt{x^2+5x+28} = 8$, melynek gyökei: $x_1 = 4$ és $x_2 = -9$. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy ezek valóban megoldásai az eredeti egyenletnek.

1542. A bal oldali összeg miatt: $x^2 - 5x + 7 \geq 0$, így $2 \leq x \leq 3$.
Mivel $x^2 - 5x + 7 = (x-2)(x-3) + 1$, így a jobb oldal értéke a vizsgált intervallumon legfeljebb 1.
Az intervallumban levő valós számokra vizsgáljuk a bal oldal értékét:
$\sqrt{x-2} \geq x-2$ és $\sqrt{3-x} \geq 3-x$, mivel a gyök alatt 1-nél nem nagyobb számok vannak. Így a bal oldalon levő összeg értéke legalább 1. Tehát az egyenlőség pontosan akkor teljesülhet, ha mindkét oldal értéke 1. Ez $x_1 = 2$ és $x_2 = 3$ esetén áll fenn. Behelyettesítéssel látható, hogy ezek valóban megoldások.

1543. Az értelmezési tartományok vizsgálata alapján egyenletünk nincs értelmezve, ha:
$1 < x < 2$, vagy $3 < x < 4$. Rendezve:

$$\sqrt{(x-1)(x-2)} = \sqrt{2} - \sqrt{(x-3)(x-4)};$$

$x^2 - 3x + 2 = 2 - 2\sqrt{2(x-3)(x-4)} + x_2 - 7x + 12$. Rendezve, majd ismét négyzetre emelve:

$$2(x-3)^2 = (x-3)(x-4);$$

$(x-3)(x-2)=0$, azaz $x_1=3$, illetve $x_2=2$. A behelyettesítés mutatja, hogy ezek valóban megoldások.

1544. Kikötéseink: $x \geq -4$, illetve $|x| \geq 2$.

Négyzetre emelés után az $x^4-8x^2-x+12=0$ egyenletet kapjuk.

Mivel egész gyökei nincsenek, próbáljuk meg szorzattá alakítani.

$$x^4-8x^2-x+12=\left(x^2-x-4\right)\left(x^2+x-3\right).$$

A szorzat alak egyik tényezőjét megkaphatjuk abból a megfontolásból kiindulva, hogy a két oldal függvényei egymás inverzei, így képeik az $f(x)=x$ egyenesén metszik egymást, azaz a metszéspont abszcisszájára fennáll: $x^2-4=x$. A szorzat alakot vizsgálva a következő gyököket kapjuk a tényezőkből:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}, \text{ illetve: } x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}.$$

Kikötéseinket figyelembe véve a feladat megoldásai: $x_1=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$, $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

1545. Az egyenletnek csak $x \geq \dfrac{3}{4}$ esetén lehet csak megoldása.

Tekintsük az $f(x)=\sqrt{-3+4x}$ függvényt. A függvény az alaphalmazon szigorúan monoton nő. Ha $x>f(x)$, akkor a monotonitás miatt $f(x)>f(f(x))$, és $f(f(x))>f(f(f(x)))$. Ilyen x tehát nem lehet megoldása az egyenletnek. Hasonlóan látható, hogy x akkor sem lehet megoldás, ha $x<f(x)$.

Tehát csak akkor kaphatunk megoldást, ha $x=f(x)$, azaz ha $x=\sqrt{-3+4x}$. Négyzetre emelés és rendezések után: $x^2-4x+3=0$, melynek gyökei: $x_1=1$ és $x_2=3$. Ellenőrzéssel láthatjuk, hogy ezek kielégítik az eredeti egyenletet.

1546. A bal oldal akkor értelmes, ha $x \geq -\dfrac{7}{2}$, míg a jobb oldal ha $|x| \geq \sqrt{7}$.

A kikötéseink akkor teljesülnek egyszerre, ha $-\dfrac{7}{2} \leq x \leq -\sqrt{7}$ vagy $\sqrt{7} \leq x$.

