IV

Magasabbfokú egyenletek

1490. *a)* $x=\pm\frac{3}{2}$; *b)* $x=\pm\frac{5}{3}$; *c)* $x=2,5$.

1491. *a)* Legyen $x^2=y$. Új egyenletünk: $y^2-5y+4=0$. Ennek gyökei: $y_1=1,\ y_2=4$.
Tehát egyenletünk gyökei: $x_{1,2}=\pm 1, x_{3,4}=\pm 2$.
b) Új egyenletünk: $2y^2-5y-3=0$, gyökei: $y_1=-\frac{1}{2}$ nem ad megoldást x-re a valós számok halmazán, $y_2=3$. Tehát egyenletünk gyökei: $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$.
c) Legyen $x^4=y$. Új egyenletünk: $y^2-17y+16=0$. Ennek gyökei: $y_{1,2}=\pm 4,\ y_{3,4}=\pm 1$. Csak a nemnegatív gyökök felelnek meg, ezért $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=\pm 1$.

1492. *Megoldás I.:*
Legyen $x^3=y$, ekkor $y^2-9y+1=0$, melynek gyökei $y_1=1,\ y_2=\frac{1}{8}$. Az $x^3=1$, és az $x^3=\frac{1}{8}$ egyenletek gyökei pozitív számok, így az eredeti egyenletnek nincs negatív gyöke.
Megoldás II.:
Ha x negatív szám, akkor az egyenlet bal oldalának minden tagja pozitív, így összegük nem lehet 0, tehát nincs az alaphalmazba tartozó megoldás.

1493. Pozitív szám nem lehet, mert ekkor a bal értéke pozitív. A negatív számok nagyságrendjét figyelve csak az $x=-1$ jöhet szóba. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk erről.
Megjegyzés: a további gyökök $x_2=-2,\ x_3=-3$.

1494. Legyen $x+1=y$, ekkor $y^2+5y-14=0$, ennek gyökei: $y_1=2,\ y_2=-7$. Tehát eredeti egyenletünk gyökei: $x_1=1,\ x_2=-8$.

1495. Legyen $\frac{2}{3}x-5=y$. Az $y^2+2y-15=0$ egyenlet gyökei: $y_1=3,\ y_2=-5$.
Tehát egyenleteink: $\frac{2}{3}x-5=3$ és $\frac{2}{3}x-5=-5$. Ezek a gyökei az eredeti egyenletnek: $x_1=12,\ x_2=0$.

1496. A nevező 0-tól különböző, így : $x\neq -1\pm\sqrt{\frac{16}{3}}$.
Legyen $x^2+2x-6=y$, ekkor a nevező $3x^2+6x-13=3y+5$.
Új egyenletünk 0-ra rendezve: $3y^2+2y-4=0$, melynek gyökei: $y_1=-\frac{4}{3},\ y_2=1$.

Tehát $x^2+2x-6=-\frac{4}{3}$, melyből $x=-1\pm\sqrt{\frac{17}{3}}$, vagy

$x^2+2x-6=1$, melyből $x=-1\pm 2\sqrt{2}$. A kapott gyökök nem mondanak ellent kikötéseinknek, és valóban kielégítik az eredeti egyenletet.

1497. A nevező minden x-re pozitív, mert $x^2-4x+10=(x-2)^2+6$.

Legyen $x^2-4x+10=y$, ekkor $-x^2+4x-6=4-y$.

Ekkor új egyenletünk: $\frac{21}{y}+4-y=0$, azaz rendezve $y^2-4y-21=0$, gyökei:

$y_1=7$, $y_2=-3$.

Tehát $x^2-4x+10=7$, melynek gyökei: $x_1=1$, $x_2=3$, illetve,

$x^2-4x+10=-3$, melynek nincsenek valós gyökei.

A kapott gyökök kielégítik az eredeti egyenletet.

1498. A nevező értelmetlen, ha $x=-5$.

Egészítsük ki a bal oldalt teljes négyzetté:

$$x^2+\frac{25x^2}{(x+5)^2}-\frac{10x^2}{x+5}=\left(x-\frac{5x}{x+5}\right)^2=\left(\frac{x^2}{x+5}\right)^2.$$

Tehát egyenletünk felírható a következő alakban:

$$\left(\frac{x^2}{x+5}\right)^2+10\cdot\frac{x^2}{x+5}-11=0.$$

Legyen: $\frac{x^2}{x+5}=y$, ekkor $y^2+10y-11=0$ egyenlethez jutunk.

