1193. *a)* $x < -1$; *b)* $x > 3,75$; *c)* $x \le -\frac{13}{14}$; *d)* $x \le \frac{13}{4}$.

1194. *a)* $a > -1$; *b)* Minden valós számra igaz. *c)* $m > 4$; *d)* $n \ge -\frac{5}{9}$.

1195. *a)* $a \ge 2$; *b)* $b < 4$; *c)* $c < -\frac{3}{2}$; *d)* $d \le 2$.

1196. Nullára rendezés után vizsgáljuk a tört számlálójának és nevezőjének előjelét.

a) $0 < x < 1$; *b)* $x < 0 \vee x \ge 2$; *c)* $x < -2 \vee x > 0$; *d)* $0 < x \le 3$.

1197. *a)* $-2 < m < \frac{4}{3}$; *b)* $-\frac{4}{3} < n < \frac{7}{2}$; *c)* $-2,5 < f \le 4$;

d) $-2 < e \le \frac{7}{3}$; *e)* $r \le -\frac{7}{2} \vee r > 4$; *f)* $t < -3 \vee t > 5$.

1198. *a)* $-5 < x < 2$; *b)* $x \le -6 \vee x > 3$; *c)* $-2 < x < 11$;

d) $x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{6}$; *e)* $x \le -\frac{5}{4} \vee x > \frac{3}{2}$; *f)* $\frac{1}{3} < x \le \frac{11}{3}$;

g) $-\frac{1}{3} < x < \frac{69}{13}$.

1199. *a)* $-\frac{5}{2} < x \le -\frac{8}{7}$; *b)* $1 < x \le \frac{5}{2}$; *c)* $-5 \le x < 4$.

IV

Másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

Másodfokú egyenletek

1200. *a)* Racionális egész kifejezés (polinom): 1), 2), 7); törtkifejezés: 3); abszolútértékes kifejezés: 6); négyzetgyökös kifejezés: 4); köbgyökös kifejezés: 5).

b) 1): Másodfokú, 2): harmadfokú, 7) negyedfokú polinom. 6): Másodfokú polinom abszolútértékes kifejezése.

c) 7): Egytagú; 1): háromtagú; 2): négytagú kifejezés.

d) Egyváltozós kifejezés: 3); kétváltozós: 2), 4), 5), 6), 7); háromváltozós: 1).

1201. Másodfokúak: *a), b), e), f), g), h), i), k), l).*

1202. *a)* $5x^2 - 2x - 3$ (egyváltozós, másodfokú kifejezés);

b) $5x^2 - 2x - 3 = 0$;

c) $f: x \mapsto 5x^2 - 2x - 3$;

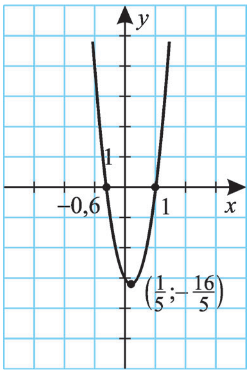
d) az f függvény $x = a$ helyen felvett helyettesítési értéke $f(a) = 5a^2 - 2a - 3$; az x helyen felvett helyettesítési érték $f(x) = 5x^2 - 2x - 3$;

e) a kifejezés $x = a$ helyen felvett helyettesítési értéke $5a^2 - 2a - 3$;

f) $f: x \mapsto 5x^2 - 2x - 3,\ x \in \mathbf{R}$;

IV

1202.



g) a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolt függvény: 1202. ábra.
h) a függvény képe parabola;
i) $y = 5x^2 - 2x - 3$.

1203. Ekvivalens kifejezések: *a), d), f), h), i), k), l), m)*. (Ez utóbbi esetben csak $y = z = 0$ lehetséges, ekkor $\sqrt{-y^2 - z^2} \equiv 5y - 6z \equiv 0$.)

1204. *a) Első megoldás:* Szorzattá alakítunk: $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$. Egy szorzat értéke akkor és csak akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért $x = -2$ vagy $x = 2$. Mindkét gyök racionális (és így valós is).
Második megoldás: $x^2 = 4$, gyökvonás után $|x| = 2$ vagy $x = \pm 2$.
b) $x = \pm\sqrt{5}$; a két gyök irracionális.
c) Nincs megoldás.
d) A paraméteres egyenleteket a paraméter(ek) minden lehetséges értékére meg kell oldani.
Ha $a \le 0$, nincs megoldás; ha $a > 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{2}{a}}$. Ez a gyök akkor racionális, ha $a = \frac{2}{r^2}$ alakú, ahol $r \ne 0$ racionális szám.
e) $a(x^2 + 2) = 0$. Ha $a = 0$, minden racionális (illetve valós) x megoldás; ha $a \ne 0$, akkor nincs megoldás.
f) $a(x^2 - 2) = 0$. Ha $a = 0$, minden racionális (illetve valós) x megoldás; ha $a \ne 0$, akkor $x = \pm\sqrt{2}$, s ez a két gyök irracionális.
g) Ha $a = b = 0$, minden racionális (illetve valós) x megoldás. Ha $a \ne 0$, $b = 0$, akkor $x = 0$.
Az $a \ne 0$, $b \ne 0$ esetet két részre bonthatjuk: ha a és b azonos előjelű, akkor nincs megoldás; ha különböző előjelűek, akkor $x = \pm\sqrt{\frac{-b}{a}}$.
A két gyök racionalitása függ a-tól és b-től.

1205. *a)* Szorzattá alakíthatunk: $x^2 - 4x = x(x-4)$. Egy szorzat értéke akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért $x = 0$ vagy $x = 4$. Mindkét gyök racionális (és így valós is).
b) $x = 0$ vagy $x = -2{,}5$; mindkét gyök racionális.
c) $x(ax - a - 1) = 0$, $x_1 = 0$. Ha $a = 0$, akkor nincs több megoldás; ha $a \ne 0$, akkor $x_2 = \frac{a+1}{a}$, s ez racionális szám.
d) $xa(x+2) = 0$. Ha $a = 0$, akkor minden racionális (illetve valós) x megoldás. Ha $a \ne 0$, akkor $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ racionálisak.

e) $x_1 = 0$, $ax + b = 0$. Ha $a = 0$, $b \neq 0$, akkor nincs több megoldás; ha $a = 0$, $b = 0$, akkor minden racionális (valós) x megoldás; ha $a \neq 0$, akkor $x_2 = -\frac{b}{a}$ racionális.

1206. *a)* $x_{1,2} = \pm 0{,}4$.

b) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

c) $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}25$.

1207. *a)* $x_{1,2} = \pm 5$.

b) Nincs megoldás.

1208. *a)* $x = 1$.

b) $x + 3 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = -3 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $(x - 2)^2 = 0$, $x = 2$.

d) $(x + 1)^2 = 4$, $x + 1 = \pm 2$; $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

1209. *a)* $x^2 + 2x + 1 = 4$; $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

b) $(x + 3)^2 = 16$; $x_1 = 1$, $x_2 = -7$.

c) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$; $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

d) $2 \cdot \left(\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{169}{16}\right) = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = -4{,}5$.

1210. *a)* $2 \cdot \left(\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right) = 0$, nincs megoldás.

b) $-\frac{1}{2} \cdot \left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{256}{9}\right) = 0$; $x_1 = 6$, $x_2 = -\frac{14}{3}$.

c) $2 \cdot \left(\left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$; $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{\frac{4\sqrt{3} + 1}{8}}$,

$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} - \sqrt{\frac{4\sqrt{3} + 1}{8}}$.

d) $2x^2 - 9x + 7 = 0$, innen $2 \cdot \left(\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right) = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{7}{2}$.

IV

1211. *a)* $x_1 = \dfrac{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{9 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)}$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{2} - 1 - \sqrt{9 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)}$.

b) $x_1 = 6,\ x_2 = \dfrac{12}{23}$.

1212. *a)* $x_1 = -1{,}2,\ x_2 = \dfrac{3}{7}$.

b) $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

1213. *a)* $x_1 = 1,\ x_2 = -\dfrac{31}{16}$.

b) $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 - (x + 1{,}5)^2 = 0$, innen $\left(2x + 1{,}5 - \sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2} - 1{,}5\right) = 0$,

$x = \dfrac{\sqrt{2} - 1{,}5}{2}$.

Vagy: $\left|x - \sqrt{2}\right| = |x + 1{,}5|$, innen $x - \sqrt{2} = -x - 1{,}5$,

$x = \dfrac{\sqrt{2} - 1{,}5}{2}$.

c) $x_1 = -4,\ x_2 = -8$.

d) $x_1 = -3 + \sqrt{2},\ x_2 = -3 - \sqrt{2}$.

1214. *a)* $x_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{27}}{4}$, $x_2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{27}}{4}$.

b) $x_1 = \dfrac{15 + \sqrt{85}}{14}$, $x_2 = \dfrac{15 - \sqrt{85}}{14}$.

1215. Az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ egyenlet átalakítás után

$$a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0$$

alakra hozható. Ha $b^2 - 4ac \geq 0$, akkor innen folytathatjuk az

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}^{\,2} =$$

$$\left(x + \frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right) = 0$$ szorzattá alakítással vagy

$x + \dfrac{b}{a} = \pm\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ módon. Mindkét esetben $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

1216. *a)* $x_1 = -1,\ x_2 = 3$;

b) nincs megoldás;

c) $x_1 = 1,\ x_2 = -3{,}5$;

d) $x_1 = 1,\ x_2 = 3$.

IV

1217. *a)* Nincs megoldás.

b) $x_1 = -6,\ x_2 = \frac{22}{3}$.

1218. *a)* $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

b) $x_1 = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2},\ x_2 = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1219. *a)* $x_1 = -2,\ x_2 = \frac{305}{78}$.

b) $x_1 = 1,\ x_2 = \pi$.

c) $x - 5 = \sqrt{x-3}$ négyzetre emelése után $x^2 - 11x + 28 = 0$; innen $x_1 = 7,\ x_2 = 4$, de ez hamis gyök.

Vagy: $y = \sqrt{x-3}$ helyettesítéssel $y^2 - y = 2$, innen $y_1 = 2,\ y_2 = -1$ (ez hamis).

1220. *a)* $x_1 = -2,\ x_2 = \frac{24}{35}$.

b) $x = 0$.

1221. *a)* 1. $a(x) = 2x^2 + 3x - 5 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\right) = 2\left(\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - \frac{5}{2}\right) =$

$= 2\left(\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$; ez a transzformációs alak.

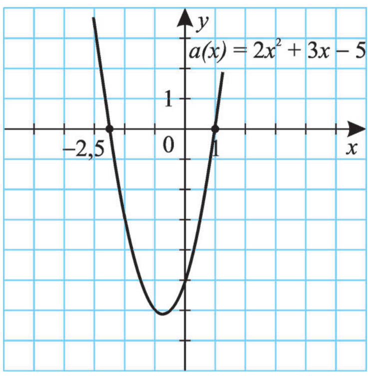
2. $2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} \geq -\frac{49}{8}$, az értékkészlet: $R_a = \left[-\frac{49}{8}; \infty\right[$.

3. 1221/a. ábra

4. Az $f(x) = x^2$ alapfüggvény ábrázolása után sorrendben: eltolás a $\left(-\frac{3}{4};\ 0\right)$ vektorral; $\lambda = 2$ arányú, az x tengelyre merőleges affinitás; eltolás a $\left(0;\ -\frac{49}{8}\right)$ vektorral.

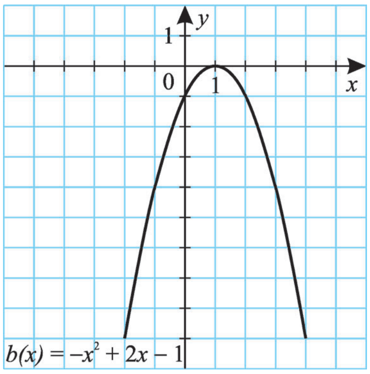
5. Ha az $y = f(x) = 0$ egyenletnek egy gyöke x, akkor ebben az x pontban a függvény görbéjének közös pontja van az x tengellyel.

1221/a.

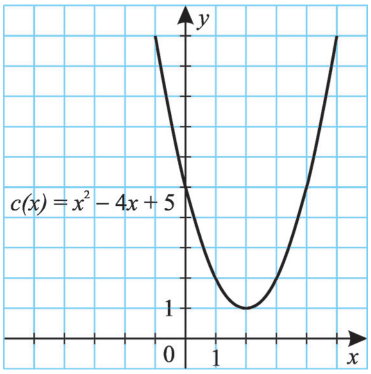


IV

1221/b.



1221/c.



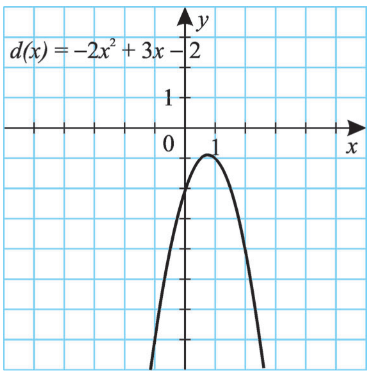
6. A leolvasott gyökök $x_1 = -2{,}5$ és $x_2 = 1$; helyességükről visszahelyettesítéssel győződhetünk meg.
7. A grafikus megoldás általában csak közelítő pontosságú.
8. A megoldóképlet alkalmazásával $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2}$; innen $x_1 = 1$ és $x_2 = -2{,}5$.

b) 1. $\mathrm{b}(x) = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2$.
2. $-(x-1)^2 \le 0$, így $R_b = \left]-\infty; 0\right]$.
3. 1221/b. ábra.
4. Sorrendben: eltolás az (1; 0) vektorral; tengelyes tükrözés az x tengelyre.
6. A leolvasott kétszeres gyök $x = 1$; helyességéről visszahelyettesítéssel győződhetünk meg.
8. $(x-1)^2 = 0$, innen $x = 1$.

c) 1. $c(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$.
2. $(x-2)^2 + 1 \ge 1$, így $R_b = [1; \infty[$.
3. 1221/c. ábra.
4. Sorrendben: eltolás a (2; 0) vektorral; eltolás a (0; 1) vektorral.
6. Nincs gyök.
8. Nincs gyök, $(x-2)^2 + 1 = 0$ nem teljesülhet. (Az egyenlet bal oldala legalább 1; vagy a megoldóképlet diszkriminánsa negatív.)

d) 1. $d(x) = -2x^2 + 3x - 2 =$
$$= -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{7}{8}.$$

1221/d.



2. $-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{7}{8}\le-\frac{7}{8}$, így $R_b=\left]-\infty;-\frac{7}{8}\right]$.

3. 1221/d. ábra

4. Sorrendben: eltolás a $\left(\frac{3}{4};\ 0\right)$ vektorral; $\lambda=-2$ arányú, az x tengelyre merőleges affinitás (vagy $\lambda=2$ arányú affinitás és tengelyes tükrözés); eltolás a $\left(0;\ -\frac{7}{8}\right)$ vektorral.

6. Nincs gyök.

8. Nincs gyök. (Az értékkészletből is megállapíthatjuk, vagy a megoldóképletet alkalmazva a diszkrimináns negatív.)

1222. *a)* Igaz.
b) Párhuzamos az y tengellyel.
c) Ha az a főegyüttható pozitív, az y tengely pozitív irányában nyitott; ha negatív, akkor fordítva.
d) Ha az a főegyüttható abszolútértéke nagy, akkor a parabola „meredekebb” („keskenyebb”, „soványabb”); egyébként „laposabb” („szélesebb”, „kövérebb”).
e) Ha $c=0$, akkor a parabola átmegy az origón; ha $b=0$, akkor a tengelye egybeesik az y tengellyel.

1223. Négyféle lehet.
1. Elkerülik egymást, nincs közös pontjuk.
2. Az egyenes érinti a parabolát.
3. Az egyenes egyetlen pontban metszi a parabolát. (Ez csak akkor lehetséges, ha az egyenes párhuzamos a parabola tengelyével.)
4. Az egyenes két pontban metszi a parabolát.

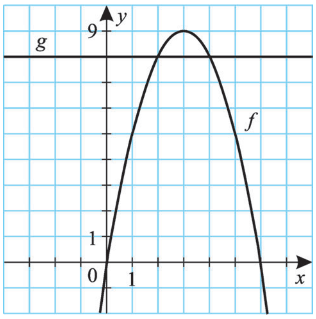
Több közös pontjuk nem lehet. Az egyenes egyenlete elsőfokú, a parabola egyenlete másodfokú; a metszéspontok meghatározására felállított egyenletrendszernek legfeljebb két gyöke lehet.

1224. Például ha az egyik kifejezés $f(x)=x^2+2x+3$, a másik pedig:
a) $2x^2+2x-5$ (vagy általában ax^2+bx+c, ahol $a, b, c\in\mathbf{R}$, $a\neq-1$);
b) $-x^2+5x+1$ (általában $-x^2+bx+c$);
c) $-x^2-2x+1$ (általában $-x^2-2x+c$).