Négyzetre emelve és rendezve: $x^4-14x^2-8x+21=0$. Az együtthatókat figyelve látható, hogy ennek gyöke az $x_1=1$. Ezért szorzattá alakítva egyenletünk: $(x-1)\left(x^3+x^2-13x-21\right)=0$.

Vizsgáljuk a második tényezőt:

$$x^3+x^2-13x-21=\left(x^3-2x^2-7x\right)+\left(3x^2-6x-21\right)=x\left(x^2-2x-7\right)+$$
$$+3\left(x^2-2x-7\right)=(x+3)\left(x^2-2x-7\right).$$

Tehát további gyök: $x_2=-3$ az első tényezőből, valamint: $x_3=1+2\sqrt{2}$ és az $x_4=1-2\sqrt{2}$ a második tényezőből. A kikötéseinknek azonban csak az

$x_2 = -3$ és az $x_3 = 1 + 2\sqrt{2}$ felelnek meg. Ezek ki is elégítik az eredeti egyenletet.

1547. Emeljük köbre mindkét oldalt. Rendezés után egyenletünk:
$3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}\right)=7$. A zárójelben levő kifejezés éppen az eredeti egyenletünk bal oldala, ezért $3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1-x}\cdot 2=7$, ahonnan: $\sqrt[3]{x(1-x)}=\frac{7}{6}$.
Köbre emelve az $x^2-x+\left(\frac{7}{6}\right)^3=0$ másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek diszkriminánsa negatív, tehát az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán.

1548. Köbre emelve és rendezve a következő egyenletet kapjuk:

$$3\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{4-x}\left(\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{4-x}\right)=-x+8.$$

A zárójelben levő kifejezés épp az egyenletünk bal oldala, így:
$3\sqrt[3]{3(2x+1)(4-x)}=x+8$. Ismét köbre emelve: $x^3+186x^2-375x+188=0$.
Az együtthatók összege 0, így $(x-1)$ kiemelhető, majd a kapott másodfokú tényező szorzattá alakítható: $(x-1)^2(x+188)=0$. Ennek két gyöke van, az 1 és a -188. Az $x=1$, az eredeti egyenletnek nem megoldása, míg az $x=-188$ igen, erről behelyettesítéssel is meggyőződhetünk.

1549. Nyilván x nem lehet negatív szám. Legyen y szintén nem negatív, melyre teljesül: $\sqrt[12]{x}=y$. Ekkor az új ismeretlen kapott egyenlet: $y^3+y^6=2y^4$. Ha $y=0$, akkor $x=0$ és ez megoldás. Ha $y\neq 0$, akkor oszthatunk y^3-nal. Így az $y^3-2y+1=0$ egyenlethez jutunk.
Mivel az együtthatók összege 0, így az egyik megoldás az $y=1$.
Az egyenlet szorzat alakja: $(y-1)\left(y^2+y-1\right)=0$. A második tényezőből kapott gyökök: $y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Mivel csak pozitív értékek lehetnek a megfelelők, így az eredeti egyenletnek három megoldása lehet:

$y=0$, $\quad x_1=0$;
$y=1$, ekkor $x_2=1$;
$y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\quad x_3=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{12}$.

1550. Emeljünk négyzetre: $\sqrt{16+x}+\sqrt{16-x}=16-2\sqrt[4]{256-x^2}$.
Újabb négyzetre emelés után:

$$32+2\sqrt{256-x^2}=256-64\sqrt[4]{256-x^2}+4\sqrt{256-x^2}.$$

Legyen: $y = \sqrt[4]{256 - x^2}$. Ekkor a következő egyenlethez jutunk:
$y^2 - 32y + 112 = 0$.
Ennek gyökei: $y_1 = 4$ és az $y_2 = 28$.
Ha $y_1 = 4$, akkor $x = 0$, míg az $y_2 = 28$ nem ad valós megoldást.
Tehát az egyenlet egyetlen megoldása: $x = 0$.