Ennek gyökei: $y_1=1$, $y_2=-11$.

Vagyis $\frac{x^2}{x+5}=1$, melyből $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$, illetve

$\frac{x^2}{x+5}=-11$, melynek nincsenek valós gyökei.

A kapott gyökök valóban kielégítik egyenletünket.

1499. Alakítsuk át az egyenlet bal oldalát:

$x^4+2x^3+x^2+x^2+x-6=(x^2+x)^2+(x^2+x)-6$.

Legyen: $x^2+x=y$. Új egyenletünk: $y^2+y-6=0$, ennek gyökei:

$y_1=2$, $y_2=-3$.

Tehát: $x^2+x=2$, melyből: $x_1=1$, $x_2=-2$, illetve,

$x^2+x=-3$, melynek nincsenek valós gyökei.

1500. Vegyük észre, hogy páratlanfokú – harmadfokú –, szimmetrikus (reciprok) egyenlettel állunk szemben. Az ilyen egyenleteknek mindig gyöke az $x=-1$, ezért szorzattá alakíthatók.

IV

IV

$2x^3+7x^2+7x+2=(x+1)\left(2x^2+5x+2\right)$. Tehát az egyenlet gyökei:

$x_1=-1,\ x_2=-2,\ x_3=-\dfrac{1}{2}$.

1501. Emeljünk ki az előző feladathoz hasonlóan $(x+1)$-et. A bal oldal szorzat alakja:

$(x+1)\left(x^2-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}x+1\right)$, így az eredeti egyenlet gyökei:

$x_1=-1,\ x_2=\sqrt{2},\ x_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1502. Vegyük észre, hogy páratlanfokú – harmadfokú –, antiszimmetrikus (reciprok) egyenlettel állunk szemben. Az ilyen egyenleteknek mindig gyöke az $x=1$, ezért szorzattá alakíthatók.

A bal oldal szorzat alakja: $(x+1)\left(2x^2+9x+2\right)$, így egyenletünk gyökei: $x_1=1,\ x_{2,3}=\dfrac{-9\pm\sqrt{65}}{4}$, ahol teljesül: $x_2=\dfrac{1}{x_3}$.

1503. Vegyük észre, hogy páros fokú – negyedfokú, szimmetrikus – reciprok-egyenlettel állunk szemben. Ennek nem lehet megoldása az $x=0$, így osszuk végig x^2-tel. A bal oldal így alakul:

$$6x^2-13x+12-13\cdot\frac{1}{x}+6\cdot\frac{1}{x^2}=6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-13\left(x+\frac{1}{x}\right)+12.$$

Bevezetve az $x+\dfrac{1}{x}=y$ jelölést $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$, így az új ismeretlenre az alábbi egyenletet kapjuk: $6y^2-13y=0$. Ennek gyökei: $y_1=0,\ y_2=\dfrac{13}{6}$. Visszahelyettesítve kapjuk az eredeti egyenlet gyökeit, ha $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{13}{6}$, akkor $x_1=\dfrac{2}{3},\ x_2=\dfrac{3}{2}$, míg az $x+\dfrac{1}{x}=0$ nem ad újabb megoldásokat.

1504. Vegyük észre, hogy páros fokú – negyedfokú, szimmetrikus – reciprok-egyenlettel állunk szemben. Ennek nem lehet megoldása az $x=0$, így osszuk végig x^2-tel. A bal oldal így alakul: $20\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+8\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-105=0$. Az $x+\dfrac{1}{x}=y$ helyettesítéssel: $20\left(y^2-2\right)+8y-105=0$, rendezve: $20y^2+8y-145=0$.

Ennek gyökei: $y_1=2{,}5,\ y_2=-2{,}9$.

Végül az $x+\dfrac{1}{x}=2{,}5$ egyenlet gyökei: $x_1=2,\ x_2=\dfrac{1}{2}$, míg az

$x+\dfrac{1}{x}=-2{,}9$ egyenlet gyökei: $x_3=\dfrac{5}{2},\ x_4=\dfrac{2}{5}$.