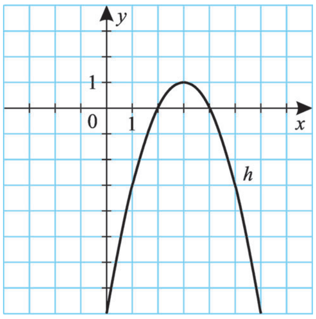
1225. Diszkrimináns a discrimino (latin) „szétválaszt” igéből a.m. „szétválasztó”, átvitt értelemben „meghatározó, döntő tényező”. Az $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$) másodfokú egyenletnek akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa, a b^2-4ac kifejezés nemnegatív; vagyis a diszkrimináns „határozza meg” vagy „dönti el” a gyökök létezését és számát.

1226. Az $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$) másodfokú egyenlet diszkriminánsától függ a gyökök száma. (Ha a diszkrimináns zérus, akkor egyetlen kétszeres gyök van; úgy is fogalmazhatunk, hogy a két gyök egyenlő.) A másodfokú kifejezés képe parabola. A gyökök grafikus jelentésük szerint a parabola és az x tengely érintési vagy metszéspontjait jelentik, így a diszkrimináns előjeléből következtethetünk a parabola koordináta-rendszerbeli helyzetére is.

1227/I.



1227/II.

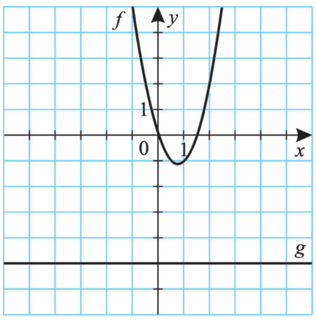


IV

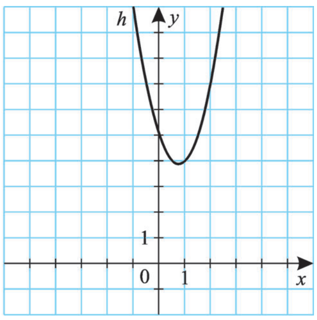
1227. *a)* $D = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8) = 4 > 0$, két gyök van. (Vagy átalakítások után $(x-3)^2 = 1$.)
Grafikus segítséggel is megállapíthatjuk a gyökök számát.
A bal oldalon lévő $f(x) = -x^2 + 6x$ függvény képe lefelé nyitott parabola $x_1 = 0$ és $x_2 = 6$ tengelymetszetekkel s az $x = 3$ helyen felvett $y = 9$ maximummal; míg a jobb oldali $g(x) = 8$ függvény képe az x tengellyel párhuzamos egyenes, s ez két pontban metszi a parabolát (1227/I. ábra).
Ha az eredeti egyenletet átalakítjuk, $-x^2 + 6x - 8 = 0$. Innen a bal oldali $h(x) = -x^2 + 6x - 8$ függvény transzformációs alakja $h(x) = -(x-3)^2 + 1$, s ez a függvénygörbe két pontban metszi az x tengelyt (1227/II. ábra).

b) $D = -31 < 0$, nincs gyök.
Grafikusan: Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 - 3x$ és $g(x) = -5$ függvényeket (1227/III. ábra), vagy a $h(x) = 2x^2 - 3x + 5 = 2\left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{31}{8}$ függvényt (1227/IV. ábra)!

1227/III.

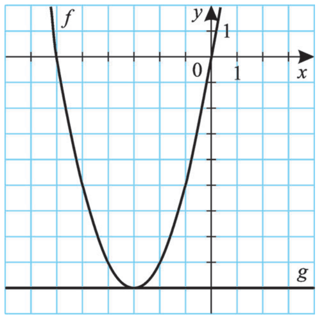


1227/IV.



c) $D = 0$, egy (kétszeres) gyök van (1227/V. ábra). *d)* Nincs gyök. *e)* Két gyök van.

1227/V.



1228. $D = 9 - 4c$.

a) $D > 0$, vagyis $c < \frac{9}{4}$;

b) $c = \frac{9}{4}$ (ekkor kétszeres gyök van);

c) $c > \frac{9}{4}$.

1229. A feladat kitűzője valószínűleg a négyzetek oldalainak hosszára volt kíváncsi.
Jelöljük az egyik négyzet oldalát a-val, akkor a másik oldala $\frac{3}{4}a$. Az egyenlet: $a^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 = 100$, a megoldás: $a = 8$; tehát a négyzetek oldala 8, illetve 6 egység.

1230. Legyen az a befogó hossza $3x$, ekkor $b = 4x$, a terület $\frac{3x \cdot 4x}{2} = 6x^2$. Innen $x = 2$, $a = 6$, $b = 8$ egység.

1231. Jelöljük a majmok létszámát n-nel, ekkor az $\left(\frac{n-5}{3}\right)^2 = n - 1$ egyenlet adja a megoldást: $n = 17$.

1232. Jelöljük a tagok számát n-nel! Ekkor $\frac{n(n+1)}{2} = 66$, innen $n = 11$. (Az $n = -12$ gyök hamis.)

1233. Jelöljük (a_n)-nel a sorozatot $(n \in \mathbf{N}^+)$!

a) $a_n = -4 + 3 \cdot (n-1) = 3n - 7$.

b) Az első n elem összege $S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2} = \frac{(-4 + 3n - 7)n}{2} = \frac{3n^2 - 11n}{2}$. Az $S_n \approx 10^3$ egyenletből $3n^2 - 11n - 2 \cdot 10^3 = 0$, innen $n = 27{,}7$ (a negatív gyök hamis). Vagyis a sorozatból legalább 28 tagot kell összeadnunk.

1234. Jelöljük (a_n)-nel a sorozatot $(n \in \mathbf{N}^+)$!

a) $a_n = -10 + 3 + 4 + \ldots + (n+1) = -10 + \frac{(3 + n + 1)(n-1)}{2} = \frac{n^2 + 3n - 24}{2}$.

b) Az $a_n = 10^3$ egyenletből $n^2 + 3n - 2024 = 0$, innen $n = 43{,}5$ (a negatív gyök hamis). Vagyis a sorozat 44. tagja lesz először 1000-nél nagyobb.

1235. Jelöljük x-szel a rajban lévő méhek számát! Ekkor $\sqrt{\frac{x}{2}}+\frac{8}{9}x+2=x$ a megoldandó egyenlet, ami az $y=\sqrt{\frac{x}{2}}$ helyettesítéssel másodfokúra visszavezethető. Eredmény: $x = 72$. ($x = 4{,}5$ hamis gyök.)

1236. *a)* $x \neq -5, -2$. Ekvivalens átalakítások után $2x^2-3x+1=0$, innen $x_1=1$, $x_2=0{,}5$.

b) $x_{1,2}=2$.

c) $x_1=7$, $x_2=-\frac{7}{9}$.

1237. *a)* $x_1=-2$. ($x_2=-1$ hamis gyök.)

b) $x_1=-0{,}75$, $x_2=1$.

c) $x_1=6$, $x_2=-2{,}2$.

d) $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{3}}{2}$; $x_1\approx-1{,}63$, $x_2\approx-3{,}37$.

e) $x_1=3$. ($x_2=2$ hamis gyök.)

1238. *a)* Az $x\neq-1$ kikötés után alkalmazzuk az $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ azonosságot! Eredmény: $x_1=3$. ($x_2=-1$ hamis gyök.)

b) $x\neq 2$; 3; 4. Ekvivalens átalakítások után $7x^2-51x+80=0$, innen $x_1=5$, $x_2=\frac{16}{7}$.

c) $x_1=0$, $x_2=-7\sqrt{5}$.

d) $x_1=0$, $x_2=\sqrt{2{,}5}$, $x_3=-\sqrt{2{,}5}$.

1239. *a)* $x_1=\frac{19}{13}$. ($x_2=0$ és $x_3=1$ hamis gyökök.)

b) $x_1=1$, $x_2=-3$.

1240. Észrevehetjük, hogy $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$, valamint $\frac{1}{x(x+2)}=$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)$.

a) $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=$ $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{2}{x(x+2)}$. A $\frac{2}{x(x+2)}=\frac{2}{63}$ egyenletből $x_1=7$, $x_2=-9$.

b) $\frac{2}{x(x+2)}=\frac{1}{24}$, innen $x_1=6$, $x_2=-8$.

c) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}==\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=$
$=\frac{3}{x(x+3)}$. A $\frac{3}{x(x+3)}=\frac{3}{88}$ egyenletből $x_1=8,\ x_2=-11.$

d) $\frac{4}{x(x+4)}=\frac{1}{8}$, innen $x_1=4,\ x_2=-8.$

e) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)=\frac{2}{x(x+4)}$. $\frac{2}{x(x+4)}=\frac{2}{45}$,
innen $x_1=5,\ x_2=-9.$

1241. Az egyenleteket – alkalmas helyettesítéssel – másodfokúra redukálhatjuk.

a) Az $a=x^2$ helyettesítéssel $a^2=\frac{25}{4}$, innen $a=\pm\frac{5}{2}$. Csak a pozitív gyök lehetséges, így $x^2=2{,}5;\ x=\pm\sqrt{2{,}5}$.

b) $a=x^2$ helyettesítéssel $a_1=1,\ a_2=0{,}5$. Innen
$x\in\left\{-1;\ 1;\ -\sqrt{0{,}5};\ \sqrt{0{,}5}\right\}$.

1242. *a)* $a=x^2$ helyettesítéssel $a_1=1,\ a_2=-2{,}5$, ez utóbbi nem lehetséges. $x_1=1,\ x_2=-1.$

b) $a=(x-1)^2$ helyettesítéssel $a^2+3a-10=0$. Innen $a_1=2,\ a_2=-5$ (ez utóbbi hamis); $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$.

1243. *a)* $a=x^3$ helyettesítéssel $a_1=8,\ a_2=-3$; innen $x=2$.

b) $x_1=-1,\ x_2=\sqrt[3]{\frac{7}{3}}$.

1244. *a)* $a=x^2+x$ helyettesítés után $a_1=5,\ a_2=-2$; innen $x_1=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$,
$x_2=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

b) $a=x^2+2x$ helyettesítés után $a_1=3,\ a_2=-4$; innen $x_1=1,\ x_2=-3.$

1245. *a)* $a=x^2-4x$ helyettesítés után $a_1=-1+\sqrt{3},\ a_2=1-\sqrt{3}$. Innen
$x_1=2+\sqrt{3+\sqrt{3}}$, $x_2=2-\sqrt{3+\sqrt{3}}$, $x_3=2+\sqrt{3-\sqrt{3}}$,
$x_4=2-\sqrt{3-\sqrt{3}}$.

b) Ha $a=x^2-2x-3$, akkor $a\cdot(a+4)=45$. Innen $a_1=5,\ a_2=-9$; $x_1=4,\ x_2=-2.$

c) Ha $a=x^2+x+1$, akkor $(a+2)a=15$. Innen $a_1=3,\ a_2=-5$; $x_1=1,\ x_2=-2.$

IV

1246. *a)* Ha $a = x^2 - 3x + 1$, akkor $\frac{1}{a} - a + 1,5 = 0$. Innen $a_1 = 2$, $a_2 = -0,5$;
$x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$, $x_3 = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$, $x_4 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$.
b) Ha $a = x^2 + 3x - 3$, akkor $\frac{3}{a} - 2a - 1 = 0$. Innen $a_1 = 1$, $a_2 = -1,5$;
$x_1 = 1$, $x_2 = -4$, $x_3 = \frac{-3 + \sqrt{15}}{2}$, $x_4 = \frac{-3 - \sqrt{15}}{2}$.

A következő feladatoknál speciális megoldási módszereket alkalmazunk (értelmezési tartomány, értékkészlet, függvény monotonitásának vizsgálata). (1247–1254. feladat)

1247. *a)* Nincs megoldás. Ha $x \geq 1$, akkor a bal oldal értéke legalább 8, míg a jobb oldal értéke legfeljebb 7. (A továbbiakban az egyenletek bal oldalán lévő értéket B-vel, a jobb oldal értékét J-vel jelöljük.)
b) $B \geq 10$, $J \leq 10$, így $(x; y) = (2; 0)$.
c) Átalakítás után $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$, innen $(x; y) = (-1; 2)$.

1248. *a)* $x^2 + 3x + \sqrt{x - 3} = 18$. Mivel $x \geq 3$, így $B \geq 18$; $J = 18$, innen $x = 3$.
b) $x \geq 1$, így $B \geq 5$. Mivel $J \leq 5$, $(x; y) = (1; 0)$.

1249. *a)* $3x^2 + 2x + 2\sqrt{x - 2} - 4 = -2(y - 3)^2 + 12$. $x \geq 2$, így $B \geq 12$; mivel $J \leq 12$, $(x; y) = (2; 3)$.
b) Nincs megoldás. $(x + 2)^2 + \sqrt{x^2 + 6x + 1} + y^2 = 0$. Nemnegatív tagok összege csak akkor lehet nulla, ha minden tag nulla, de $x = -2$ nem megoldás.

1250. *a)* $-x^2 + 11x - 24 = -(x - 3)(x - 8)$, így $3 \leq x \leq 8$. $\sqrt{-x^2 + 11x - 24} + x^2 + 3x + (y - 3)^2 = 18$ átalakítás után $B \geq 18$, ezért $(x; y) = (3; 3)$.
b) $x \geq 7$, s ekkor $B \geq 2$. $x = 7$.

1251. *a)* Nincs megoldás. $x \geq 5$ és $x \leq 4,5$ kikötések ellentmondók.
b) Nincs megoldás. $B \geq \sqrt{2}$.

1252. *a)* $B \geq 0$, $x \geq -3$, de ekkor $J \leq 0$. $x = -3$.
b) $B \geq 3$. $2y - y^2 + 2 = 3 - (y - 1)^2$, így $J \leq 3$; innen $(x; y) = (2; 1)$.

1253. *a)* $x^2 - 2x - 4 = (x - 1)^2 - 5 \geq -1$, ha $x \geq 3$. $B \geq 0$ és monoton nő, így csak $x = 3$ lehet a megoldás.
b) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 2} + (y - 2)^2 + x^2 = 5$. Mivel $x \geq 2$, $B \geq 5$, innen $(x; y) = (2; 2)$.

1254. *a)* $\sqrt{x^2 + 4} \geq 2$, így csak $x = 0$ lehetne megoldás, de ez nem gyök.
b) $B \geq 2$, így $x \geq 3$; de ekkor $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x + 1}$. Nincs megoldás.

Összefüggések a gyökök és együtthatók között

1255. A gyöktényezős alak $a(x-x_1)(x-x_2)$, ahol x_1 és x_2 az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet gyökei.
Gyöktényezős alakok: *a)*, *c)*, *g)*, *h)*, *i)*, *k)*.

1256. *a)* $2(x-1)(x+2{,}5)$;
b) $(x-1)(x+2)$;
c) nincs;
d) $4(x+2)(x-1)$.

1257. *a)* $-2(x-2)(x-3)$;
b) $\left(y-3-\sqrt{2}\right)\left(y-3+\sqrt{2}\right)$;
c) $(z-2)^2$;
d) nincs.

1258. *a)* $2\left(x-\frac{1}{6}\right)^2$;
b) $8\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\left(x+\frac{1}{4}\right)$;
c) $-(x-1)\left(x-\sqrt{2}\right)$;
d) $3\left(x-\sqrt{3}\right)(x-\pi)$.

1259. A megoldóképlet segítségével
$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a};$$
$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$
Másképpen: Kiindulhatunk a gyöktényezős alakból is: az $a(x-x_1)(x-x_2)\equiv$ $\equiv ax^2+bx+c$ azonosságból következik az állítás.

1260. Ha x_1 és x_2 a két (esetleg egyenlő) gyök, akkor $x_1+x_2=-b$ és $x_1\cdot x_2=c$.

1261. Az $a(x-2)(x-3)=0$ gyöktényezős alakot alkalmazva az $a\neq 0$ főegyütthatót szabadon választhatjuk, tehát végtelen sok megfelelő másodfokú egyenlet van.

1262. Például:
a) $(x-2)(x-3)=x^2-5x+6=0$.
b) $x^2+x-20=0$.
c) $x^2-2x=0$.
d) $(x-2)(x-0{,}5)=x^2-2{,}5x+1$, így $2x^2-5x+2=0$.
e) $(x-0{,}4)(x+0{,}04)=x^2-0{,}36x-0{,}016$, így $1000x^2-360x-16=0$.
f) $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)=x^2-x\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{6}$; nincs megoldás.
g) $x^2-4x+2=0$.
h) $x^2-(a+b)x+ab=0$.

i) $x^2 - \left(a + \dfrac{1}{a}\right)x + 1 = 0$, innen $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$.

j) Nincs megoldás.

k) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$.

l) Legyen $r_1 = \dfrac{a_1}{b_1}$ és $r_2 = \dfrac{a_2}{b_2}$ két tetszőleges racionális szám

IV

$(a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{Z})$! Ekkor $x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2 = 0$ átalakításából $b_1b_2x^2 - (a_1b_2 + a_2b_1)x + a_1a_2 = 0$.