1551. Kikötésünk: $x \geq 0$, ekkor $p \geq 0$ is igaz.

IV

Rendezzük át az egyenletet: $\sqrt{p + \sqrt{x}} = p - x$.
Ábrázoljuk a következő függvényeket:

$$f(x) = p - x,$$
$$g(x) = \sqrt{p + \sqrt{x}}.$$

Az $f(x)$ függvény képe egyenes, mely a tengelyeket metszi a $(0;\ p)$ és a $(p;\ 0)$ pontokban.
A $g(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő függvény, melynek képe az y tengely $\sqrt{p}$ pontjából indul ki. Így pontosan akkor létezik megoldás, ha $\sqrt{p} \leq p$, azaz ha $p \leq p^2$.
Ekkor $p^2 - p = p(p-1) \geq 0$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $p = 0$, vagy ha $p \geq 1$.

1552. Kikötésünk: $x \geq 0$.
Emeljünk négyzetre: $\left(\sqrt{x}\right)^2 + a\sqrt{x} + b - c^2 = 0$.
Ez $\sqrt{x}$-re nézve másodfokú egyenlet, melynek legfeljebb két gyöke lehet a valós számok halmazán, azaz az eredeti egyenletnek semmilyen paraméterértékek esetén sem lehet végtelen sok megoldása.

1553. Rendezés és négyzetre emelés után: $(a + 2c)\sqrt{x} = c^2 - b$.
Ha az eredeti egyenletnek végtelen sok megoldása van, akkor ennek a következményegyenletnek is végtelen sok megoldása kell hogy legyen. Ez viszont csak úgy lehet, ha $a = -2c$ és $b = c^2$. Visszahelyettesítve ezeket az eredeti egyenletbe: $\sqrt{x - 2c\sqrt{x} + c^2} + \sqrt{x} = c$, vagyis $\left|c - \sqrt{x}\right| + \sqrt{x} = c$ kell, hogy teljesüljön. Ez pontosan akkor áll fenn, ha $0 < c$.
Összegezve: az egyenletnek akkor van végtelen sok megoldása, ha: $c > 0$ és $a = -2c$, $b = c^2$.

1554. Rendezzük az egyenletet: $3x - 4x^3 = \left(1 - 4x^2\right)\sqrt{1 - x^2}$ alakra.
Négyzetre emelve és rendezve: $32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = 0$.
Legyen $y = x^2$, ekkor egyenletünk: $32y^3 - 48y^2 + 18y - 1 = 0$.
Írjuk fel egyenletünket a következő alakban: $4(2y)^3 - 12(2y)^2 + 9(2y) - 1 = 0$.
Az együtthatók alapján a $2y = 1$, azaz $y = \frac{1}{2}$ ennek megoldása.

$(2y-1)$-et kiemelve: $(2y-1)\left(4(2y)^2-8(2y)+1\right)=0$.

A második tényező 0, ha $2y=\dfrac{4\pm\sqrt{12}}{4}$.

Tehát y-ra a megoldásaink: $y_1=\dfrac{1}{2}$, $y_2=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$, $y_3=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Az eredeti egyenlet megoldásai lehetnek: $x_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x_{5,6}=\dfrac{\pm\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

A négyzetre emelések miatt ellenőriznünk kell a kapott gyököket, ezek alapján feladatunk megoldásai: $x_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, $x_3=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Irracionális egyenlőtlenségek

1555. Az egyenlőtlenség bal és jobb oldalán álló függvények metszéspontját M-mel jelöljük.

a) Közös értelmezési tartomány: $x\geq 0$, $M(16{,}4)$, megoldás: $0\leq x\leq 16$.

b) Közös értelmezési tartomány: $x\geq 1$, $M(5{,}2)$, megoldás: $1\leq x\leq 5$.

c) Közös értelmezési tartomány: $x\geq 2$, metszéspont nincs, megoldás: nincs ilyen valós szám.