A kapott gyökök kielégítik az eredeti egyenletet, erről behelyettesítéssel is meggyőződhetünk.

1505. Ez páratlan fokú, antiszimmetrikus (reciprok) egyenlet, melynek mindig gyöke az $x = 1$. Ezért emeljük ki az $(x-1)$-et!

$$6\left(x^5-1\right)-x\left(x^3-1\right)-43x^2(x-1)=$$
$$=(x-1)\left(6x^4+6x^3+6x^2+6x+6-x^3-x^2-x-43x^2\right)=$$
$$=(x-1)\left(6x^4+5x^3-38x^2+5x+6\right).$$

A szorzat második tényezője szimmetrikus, negyedfokú polinom. A $6x^4+5x^3-$ $-38x^2+5x+6=0$ egyenletet az előző feladatok módszerével – $x+\frac{1}{x}=y$ helyettesítéssel megoldhatjuk. Ekkor négy újabb gyököt kapunk. Az eredeti egyenletünk megoldásai: $x_1=1$, $x_2=-3$, $x_3=-\frac{1}{3}$, $x_4=2$, $x_5=\frac{1}{2}$. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy mind az öt gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

1506. Nullára rendezve, alakítsuk szorzattá a bal oldalt:

$$(1+x)^4-16x^2=\left[(1+x)^2+4x\right]\cdot\left[(1+x)^2-4x\right]=\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2+6x+1\right).$$

A szorzatunk 0, ha bármely tényezője 0, így az egyenletünk gyökei:
$x_1=1$, $x_2=-3+\sqrt{8}$, $x_3=-3-\sqrt{8}$.

1507. A bal oldalt átalakítva:
$x^2(x+3)-(x+3)=(x+3)\left(x^2-1\right)=(x+3)(x+1)(x-1)$, ezért az egyenletünk gyökei: $x_1=-3$, $x_2=-1$, $x_3=1$, ezek közül csak az $x=1$ természetes szám.

1508. Csoportosítsuk a tagokat: $x^5-2x^3+x-x^4+2x^2-1=(x-1)\left(x^4-2x^2+1\right)$, ahol a második tényező teljes négyzet. $x-1=0$, ha $x=1$.

$$\left(x^2-1\right)^2=0, \text{ ha } x=\pm 1.$$

Tehát az egyenlet megoldásai: $x_{1,2}=\pm 1$.

1509. Csoportosítsuk az egyenlet tagjait:

$$6\left(x^5-1\right)-x\left(x^3-1\right)-43x^2(x-1)=0.$$

Ebből $x_1=1$ nyilván megoldás, míg a második tényezőből nyert szimmetrikus egyenletre:

$$\left(6x^4+5x^3-38x^2+5x+6\right)=0.$$

A már ismert $x+\frac{1}{x}=y$ új ismeretlen bevezetésével:

$$6\left(y^2-2\right)+5y-38=0$$

egyenlet gyökei:

$$y_1 = -\frac{10}{3}, \quad y_2 = \frac{5}{2},$$

amelyből:

IV

$$x_2 = -3, \quad x_3 = -\frac{1}{3}, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = \frac{1}{2} \text{ és } x_1 = 1.$$

Mivel ötödfokú egyenletnek legfeljebb 5 különböző gyöke van, a megoldást befejeztük.

1510. Az egyenlet bal oldalát kiemeléssel alakítsuk szorzattá:

$$x^6\left(x^4 - 5x^2 + 4\right) - 64\left(x^4 - 5x^2 + 4\right) = \left(x^6 - 64\right)\left(x^4 - 5x^2 + 4\right).$$

Egy szorzat értéke 0, ha bármely tényezője 0, ezért vizsgáljuk a tényezőket!

$$x^6 - 64 = \left(x^2\right)^3 - 4^3 = \left(x^2 - 4\right)\left(x^4 + 4x^2 + 16\right) =$$
$$= (x+2)(x-2)\left(x^2 - 2x + 4\right)\left(x^2 + 2x + 4\right) = 0,$$

ha $x = -2$, illetve ha $x = 2$, mivel a további két tényező nem ad valós gyököt.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = \left(x^4 - 4x^2\right) - \left(x^2 - 4\right) = \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 4\right) =$$
$$= (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = 0,$$

ha $x = -1$ vagy $x = 1$ vagy $x = -2$ vagy $x = 2$.