1263. *a)* $x^2 + 6x - 7 = 0$, ha $x_1 = 1$ vagy $x_2 = -7$. Innen $x^2 + 6x - 7 = (x - 1)(x + 7)$.

b) $x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 + 36}}{2} = -3 \pm \sqrt{18}$, így $x^2 + 6x - 9 = \left(x + 3 - \sqrt{18}\right)\left(x + 3 + \sqrt{18}\right)$.

c) $0{,}5(x - 4)(x - 2)$.

d) $(y - 3)(y + 4)$.

1264. *a)* $(x - a)(x + 2a)$.

b) A $t^2 - 4t + 5 = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív, így nem lehet szorzattá alakítani.

c) $2(z + 0{,}5)(z - 0{,}5)$.

d) $(2x + 1)(x - \pi)$ vagy $2(x + 0{,}5)(x - \pi)$.

1265. *a)* $\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$.

b) $\dfrac{1}{2}(x - 2)\left(x - \sqrt{2}\right)$.

1266. *a)* $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 6x + 9} = \dfrac{(x - 2)(x + 3)}{(x + 3)^2} = \dfrac{x - 2}{x + 3}$, ha $x \neq -3$.

b) $\dfrac{5y^2 - 2y - 7}{y^2 - 8y - 9} = \dfrac{5(y + 1)(y - 1{,}4)}{(y + 1)(y - 9)} = \dfrac{5(y - 1{,}4)}{(y - 9)}$, ha $y \neq -1$, $y \neq 9$.

c) $\dfrac{2x^2 + 8x - 90}{3x^2 - 36x + 105} = \dfrac{2(x - 5)(x + 9)}{3(x - 5)(x - 7)} = \dfrac{2(x + 9)}{3(x - 7)}$, ha $x \neq 5$, $x \neq 7$.

d) $\dfrac{2a^2 - ab - 3b^2}{2a^2 - 5ab + 3b^2} = \dfrac{(a + b)(2a - 3b)}{(a - b)(2a - 3b)} = \dfrac{a + b}{a - b}$, ha $a \neq b$, $a \neq 1{,}5b$.

1267. *a)* $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 \cdot x_2 = 6$. Két szám összege 5, szorzata 6; innen „kitalálhatjuk”, hogy $x_1 = 2, x_2 = 3$. Az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ alakú másodfokú egyenletnek legfeljebb két gyöke van; ha tehát megtaláltuk a két gyököt, több megoldás nem lehetséges.

b) $y_1 + y_2 = -1$, $y_1 \cdot y_2 = -42$, innen $y_1 = 6$, $y_2 = -7$.

c) $t_1 = 1$ „ránézésre” gyök; $t_1 \cdot t_2 = -\dfrac{5}{2}$ miatt $t_2 = -\dfrac{5}{2}$.

d) $x_1 + x_2 = a + 1$, $x_1 \cdot x_2 = a$; innen $x_1 = 1$, $x_2 = a$.

1268. *a)* $x_1 + x_2 = b + 2,\ x_1 \cdot x_2 = 2b$; innen $x_1 = 2,\ x_2 = b$.

b) $x_1 = 0; x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}$ miatt $x_2 = -\frac{3}{2}$.

c) $x_1 = 1; x_1 \cdot x_2 = -\frac{13}{5}$, innen $x_2 = -\frac{13}{5}$.

d) $x_1 + x_2 = -a,\ x_1 \cdot x_2 = -2a^2$; innen $x_1 = a,\ x_2 = -2a$.

IV

1269. *a)* $x_1 \cdot x_2 = 1$, a gyökök egymás reciprokai. $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, innen $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

b) $x_1 = 1;\ x_2 = \pi$.

c) $x_1 = -1;\ x_2 = -\pi$.

d) $x_1 = \sqrt{2};\ x_2 = \sqrt{3}$.

1270. *a)* $x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{2} < 0$, ezért az egyik gyök negatív, a másik pozitív.

b) $x_1 < 0, x_2 > 0$. (A gyökök között nem teszünk sorrendi különbséget; az egyik gyök negatív, a másik pozitív.)

c) $a_1 \cdot a_2 = 49 > 0$, a gyökök azonos előjelűek. Mivel $a_1 + a_2 = 14$, mindkét gyök pozitív.

d) $b_1, b_2 < 0$.

1271. *a)* $x_1, x_2 > 0$.

b) $x_1 < 0,\ x_2 > 0$.

c) $a_1, a_2 > 0$.

d) $x_1 < 0,\ x_2 > 0$.

e) $x_1,\ x_2 > 0$.

Megjegyzések:

Az 1270. *c)*, és 1271. *a)* esetekben a két gyök egyenlő.

Ha a feladat szövegében nem lenne a gyökök létezésére vonatkozó feltétel, akkor ezt külön ellenőriznünk kellene. Pl. az $x^2 + 4x + 5 = 0$ egyenletben $x_1 + x_2 = -4,\ x_1 \cdot x_2 = 5$; mindkét gyök negatív lehetne, de egyáltalán nincs valós gyöke az egyenletnek.

1272. Az **1270.** feladat megoldásai a Viète-formulák ismeretében:

a) $x_1 = 2{,}5;\ x_2 = -1$;

b) $x_1 = -2;\ x_2 = 3$;

c) $a_{1,2} = 7$;

d) $b_1 = -3;\ b_2 = -1$.

Az **1271.** feladat megoldásai a Viète-formulák ismeretében:

a) $x_{1,2} = -\frac{1}{6}$;

b) $x_1 = \frac{\pi}{2};\ x_2 = -\frac{1}{4}$;

c) $a_1 = 1;\ a_2 = \sqrt{2}$;

d) $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$;

e) $x_1 = 2$; $x_2 = \sqrt{2}$.

1273. A $P(x, y)$ kétváltozós polinomot szimmetrikus polinomnak nevezzük, ha $P(x, y) = P(y, x)$, vagyis x és y szerepcseréje esetén a polinom nem változik. (Másképpen megfogalmazva: ha bármely $x = a$ és $y = b$ esetén kapott helyettesítési érték megegyezik az $x = b$ és $y = a$ helyen felvett helyettesítési értékkel.) Ez alapján szimmetrikus polinomok: *a), b), c), d), e), f), g)*.

IV

1274. *Megjegyzés:*

A szimmetrikus polinomok tétele szerint minden kétváltozós szimmetrikus polinom felírható az elemi kétváltozós szimmetrikus polinomok segítségével. A kétváltozós elemi szimmetrikus polinomok: $s = x + y$ és $p = xy$. Mivel a Viète-formulák $\left(u + v = -\frac{b}{a},\ u \cdot v = \frac{c}{a}\right)$ a gyökök elemi szimmetrikus polinomjai és a másodfokú egyenletek együtthatói közötti kapcsolatot adják meg, ezért a gyökök szimmetrikus kifejezései (egyértelműen) felírhatók az együtthatók segítségével.

a) $2u + 2v = 2(u + v) = -\frac{2b}{a}$;

b) $-3uv = -3 \cdot \frac{c}{a}$;

c) $u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$;

d) $2\left(u^3 + v^3\right) = 2(u + v)^3 - 6uv(u + v) = \frac{2b^2}{a^2} - \frac{6c}{a} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) =$
$= \frac{2b^2 + 6bc}{a^2}$;

e) $u^4 + v^4 = \left(u^2 + v^2\right)^2 - 2u^2v^2 = \left((u + v)^2 - 2uv\right)^2 - 2u^2v^2 = (u + v)^4 -$
$- 4uv(u + v)^2 + 4u^2v^2 - 2u^2v^2 = (u + v)^4 - 4uv(u + v)^2 + 2u^2v^2 =$
$= \frac{b^4}{a^4} - \frac{4c}{a} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{2c^2}{a^2} = \frac{b^4 - 4acb^2 + 2a^2c^2}{a^4}$;

f) $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{u + v}{uv} = \left(-\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{a}{c} = -\frac{b}{c}$, ha $c \neq 0$;

g) $\frac{u}{v^2} + \frac{v}{u^2} = \frac{u^3 + v^3}{u^2v^2} = \frac{b^2 + 3bc}{a^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2 + 3bc}{c^2}$, ha $c \neq 0$.

1275. A feltétel szerint a gyökök léteznek; $x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{2}$.

a) $x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = \frac{29}{4}$;

b) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -\frac{117}{8}$;

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{3}{5}$;

d) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1^2x_2^2} = \frac{29}{25}$;

e) $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3x_2^3} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)}{x_1^3x_2^3} = \frac{117}{125}$.

Megjegyzés:
Ha a feladat szövegében nem szerepelt volna a gyökök létezésére vonatkozó kitétel, akkor ezt ellenőriznünk kellett volna, pl. a diszkrimináns előjelének megvizsgálásával.

1276. *a)* $x_1 + x_2 = 1{,}5$, $x_1 \cdot x_2 = 2{,}5$.

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = -2{,}75$;

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -7{,}875$;

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = 0{,}6$;

$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1^2x_2^2} = -0{,}44$.

b) $x_1 + x_2 = 1{,}5$, $x_1 \cdot x_2 = 1$.

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 0{,}25$;

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -1{,}125$;

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = 1{,}5$;

$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1^2x_2^2} = 0{,}25$.

Az *a)* esetben lehetetlen eredményt kaptunk: $x_1^2 + x_2^2$ és $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ is negatív.
Az ellentmondásnak az az oka, hogy a Viète-formulákat csak akkor alkalmazhatjuk, ha vannak valós gyökök. A $2x^2 - 3x + 5 = 0$ egyenlet diszkriminánsa $D = 9 - 40 < 0$, vagyis az egyenletnek egyáltalán nincsenek valós gyökei.
Ugyanez a helyzet $2x^2 - 3x + 2 = 0$ egyenlettel is: $D = 9 - 16 < 0$. Itt azonban még utólag sem lehet észrevenni az ellentmondást. Ezért:
A gyökök szimmetrikus kifejezéseinek felírása előtt meg kell győződnünk arról, hogy a gyökök ténylegesen léteznek (a diszkrimináns nemnegatív).

IV

Megjegyzés:
A Viète-formulák a komplex számok körében is teljesülnek: ha az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ egyenletnek két komplex gyöke van, ezek összege $-\frac{b}{a}$ és szorzatuk $\frac{c}{a}$.

1277. *a)* $(u - v)^2 = (u + v)^2 - 4uv = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$;

b) Ha $u \geq v$, akkor $u - v = \sqrt{(u+v)^2 - 4uv} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$; ha $u < v$, akkor $u - v = \frac{4ac - b^2}{a^2}$.

c) $u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$. Ha $|u| \geq |v|$, akkor $u^2 - v^2 = -\frac{b^3 - 4abc}{a^3}$, egyébként $u^2 - v^2 = \frac{4abc - b^3}{a^3}$.

d) $u^3 - v^3 = (u - v)\left(u^2 + uv + v^2\right) = (u - v)\left((u + v)^2 - uv\right) =$
$= \frac{b^2 - 4ac}{a^2} \cdot \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}\right)$, ha $u \geq v$; egyébként ennek ellentettje.

e) $\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{v - u}{uv} = -\frac{b^2 - 4ac}{a^2} \cdot \frac{a}{c} = \frac{4ac - b^2}{ac}$, ha $v \geq u$; egyébként ennek ellentettje.

1278. Ha a két gyök u és v, akkor $u + v = -1{,}5$, $uv = -2{,}5$.
a) $(u - v)^2 = (u + v)^2 - 4uv = 12{,}25$.
b) $u - v = \pm\, 3{,}5$.
c) $u^2 - v^2 = (u + v)(u - v) = \pm\, 5{,}25$.
d) $u^3 - v^3 = (u - v)\left(u^2 + uv + v^2\right) = (u - v)\left((u + v)^2 - uv\right) = \pm 16{,}625$.
e) $\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{v - u}{uv} = \pm\, 1{,}4$.

1279. Ha a két gyök u és v, akkor $u + v = 1{,}5$, $uv = 2{,}5$.
a) $(u - v)^2 = (u + v)^2 - 4uv = -7{,}75$.
Ellentmondást kaptunk: nem lehet negatív egy valós szám négyzete. Az ellentmondás oka, hogy az egyenletnek nincs valós gyöke.

1280. Feltehetjük, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek vannak gyökei, vagyis $D = b^2 - 4ac \geq 0$.
Ha a két gyök u és v, akkor $u + v = -\frac{b}{a}$ és $uv = \frac{c}{a}$; a gyökök és együtthatók közötti összefüggések miatt tehát:
a) $ax^2 - bx + c = 0$;
b) $ax^2 + 2bx + 4c = 0$;
c) $ax^2 + nbx + n^2 \cdot c = 0$;

d) $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{u+v}{uv}=-\frac{b}{c}$, $\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{v}=\frac{1}{uv}=\frac{a}{c}$, ezért $x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$, ha $c\neq 0$ (vagy $cx^2+bx+a=0$);

e) $u^2+v^2=(u+v)^2-2uv=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}$, $u^2\cdot v^2=\frac{c^2}{a^2}$, ezért

$$x^2+\left(\frac{2c}{a}-\frac{b^2}{a^2}\right)x+\frac{c^2}{a^2}=0\ \left(\text{vagy } a^2x^2+\left(2ac-b^2\right)x+c^2=0\right).$$

1281. Az egyenletnek akkor van valós gyöke, ha $(2p)^2-4\cdot(2-p)\geq 0$, vagyis $p\leq -2$ vagy $1\leq p$. Ezen feltétel mellett:

a) $-2p>0$ és $2-p>0$, vagyis $p<0$; a feltétellel összevetve $p\leq -2$.

b) $-2p<0$ és $2-p>0$, vagyis $0<p<2$; a feltétellel összevetve $1\leq p<2$.

c) $2-p<0$, vagyis $2<p$; a feltétellel összevetve $2<p$.

d) $x=0$ helyettesítéssel $p=2$.

1282. Az egyenletnek akkor van valós gyöke, ha $19^2-4\cdot 5\cdot p\geq 0$, vagyis $p\leq 18{,}05$. A gyökök összege 3,8, szorzata $\frac{p}{5}$.

a) $x=3$ helyettesítéssel $5\cdot 3^2-19\cdot 3+p=0$, innen $p=12$.

(Más megoldási lehetőség a Viète-formulák alkalmazása: ha a másik gyök z, akkor $3z=\frac{p}{5}$ és $3+z=\frac{19}{5}$.)

b) Nem lehetséges; a két gyök összege p-től függetlenül 3,8.

c) $p=18{,}05$.

d) Ha az egyik gyök $2u$, a másik $3u$, akkor $5u=3{,}8$; innen $2u=1{,}52$, $3u=2{,}28$; $p=5\cdot 2u\cdot 3u=17{,}328$.

1283. *a)* Ha a két gyök u és u^2, akkor $u+u^2=3{,}8$, $u^3=\frac{p}{5}$. Innen

$$u_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{16{,}2}}{2};\quad p_1\approx 17{,}3,\quad p_2\approx -79{,}3.$$

b) Ha a két gyök u és $u+1$, akkor $2u+1=3{,}8$, $u^2+u=\frac{p}{5}$. Innen $p=16{,}8$.

c) $p>0$ (és persze $p\leq 18{,}05$).

d) $0<p\leq 18{,}05$.

1284. *a)* Nem lehetséges, a gyökök összege pozitív.

b) $p<0$.

c) $p=0$.

d) $p>18{,}05$.

e) $p=18{,}05$. (Azt is mondhatjuk, hogy két egyenlő gyök van.)

1285. I. Az egyenlet diszkriminánsa $(2-p)^2-4\cdot(-2p)=p^2+4p+4=(p+2)^2$, tehát mindig van két (esetleg egyenlő) valós gyök. A megoldóképletből $x_1=-2$, $x_2=p$.

IV

(1282.)

a) $p = 3$.
b) $p = 8$.
c) $p = -2$.
d) $p = -3$ vagy $p = -\frac{4}{3}$.

(1283.)

a) $p = 4$.
b) $p = -1$ vagy $p = -3$.
c) $p < 0$.
d) Nem lehetséges.

(1284.)

a) $p < 0$.
b) $p > 0$.
c) $p = 0$.
d) Nem lehetséges.
e) $p = -2$. (Azt is mondhatjuk, hogy két egyenlő gyök van.)

