**1462.** *a)* Minden valós szám.
*b)* Nincs ilyen valós szám.
*c)* $c < 2$ vagy $c > 3$;
*d)* $d \leq 2$ vagy $d \geq 5$.

**1463.** *a)* Az első egyenlőtlenségből: $m < -\frac{1}{3}$ vagy $m > 2$.
A második egyenlőtlenségből: Nincs ilyen valós szám. Tehát az egyenlőtlenségrendszernek nincs megoldása.
*b)* Az első egyenlőtlenségből $\frac{4}{3} < n < \frac{10}{3}$.
A második egyenlőtlenségből: Minden valós számmegoldás. Tehát az egyenlőtlenségrendszer megoldása: $\frac{4}{3} < n < \frac{10}{3}$.

**1464.** *a)* $1 < m < 2$ vagy $m > 3$;
*b)* $2 < n < 3$ vagy $n > 5$;
*c)* $m < -4 - \sqrt{2}$ vagy $-4 + \sqrt{2} < m < 1$;
*d)* $n > 4$.

**1465.** *a)* $p < -3$ vagy $p > 1$;
*b)* $q < -4$, $q \neq -6$, $q > 6$;
*c)* $1 < r < \frac{3}{2}$, vagy $r > 2$;
*d)* $-2 < s < 6 - \sqrt{15}$ vagy $5 < s < 6 + \sqrt{15}$.

## Paraméteres és összetett egyenlőtlenségek

**1466.** *a)* Ha $m = 1$, akkor minden valós szám megoldás, ha $x \neq -1$.
Ha $m < 1$, akkor $x < -1 - \sqrt{1-m}$ vagy $x > -1 + \sqrt{1-m}$,
ha $m > 1$, akkor minden valós szám megfelel.
*b)* Ha $m > -\frac{25}{4}$, akkor $\frac{5 - \sqrt{25 + 4m}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{25 + 4m}}{2}$.
Ha $m \leq -\frac{25}{4}$, akkor nincs valós megoldás.
*c)* Ha $m \leq -\frac{4}{5}$ vagy $m \geq 2$, akkor minden valós szám megoldás.
Ha $-\frac{4}{5} < m < 2$, akkor $x \leq -3 - \sqrt{-5m^2 + 6m + 8}$, vagy $x \geq -3 +$
$+ \sqrt{-5m^2 + 6m + 8}$.
*d)* Ha $m \geq 11$, akkor $-1 - \sqrt{11 - m} < x < -1 + \sqrt{11 - m}$,
ha $m < 11$, akkor nincs valós megoldás.

IV

**1467.** Ha $m = 0$, akkor az elsőfokú egyenlet megoldásai: $x < \frac{5}{12}$.

Ha $m < 0$ és $D = 144 + 20m \le 0$, azaz $m \le -7,2$, akkor $\forall x \in R$, $x \neq \frac{5}{6}$.

Ha $m > 0$ és $D \le 0$, azaz $m \ge -7,2$, akkor nincs valós megoldás.

Ha $m > 0$, akkor a diszkrimináns pozitív, így $\frac{-6-\sqrt{36+5m}}{m} < x < \frac{-6+\sqrt{36+5m}}{m}$.

**1468.** Ha $m = -3$, akkor elsőfokú az egyenlőtlenség, végtelen sok megoldás van. Ha $m < -3$, akkor mindig van megoldás, mivel a bal oldal függvénye konkáv parabola.
Ha $m > -3$, akkor $D < 0$ esetén nem lenne valós megoldás.
$D = 25 + 16(m+3) < 0$, ha $m < -\frac{73}{16}$. Ez ellentmondásra vezet, így az egyenlőtlenségnek mindig van valós megoldása.

**1469.** Az állítás akkor igaz minden $x$-re, ha a bal oldal diszkriminánsa negatív.
$D = 4(m+1)^2 - 4(9m-5) = 4(m-1)(m-6) < 0$ teljesül ha $1 < m < 6$.

**1470.** A bal oldal diszkriminánsa: $D = (m+2)^2 - 4(8m+1) = m(m-28)$.
Ha $D < 0$ azaz $0 < m < 28$, akkor minden $x \in R$ megoldás.
Ha $D = 0$ azaz $m = 0$, $m = 28$, akkor $\forall x \in R$, de $x \neq -1; -15$.
Ha $D > 0$, azaz $m < 0$ vagy $m > 28$ akkor $x < \frac{-m-2-\sqrt{m(m-28)}}{2}$ vagy $x > \frac{-m-2+\sqrt{m(m-28)}}{2}$.