1556. *a)* Kikötés: $3x+3\geq 0$, azaz $x\geq -1$, ekkor mindkét oldal nem negatív, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás. Megoldás: $-1\leq x\leq 2$.

b) Kikötés: $x\geq -\dfrac{10}{3}$. Négyzetre emelés és rendezés után a megoldás: $-\dfrac{10}{3}\leq x\leq -3$, vagy $x\geq -2$.

c) Kikötés: $x\geq 1$. Négyzetre emelés és rendezés után: $0<x^2-5x-6$, melyből a megoldás $x>6$.

1557. *a)* Kikötés: $x\geq -\dfrac{16}{5}$.

Ha $-\dfrac{16}{5}\leq x<-2$, akkor az állítás igaz, mert a jobb oldal negatív.

Ha $x\geq -2$, akkor négyzetre emelés és rendezés után:
a $0>x^2-x-12$ egyenlőtlenségből: $-2\leq x<4$.

Összegezve a megoldás: $-\dfrac{16}{5}\leq x<4$.

b) Kikötés: $x\geq -\dfrac{1}{2}$. Négyzetre emelés és rendezés után a megoldás: $-\dfrac{1}{2}\leq x\leq 2$.

c) Kikötés: $x \geq \frac{7}{3}$. Négyzetre emelés és rendezés után a megoldás: $x \leq -2$. Ez ellentmond a kezdeti feltételnek, így az egyenlőtlenségnek nincs valós megoldása.

1558. *a)* A négyzetgyökök alatt teljes négyzetek vannak, ezért az egyenlőtlenségünk a következő alakba írható: $|x+2|+|x-3| \leq 3$.
Ha $x < -2$, akkor az egyenlőtlenség: $-x-2-x+3 \leq 3$, azaz $x \geq -1$. Ez ellentmondás.
Ha $-2 \leq x \leq 3$, akkor az egyenlőtlenség: $x+2-x+3 \leq 3$. Ez is ellentmondás.
Ha $x \geq 3$, akkor az egyenlőtlenség: $x+2+x-3 \leq 3$, azaz $x \leq 2$. Ismét ellentmondásra jutottunk, így a feladat feltételeinek egyetlen valós szám sem tesz eleget.

b) A négyzetgyök alatt teljes négyzet van, ezért az egyenlőtlenségünk a következő alakba írható: $|x+1| \leq x+3$.
A jobb oldal akkor lesz nem negatív, ha $x \geq -3$.
Ha $x < -1$, akkor az egyenlőtlenség: $-x-1 \leq x+3$, melyből: $x \geq -2$.
Ha $x \geq -1$, akkor az egyenlőtlenség: $x+1 \leq x+3$, mely minden számra igaz.
Összegezve a feladat megoldása: $x \geq -2$ valós számok.

c) A négyzetgyök alatt teljes négyzet van, ezért az egyenlőtlenségünk a következő alakba írható: $|x+5| \geq x-2$.
Ha $x < 2$, akkor a jobb oldal negatív, így az egyenlőtlenség fennáll.
Ha $x < -5$, akkor az egyenlőtlenség: $-x-5 \geq x-2$, azaz $x \leq -\frac{3}{2}$.
Ha $x \geq -5$, akkor az egyenlőtlenség: $x+5 \geq x-2$, mindig igaz.
Összegezve: az eredeti egyenlőtlenséget minden valós szám kielégíti.

1559. *a)* Kikötés: $x \geq 5$, ekkor mindkét gyökös kifejezés értelmezhető.
Négyzetre emelve: $2\sqrt{x^2-5x} \leq 28-2x$. A jobb oldal nem negatív, ha $x \leq 14$.
Ismét négyzetre emelve: $x^2-5x \leq x^2-28x+196$, melyből $x \leq \frac{196}{23}$.
Összegezve a megoldás: $5 \leq x \leq \frac{196}{23}$.

b) Kikötés: $x \geq 8$ esetén a gyökös kifejezések értelmezhetők.
Rendezve és négyzetre emelve: $2x+1 > x-8+3+6\sqrt{x-8}$.
Rendezve és újra négyzetre emelve: $x^2-36x+288>0$, mely teljesül, ha $x<12$, vagy $x>24$.
Tehát a megoldás: $8 \leq x < 12$, vagy $x > 24$.