II. Az egyenlet diszkriminánsa $(3 - 3p)^2 - 4 \cdot (2p^2 - 3p) = p^2 - 6p + 9 = (p - 3)^2$, tehát mindig van két (esetleg egyenlő) valós gyök. A megoldóképletből $x_1 = p$, $x_2 = 2p - 3$.

(1282.)

a) $p = 3$.
b) $p = 3$.
c) $p = 3$.
d) $p = 2{,}25$ vagy $p = 6$.

(1283.)

a) $p = 2{,}25$ vagy $p = 1$.
b) $p = 4$ vagy $p = 2$.
c) $p < 0$ vagy $1{,}5 < p$.
d) $1{,}5 < p$.

(1284.)

a) $p < 0$.
b) $0 < p < 1{,}5$.
c) $p = 0$ vagy $p = 1{,}5$.
d) Nem lehetséges.
e) $p = 3$.

1286. Az egyenlet diszkriminánsa $16p^2 - 4 \cdot (3p + 1) = 16p^2 - 12p - 4 \geq 0$, ha $p \leq -0{,}25$ vagy $1 \leq p$. Ezen feltétel mellett van két (esetleg egyenlő) gyöke az egyenletnek.

a) $-0{,}25 < p < 1$.
b) $x = 0$ helyettesítéssel $p = -\frac{1}{3}$.
c) $x = -4$ helyettesítéssel $16 + 16p + 3p + 1 = 0$, innen $p = -\frac{17}{19}$.
d) $p = 2$.

1287. *a)* $p = -0{,}25$ vagy $p = 1$.
b) $p < -0{,}25$ vagy $1 < p$.
c) $3p + 1 > 0$, innen $p > -\frac{1}{3}$.
A korlátozó feltétel miatt $-\frac{1}{3} < p \le -0{,}25$ vagy $1 \le p$.
d) $3p + 1 < 0$, $p < -\frac{1}{3}$.
e) Nincs pozitív gyök, ha a gyökök negatívok vagy nincsenek. A két gyök negatív, ha $-\frac{1}{3} < p \le -0{,}25$; nincsenek gyökök, ha $-0{,}25 < p < 1$; innen $-\frac{1}{3} < p < 1$.

1288. $(p + 4)x^2 + (2p + 12)x + 2p + 9 = 0$.
I. Külön kell vizsgálni a $p + 4 = 0$ esetet; ha ugyanis a főegyüttható zérus, akkor nem másodfokú az egyenlet.
Ha $p = -4$, akkor az egyenlet $4x + 1 = 0$ alakú. Ekkor egyetlen gyök van, $x = -0{,}25$.
Ha $p \ne -4$, akkor az egyenlet diszkriminánsa $(2p + 12)^2 - 4 \cdot (p + 4)(2p + 9) = -4p^2 - 20p \ge 0$, ha $-5 \le p \le 0$.

(1286.)
a) $p < -5$ vagy $0 < p$.
b) $p = -4{,}5$.
c) $p = -2{,}5$.
d) $p = -4{,}4$.

(1287.)
a) $p = -5$ vagy $p = 0$.
b) $-5 < p < 0$, de $p \ne -4$.
c) $\frac{2p+9}{p+4} > 0$, ha $p < -4{,}5$ vagy $-4 < p$; a korlátozó feltétel miatt $-5 \le p < -4{,}5$ vagy $-4 < p \le 0$.
d) $\frac{2p+9}{p+4} < 0$, ha $-4{,}5 < p < -4$.
e) $p < -5$ vagy $0 < p$ (nincs gyök);
vagy $p = -4$ (egyetlen gyök van);
vagy $-5 \le p < -4{,}5$, vagy $-4 < p \le 0$ (azonos előjelűek a gyökök) és $-\frac{2p+12}{p+4} < 0$ (a gyökök összege negatív).
Ez utóbbi egyenlőtlenségből $p < -6$ vagy $-4 < p$, így a megoldás: $p < -5$ vagy $-4 < p$.

II. $(2 - p)x^2 - 2x + 2p = 0$.
Ha $p = 2$, akkor $-2x = 0$, innen $x = 0$.

IV

Ha $p \neq 2$, akkor az egyenlet diszkriminánsa $4 - 4 \cdot (2 - p) \cdot 2p = 8p^2 - 16p + 4 \geq 0$, ha $p \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}293$ vagy $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1{,}707 \leq p$.

(1286.)

a) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < p < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) $p = 0$.

c) $p = \frac{20}{7}$.

d) $p = \frac{7}{4}$.

(1287.)

a) $p = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $p = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) $p < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < p$.

c) $\frac{2p}{2-p} > 0$, ha $0 < p < 2$; innen $0 < p \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq p < 2$.

d) $\frac{2p}{2-p} < 0$, ha $p < 0$ vagy $2 < p$.

e) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < p < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ (nincs gyök);
vagy $p = 2$ (egyetlen negatív gyök van);
vagy $\frac{2p}{2-p} > 0$ $(0 < p < 2)$ és $\frac{2p}{2-p} < 0$ (két negatív gyök van).
Ez utóbbi egyenlőtlenségből $p > 2$, így a megoldás:
$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < p < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $p = 2$.

1289. Akkor létezik két (nem feltétlenül különböző) gyök, ha a diszkrimináns nemnegatív. $D = (8p - 2)^2 - 4(15p^2 - 2p - 6) = 4p^2 - 24p + 28$; $D \geq 0$, ha $p^2 - 6p + 7 \geq 0$, s ez akkor teljesül, ha $p \leq 3 - \sqrt{2} \approx 1{,}59$ vagy $3 + \sqrt{2} \approx 4{,}41 \leq p$. Ha a két gyök u és v, akkor a Viète-formulák alapján $u + v = 2 - 8p$ és $uv = 15p^2 - 2p - 6$.

a) $u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv = (2 - 8p)^2 - 2(15p^2 - 2p - 6) = 34p^2 - 28p + 16$. $u^2 + v^2 = 24$, ha $34p^2 - 28p + 16 = 24$, vagyis $34p^2 - 28p - 8 = 0$. Innen $p_1 = \frac{7 + \sqrt{117}}{17} \approx 1{,}05$ és

$p_2 = \dfrac{7-\sqrt{117}}{17} \approx -0{,}22$; a feltételeknek mindkét gyök megfelel.

b) $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{u+v}{uv}=\dfrac{2-8p}{15p^2-2p-6}$. $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=10$, ha $\dfrac{2-8p}{15p^2-2p-6}=$ $=10$, vagyis $150p^2-12p-62=0$. Innen $p_1=\dfrac{3+5\sqrt{93}}{75}\approx 0{,}68$ és $p_2=\dfrac{3-5\sqrt{93}}{75}\approx -0{,}60$, a feltételeknek mindkét gyök megfelel.

c) $\dfrac{1}{u^2+v^2}=\dfrac{1}{(u+v)^2-2uv}=\dfrac{1}{(2-8p)^2-2(15p^2-2p-6)}=$ $=\dfrac{1}{34p^2-28p+16}$. $\dfrac{1}{u^2+v^2}=1$, ha $\dfrac{1}{34p^2-28p+16}=1$, vagyis $34p^2-28p+15=0$. Ezen egyenlet diszkriminánsa negatív, vagyis nem létezik megfelelő p érték.

Megjegyzés:

Természetesen az a megoldási módszer is eredményes, amikor elkerüljük a másodfokú egyenlőtlenség megoldását. Pl. az a) esetben meghatározzuk a lehetséges $p_1=\dfrac{7+\sqrt{117}}{17}$ és $p_2=\dfrac{7-\sqrt{117}}{17}$ értékeket, s az eredeti egyenletbe való visszahelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy ezen p értékekre valóban van gyöke az egyenletnek. Ekkor azonban nem számolhatunk a közelítő értékekkel.

Ha pl. $p\approx 1{,}05$, akkor az eredeti egyenlet $x^2+6{,}4x+8{,}44=0$, a két gyök $x_1\approx -1{,}86$ és $x_2\approx -4{,}54$, $x_1^2+x_2^2\approx 24{,}07$. A kerekítések miatt nem kapunk pontos értéket.

Ha nem a közelítő értékekkel számolunk, akkor az eredeti egyenlet $x^2+(8p-2)x+15p^2-2p-6=289x^2+(374+136\sqrt{117})x+518+176\sqrt{117}=0$.

Innen $x_{1,2}=$

$$=\frac{-374-136\sqrt{117}\pm\sqrt{2\,303\,908+101\,728\sqrt{117}-598\,809-203\,456\sqrt{117}}}{578}=$$

$$=\frac{-374-136\sqrt{117}\pm\sqrt{1\,705\,100-101\,728\sqrt{117}}}{578}\text{, s ekkor } x_1^2+x_2^2=$$

$$=\frac{2\left(\left(374+136\sqrt{117}\right)^2+1\,705\,100-101\,728\sqrt{117}\right)}{578^2}=$$

$$=\frac{2\left(2\,303\,908+101\,728\sqrt{117}+1\,705\,100-101\,728\sqrt{117}\right)}{578^2}=24 \text{ valóban.}$$

IV

1290. *a)* Több megoldás lehetséges. Ha a két gyök pl. $x_1 = 0$ és $x_2 = \sqrt{24}$, akkor $x(x-\sqrt{24}) = 0$.
b) $x_1 = 3$, $x_2 = 22$; $(x-3)(x-22) = 0$.
c) Ha a két gyök x és $x + 0{,}5$, akkor $x(x + 0{,}5) = 2$, innen $x^2 + 0{,}5x - 2 = 0$. Az egyenlet diszkriminánsa $8{,}25 > 0$, tehát léteznek a gyökök. (Amelyek $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{33}}{4} \approx -1{,}69$ és $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{4} \approx 1{,}19$.)
d) Nincs megoldás. A Viète-formulák alapján $x^2 - 0{,}5x + 2 = 0$; ennek az egyenletnek viszont negatív a diszkriminánsa.

1291. A paraméteres egyenleteket a paraméterek minden lehetséges értékére meg kell oldanunk.
a) $a, b, x \neq 0$, $a^4x^2 = b^2$; innen $x = \pm\dfrac{b}{a^2}$.
b) $2x^2 = 2a^2$, $x = \pm a$. (b tetszőleges.)
c) $x \neq \pm a$. Átalakítások után $x^2 = 4a^2$, innen $x = \pm 2a$, ha $a \neq 0$; ha $a = 0$, akkor nincs megoldás.
d) $x \neq \pm a$. Átalakítások után $2a = 0$. Ha $a = 0$, $x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$; ha $a \neq 0$, akkor nincs megoldás.
e) $x \neq \pm a, x \neq \pm b$; átalakítások után $x^2(a+b) = ab(a+b)$.
Mivel $a + b > 0$, $x^2 = ab$, $x = \pm\sqrt{ab}$, feltéve, hogy $\pm\sqrt{ab} \neq \pm a$, ill. $\pm\sqrt{ab} \neq \pm b$, vagyis ha $a \neq b$.
Ha $a = b$, akkor nincs megoldás.

1292. *a)* Ha $D = a^2 - 4b > 0$, vagyis ha $a^2 > 4b$, akkor $x_{1,2} = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, két megoldás van.
Ha $a^2 = 4b$, akkor $x = \dfrac{a}{2}$, egy megoldás (de kétszeres gyök) van.
Ha $a^2 < 4b$, akkor nincs megoldás.
b) $x_1 = a$, $x_2 = b$. Egy (kétszeres) megoldás van, ha $a = b$; különben két különböző megoldás van.
c) $D = 4a^2 - 4(a^2 - b^2) = 4b^2$, így $x_{1,2} = \dfrac{2a \pm 2b}{2}$, $x_1 = a + b$, $x_2 = a - b$.
Ha $b = 0$, egy (kétszeres) gyök van; egyébként a gyökök száma kettő.

1293. *a)* Ha $|a| = 2$, vagyis $a = \pm 2$, egy megoldás van;
ha $|a| > 2$, vagyis ha $a < -2$ vagy $2 < a$, két megoldás van;
ha $|a| < 2$, vagyis $-2 < a < 2$, akkor nincs megoldás.
b) $x \neq 0, x \neq a$. Ha $\dfrac{x}{x-a} = y$, akkor $2y^2 - 5y + 2 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = 0{,}5$.
Az $\dfrac{x}{x-a} = 2$ egyenletből $x = 2a$; nincs megoldás, ha $a = 0$. Az $\dfrac{x}{x-a} = 0{,}5$ egyenletből $x = -a$; nincs megoldás, ha $a = 0$.

Tehát ha $a = 0$, nincs megoldás; egyéb a értékekre pedig két megoldás van.

c) $a, b, x \neq 0$. Átalakításokkal $x^2(a-b) = ab(a-b)$. Ha $a = b$, akkor végtelen sok megoldás van (x bármilyen, nemzérus szám lehet); ha $a \neq b$, akkor $ab > 0$ esetén két megoldás van, $ab < 0$ esetén nincs megoldás.

1294. Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek 2-nél több gyöke csak az $a = 0$ esetben lehet; a $bx + c = 0$ egyenletnek pedig csak a $b = 0$ esetben. Innen $a = b = c = 0$; ekkor minden valós x megoldás, az egyenletnek végtelen sok gyöke van.

IV

1295. Ha $p = 1$, akkor $0 = 0$ azonosságot kapunk, így minden valós x megoldás.
Ha $p = -1$, akkor átalakítások után $x = 1$; egy megoldás van.
Ha $p \neq \pm 1$, akkor a $(p+1)x^2 - x + 1 = 0$ egyenlet diszkriminánsától függ a megoldásszám.
$D = 1 - 4(p+1) = -4p - 3$. $D > 0$, ha $p < -0{,}75$. Ekkor két megoldás van (persze $p \neq -1$). Ha $p = -0{,}75$, egy (kétszeres) gyök van; s ha $p > -0{,}75$ (és $p \neq 1$), nincs megoldás.

1296. *a)* $b^2 - 4c > 0$ teljesüljön. (Ha $c < 0$, ez minden b valós számra fennáll; ha $c \geq 0$, akkor $b > \sqrt{4c}$ vagy $b < -\sqrt{4c}$ szükséges.

b) $b^2 - 4c = 0$. Ha $c < 0$, ez sosem teljesül; ha $c \geq 0$, akkor $b = \pm\sqrt{4c}$.

c) $b^2 - 4c < 0$. Ha $c < 0$, ez sosem teljesül; ha $c \geq 0$, akkor $-\sqrt{4c} < b < \sqrt{4c}$ kell.

d) $x = 3$ helyettesítéssel $9 + 3b + c = 0$, innen $b = \dfrac{-c-9}{3}$.

Egyenletek összetett függvényekkel

1297. *a)* Ha $x \geq 0$, akkor $x^2 = 2x$; ha $x < 0$, akkor $x^2 = -2x$. $x \in \{-2, 0, 2\}$.
Más megoldási lehetőség: $x^2 = |x|^2$, így $|x|^2 - 2|x| = 0$, s innen $|x|(|x| - 2) = 0$.

b) Ha $x \geq 2$, akkor $x^2 - 4x - 3(x-2) + 6 = 0$; $x_1 = 4$, $x_2 = 3$.
Ha $x < 2$, akkor $x^2 - 4x + 3(x-2) + 6 = 0$; $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.
Más megoldási lehetőség: $(x-2)^2 = |x-2|^2$, így $|x-2|^2 - 4 - 3|x-2| + 6 = 0$. Az $y = |x-2|$ helyettesítéssel $y^2 - 3y + 2 = 0$.

c) Ha $x \geq -2$, akkor $x^2 + 2x - 1 = 0$; $x_1 = -1 + \sqrt{2}$, $x_2 = -1 - \sqrt{2}$, de ez utóbbi hamis gyök.
Ha $x < -2$, akkor $x^2 + 2x + 1 = 0$; $x_3 = -1$, hamis gyök.
Egyébként az alapegyenletből észrevehetjük, hogy x csak pozitív lehet.
Más megoldási lehetőség: ha $|x+2| = \dfrac{1}{x}$, akkor az $x + 2 = \pm\dfrac{1}{x}$ két egyenletet is megoldhatjuk (ekkor kötelező az ellenőrzés).

IV

1298. Az $|f(x)| = c$ típusú egyenleteket kétféleképpen oldhatjuk meg.
1. Kétfelé ágaztathatunk $f(x)$ előjele alapján. Ha $f(x) \geq 0$, akkor az $f(x) = c$, ha $f(x) < 0$, akkor pedig a $-f(x) = c$ feltételes egyenleteket oldjuk meg.
2. Egy abszolútértékes kifejezés értéke csak akkor lehet c, ha a kifejezés értéke c vagy $-c$. Ez alapján két egyenletet oldunk meg: $f(x) = c$ és $f(x) = -c$.
Bármelyik módszert választhatjuk; az itt kitűzött feladatokban a második módszer alkalmazása egyszerűbb.

a) $x \in \left\{\pm\sqrt{18},\ \pm\sqrt{14}\right\}$;

b) $x \in \left\{\frac{5-\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{5-\sqrt{5}}{2}; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right\}$; (közelítő értékekkel $x \in \{0{,}70; 4{,}30; 1{,}38; 3{,}62\}$);

c) $x \in \{1; 0{,}5\}$;

d) $x \in \{1+\sqrt{2} \approx 2{,}41;\ 1-\sqrt{2} \approx -2{,}41\}$.