**1471.** A bal oldal diszkriminánsa $D = -8m^2 - 8m + 16$.
Ha $m = -1$, akkor $4x - 6 < 0$, azaz $x < \frac{3}{2}$.
Ha $m > -1$, akkor az egyenlőtlenség teljesüléséhez $D > 0$ szükséges. Ez $-2 < m < 1$, de $m > -1$ miatt: $-1 < m < 1$ esetén igaz, ekkor $x < \frac{m-1-\sqrt{-2m^2-2m+4}}{m+1}$ vagy $x < \frac{m-1+\sqrt{-2m^2-2m+4}}{m+1}$.
Ha $m < -1$, akkor az egyenlőtlenség minden valós $x$ számra teljesül, feltéve ha a diszkrimináns negatív.
$D < 0$, azaz: $m < -2$, vagy $m > 1$, összevetve a feltétellel $m < -2$.

**1472.** Vizsgáljuk a bal oldal diszkriminánsát!
$D = -8m^2 - 56m + 64$
(*a*) $D = 0$, ha $m = 1$ vagy $m - 8$.
(*b*) $D < 0$, ha $m < -8$ vagy $m > 1$.
(*c*) $D > 0$, ha $-8 < m < 1$.

IV

I. Ha $m^2+4m-5=0$, akkor az egyenlőtlenség elsőfokú. Ez teljesül, ha $m=1$, ekkor $x<\frac{3}{4}$, illetve ha $m=-5$, ekkor $x>-\frac{3}{8}$.

II. A főegyüttható pozitív ha $m<-5$, vagy $m>1$.

(1) Ha $D<0$, akkor $\forall x\in R$ esetén teljesül az egyenlőtlenség. $m<-8$ vagy $m>1$.

(2) Ha $D=0$, akkor összevetve a feltétellel $m=-8$ esetén $\forall x\in R$ megoldás.

(3) Ha $D>0$, akkor $-8<m<-5$ esetén $x<\dfrac{2m+2-\sqrt{-8m^2-56m+64}}{2\left(m^2+4m-5\right)}$,

vagy $x>\dfrac{2m+2+\sqrt{-8m^2-56m+64}}{2\left(m^2+4m-5\right)}$.

III. Ha a főegyüttható negatív, azaz $-5<m<1$, akkor:

$$\frac{2m+2-\sqrt{-8m^2-56m+64}}{2\left(m^2+4m-5\right)}<x<\frac{2m+2+\sqrt{-8m^2-56m+64}}{2\left(m^2+4m-5\right)}.$$

**1473.** A téglalap oldalai: $a;\ b$. $k=40\,\text{cm}$, $b=20-a$. Maximális a terület, ha $a(20-a)$ maximális.

Teljes négyzetté alakítás után: $a=10\,\text{cm}$. Ekkor a négyszög négyzet, területe $100\,\text{cm}^2$.

$a(20-a)>50$ egyenlőtlenség megoldása: $10-5\sqrt{2}<a<10+5\sqrt{2}$. Ennek alapján $b$ értéke egyértelműen meghatározható minden adott $a$ esetén.

**1474.** $k(1000)=25\,725\,000$ Ft, $b(1000)=19\,446\,250$ Ft,

$k(2000)=51\,400\,000$ Ft $b(2000)=94\,456\,250$ Ft.

Akkor lesz nyereséges a termék gyártása, ha a $b(x)>k(x)$, azaz

$25x^2-5500x-43\,750>25\,675x+50\,000$;

megoldása $x<-3 \quad \vee x>1250$.

A termék gyártása nyereséget hoz, ha 1250 db-nál többet gyártanak.

**1475.** A kétjegyű szám tízes helyiértékén $x$, egyes helyiértékén $x+3$ szám van $x\in\mathbf{N}$. Így a kétjegyű szám: $11x+3$

$26<11x+3<49 \Rightarrow x=3,4$. A kétjegyű szám tehát a 36, illetve a 47.

**1476.** A hajó által megtett út: $s_H=20+4t$.

A motorcsónak által megtett út: $s_M=\frac{3}{2}t^2$ $\left(s=\frac{a}{2}t^2 \text{ segítségével}\right)$

$s_M>s_H$,

$\frac{3}{2}t^2>20+4t$ megoldása: $t>5{,}22$ s.

A motorcsónak elindulása után 5,22 s elteltével a motorcsónak által megtett út több, mint a hajó által megtett út.