1560. A bal oldal értéke mindig nem negatív, így teljesül az egyenlőtlenség, ha a gyök alatti tört nem negatív.

Kikötésünk és egyben az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{1}{2} < x \leq 2$.

1561. *a)* Kikötésünk: $1 - \frac{x+2}{x^2} \geq 0$, azaz $\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \geq 0$ teljesül, ha $x \leq -1$, vagy $x \geq 2$.

Négyzetre emelve és rendezve: $\frac{5x^2 - 9x - 18}{9x^2} < 0$.

Mivel a nevező mindig pozitív, így a számlálónak negatívnak kell lennie.

$5x^2 - 9x - 18 < 0$, ha $-1{,}2 < x < 3$. Összevetve a kikötésekkel az egyenlőtlenség megoldása: $-1{,}2 < x \leq 1$, vagy $2 \leq x < 3$.

b) Kikötéseink: $x \neq 0$, és $|x| \leq \frac{1}{2}$. Esetszétválasztással dolgozunk:

Ha $0 < x < \frac{1}{3}$, akkor beszorozva és négyzetre emelve: $13x^2 - 6x < 0$, ami az alaphalmaz minden értékére igaz.

Ha $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$, akkor $1 - 3x < \sqrt{1 - 4x^2}$. Ez az alaphalmaz minden értékére igaz.

Ha $-\frac{1}{3} < x < 0$, akkor rendezés és négyzetre emelés után: $13x + 6 > 0$. Ez ismét az alaphalmaz bármely értéke esetén igaz.

Ha $-\frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{3}$, akkor $1 - \sqrt{1 - 4x^2} \geq 0$, és $3x < 0$ miatt a megoldás: $-\frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{3}$.

Összegezve az egyenlőtlenség megoldása: $-\frac{1}{2} \leq x < 0$, vagy $0 < x \leq \frac{1}{2}$.

1562. Alakítsuk teljes négyzetté a bal oldalt: $\left(\sqrt{x^2 + 1} - 1\right)^2 - 4 \geq 0$.

Szorzattá alakítva: $\left(\sqrt{x^2 + 1} - 1 - 2\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} - 1 + 2\right) \geq 0$.

A második tényező minden x-re pozitív, így az első tényezőnek szintén pozitívnak kell lennie. Ez egyben az egyenlőtlenségünk megoldása is:

$x \leq -2\sqrt{2}$ vagy $x \geq 2\sqrt{2}$.

1563. Kikötéseink: $x + 1 \geq 0$, és $3 - x \geq 0$, azaz $-1 \leq x \leq 3$.

Rendezve az egyenlőtlenséget: $\sqrt{3 - x} > \sqrt{x + 1} + \frac{1}{2}$.

Négyzetre emelve a $\frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x + 1}$ ekvivalens egyenlőtlenséget kapjuk.

A bal oldal nem lehet negatív, így: $x < \frac{7}{8}$.

Ismét négyzetre emelve és rendezve: $4x^2 - 8x + \frac{33}{16} > 0$ egyenlőtlenséghez jutunk.

Szorzattá alakítva: $4\left(x - \frac{8+\sqrt{31}}{8}\right)\left(x - \frac{8-\sqrt{31}}{8}\right) > 0$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $x > 1 + \frac{\sqrt{31}}{8}$, vagy ha $x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$.

Összevetve a kikötésekkel az egyenlőtlenséget a következő valós számok teszik igazzá: $-1 \le x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$.