1299. *a)* $x - 1 < [x] \leq x$, innen $-2x \leq -2[x] < -2x + 2$, $x^2 - 2x - 3 \leq x^2 - 2[x] - 3 < x^2 - 2x - 1$.

Az $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ egyenlőtlenség megoldása $-1 \leq x \leq 3$; a $0 < x^2 - 2x - 1$ egyenlőtlenség megoldása $x < 1 - \sqrt{2} \approx -0{,}41$ vagy $1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41 < x$. Összevonva: $-1 \leq x < 1 - \sqrt{2}$ vagy $1 + \sqrt{2} < x \leq 3$. Mivel $x^2 = 2[x] + 3$ egész szám, x a fenti intervallumokba eső $\pm\sqrt{n}$ típusú szám lehet, ahol n pozitív egész. Megoldás: $x \in \left\{-1;\ \sqrt{7};\ 3\right\}$.

b) $3 \leq x^2 - 2x < 4$. Az egyenlőtlenségek megoldása $x \leq -1$ vagy $3 \leq x$, illetve $1 - \sqrt{5} \approx -1{,}24 < x < 1 + \sqrt{5} \approx 3{,}24$. Összevonva $1 - \sqrt{5} < x \leq -1$ vagy $3 \leq x < 1 + \sqrt{5}$.

c) $2x + 2 < [2x + 3] \leq 2x + 3$, innen $2x + 2 < x^2 \leq 2x + 3$. Az egyenlőtlenségek megoldása $x < 1 - \sqrt{3} \approx -0{,}73$ vagy $1 + \sqrt{3} \approx 2{,}73 < x$, illetve $-1 \leq x \leq 3$; s mivel $x = \pm\sqrt{n}$ alakú (n pozitív egész), ezért $x \in \left\{-1; \sqrt{8}; 3\right\}$.

d) $0 \leq \{x\} < 1$, így $0 \leq x^2 - 3 < 2$; $\sqrt{3} \leq |x| < \sqrt{5}$. Alkalmazzuk az $\{x\} = x - [x]$ helyettesítést! Ekkor $x^2 - 2x + 2[x] - 3 = 0$, vagyis $x^2 - 2x = 3 - 2[x]$, egész szám.

Ha $\sqrt{3} \leq x < \sqrt{5}$, akkor $3 - 2\sqrt{3} \approx -0{,}46 \leq x^2 - 2x < 5 - 2\sqrt{5} \approx 0{,}53$, innen $x^2 - 2x = 0$, de nem kapunk megoldást.

Ha $-\sqrt{5} < x \leq -\sqrt{3}$, akkor $3 + 2\sqrt{3} \approx 6{,}46 \leq x^2 - 2x < 5 + 2\sqrt{5} \approx 9{,}47$; innen $x^2 - 2x$ lehetséges értékei 7, 8 vagy 9.

$x \in \left\{1 + \sqrt{8}; 1 - \sqrt{8}; 4; -2; 1 + \sqrt{10}; 1 - \sqrt{10}\right\}$;

ellenőrzés után $x_1 = 1 - \sqrt{8} \approx -1{,}83$; $x_2 = 1 - \sqrt{10} \approx -2{,}16$.

Ellenőrzés: $\left\{1-\sqrt{8}\right\}=\left\{-\sqrt{8}\right\}=3-\sqrt{8}$, így $\left(1-\sqrt{8}\right)^2-2\cdot\left\{1-\sqrt{8}\right\}-3=$ $=9-2\sqrt{8}-2\left(3-\sqrt{8}\right)-3=0$ és $\left\{1-\sqrt{10}\right\}=\left\{-\sqrt{10}\right\}=4-\sqrt{10}$, így $\left(1-\sqrt{10}\right)^2-2\cdot\left\{1-\sqrt{10}\right\}-3=11-2\sqrt{10}-2\left(4-\sqrt{10}\right)-3=0$ valóban.

e) $-1\le x\le 1$. $\{2x-3\}=2x-3-[2x-3]$, a megoldandó egyenlet $x^2-2x+3+[2x-3]=0$. x^2-2x egész szám; s mivel $-1\le x\le 1$, innen $-1\le x^2-2x\le 3$. x^2-2x lehetséges értékei -1, 0, 1, 2 vagy 3; $x\in\{1;\ 0;\ 2;\ 1+\sqrt{2};\ 1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{3};\ 1-\sqrt{3};\ 3;\ -1\}$; ellenőrzés után $x_1=1-\sqrt{2}\approx-0{,}41$, $x_2=1-\sqrt{3}\approx-0{,}73$.

Ellenőrzés: $\{2x-3\}=\{2x\}$; $\left\{2-2\sqrt{2}\right\}=\left\{-2\sqrt{2}\right\}=3-2\sqrt{2}$, így $\left(1-\sqrt{2}\right)^2-\left\{2-2\sqrt{2}-3\right\}=3-2\sqrt{2}-\left(3-2\sqrt{2}\right)=0$ és $\left\{2-2\sqrt{3}-3\right\}=\left\{-2\sqrt{3}\right\}=4-2\sqrt{3}$, így $\left(1-\sqrt{3}\right)^2-$ $-\left\{2-2\sqrt{3}-3\right\}=4-2\sqrt{3}-\left(4-2\sqrt{3}\right)=0$ valóban.

Megjegyzés:
A megoldás egyszerűsödik, ha a $\{2x-3\}=\{2x\}$ azonosságot korábban alkalmazzuk.

f) $x-1<[x]\le x$, innen $2x-2<x^2-3{,}6\le 2x$. Az egyenlőtlenségrendszer megoldása $1-\sqrt{4{,}6}\approx-1{,}14\le x<1-\sqrt{2{,}6}\approx-0{,}61$ vagy $1+$ $+\sqrt{2{,}6}\approx 2{,}61<x\le 1+\sqrt{4{,}6}\approx 3{,}14$. Az első esetben $-3{,}22<x^2-$ $-3{,}6\le-2{,}3$; a másodikban $3{,}21<x^2-3{,}6\le 6{,}26$. A páros egész értékek jöhetnek szóba, $x^2-3{,}6\in\{4;\ 6\}$. Ellenőrzés után $x\in\left\{\sqrt{7{,}6};\ \sqrt{9{,}6}\right\}$.

g) $0\le x^2-2x-3<1$. Az egyenlőtlenségrendszer megoldása $1-\sqrt{5}\approx$ $\approx-1{,}24<x\le-1$ vagy $3\le x<1+\sqrt{5}\approx 3{,}24$.

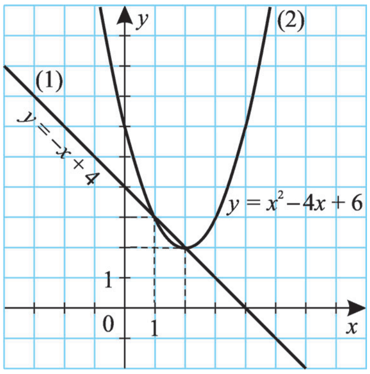
Másodfokú egyenletrendszerek

1300. *Algebrai megoldás:*
(1)-ből $y=4-x$; ezt (2)-be helyettesítve $4-x-x^2+4x=6$. Redukálás után $x^2-3x+2=0$, vagyis *egyváltozós másodfokú egyenletet* kaptunk. Az egyenlet megoldásai $x_1=1$, $x_2=2$; visszahelyettesítve pl. (1)-be, $y_1=3$, $y_2=2$. Az egyenletrendszernek két megoldása van: $(x;y)=(1;3)$ vagy $(x;y)=(2;2)$.
Grafikus megoldás:
Az egyenletrendszer grafikus megoldása azt jelenti, hogy az egyenletek által adott ponthalmazok (alakzatok) közös pontjait határozzuk meg (vagyis azokat

IV

IV

1300.



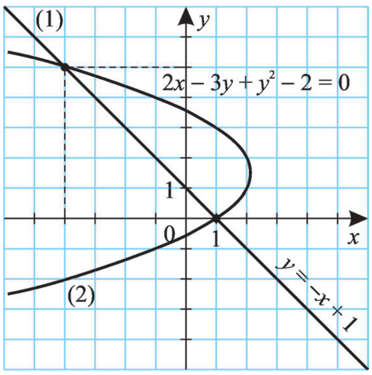
a pontokat, amelyek egyszerre az összes adott alakzaton rajta vannak).
Az (1) egyenes és a (2) parabola (1; 3), illetve (2; 2) metszéspontjait leolvashatjuk a görbék megrajzolása után.
Megjegyzések:
A két ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer megoldása azt jelenti, hogy megadjuk a két változó összes olyan értékét, amelyekre az egyenletek egyszerre teljesülnek; tehát a megoldások számpárok.
A fenti másodfokú egyenletrendszert úgy oldottuk meg, hogy kifejeztük az egyik változót a másik segítségével, s miután így a másik egyenletbe behelyettesítettünk, már egyváltozós egyenletet kaptunk. Ez a megoldási módszer mindig alkalmazható, ha az egyik egyenlet elsőfokú.
Ezért bonyolultabb egyenletek esetén célszerű megvizsgálni azokat a helyettesítéseket, amelyek lineáris egyenletre vezethetnek.

1301. *a)* (1)-ből $x = 1 - y$; ezt (2)-be helyettesítve $2(1 - y) - 3y + y^2 - 2 = 0$. Innen $y_1 = 0$, $y_2 = 5$; visszahelyettesítve (1)-be $x_1 = 1$, $x_2 = -4$. A megoldások: $(x_1; y_1) = (1; 0)$, $(x_2; y_2) = (-4; 5)$.
(1) képe egyenes, (2) képe olyan parabola, amelynek tengelye párhuzamos az x tengellyel.
$\left(y = -x + 1, \text{ illetve } x = -\frac{y^2}{2} + \frac{3y}{2} + 1.\right)$

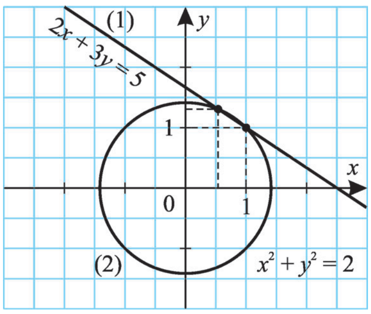
b) $(x_1; y_1) = \left(\frac{7}{13}; \frac{17}{13}\right)$, $(x_2; y_2) = (1; 1)$.

(1) képe egyenes, (2) képe kör. $\left(y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.\right)$

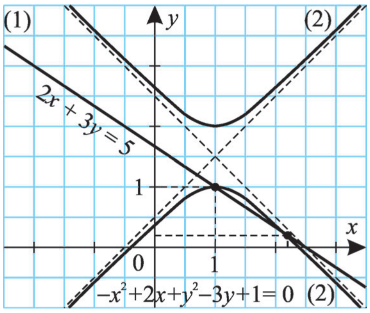
1301/a.



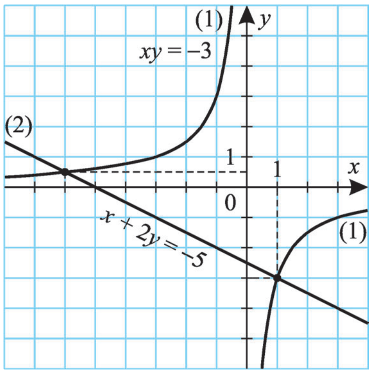
1301/b.



1302/a.



1302/b.



1302. *a)* $(x_1; y_1) = (1; 1)$, $(x_2; y_2) = (2{,}2; 0{,}2)$.
(1) képe egyenes, (2) képe hiperbola.

$$\left(y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}, \text{ illetve } -\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} = 1.\right)$$

b) $(x_1; y_1) = (-6; 0{,}5)$, $(x_2; y_2) = (1; -3)$.
(1) képe hiperbola, (2) képe egyenes. $\left(y = -\frac{3}{x}, \text{ illetve } y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}.\right)$

1303. Jelöljük a téglalap két oldalát $a > b$-vel! Ekkor (1) $ab + a - b = 183$; (2) $a + b = 27$. (2)-ből $b = 27 - a$, ezt (1)-be visszahelyettesítve $a^2 - 29a + 210 = 0$. $a = 14$ (ekkor $b = 13$) vagy $a = 15$ ($b = 12$). A téglalap területe 182 vagy 180 területegység.

1304. *a)* Két megoldás van: $(x; y) = \left(1; \pm\sqrt{5}\right)$. Pl. $y^2 = a$ helyettesítéssel az egyenletrendszer elsőfokú lesz.
(Más megoldási lehetőség: (2) kétszeresét (1)-hez adva kiküszöbölhetjük y^2-et.)
b) Négy megoldás van: $(x; y) = (\pm 2; \pm 1)$. Pl. $y^4 = a$, $x^2 = b$ helyettesítéssel az egyenletrendszer elsőfokú lesz.
(Vagy: (1) -3-szorosát (2)-höz adhatjuk.)

1305. *a) Négy megoldás van:* $(x; y) = (1; \pm 1)$ vagy $(x; y) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$. Pl. az $y^2 = a$, $x^3 = b$ helyettesítéssel az egyenletrendszer másodfokú lesz.
(Vagy: összeadhatjuk (1) 2-szeresét és (2) 3-szorosát.)

IV

b) Négy megoldás van: $(x; y) = \left(1 \pm \sqrt{5}; 0\right)$ vagy $(x; y) = \left(1 \pm \sqrt{3}; 1\right)$. Pl. $(x-1)^2 = a$ helyettesítéssel az egyenletrendszer egyszerűbben kezelhető.

1306. $(x_1; y_1) = (0; 1)$, $(x_2; y_2) = (8; -15)$.

1307. Ha a két szám x és y, akkor $x + y = xy = \frac{x}{y}$. Lényegében két egyenletet kaptunk, amelyet a hagyományos módon oldhatunk meg: $(x; y) = (0{,}5; -1)$.

IV

1308. *a)* $(x_1; y_1) = (3; -5)$, $(x_2; y_2) = (5; -3)$.
b) $(x_1; y_1) = (-7; -2)$, $(x_2; y_2) = (2; 7)$.

1309. *a)* $(x_1; y_1) = (5; 3)$, $(x_2; y_2) = (-3; -5)$.
b) $(x_1; y_1) = (1; 1)$, $(x_2; y_2) = \left(-\frac{13}{7}; -\frac{3}{7}\right)$.

1310. *a)* Nincs megoldás.
b) $(x; y) = (0; 1)$.

1311. *a)* $(x_1; y_1) = (2; 8)$, $(x_2; y_2) = (8; 2)$.
b) $(x; y) = (2; 4)$.

1312. *a)* $(x_1; y_1) = (-3; -2)$, $(x_2; y_2) = (2; 3)$.
b) $(x_1; y_1) = (3; 4)$, $(x_2; y_2) = \left(-10; -\frac{14}{3}\right)$.

A 1313–1316. feladatokban általában több alkalmas helyettesítés is található. Például:

1313. *a)* $a = x - 2$ helyettesítéssel (1) $y = a$; (2) $ay = 4$. $(x_1; y_1) = (4; 2)$, $(x_2; y_2) = (0; -2)$.
b) Ha $a = \frac{1}{3-x}$, $b = \frac{1}{y-2}$, akkor (1) $a + b = 2$; (2) $3a - 5b = -3$. $(x; y) = \left(\frac{13}{7}; \frac{26}{9}\right)$.

Megjegyzés:
Helyettesítés után lineáris egyenletrendszert kaptunk az eredetileg másodfokú egyenletrendszerből. (A törtek eltüntetése után kapott egyenletek, pl. *b)* $y - 2 + 3 - x = 2(3 - x)(y - 2)$ másodfokúak.

1314. *a)* Ha $a = \sqrt{2x+1}$, $b = y^2$, akkor (1) $a + b = 4$; (2) $2a^2 - 2 + b^2 = 17$. $(x; y) = (4; \pm 1)$.
b) Ha $a = \sqrt{x-1}$, $b = \sqrt{3+y}$, akkor (1) $a + b = 3$; (2) $a\sqrt{2} + 2b = \sqrt{2} - 4$. $(x; y) = (2; 1)$.