Összegezve: az eredeti egyenletnek tehát négy valós gyöke van, melyek valóban kielégítik az egyenletet: $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2,\ x_4 = 2$.

Megjegyzés: x_3 és x_4 kétszeres gyök.

1511. Alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalát. Ehhez adjunk hozzá 1-et. $xyz + xy + yz + xz + x + y + z + 1 = (x+1)(y+1)(z+1)$.

Tehát egyenletünk így is írható: $(x+1)(y+1)(z+1) = 2233$. Mivel 2233 prímfelbontása: $2233 = 7 \cdot 11 \cdot 29$, és : $(x+1), (y+1), (z+1)$ a feltételek miatt egynél nagyobb pozitív egész, így x, y, z valamilyen sorrendben a 6, 10, 28 számok. Ezek permutációinak száma 6, tehát egyenletünket 6 rendezett számhármas teszi igazzá.

1512. Tekintsük az $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x = k$ egyenletet, ahol $k \in \mathbf{R}$.

Alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalát. $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x = x^2\left(x^2 + 5x + 6\right) + x\left(x^2 + 5x + 6\right) = x(x+1)(x+2)(x+3)$.

A két szélső, valamint a két belső tényező szorzata: $\left(x^2 + 3x\right)\left(x^2 + 3x + 2\right)$.

Legyen $x^2 + 3x = t$. Ekkor egyenletünk ekvivalens a $t \cdot (t+2) = t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1 = k$ egyenlettel. Eszerint k legkisebb értéke –1, és ez $t = -1$ esetén adódik.

Ha $t = -1$, akkor az $x^2 + 3x = -1$ egyenlet gyökei: $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Összefoglalva: az $f(x)$ függvény minimuma –1, és ezt az $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ helyeken veszi fel.

1513. Alakítsuk szorzattá egyenletünket:

$$x^4(x-1) - 2x^2(x-1) + (x-1) = 0;$$
$$(x-1)(x^4 - 2x^2 + 1) = 0;$$
$$(x-1)(x^2-1)^2 = 0.$$

Az első tényező 0, ha $x = 1$, míg a második tényező $x = \pm 1$ esetén, így ez utóbbi az egyenletünk megoldása.

1514. Az előző megoldás alapján a kifejezés $(n-1)(n^2-1)^2$ alakban is írható. Mivel a második tényező teljes négyzet, így a szorzat pontosan akkor lehet négyzetszám, ha valamelyik tényező 0, vagy ha az első tényező is négyzetszám. A tényezők csak akkor egyenlők 0-val, ha – mivel n természetes szám – $n = 1$. Az első tényező akkor lesz négyzetszám, ha $n = k^2 + 1$, ahol $k \in \mathbf{Z}$. ($k = 0$ esetén, $n = 1$).

1515. Egyenletünk

$$(1+y^2)(1+xy) + (1+x^2)(1+xy) = 2(1+x^2)(1+y^2)$$

alakban írható. Rendezésekkel:

$$x^2 + y^2 + 2x^2y^2 - x^3y - xy^3 - 2xy = 0;$$
$$(x-y)^2 - xy(x-y)^2 = 0;$$
$$(x-y)^2(1-xy) = 0.$$

Mivel a feltétel miatt az első tényező nem lehet 0, így
$1 - xy = 0$.
Azt kaptuk, hogy $xy = 1$, ekkor a törtek nevezője nem 0.

1516. Jelöljük a rövidebb felírás miatt:
$a + b = c$;
$a - b = d$.
Ekkor egyenletünk alakja:

$$\frac{\left[(x+c)^7 + (x-c)^7\right] - \left[(x+d)^7 + (x-d)^7\right]}{\left[(x+c)^5 + (x-c)^5\right] - \left[(x+d)^5 + (x-d)^5\right]} = \frac{7}{2}\left(c^2 + d^2\right).$$

A [ ]-ben levő hatványoknál a páratlan kitevőjű tagok kiesnek, ezért összevonások után:

$$\frac{42x^5\left(c^2-d^2\right)+70x^3\left(c^4-d^4\right)+14x\left(c^6-d^6\right)}{20x^3\left(c^2-d^2\right)+10x\left(c^4-d^4\right)}=\frac{7}{2}\left(c^2+d^2\right).$$

Nyilván $x=0$ nem tartozik az értelmezési tartományba, továbbá

$|c|\neq|d|$, $a\neq0$, $b\neq0$.