IV

**1477.** Mivel mindkét kifejezés diszkriminánsa negatív, ezért minden egész szám megoldás.
Az első tényező minden valós $x$-re pozitív, a második $x = 5$-re nulla, különben pozitív. Így a megoldás: $x = 5$.

**1478.** A kettős egyenlőtlenség mindhárom tagja pozitív, így elég megmutatni a négyzetre emeléssel adódó egyenlőtlenségek helyes voltát. Pitagorasz tételét is felhasználva az első egyenlőtlenség jobb és bal oldalának négyzetének különbsége:

$$\left(x^2+xy+\frac{y^2}{4}\right)-\left(x^2+y^2\right)=\frac{y}{4}(4x-3y)>0,\text{ mivel } x>y.$$

Hasonlóan a második egyenlőtlenségből:

$$\left(x^2+y^2\right)-\frac{64}{81}\left(x^2+xy+\frac{y^2}{4}\right)=\frac{1}{81}\left[z^2+16(x-2y)^2\right]>0,$$ így a második rész is igaz.

**1479.** Tegyük fel, hogy létezik a feltételt kielégítő $p$ szám és $x$, $y$ számokra teljesül az egyenlőtlenség. Ekkor $y$ helyére $(p-x)$-et írva:
$5x^2-4(2p+3)x+4\left(p^2+2p+1\right)\leq 0$ egyenlőtlenségnek van megoldása $x$-re.
Ebből a diszkriminánst vizsgálva $p$-re: $-p^2+2p+4\geq 0$, azaz
$1-\sqrt{5}\leq p\leq 1+\sqrt{5}$.
A $p$-re kapott egyenlőtlenséget kielégítő bármely valós szám esetén van olyan $x$ szám, melyre igaz a paraméteres, $x$-ben másodfokú egyenlőtlenség. Egy ilyen $x$ és $p$ számpár viszont eleget tesz az eredeti egyenlőtlenségnek is. Tehát a feladat feltételeit kielégítő $p$ számok és csak ezek az $1-\sqrt{5}\leq p\leq 1+\sqrt{5}$.

**1480.** (1)-nek két különböző gyöke van, ha diszkriminánsa pozitív, azaz ha $(t+1)^2>0$, másrészt a Viète-formulák alapján, lévén a gyökök szorzata 1, így a gyökök összegének pozitívnak kell lenniük, azaz $(t+1)<0$. A feltételekből kapjuk, hogy $t<-3$.
A (2) állításban szereplő egyenlőtlenséget írjuk más alakban:
$(2x-1)^2+(t+2)x\geq 0$. Ez teljesül, ha $t\geq -2$.

| | | |
|---|---|---|
| *Összegezve:* | $t<-3$ | esetén (1) igaz, (2) hamis |
| | $-3\leq t\leq -2$ | esetén (1) hamis, (2) hamis |
| | $t\geq -2$ | esetén (1) hamis (2) igaz. |

Így a keresett $t$ értékek azok, amelyekre: $t<-3$ vagy $t\geq -2$.

**1481.** Egy rögzített $p$ érték esetén *a)* vagy *b)* feltétel csak akkor teljesülhet minden $x$-re, ha $K$ minden $x$-re értelmezhető, és értéke sehol sem nulla. Ez pedig akkor következik be, ha $K$-nak sem a számlálója, sem a nevezője nem nulla, vagyis a számláló és a nevező – és ezzel együtt $K$ is – állandó előjelű. Ezért mindkét kifejezés diszkriminánsának negatívnak kell lennie. Tehát:

$D_{sz} = (p+6)^2(100-4p^2) < 0;$

$D_n = (p-6)^2(100-4p^2) < 0.$

A két feltételt összesítve: $|p| \neq 6$ és $|p| > 5$.

Ha tehát a $p$-re kapott feltételek teljesülnek, akkor és csak akkor, $K$ értéke vagy pozitív minden $x$-re, vagy negatív. Azt, hogy a $p$-re kapott értékek közül melyekre lesz $K$ értéke pozitív, illetve negatív, úgy állapíthatjuk meg, hogy megnézzük $K$ előjelét egy tetszőleges $x$ helyen. Legyen például $x = 0$, ekkor



$K = \dfrac{(p+4)(p+6)}{(p-6)(p+3)}$. $K$ előjelét összevetve $p$ lehetséges értékeivel kapjuk, hogy

*a)* $K$ pontosan akkor pozitív minden $x$-re, ha $|p| > 6$

*b)* $K$ pontosan akkor negatív minden $x$-re, ha $5 < |p| < 6$.