1315. *a)* Ha $a = x - y$ és $b = xy$, akkor (1) $a + b = 1$; (2) $ab = -6$. $(x_1; y_1) = (2; -1)$, $(x_2; y_2) = (1; -2)$, $(x_3; y_3) = (-3; -1)$, $(x_4; y_4) = (1; 3)$.
b) Ha $a = x^2$ és $b = y^2$, akkor (1) $a^2 + 2b = 9$; (2) $a + b = 5$. $(x; y) = (\pm 1; \pm 2)$. (4 megoldás.)

1316. Ha $a=\sqrt{x}$, $b=\sqrt{y}$, akkor (1) $3a-2b=4$; (2) $ab=2$. $(x;\ y)=(4;\ 1)$.

1317. *a)* x, y gyöke a $t^2-3t+2=0$ egyenletnek (Viète-formulák).
$(x_1;y_1)=(1;2)$, $(x_2;y_2)=(2;1)$.
b) $a=x+y$, $b=xy$ helyettesítéssel (1) $a^2-2b+a=14$; (2) $b=3$.
$(x_1;y_1)=(1;3)$, $(x_2;y_2)=(3;1)$, $(x_3;y_3)=\left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2};\frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right)\approx$
$\approx(-0{,}70;-4{,}30)$, $(x_4;y_4)=\left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2};\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right)\approx(-4{,}30;-0{,}70)$.
Más megoldási lehetőség: (1) $(x+y)^2+(x+y)-20=0$ alakba is írható, s ekkor $(x+y)$ közvetlenül meghatározható.

1318. *a)* Ha $a=xy$, akkor (2) $4\cdot(15^2-2a)=17a$. $(x_1;y_1)=(12;3)$,
$(x_2;y_2)=(3;12)$.
b) $(x;y)=(2;2)$.

1319. *a)* (1) $14^2-2xy+4xy=286$. $(x_1;y_1)=(9;5)$, $(x_2;y_2)=(5;9)$.
b) Ha $a=x+2y$, $b=x\cdot 2y$, akkor (1) $a^2-2b=17$; (2) $b=4$. $(x_1;y_1)=$
$=(1;2)$, $(x_2;y_2)=(4;0{,}5)$, $(x_3;y_3)=(-4;-0{,}5)$, $(x_4;y_4)=(-1;-2)$.

1320. $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$. Ha $a=x-y$, $b=xy$, akkor (2) $a(a^2+3b)=$
$=26$. $(x_1;y_1)=(3;1)$, $(x_2;y_2)=(-1;-3)$.

1321. *a)* $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$, innen $x+y=81$. $(x;y)=(41;40)$.
b) $x^2+y^2+2xy=(x+y)^2=49$, innen $x+y=\pm7$. $(x_1;y_1)=(3;4)$,
$(x_2;y_2)=(4;3)$, $(x_3;y_3)=(-3;-4)$, $(x_4;y_4)=(-4;-3)$.

1322. *a)* $(x;y)=(6;4)$.
b) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$, innen $x^2-xy+y^2=31$. $x^2-xy+y^2=$
$=(x+y)^2-3xy$, $xy=30$. $(x_1;y_1)=(5;6)$, $(x_2;y_2)=(6;5)$.

1323. *a)* (1) és (2) összeadásával $x^2+y^2+2xy=(x+y)^2=49$, innen $x+y=\pm7$.
$(x_1;y_1)=(5;2)$, $(x_2;y_2)=(-5;-2)$.
b) $(x_1;y_1)=(3;2)$, $(x_2;y_2)=(2;3)$.

1324. Az egyenletek összeadása, illetve kivonása után: (1) $(x+y)(x^2-xy+y^2)=$
$=6(x+y)$, (2) $(x-y)(x^2+xy+y^2)=4(x-y)$. (1)-ből ha $x+y=0$, akkor $(x_1;y_1)=$
$=(0;0)$, $(x_2;y_2)=(2;-2)$, $(x_3;y_3)=(-2;2)$; (2)-ből ha $x-y=0$, akkor $(x_4;y_4)=$
$=\left(\sqrt{6};\sqrt{6}\right)$, $(x_5;y_5)=\left(-\sqrt{6};-\sqrt{6}\right)$; egyébként $xy=-1$, $x+y=\pm\sqrt{3}$, s innen
$(x_6;\ y_6)=\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2};\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right)\approx(2{,}19;-0{,}46)$, $(x_7;\ y_7)=$
$=\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2};\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right)\approx(-0{,}46;\ 2{,}19)$, $(x_8;y_8)=\left(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2};\ \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right)\approx$
$\approx(0{,}46;-2{,}19)$, $(x_9;y_9)=\left(\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2};\ \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right)\approx(-2{,}19;\ 0{,}46)$.

IV

IV

1325. *a)* (1)-ből ha $y = 0$, akkor $x = 0$, de (2) miatt ez nem lehetséges. Ha $y \neq 0$, akkor (1) átalakítható: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x}{y} - 3 = 0$. A $z = \frac{x}{y}$ helyettesítéssel $z_1 = 1$, $z_2 = -3$; innen $x = y$, vagy $x = -3y$, amit (2)-be visszahelyettesítve másodfokú egyenletet kapunk. $(x_1; y_1) = (1; 1)$, $(x_2; y_2) = \left(-\frac{4}{9}; -\frac{4}{9}\right)$, $(x_3; y_3) = \left(\frac{-15 - 3\sqrt{233}}{26}; \frac{5 + \sqrt{233}}{26}\right) \approx$

$\approx (-2{,}34; 0{,}78)$, $(x_4; y_4) = \left(\frac{-15 + 3\sqrt{233}}{26}; \frac{5 - \sqrt{233}}{26}\right) \approx (1{,}18; -0{,}39)$.

Másik lehetőség (1) szorzattá alakítása: $x^2 - y^2 + 2xy - 2y^2 = (x - y)(x + y) + +2y(x - y) = (x - y)(x + 3y)$, innen elsőfokú összefüggéseket kapunk.

b) $(x_1; y_1) = (2; 1)$, $(x_2; y_2) = (-2; -1)$, $(x_3; y_3) = \left(-7 \cdot \sqrt{\frac{7}{61}}; \sqrt{\frac{28}{61}}\right) \approx$

$\approx (-2{,}37; 0{,}68)$, $(x_4; y_4) = \left(7 \cdot \sqrt{\frac{7}{61}}; -\sqrt{\frac{28}{61}}\right) \approx (2{,}37; -0{,}68)$.

1326. *a)* Homogén egyenletet kapunk, ha (1) 5-szöröséből kivonjuk (2)-t. $(x_1; y_1) = (1; 3)$, $(x_2; y_2) = (-1; -3)$.

b) Homogén egyenletet kapunk, ha (1) 13-szorosát és (2)-t összeadjuk. $(x_1; y_1) = (1; 2)$, $(x_2; y_2) = (-1; -2)$, $(x_3; y_3) = (2; 1)$, $(x_4; y_4) = (-2; -1)$.

1327. *a)* Kiemelés után

(1) $(x - 1)(y + 2) = 0$,

(2) $(x + 3)(y - 1) = 0$.

$(x_1; y_1) = (1; 1)$, $(x_2; y_2) = (-3; -2)$.

b) (1)-ből $xy - 2y - x + 2 = y(x - 2) - (x - 2) = (y - 1)(x - 2) = 0$. Ha $y = 1$, akkor (2) $2x^2 - 3x = 0$ alakú; ha $x = 2$, akkor (2)-ből $y = 3$. $(x_1; y_1) = (0; 1)$, $(x_2; y_2) = (1{,}5; 1)$, $(x_3; y_3) = (2; 3)$.

1328. *a)* $(x_1; y_1) = (2; 1)$, $(x_2; y_2) = (-2; 1)$, $(x_3; y_3) = \left(\frac{18}{11}; -\frac{9}{11}\right)$, $(x_4; y_4) = \left(-\frac{18}{11}; -\frac{9}{11}\right)$.

b) (1)-ből $(x - y)(x + y - 10) = 0$, (2)-ből $(x + 3)(y - 6) = 0$. $(x_1; y_1) = (-3; -3)$, $(x_2; y_2) = (-3; 13)$, $(x_3; y_3) = (6; 6)$, $(x_4; y_4) = (4; 6)$.

1329. *a)* $(x_1; y_1) = (0; 0)$, $(x_2; y_2) = (5; -5)$, $(x_3; y_3) = (3; 1)$, $(x_4; y_4) = (-1; -3)$.

b) Pl. (1)-ből $x^4 + y^4 = 13 + x^2y^2$, (2)-ből $x^2 - y^2 = 1 - 2xy$; (2) négyzetre emelésével $5x^2y^2 - 4xy - 12 = 0$. Innen $xy = 2$ vagy $xy = -1{,}2$.
$(x_1; y_1) = (1; 2)$, $(x_2; y_2) = (-1; -2)$, $(x_3; y_3) =$

$$= \left(\frac{-1{,}2}{\sqrt{-1{,}7+\sqrt{4{,}33}}};\ \sqrt{-1{,}7+\sqrt{4{,}33}}\right) \approx (-1{,}944;\ 0{,}617),\quad (x_4; y_4) =$$

$$= \left(\frac{1{,}2}{\sqrt{-1{,}7+\sqrt{4{,}33}}};\ -\sqrt{-1{,}7+\sqrt{4{,}33}}\right) \approx (1{,}944;\ -0{,}617).$$

IV

1330. *a)* (1)-ből $(x + y)^2 + 2(x + y) + 1 = 0$, innen $x + y = -1$. $(x; y) = (1; -2)$.
b) (1)-ből $(3x - 2y)^2 - 6(3x - 2y) + 9 = 0$, innen $3x - 2y = 3$. $(x_1; y_1) = (0; -1{,}5)$, $(x_2; y_2) = (1; 0)$.

1331. Jelöljük a két számot a-val és b-vel $(a > b)$!
a) (1) $a + b = 1$; (2) $ab + a^2 = a$. $a \neq 0$, így (2) $b + a = 1$ alakban írható. Azonosságot kaptunk; ha $a = t$, akkor $b = 1 - t$. $a > b$ miatt $t > 1 - t$, innen $(a; b) = (t; 1 - t)$, ha t tetszőleges, 0,5-nél nagyobb szám.
b) (1) $a + b = 1$; (2) $ab + a^2 = b$. (2)-ből $a(1 - a) + a^2 = 1 - a$, innen $a = b = 0{,}5$, de ez nem megoldás.

1332. Jelöljük a két sokszög oldalainak számát n-nel, illetve k-val! Ekkor (1) $\frac{n(n-3)}{2} + \frac{k(k-3)}{2} = 158$; (2) $(n - 2) \cdot 180° + (k - 2) \cdot 180° = 4320°$. (2)-ből $k + n = 28$, helyettesítés után a két sokszög oldalainak száma 12, illetve. 16.

1333. Jelöljük a derékszögű háromszög befogóit hagyományos módon a-val és b-vel! Ekkor (1) $\frac{ab}{2} = 55$ és (2) $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{221}$; innen a két befogó hossza 10 cm és 11 cm.

1334. Legyen a szám $\overline{ab}$ alakú! Ekkor (1) $(10a + b)(10b + a) = 1612$; (2) $a^2 + b^2 = 40$; innen $ab = 12$, $a + b = 8$. A keresett szám 26 vagy 62.
Megjegyzés:
A megoldáshoz nincs szükség (1)-re, (2) ismerete önmagában elég.

1335. Legyen a tört $\frac{a}{b}$ alakú! Ekkor (1) $a = b - 4$; (2) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{58}{21}$. $(a; b) = (3; 7)$ vagy $(-7; -3)$, a keresett tört $\frac{3}{7}$ vagy $\frac{-7}{-3}$.

1336. Legyen a szám $\overline{ab}$ alakú! Ekkor (1) $a = b + 4$; (2) $(10a + b)(a + b) = 306$. $(a; b) = (5; 1)$, a keresett szám az 51.

1337. Jelöljük a sorok számát s-sel, a székek számát d-vel! Ekkor (1) $sd = 336$ és (2) $(s + 2)(d + 3) = 437$. Innen $3s^2 - 95s + 672 = 0$, $s = 21$ (a másik gyök nem egész), valamint $d = 16$.

IV

1338. *a)* $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$, innen $(x+y+z)^2 = 29 - 20 = 9$. (3) miatt $z = 4$ vagy $z = -2$. $(x, y, z) \in \{(2; -3; 4), (-3; 2; 4), (3; -4; -2), (-4; 3; -2)\}$.
b) Alkalmazzuk az $x = 3t,\ y = 4t,\ z = 5t$ helyettesítést! $(x, y, z) = (12; 16; 20)$ vagy $(x, y, z) = (-12; -16; -20)$.

1339. *a)* Az egyenletek összeadásából $xy = -6,\ xz = -10,\ yz = 15$; ezek szorzatából $xyz = \pm 30$. $(x, y, z) = (2; -3; -5)$ vagy $(x, y, z) = (-2; 3; 5)$.
b) $(x, y, z) = (4; 3; 12)$ vagy $(x, y, z) = \left(\frac{29}{3}; \frac{26}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

1340. Jelöljük a három él hosszát $a < b < c$-vel!
a) (1) $ab = 6$; (2) $ac = 8$; (3) $bc = 12$. A térfogat az egyenletek szorzatából számítható: $V = \sqrt{6 \cdot 8 \cdot 12} = 24\ (\text{cm}^3)$.
(Az oldalélek: $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm.)
b) (1) $a+b = 7$; (2) $a + c = 9$; (3) $b + c = 12$. Az egyenletek összeadásából $a + b + c = 14$, innen $a = 2$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm; $V = 70$ cm^3.
c) (1) $a^2 + b^2 = 13$; (2) $a^2 + c^2 = 29$; (3) $b^2 + c^2 = 34$. Az egyenletek összeadásából $a^2 + b^2 + c^2 = 38$, innen $a^2 = 4,\ b^2 = 9,\ c^2 = 25$; $V = 30$ cm^3.

1341. *a)* A Viète-formulák miatt a $z^2 - az + b = 0$ egyenlet gyökei (ha léteznek) $z_1 = x,\ z_2 = y$. Innen $a^2 - 4b \geq 0$ a gyökök létezésének feltétele.
b) $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$, innen $xy = \dfrac{a^2 - c}{2}$. Akkor van megoldás, ha $a^2 - 4 \cdot \dfrac{a^2 - c}{2} \geq 0$, vagyis $2c - a^2 \geq 0$.
c) Átalakításokkal $x^4 - ax^2 + b^2 = 0$. Az $a^2 - 4b^2 \geq 0$ feltétel mellett $a \geq 0$-nak is teljesülnie kell.

1342. *a)* Minden $a \in \mathbf{R}$ esetén van megoldás: $(x_1; y_1) = (0; a)$, $(x_2; y_2) = (0{,}5; a - 0{,}5)$.
b) Van megoldás, ha $a \leq 1{,}125$.

1343. *a)* Van megoldás, ha $a \leq -\sqrt{3}$ vagy $\sqrt{3} \leq a$.
b) Átalakításokkal $y^2(a^2 + 2a - 3) = 0$. Mindig van $(x; y) = (0; 0)$ alakú megoldás. Ha $a = 1$ vagy $a = -3$, akkor végtelen sok $(x; y) = (at; t)$ alakú megoldás van ($t \in \mathbf{R}$).

1344. *a)* Mindig van megoldás. Ha $a \neq -2$, akkor $(x; y) = \left(\dfrac{1}{a+2}; \dfrac{1}{a+2}\right)$; ha $a \neq -1$, akkor $(x; y) = \left(\dfrac{1}{a+1}; \dfrac{1}{2(a+1)}\right)$.
b) A két egyenlet különbségéből $(y - x)(y - x - 1) = 0$.
Ha $x = y$, akkor $1 + 4a \geq 0,\ a \geq -0{,}25$. Ha $x = y - 1$, akkor $4a + 5 \geq 0$, $a \geq -1{,}25$.
Van megoldás, ha $a \geq -1{,}25$.

1345. Jelöljük a két test sebességét v_1, illetve v_2-vel! Ekkor (1) $\frac{c}{v_1}+t=\frac{c}{v_2}$; (2) $(v_1-v_2)n=c$. Innen $ntv_1^{\,2}-ctv_1-c^2=0$, a pozitív gyököt megtartva

$$v_1=\frac{ct+\sqrt{c^2t^2+4ntc^2}}{2nt},\quad v_2=v_1-\frac{c}{n}=\frac{-ct+\sqrt{c^2t^2+4ntc^2}}{2nt}.$$

1346. Jelöljük g-vel az eredetileg igényelt gépkocsik számát, t-vel a gépkocsinként tervezett teher nagyságát! Ekkor (1) $gt=T$; (2) $(g-x)(t+y)=T$. Innen $yg^2-xyg-xT=0$, $g_{1,2}=\frac{xy\pm\sqrt{x^2y^2+4xyT}}{2y}$; a gépkocsik számát a pozitív gyök adja meg.