A pozitív nevezővel beszorozva, rendezések, összevonások után:

$$6x^4+2\left(c^4+c^2d^2+d^2\right)-5\left(c^2+d^2\right)^2=0;$$
$$x^4=\frac{3c^4+8c^2d^2+3d^2}{6}.$$

Visszatérve az eredeti paraméterekre:

$$x=\pm\sqrt[4]{\frac{3c^4+8c^2d^2+3d^4}{6}}=\pm\sqrt[4]{\frac{7a^4+10a^2b^2+4b^4}{3}}.$$

A kapott két gyök csak $a=b=0$ esetén lenne egyenlő, amit kizártunk.

1517. Válassza a kezdő $C=0$ értéket. Ekkor az egyenletnek $x=0$ nyilván gyöke.

Ha a következő lépésben a második játékos A helyére ír egy A_0 egész számot, akkor írjon kezdő B helyére ismét 0-t. Ekkor egyenletünk:

$$x^3+A_0x^2=0$$

alakú, melynek gyökei: $x_1=x_2=0,\ \ x_3=-A_0$.

Ha a második játékos B helyére ír egy B_0 egész számot, akkor egyenletünk:

$$x^3+Ax^2+B_0x=0.$$

Ekkor kezdő az $A=-\left(B_0+1\right)$ számot választva az egyenlet szorzat alakja:

$$x\left(x-1\right)\left(x-B_0\right)=0.$$

Az eredeti egyenletünk: $x^3-\left(B_0+1\right)x^2+B_0x=0$, ennek gyökei: 0, 1, B_0.

1518. Legyen a feltételben szereplő hányadosok értéke c.

Ekkor $x_2=cx_1,\ x_3=c^2x_1,\ x_4=c^3x_1$.

Mivel az egyenletünk x^2-ben másodfokú, ezért ha x_1 gyöke, akkor $-x_1$ is az, de x_1 nem lehet 0, ezért x_2 vagy x_3 vagy x_4 valamelyike $(-x_1)$.

Ekkor c valamelyik hatványa –1, így $c=(-1)$.

Tehát az egyenlet gyökeire teljesül:

$$x_1=-x_2=x_3=-x_4.$$

Ebből $x_1^2 = -\frac{p}{2}$, így $p < 0$.

Egyenletünk:

$$x^4 + px^2 + \frac{p^2}{4} = 0.$$

Ennek gyökei: $x_1 = x_3 = \sqrt{-\frac{p}{2}}$ $\quad x_2 = x_4 = -\sqrt{-\frac{p}{2}}$.

1519. Ha az állítások igazak, akkor x, y, z, a értékek egyike sem 0.
Közös nevezővel beszorozva és 0-ra redukálva:

$$az(y + x) + axy - xyz = 0.$$

Mivel $x + y = a - z$, így

$$(a - z)(a - x)(a - y) = 0.$$

Mivel a három tényező közül legalább az egyik 0, így állításunkat beláttuk.

1520. A közös nevezővel beszorozva, majd a feltételt felhasználva egyenletünk:

$$bcx + acx^2 + abx^3 = ab^2c^2 = -c^2;$$
$$(c + ax^2)(c + bx) = 0.$$

Ez teljesül, ha $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, ahol a feltétel miatt $a < 0$, így $c > 0$ kell, hogy legyen, illetve ha $x_3 = -\frac{c}{b}$.

A valós gyökök száma $c > 0$ esetén három, míg $c < 0$ esetén egy. Ezektől különböző számú megoldás nem lehet.

1521. Írjuk az egyenletet a következő alakban:

$$(xy - 5)^2 + (x - 4)^2 = 25.$$

Az egyenletnek akkor lehet megoldása, ha $0 \le (x - 4)^2 \le 25$. Ez teljesül, ha $-1 \le x \le 9$ és $x \ne 0$. Ekkor xy szorzat lehetséges értékei: $xy \in [0; 10]$.