**1482.** Az $f(x)$ függvény grafikonja egy lefelé nyitott parabola íve, a teljes parabola, zérushelyei: $x_1 = 0$, $x_2 = 2p$. Tengelypontja $T\left(p, \dfrac{p}{2}\right)$ pont. Az értelmezési tartományon a parabola egy ívét kapjuk, melynek végpontjai: $(0; 0)$, illetve a $\left(\dfrac{4}{p}; \dfrac{4p^2-8}{p^3}\right)$ pontok. Két esetet különböztetünk meg:

**1. eset**: ha a vizsgált ív tartalmazza a tengelypontot. Ekkor $f(x)$ legnagyobb értéke nyilván $\dfrac{p}{2}$. Ez akkor áll fenn, ha $0 < p \leq 2$. Ebben az esetben $f(x)$ nem vehet fel 1-nél nagyobb értéket.

**2. eset**: ha $f(x)$ grafikonja a parabola tengelypontját nem tartalmazza, akkor az $f(x)$ függvény növekvő, ezért $x = \dfrac{4}{p}$-nél veszi fel a legnagyobb értékét, amely $\dfrac{4p^2-8}{p^3}$. Mindez $p > 2$ esetén következik be. Lehet-e ekkor $\dfrac{4p^2-8}{p^3} > 1$, azaz $p^3 - 4p^2 + 8 < 0$, vagyis $(p-2)(p^2-2p-4) < 0$. Az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $1-\sqrt{5} < p < 1+\sqrt{5}$. Összevetve a $p > 2$ feltétellel tehát $f(x)$ akkor és csak akkor vehet fel 1-nél nagyobb értéket, ha $2 < p < 1+\sqrt{5}$.

**1483.** Mivel $x$ és $y$ $n$-jegyű számok, ezért: $10^{n-1} \leq x < 10^n$ és $10^{n-1} \leq y < 10^n$. A másik feltételből: $(10^{n-1})^3 \leq y^3 = x^2 < (10^n)^2$, azaz $10^{3n-3} < 10^{2n}$, akkor és csak akkor, ha $n < 3$. Az $x = y = n = 1$ triviális megoldástól különbözőt kaphatunk, ha $n = 1$, vagy $n = 2$ és $x \geq 2$, $y \geq 2$.

A számelmélet alaptétele értelmében, ha $y \geq 2$ és $y^3$ négyzetszám, akkor $y$ törzstényezős felbontásában minden törzstényező páros számszor fordul elő, tehát $y$ négyzetszám. Ekkor: $x^2 = y^3 = v^6$, $v \in Z$, $v \geq 2$. Mivel $x = v^3 < 10^2 < 5^3$, így $2 \leq v \leq 4$.

Ha $v = 2$, akkor $x = 2^3$, $y = 2^2$.
Ha $v = 3$, akkor $y$ csak egyjegyű, ez nem felel meg.
Ha $v = 4$, akkor $x = 4^3$, $y = 4^2$.
Tehát a triviális megoldással együtt összesen három megoldás van.

**1484.** Legyen a készített szendvicsek száma: sajtosból $x$ db, szalámisból $y$ db.
Készleteink miatt: $5x + 5y \le 200$, (kenyér),

$$x + \frac{5}{3}y \le 50, \text{ (vaj)}$$

$$2x \le 60, \text{ (sajt)}$$

$$y \le 20, \text{ (szalámi)}$$

$$x,\ y \in \mathbf{Z};$$

$$x + y \le 40;$$

Rendezve az egyenlőtlenségeket: $3x + 5y \le 150$ egyenletrendszerhez jutunk.

$$0 \le x \le 30;$$

$$0 \le y \le 20.$$

A minden feltételt kielégítő $(x;\ y)$ pontok a koordináta-rendszerben az alábbi egyenesekkel határolt területen lévő pontok:

$$y = 40 - x; \quad y = -\frac{3}{5}x + 30; \quad x = 0; \quad x = 30; \quad y = 0; \quad y = 20.$$

Mivel a maximális darabszám 40, keressük a egyenesek által meghatározott hatszög $y = 40 - x$ egyenesének közös rácspontjait. Ennek alapján 6 megoldást kapunk:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sajtosból ($x$) | 30 db | 29 db | 28 db | 27 db | 26 db | 25 db |
| Szalámisból ($y$) | 10 db | 11 db | 12 db | 13 db | 14 db | 15 db. |

Az elkészítés ideje: $T = x + y$ perc. A $T$ értékeihez tartozó egyenesek párhuzamosak az $x + 2y = 30$ egyenessel. Ezért $T$ minimuma ha $x = 30$ és $y = 10$, ekkor $T_{min} = 50$ perc.