1564. Alakítsuk szorzattá a másodfokú kifejezéseket:

$$\frac{(x+2)(x-3)(x-1)(x+5)}{|x+5|} \ge 0.$$

A nevező, ha $x \ne -5$, mindig pozitív. A számláló tényezőinek zérushelyei rendre: -2; 3; 1; -5.

Tehát a megoldás: $x < -5$, vagy $-2 \le x \le 1$, vagy $x \ge 3$.

1565. Kikötés: $x \le -7$, vagy $x \ge 17$.

Az egyenlőtlenség bal oldala $\sqrt{(x-17)(x+7)}$-re másodfokú kifejezés. Alakítsuk szorzattá az egyenlőtlenség bal oldalán levő kifejezést:

$$\left(\sqrt{(x-17)(x+7)} - 9\right)\left(\sqrt{(x-17)(x+7)} - 5\right) \ge 0.$$

Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát a biztosan pozitív $\left(\sqrt{(x-17)(x+7)} + 9\right)\left(\sqrt{(x-17)(x+7)} + 5\right)$ szorzattal:

Ekkor egyenlőtlenségünk: $\left(x^2 - 10x - 200\right)\left(x^2 - 10x - 144\right) \ge 0$.

A tényezők zérushelyei: $x_1 = 20$, $x_2 = -10$, illetve $x_3 = 18$, $x_4 = -8$.

Összevetve a kikötésekkel, az egyenlőtlenség megoldása:

$x \le -10$, vagy $-8 \le x \le -7$, vagy $17 \le x \le 18$, vagy $x \ge 20$.

1566. A gyökjel alatti kifejezéseknek és a bal oldalnak is pozitívnak kell lennie, ezért a kikötések: $0 < 1 - x < 1 + x$, ezért: $0 < x < 1$.

Ha az egyenlőtlenséget a nevezők szorzatával szorozzuk, nem változik a relációs jel állása, vagyis: $\sqrt{1+x}\,\sqrt{1-x} \ge \sqrt{1-x^2}$.

A kisebb oldal pozitív, emiatt négyzetre emelve: $2 - 2\sqrt{1-x^2} \ge 1 - x^2$, ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk.

Legyen $z = \sqrt{1-x^2} > 0$.

Ekkor: $0 \ge z^2 + 2z - 2 = (z+1)^2 - 3 = \left(z + 1 + \sqrt{3}\right)\left(z + 1 - \sqrt{3}\right)$.

Mivel a jobb oldali első tényező pozitív, így a második tényezőnek negatívnak kell lennie: $z + 1 - \sqrt{3} = \sqrt{1 - x^2} + 1 - \sqrt{3} \le 0$.
Ebből: $1 - x^2 \le 4 - 2\sqrt{3}$, azaz $x^2 \ge 2\sqrt{3} - 3$. A feltételek miatt:

$x \ge \sqrt{2\sqrt{3} - 3}$.

Tehát az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $\sqrt{2\sqrt{3} - 3} \le x < 1$.

1567. *a)* Ha $x \le \frac{p}{2}$, akkor a gyökös kifejezés értelmezhető.
Ha $p = 0$, akkor $x < \sqrt{-2x}$. Ez csak akkor teljesül, ha $x < 0$.
Ha $p < 0$, akkor $x < \sqrt{p - 2x}$. A gyök alatti kifejezés miatt: $x \le \frac{p}{2} < 0$.
Ha $p > 0$, akkor a következő eseteket kell vizsgálnunk:
(1) $p > 0$ és $x \le 0$, akkor az egyenlőtlenség mindig teljesül.
(2) $p > 0$ és $x > 0$, akkor a gyökös tag miatti kikötésünk: $x \le \frac{p}{2}$.
Ekkor négyzetre emelve: $x^2 + 2x - p < 0$.
Ez teljesül, ha $-1 - \sqrt{1 + p} < x < -1 + + \sqrt{1 + p}$.
Mivel x pozitív, így $0 < x < -1 + \sqrt{p + 1}$.
Összegezve (1) és (2) eseteket: ha $p > 0$, akkor $x < -1 + \sqrt{p + 1}$.