Szöveges feladatok

1347. Jelöljük x-szel az osztót! Ekkor $660=x(x+3)+\frac{x}{2}$; $x=24$. ($x=-27{,}5$ nem egész.)

1348. Legyen a szám $\overline{ab}$ alakú! Ekkor
(1) $a+b=9$;
(2) $(10a+b)(10b+a)=2268$.
(1)-ből $a=9-b$, (2)-be helyettesítve $b^2-9b+18=0$. Innen $b=3$ vagy $b=6$, így $(a;b)=(3;6)$ vagy $(a;b)=(6;3)$.
Megjegyzés:
Mivel a és b számjegyek, az (1) összefüggés felesleges adat. Ugyanis (2)-ből $100ab+10(a^2+b^2)+ab=2268$, innen $ab=8$ vagy $ab=18$ lehetséges. Ha $ab=8$, akkor $a^2+b^2=146$, nem kapunk megoldást; ha $ab=18$, akkor $a^2+b^2=$ $=45$, innen $(a;b)=(3;6)$ vagy $(a;b)=(6;3)$.

1349. A páros számot n-nel jelölve $(n-1)(n+1)=11\frac{11}{12}n$; innen $n=12$ $\left(n=-\frac{1}{12}\text{ nem felel meg}\right)$.

1350. Jelöljük a számrendszer alapszámát g-vel; ekkor $4g^2+4g+2=122$, innen $g=5$. ($g=-6$ hamis.)

1351. Jelöljük a számrendszer alapszámát g-vel.
a) Első megoldás: Ekkor $g^2+g+4=k^2$ ($k\in\mathbf{N}$), innen átalakításokkal
$4g^2+4g+16=4k^2$, $(2g+1)^2+15=4k^2$,
$15=4k^2-(2g+1)^2=(2k+2g+1)(2k-2g-1)$.
Ha (1) $2k+2g+1=15$, (2) $2k-2g-1=1$, akkor $k=4$, $g=3$. Ez nem megoldás, mert $g=3$-as alapú számrendszerben nincs 4-es számjegy.
Ha (1) $2k+2g+1=5$, (2) $2k-2g-1=3$, akkor $k=2$, $g=0$; ez sem megoldás. Nincs ilyen számrendszer.

IV

Második megoldás: Becslést is alkalmazhatunk. Ha $g^2 + g + 4$ négyzetszám, akkor $4g^2 + 4g + 16$ is az. $4g^2 + 4g + 16 = (2g + 1)^2 + 15$, és ez két szomszédos négyzetszám, $(2g + 1)^2$ és $(2g + 2)^2$ közé esik, ha $g > 4$; tehát nem lehet négyzetszám.

b) $g^3 + 3g^2 + 3g + 1 = (g + 1)^3$, így $g \geq 4$ bármilyen egész szám lehet.

1352. Jelöljük x-szel a növelés, illetve csökkentés mértékét! Ekkor $(20 + x)(20 - x)$ a téglalap területe.

a) $400 - x^2 = 360$, $x = \sqrt{40} \approx 6{,}32$ (cm).

b) $400 - x^2 = 420$, nem kapunk megoldást. (Az azonos kerületű négyszögek közül a négyzet területe a lehető legnagyobb.)

1353. Ha a keret szélessége d, akkor $(12 - 2d)(18 - 2d) = 0{,}75 \cdot 12 \cdot 18$. Innen $2d^2 - 30d + 27 = 0$, $d = 0{,}96$ (cm).

1354. Jelöljük a-val az eredeti élek hosszát; ekkor $(a + 2)^3 - a^3 = 152$. Innen $a^2 + 2a - 24 = 0$, $a = 4$ (cm).

1355. Ha n oldalú a sokszög, az $\dfrac{n(n-3)}{2} = n$ egyenletből $n = 5$.

1356. Az n oldalú szabályos sokszög belső szöge $\dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$, az $n + 1$ oldalúé $\dfrac{(n-1)\cdot 180°}{n+1}$. Így $\dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n} + 12° = \dfrac{(n-1)\cdot 180°}{n+1}$, innen $n^2 + n - 30 = 0$; a sokszög szabályos ötszög.

1357. Ha n csapat vesz részt a bajnokságon, akkor a mérkőzések száma $\dfrac{n(n-1)}{2} = 55$; innen $n^2 - n - 110 = 0$, $n = 11$.

1358. Jelöljük n-nel a személyek számát, s-sel a kapott összeget! Ekkor (1) $ns = 19\,200$, (2) $(n - 2)(s + 800) = 19\,200$. Innen $s = 400n - 800$, $n(400n - 800) = 19\,200$, $n(n - 2) = 48$, $n = 8$.

1359. Naponta 40 oldalt olvastam volna, 18 napon keresztül.

1360. 18 kg, illetve 20 kg árut vettünk (a drágább kg-ja 200 Ft, az olcsóbbé 180 Ft volt).

1361. Jelöljük p-vel a csökkenés mértékét! Ekkor $1800p$ az első és $1800p^2$ a második árcsökkenés utáni ár. Innen $1800p^2 = 1458$, $p = 0{,}9$; vagyis 10%-os volt a két árcsökkentés.

1362. Jelöljük p-vel az első évi szaporulat százalékban kifejezett értékét! Ekkor $20000\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)\left(1 + \dfrac{2p}{100}\right) = 23\,100$, innen $p = 5$. Az első évben 5%, a második évben 10% volt a gyarapodás.

1363. Ha x liter alkoholt öntünk ki az első alkalommal, akkor az edényben $36 - x$ liter alkohol maradt, s másodszor $(36 - x)\cdot\dfrac{x}{36}$ liter alkoholt öntünk ki. $x + (36 - x)\cdot\dfrac{x}{36} = 11$, innen $x^2 - 72x + 396 = 0$, $x = 6$ liter. ($x = 66$ hamis gyök.) Az első alkalommal 6 liter, másodszorra 5 liter alkoholt öntöttünk ki.

1364. Jelöljük az eredeti termelés értékét T-vel, a munkások számát m-mel $\left(\text{ekkor az egy főre jutó termelés } \frac{T}{m}\right)$. Ha a munkások száma x százalékkal nőtt, akkor $m\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)\cdot\frac{T}{m}\cdot\left(1+\frac{3x}{100}\right)=1{,}43T$. Innen $3x^2+400x-4300=0$, $x=10$.

1365. Az összeötvözés utáni 36%-os ötvözet 18 kg vörösrezet tartalmaz, így tömege 50 kg. Jelöljük az első ötvözet tömegét m-mel, vörösréztartalmát (százalékban kifejezve) p-vel! Ekkor (1) $m\cdot\frac{p}{100}=6$; (2) $(50-m)\cdot\frac{p+40}{100}=$ $=12$. Innen (2)-ből $4m=5p+20$, (1)-be visszaírva $p^2+4p-480=0$; $p=20$. A két ötvözetben 20%, illetve 60% vörösréz van.

1366. Ha az egyik önállóan x nap alatt építené fel a falat, akkor 1 nap alatt az egész fal $\frac{1}{x}$-ed, t nap alatt $\frac{t}{x}$-ed részével készülne el. A másik kőműves t nap alatt $\frac{t}{x+5}$ részt építene fel. 6 nap alatt az egész falat felépítik, innen $\frac{6}{x}+\frac{6}{x+5}=1$. $x^2-7x-30=0$, $x=10$. Egymagában az egyik kőműves 10, a másik 16 nap alatt építené fel a falat.

1367. Ha külön-külön az egyik traktor x, a másik y nap alatt szántja fel a területet, akkor (1) $\frac{4}{x}+\frac{4}{y}=1$; (2) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=8$. Innen $x^2-14x-48=0$, $x_1=6$, $x_2=8$; a megfelelő y értékek $y_1=12$, $y_2=8$. Eredmény: egymagában az egyik traktor 6, a másik 12 óra alatt szántaná fel a területet. (Az x_2, y_2 megoldások traktorai nem különböző teljesítőképességűek.)

1368. Ha a brigádnak eredetileg x tagja volt és fejenként napi y órát dolgoztak, akkor $15xy$ munkaóra szükséges a teljes munka elvégzéséhez. Innen (1) $15xy=16(x-4)(y+2)$, (2) $15xy=8(x+4)(y+4)$. (1)-ből $xy=64y-32x+128$, (2)-ből $7xy=32x+32y+128$. Kiküszöböljük az xy tagot: $x=\frac{13y+24}{8}$, s ezt visszahelyettesítve $13y^2-72y-256=0$. $y=8$ órát dolgoztak eredetileg, $x=16$ tagú volt a brigád.

1369. Jelöljük x-szel, illetve y-nal azt az úthosszt, amelyet az egyik, illetve a másik csapat egy nap alatt kijavít! Ekkor (1) $x+y=4{,}5$, (2) $\frac{10}{x}=\frac{10}{y}+1$; innen $2x^2-49x+90=0$. $x=2$ (az $x=22{,}5$ gyök hamis), $y=2{,}5$. Vagyis egy nap alatt 2 km, ill. 2,5 km útszakaszt javít ki a két társaság.

1370. Ha az első cső x óra alatt tölti meg a medencét, akkor a második cső $x+3$ óra alatt. A t óra alatt megtöltött rész $\frac{t}{x}+\frac{t}{x+3}$, innen $\frac{10}{x}+\frac{10}{x+3}+\frac{5{,}75}{x+3}=1$.

$x^2 - 22{,}75x - 30 = 0$, $x = 24$. Egymagában az első cső 24 óra, a második 27 óra alatt tölti meg a medencét.

1371. Ha az első cső x óra alatt tölti meg a medencét, akkor a második $2x$, a harmadik $x+5$ óra alatt. Innen $\frac{2{,}5}{x} + \frac{2{,}5}{2x} + \frac{2{,}5}{x+5} = 1$, $2x^2 - 2{,}5x - 37{,}5 = 0$, $x = 5$. Az egyes csöveken 5 h, 10 h, 10 h alatt telik meg a medence.

1372. Ha a csap x perc alatt tölti meg a kádat, a tele kád $x-2$ perc alatt ürül ki a lefolyón, s ekkor $\frac{24}{x} - \frac{24}{x-2} = -1$. Innen $x^2 - 2x - 48 = 0$, $x = 8$. Vagyis a csap 8 perc alatt tölti meg a kádat.

1373. Ha önállóan az első aratógép x, a másik y nap alatt gyűjtené be a termést, akkor a t nap alatt begyűjtött terméshányad $\frac{t}{x} + \frac{t}{y}$, $\frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1$. Az első aratógép $\frac{x}{3}$ napig dolgozott, a másik $15 - \frac{x}{3}$ napig, ezért $\frac{15 - \frac{x}{3}}{y} = \frac{2}{3}$. Innen $2y^2 - 51y + 270 = 0$, $y_1 = 18$, $y_2 = 7{,}5$; $x_1 = 9$, $x_2 = 30$. Két megoldást kaptunk, ha a fél napot elfogadjuk megoldásként.

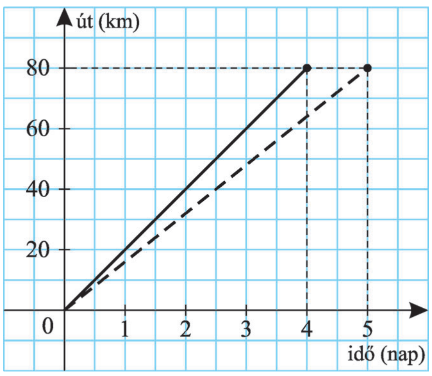
1374. Jelöljük x, y, z-vel azt az időt (napokban), ami alatt az egyes gépek külön-külön elvégeznék a munkát.

a) Ekkor (1) $\frac{7{,}2}{x} + \frac{7{,}2}{y} = 1$, (2) $\frac{9}{x} + \frac{9}{z} = 1$, (3) $\frac{12}{y} + \frac{12}{z} = 1$; az egyenletrendszer megoldása (órában) $(x; y; z) = (12; 18; 36)$.

b) Ha t napig tartott a befejező munka, akkor $\frac{3}{12} + \frac{3}{18} + \frac{3}{36} + \frac{t}{12} + \frac{t}{36} = 1$, innen $t = 4{,}5$ (nap).

1375. Jelöljük k-val az eredetileg naponta megtett kilométerek számát, n-nel a napok számát! Ekkor (1) $nk = 80$; (2) $(n+1)(k-4) = 80$. Innen $n^2 + n - 20 = 0$, $n = 4$, $k = 20$. Út–idő grafikon: 1375. ábra.

1375.

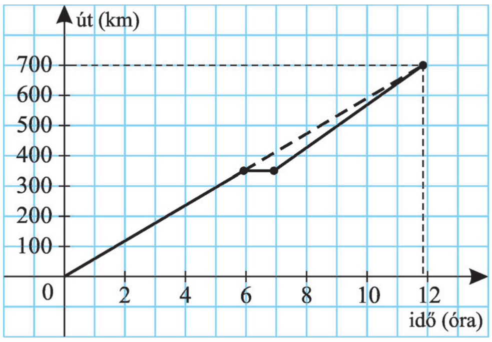


1376. Jelöljük a repülőgép saját sebességét v-vel, az eredeti menetidőt (órában mérve) t-vel! Ekkor $500 = vt = (v - 50)\left(t + \frac{1}{3}\right)$. Innen $3t^2 + t - 10 = 0$; $t = 1$ óra 40 perc, $v = 300$ (km/h).

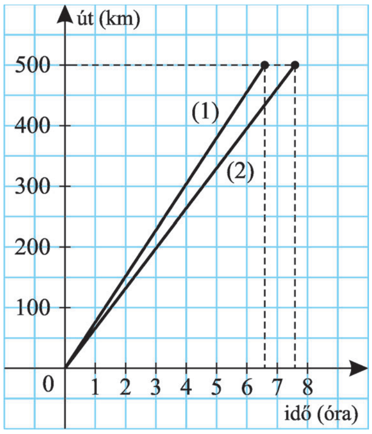
1377. Jelöljük az eredeti sebességet v-vel és a menetidőt t-vel! Ekkor

(1) $v \cdot \frac{t}{2} = 350$;

1377.



1379.



IV

(2) $(v+12)\left(\frac{t}{2}-1\right)=350$. Innen $3t^2-6t-350=0$; $t=11{,}85$ (h), $v=59{,}08$ (km/h). Út–idő grafikon: 1377. ábra.

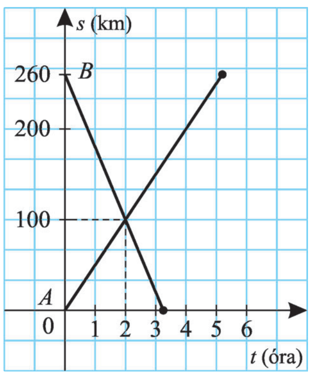
1378. Jelöljük az eredeti sebességet v-vel, az út hosszát s-sel! Ekkor az eredetileg tervezett menetidő (órában számolva) $\frac{s}{v}$, az új menetidőt két részletben írhatjuk fel: $\frac{s}{v}-\frac{1}{10}=\frac{20}{v+10}+\frac{s-20}{v}$. Innen $v^2+10v-2000=0$, $v=40$ (km/h).

1379. Jelöljük a gépkocsik sebességét v_1, illetve v_2-vel! Ekkor (1) $v_1=v_2+10$; (2) $\frac{500}{v_1}+1=\frac{500}{v_2}$. Innen $v_2^2+10v_2-5000=0$; $v_2=65{,}9$ km/h, $v_1=75{,}9$ km/h. Út–idő grafikon: 1379. ábra.

1380. *a)* Jelöljük v, illetve w-vel a két vonat átlagsebességét, t-vel a találkozásukig eltelt időt! Ekkor a vonatok találkozásig megtett útja vt, illetve wt, s a hátralévő távolságot $\frac{vt}{w}=3{,}2$, illetve $\frac{wt}{v}=1{,}25$ óra alatt teszik meg a vonatok. Innen $\frac{t}{3{,}2}=\frac{1{,}25}{t}$; $t=2$ (h). A két vonat útja 3 óra 15 percig, illetve 5 óra 12 percig tartott.

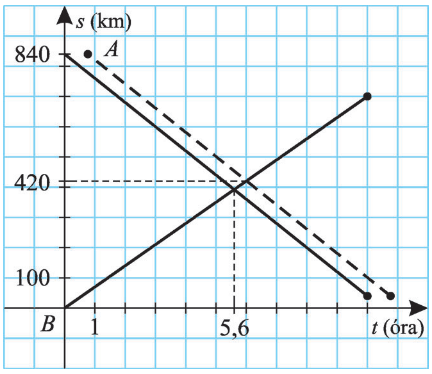
b) $v=\frac{260}{3{,}25}=80$ (km/h), $w=\frac{260}{5{,}2}=50$ (km/h). A találkozásig megtett utak 160 km, illetve 100 km (ábra).