**1485.** Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a megfelelő pontokat!

$$|x + 1| + |y - 1| = 4$$

Ha $x < -1$ és $y < 1$, akkor $y = -x - 4$,

$y \ge 1$, akkor $y = x + 6$.

Ha $x \ge -1$ és $y < 1$, akkor $y = x - 2$,

és $y \ge 1$, akkor $y = -x + 4$.

Az egyenlőséget kielégítő pontok az $A(-5;\ 1)B(-1;\ 5)C(3;\ 1)D(-1;\ -3)$ négyszög kerületén levő pontok.
Hasonló módon az egyenlőtlenséget kielégítő pontok az alábbi hatszög kerületén és belsejében levő pontok:
$E(-3;\ 0)F(-3;\ 3)G(0;\ 3)H(3;\ 0)I(3;\ -3)J(0;\ -3)$.
A két ponthalmaz közös része, azaz az egyenlőtlenség-rendszer megoldása: $(x;\ y)$, ha $-2{,}5 \le y \le 0{,}5$, $x = y + 2$ számpárokra teljesül, valamint a $(-3;\ 3)$ pont.

**1486.** A két egyenlőtlenséget összevetve:
$\left|x^2-2x\right|-1<y\le 2-\left|x-1\right|$, ahonnan
$\left|x^2-2x\right|+\left|x-1\right|<\frac{5}{2}$.
Mivel a bal oldal nem negatív egész, így lehetséges értékei: 0, 1, 2.
A paritás vizsgálatból kiderül, hogy csak páros lehet az a bal oldal értéke, ekkor $x=0$, vagy $x=1$, vagy $x=2$.
A behelyettesítések után hat egész megoldást kapunk:
(0; 0); (0; 1), (1; 1), (1; 2); (2;0); (2;1).

**1487.** Egyenletünk $(2b-3c)x=c-b$ alakban írható. Az $x$ csak akkor pozitív, ha $2b-3c$ és $c-b$ azonos előjelűek. Ez kétféleképpen lehetséges:
I. $c-b>0$ és $2b-3c>0$, vagy
II. $c-b<0$ és $2b-3c<0$.
Az első eset ellentmondásra vezet: $c>\frac{3}{2}c$, mivel $c$ pozitív szám.
A második eset akkor és csak akkor teljesülhet, ha $c<b<\frac{3}{2}c$.
Ez csak három esetben fordulhat elő a megadott alaphalmazon:
$c=3$; $b=4$; $x=1$, vagy
$c=4$; $b=5$; $x=\frac{1}{2}$, vagy
$c=5$; $b=6$; $x=\frac{1}{3}$.

**1488.** Jelöljük az $x_i-100$ különbséget $y_i$-vel. $(1\le i\le n+1)$
Az $y_1,\ldots y_{n+1}$ számokra: (1) $y_{n+1}=y_1$;
(2) $100y_i\ge 101y_{i+1}$;
(3) $y_1+y_2+\ldots+y_n\ge 0$ teljesül.
Ha az $y_i$-k között volna negatív, akkor az annál nagyobb indexűek (2) miatt mind negatívak volnának és (1) miatt $y_1$ is negatív volna. Ebből (2) miatt következne, hogy mind negatívak, ez viszont ellentmond (3)-nak. Tehát az $y_i$-k nem negatívak, így (2) miatt: $y_i\ge y_{i+1}$. $(i=1,2,\ldots,n)$.
Tehát az $(y_1-y_2)+(y_2-y_3)+\ldots+(y_n-y_{n+1})$ összegeknek minden tagja nem negatív. Azonban (1) miatt ez az összeg 0-val egyenlő, így minden tagja 0. Tehát az összes $y_i$ 0-val, és az összes $x_i$ 100-zal egyenlő.

**1489.** Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenségeink igazak. Rendezve:
(1) $a<c+d-b$;
(2) $a(c+d-b)<cd-bc-bd$;
(3) $a(cd-bc-bd)<-bcd$.
A feltétel szerint minden szám pozitív, így (1) miatt $c+d-b>0$. Így (2) bal oldala pozitív, tehát $cd-bc-bd>0$. Tehát (3) bal oldala pozitív, vagyis $-bcd>0$ következne. Ez ellentmond a kezdeti feltételünknek, tehát nem lehet minden egyenlőtlenség egyidejűleg igaz.