b) Kikötés: $x \le 2$.
Ha $p \le -1$, akkor a bal oldal értéke negatív vagy 0, minden olyan esetben, ha $x \le 2$.
Ha $p > -1$, akkor a bal oldali szorzat tényezői nem negatívak, így négyzetre emelve: $(p + 1)^2(2 - x) < 1$.
Az egyenlőtlenség teljesül, ha $2 - \frac{1}{(p + 1)^2} < x \le 2$.

1568. A feltételek miatt: $a + b > x > a - b > 0$, így ezek négyzetgyökére is igaz, hogy:
$\sqrt{a + b} > \sqrt{x} > \sqrt{a - b}$.
Adjunk $\sqrt{a}$-t az egyenlőtlenséglánc minden tagjához:
$\sqrt{a + b} + \sqrt{a} > \sqrt{x} + \sqrt{a} > \sqrt{a} + \sqrt{a - b}$.
Mivel ezek a mennyiségek is pozitívak, így reciprokaikra:

$$\frac{1}{\sqrt{a + b} + \sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a - b}}.$$

Ebből a nevezőket gyöktelenítve a bizonyítandó állítást kapjuk.

1569. Elég belátnunk azt, hogy az $\frac{1}{n+1} < \frac{i+\sqrt{n^2+i}}{(n+i)\sqrt{n^2+i+2}} < \frac{1}{n}$ egyenlőtlenség teljesül minden $i=1, 2, 3, \ldots n$ számra, mert ezeket összeadva az eredeti egyenlőtlenséget kapjuk.
Nézzük először az állítás bal oldalát!
Rendezve: $(n+i)\sqrt{n^2+i+2} < (n+1)\left(i+\sqrt{n^2+i}\right)$ ami igaz, mert:

IV

$n+i < i+\sqrt{n^2+i}$, és $\sqrt{n^2+i+2} < n+1$.

Hasonlóan vizsgálva a jobb oldalt:

$ni+n\sqrt{n^2+i} < n\sqrt{n^2+i+2}+i\sqrt{n^2+i+2}$,

ami igaz, mert

$ni < i\sqrt{n^2+i+2}$, és $n\sqrt{n^2+i} < n\sqrt{n^2+i+2}$.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek

Abszolútértékes egyenletek

1570. *a)* $x=\pm 10$, $x=\pm 12$, $x=\pm 14{,}2$, $x=\pm 11$;
b) $x=\pm\frac{7}{2}$, $x=\pm 1$, nincs megoldás;
c) $x_1=8$, $x_2=-4$, $x_1=9$, $x_2=-15$, $x_1=20{,}5$, $x_2=-10{,}5$.

1571. *a)* $x_1=13$, $x_2=-11$, $x_1=1$, $x_2=-7$, $x_1=-4$, $x_2=-6$;
b) $x_1=\frac{9}{2}$, $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_1=\frac{13}{3}$, $x_2=-\frac{11}{3}$, $x_1=8$, $x_2=0$.

1572. *a)* nincs megoldás, $x=\pm\frac{3}{2}$, $x\geq 2$;
b) $x=-\frac{3}{2}$, $x=\frac{11}{2}$, $x=3$.

1573. *a)* $x_{1,2}=\pm 2\sqrt{6}$, $x_{1,2}=\pm 2\sqrt{6}$, $x_{3,4}=\pm 4$, $x_{1,2}=1\pm\sqrt{5}$;
b) $x_{1,2}=\pm 3$, $x_1=3$, $x_2=-2$, $x_1=-3$, $x_2=2$;
c) $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_1=3$, $x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$, $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$, $x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$.

1574. *a)* $2\leq |x| \leq 3$, $-4\leq x\leq 4$;
b) $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$.