1380.

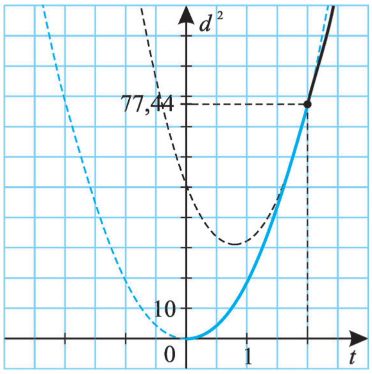


IV

1381.



1384.



1381. Jelöljük $v+10$-zel, illetve v-vel a két vonat átlagsebességét, t-vel a találkozásukig eltelt időt, s-sel az AB távolságot! Ekkor $(v+10)t = vt + 56$, innen $t = 5{,}6$ (h), $s = 5{,}6(2v+10)$. Jelöljük T-vel azt a találkozási időt, amelyet akkor kapnánk, ha az A-ból induló vonat 45 perccel később indulna; ekkor $(v+10)(T-0{,}75) = vT$, innen $10T - 0{,}75v - 7{,}5 = 0$. Végül a két vonat együttesen most is s-nyi utat tett meg, tehát $s = 2vT + 10T - 0{,}75v - 7{,}5$. A három egyenletből $3v^2 - 194v - 1120 = 0$, innen a pozitív gyök $v = 70$ (km/h). Az AB távolság $s = 840$ km (ábra).

1382. Ha az egyik hajó sebessége (km/h-ban mérve) v, a másiké $v+6$, akkor $2v$, illetve $2v+12$ a megtett út. Pitagorasz tételéből $(2v)^2 + (2v+12)^2 = 60^2$, innen $v^2 + 6v - 432 = 0$. $v = 18$ (km/h), ekkor a másik hajó sebessége 24 km/h. (A $v_2 = -24$ gyök ugyanezt a megoldást adja, az ellenkező irányban.)

1383. Tegyük fel, hogy t idő múlva találják el a gépet! Ekkor $(ut)^2 + H^2 = (vt)^2$, innen $t = \dfrac{H}{\sqrt{v^2-u^2}}$. Ez alatt az idő alatt a repülőgép $\dfrac{uH}{\sqrt{v^2-u^2}}$ utat tesz meg, tehát ennyivel kell a gép elé célozni.

1384. Ha az eltelt idő t másodperc, akkor a két pont által megtett út $4{,}4t$, illetve $3{,}6(t-2)$, ha $t \geq 2$. Távolságuk Pitagorasz tételéből

$d = \sqrt{4{,}4^2 t^2 + 3{,}6^2 (t-2)^2} = 20{,}4$; innen $32{,}32t^2 - 51{,}84t - 364{,}32 = 0$,

$t = 4{,}25$ (s). (A $t = -2{,}65$ hamis gyök.)

A $t \geq 2$ időben $d^2 = 32{,}32t^2 - 51{,}84t + 51{,}84 \approx 32{,}32(t-0{,}80)^2 + 31{,}05$.

Ha $0 \leq t < 2$, akkor $d^2 = (4{,}4t)^2 = 19{,}36t^2$ (ábra).

1385. Legyen v a gőzhajó sebessége; ekkor folyón lefelé $v+4$, folyón felfelé $v-4$ a sebessége. $\dfrac{80}{v+4} + \dfrac{80}{v-4} = \dfrac{13}{3}$, innen $13v^2 - 480v - 208 = 0$,

$v = 37{,}4$ km/h.

1386. *Első megoldás:*
Jelöljük v-vel a motorcsónak sebességét! (A folyó sebessége megegyezik a tutaj sebességével.) A motorcsónak menetideje $\frac{15}{v+4}+\frac{9}{v-4}$, a tutajé $\frac{15-9}{4}$.
Ezek egyenlőségéből $v^2 = 16v$, $v = 16$ (km/h).
Második megoldás:
$\frac{15}{v+4}$ ideig távolodtak egymástól a járművek, ekkor távolságuk $\frac{15v}{v+4}$. Ezután $\frac{9}{v-4}$ ideig közelednek egymáshoz v relatív sebességgel, innen $\frac{15v}{v+4}=\frac{9v}{v-4}$.

1387. Ha az egyik korcsolyázó sebessége v, akkor a másiké $v + 50$ m/min; innen $\frac{500}{v}=\frac{500}{v+50}+0{,}5$. A $v^2 + 50v - 50\,000 = 0$ egyenletből $v = 200$ m/min; a két korcsolyázó átlagsebessége 12 km/h, illetve 15 km/h.

1388. Jelöljük a menetoszlop sebességét v-vel, a futár sebességét x-szel! Ekkor a futár relatív sebessége $x - v$, illetve $x + v$, tehát $\frac{50}{x-v}+\frac{50}{x+v}=\frac{120}{v}$.
Innen $6x^2 - 5xv - 6v^2 = 0$, $x = 1{,}5v$. A futár útja $1{,}5 \cdot 120 = 180$ (m).

1389. Jelöljük az eredeti autók számát d-vel, a teherbírásukat T-vel! Ekkor (1) $dT = 150$; (2) $(d + 20)(T - 2) = 150$. Innen $(d; T) = (30; 5)$.

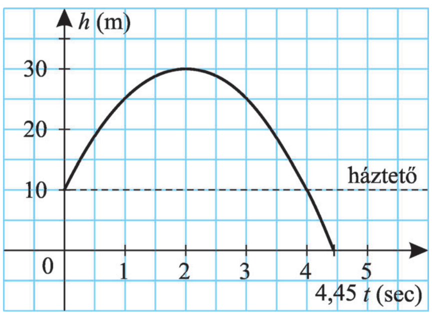
1390. Ha az utasok tervezett létszáma n, akkor az egy főre jutó tervezett költség $\frac{48\,000}{n}$ Ft volt. A csatlakozó utassal $\frac{48\,000}{n+1}$-re módosul a költség, így $\frac{48\,000}{n}-200=\frac{48000}{n+1}$. Innen $n^2 + n - 240 = 0$, $n = 15$.

1391. Jelöljük k-val a kocsi első kerekének kerületét! Ekkor $\frac{240}{k}-\frac{240}{k+1}=$ 20, innen $k = 3$ (m); a hátsó kerék kerülete 4 m.

1392. Az $s=v_0t-\frac{g}{2}t^2$ egyenletből $5t^2 - 25t + 20 = 0$, innen $t_1 = 2$ (s), $t_2 = 4$ (s). (Mindkét megoldás jó: a 4. másodpercben már lefelé esik a labda.)

1393. Ha a két ellenállás értéke x és y, akkor (1) $x + y = 27$; (2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{20}$.
Innen $x^2 - 27x + 180 = 0$, a két ellenállás értéke 12, illetve 15 Ohm.

1394.



1394. A test pillanatnyi függőleges irányú sebessége $v = v_0 - gt = 20 - 10t$. Az emelkedési időt a $v = 0$ összefüggésből kapjuk: $t_e=\frac{v_0}{g}=2$ (s). A pillanatnyi magasság a $h=v_0t-\frac{gt^2}{2}=$

IV

$= 20t - 5t^2$ képletből számítható; a maximális magasság $h_{max} = 20$ (m). A háztető szintjét a 4. másodpercben éri el a test, innentől számítva a földet érés ideje a $10 = 20t + 5t^2$ egyenletből $t \approx 0{,}45$ (s).
A teljes repülési idő 4,45 s; ezalatt vízszintes irányban $15 \cdot 4{,}45 = 66{,}75$ métert repül a kavics (ábra).

1395. Ha a szakadék mélysége m, akkor $t_1 = \sqrt{\frac{2m}{g}}$ ideig esik a kő, s ezt a távolságot a hang $t_2 = mc$ idő alatt teszi meg. $\sqrt{\frac{2m}{g}} + \frac{m}{c} = 10$, innen az elfogadható gyök $m = 391{,}5$ m.

Vegyes feladatok

1396. *a)* Mindkét oldalt az $(1-x)(5+x)$ közös nevezővel megszorozva, rendezés után a $2x^2 + 4x = 0$ egyenletet kapjuk; innen $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

b) Első megoldás: Egy szorzat értéke akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője 0.
Ha $1 + \frac{6}{x^2 - x - 12} = 0$, akkor $x_1 = -2$, $x_2 = 3$; ha $1 - \frac{1}{x-3} = 0$, akkor $x_3 = 4$. Az utóbbi két érték hamis (erről visszahelyettesítéssel meggyőződhetünk), így a megoldás $x_1 = -2$.
Második megoldás: Közös nevezőre hozás után szorzattá alakíthatunk:
$$\left(\frac{x^2-x-6}{x^2-x-12}\right)\left(\frac{x-4}{x-3}\right) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-4)(x+3)} \cdot \frac{x-4}{x-3} = 0, \text{ innen } x = -2.$$

c) Mindkét oldalt az $(x^2 - 9)(x + 38)$ közös nevezővel megszorozva, rendezés után az $x^2 - 6x + 8 = 0$ egyenletet kapjuk; innen $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

d) Mindkét oldalt a $2x(2-x)$ közös nevezővel megszorozva, rendezés után az $x^2 - 6x + 8 = 0$ egyenletet kapjuk; innen $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Az eredeti egyenletet csak x_2 elégíti ki.

1397. *a)* $x \neq 3, y \neq 0$. (1)-ből $y = -2x + 7$, ezt (2)-be helyettesítve $x^2 - 4x + 3 = 0$ adódik. Innen $x = 1$ ($x = 3$ hamis gyök), s ekkor $y = 5$.

b) Első megoldás: Az egyenleteket összeadva $(x+y)^2 = 441$, $x + y = 21$ vagy $x + y = -21$. Innen kifejezve pl. y-t és visszahelyettesítve valamelyik eredeti egyenletbe $(x; y) = (10; 11)$, illetve $(x; y) = (-10; -11)$ adódik.
Második megoldás: (1) $x(x+y) = 210$, (2) $y(x+y) = 231$ alakban írható. (1)-et elosztva (2)-vel (ez megtehető, hiszen nem nulla az

osztó) $\frac{x}{y} = \frac{10}{11}$; innen kifejezhetjük pl. y-t s a megoldást az előzőhöz hasonlóan fejezhetjük be.

c) A két egyenletet összeadva $(x+y)^2 + x + y - 20 = 0$, innen $x + y = -5$ vagy $x + y = 4$.
Az első esetben (1)-ből $xy = 12$. Ekkor az $x^2 + 5x + 12 = 0$ egyenletet kapjuk, de ennek nincs megoldása.
A második esetben (1)-ből $xy = 3$. Ekkor $x^2 - 4x + 3 = 0$, innen $(x; y) = (3; 1)$ vagy $(x; y) = (1; 3)$.

1398. Jelöljük a sokszög oldalainak számát n-nel, ekkor az átlók száma $\frac{n(n-3)}{2}$, a belső szögek összege $(n-2)\cdot 180°$. Az $\frac{n(n-3)}{2} = n + 2(n-2)$ egyenletből $n_1 = 1$ vagy $n_2 = 8$; csak az utóbbinak van értelme.

1399. Nincs. A négyzetszámok lehetnek 16, 25, 36, 49, 64, 81; ezek egyike sem felel meg.

1400. $a = b\left(b + \frac{a}{10}\right)$, innen $10(a - b^2) = ab$. A bal oldal osztható 10-zel, így a jobb oldal is, tehát $a = 5$ vagy $b = 5$ ($a = b = 0$ semmitmondó eset).
Ha $a = 5$, akkor $b = 2$; ha $b = 5$, akkor nincs megoldás.

1401. Ha a keresett szám alakja $\overline{abc}$ ($a = 1, 2, 3, \ldots, 9$; $b, c = 0, 1, 2, \ldots, 9$), akkor a felírható egyenlet $10a + b = bc$. Szorzattá alakítás után $b(c-1) = 10a$, s innen vagy $b = 5$, vagy $c - 1 = 5$.
Ha $b = 5$, akkor $c - 1 = 2a$, innen $(a; c) = (1; 3), (2; 5), (3; 7), (4; 9)$ lehetséges.
Ha $c - 1 = 5$, akkor $c = 6$, s ekkor $b = 2a$. Innen $(a; b) = (1; 2), (2; 4), (3; 6), (4; 8)$.

1402. Jelöljük $\overline{ab}$-vel a keresett életkort (a, b számjegyek, $a \neq 0$)! Ekkor $(10a + b)\overline{ab} = 111c$, ahol c pozitív egész szám. Mivel 111 osztható a 37 prímszámmal, $\overline{ab}$ 37 többszöröse. A 74 nem felel meg, így az illető életkora 37 év.

1403. Ha a számrendszer alapja x, akkor $2x^2 + 2x + 2 = 62$, innen $x = 5$ megfelelő.

1404. Ha a számrendszer alapja n, akkor a feltételek szerint $2n^3 + 3n^2 + n = n(2n^2 + 3n + 1) = n(2n+1)(n+1)$ osztható 6-tal. Ez minden egész számra teljesül, tehát a megoldás $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 4$.

1405. Ha a számrendszer alapja n, akkor $4n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = 7369$, vagyis $n(4n^2 + 3n + 2) = 7368$. $7368 = 2^3 \cdot 3 \cdot 307$, $10 < n < 20$, innen $n = 12$.

1406. Legyen az eredeti ár x; ekkor $x\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{200}\right) = x\left(1 + \frac{p}{300}\right)$.
Innen $\frac{p}{200} - \frac{p^2}{20000} = \frac{p}{300}$, $3p^2 - 100p = 0$, $p = \frac{100}{3} \approx 33{,}33\ (\%)$. ($p = 0$ értelmetlen.)

1407. A $tx^2 - x + 1 = 2tx - 1$ egyenletből $tx^2 - (1 + 2t)x + 2 = 0$.
Ha $t = 0$, akkor $x = 2$, tehát egy közös pont van.
Ha $t \neq 0$, akkor az egyenlet diszkriminánsa $(1 + 2t)^2 - 8t = 4t^2 - 4t + 1 = (2t - 1)^2$. Egy közös pont van, ha $t = 0{,}5$; más t értékekre a diszkrimináns pozitív, tehát két közös pont van.

IV

1408. Oszthatósági ellentmondásokat keresünk.

a) Az egyenlet bal oldalán páratlan szám áll (akár páros x, akár páratlan), míg a jobb oldalon páros.

b) A bal oldal páros, a jobb oldal páratlan.

c) 3-mal osztva x^2 maradéka 0 vagy 1 lehet. Az $x^2 - 17 = 3y$ átalakítás után látható, hogy a bal oldal nem osztható 3-mal.

d) $3x^2 = 4y^2 + 13$ átalakítás után a jobb oldal 3-mal osztva 1 vagy 2 maradékot ad.

e) 4-gyel osztva x^2 maradéka 0 vagy 1 lehet. Az $x^2 + y^2 = 4z + 3$ átalakítás után látható, hogy a jobb oldal 4-gyel osztva 3 maradékot ad, de a bal oldalon ez nem lehetséges.

f) A bal oldal nem adhat 4-gyel osztva 3 maradékot.

g) A bal oldal nem adhat 4-gyel osztva 3 maradékot.

h) $x^2 - 11 = 4x - 8y$ átalakítás után a jobb oldal osztható 4-gyel, a bal oldal nem.

i) A bal oldalon páros szám áll, így x páros; de ekkor a bal oldal 4-gyel osztható, a jobb oldal nem.

j) 8-cal osztva x^2 maradéka 0, 1 vagy 4 lehet. A jobb oldalon 1998 maradéka 6, ez nem lehetséges.

k) A bal oldal nem adhat 8-cal osztva 3 maradékot.

l) A bal oldal nem adhat 8-cal osztva 3 maradékot.

m) $x^2 + 1$ nem osztható 11-gyel.

1409. *a) Első megoldás:* Csoportosítással szorzattá alakítunk. $2a + ab + 3b = a(2 + b) + 3(2 + b) - 6$, innen $(a + 3)(b + 2) = 35$. (A szorzattá alakítást elvégezhetjük úgy is, hogy előre kijelöljük az $(a + u)$ és $(b + v)$ tényezőket, s együtthatókat egyeztetünk.) Két egész szám szorzata csak akkor lehet 35, ha mindkét tényező 35 osztója. A lehetséges eseteket az alábbi táblázatban soroltuk fel (összesen 8 megoldás van):

$a+3$	35	7	5	1	−35	−7	−5	−1
$b+2$	1	5	7	35	−1	−5	−7	−35
a	32	4	2	−2	−38	−10	−8	−4
b	−1	3	5	33	−3	−7	−9	−37

Második megoldás: Kifejezzük pl. a-t. $a(2+b) = 29 - 3b$, innen (mivel $b \neq -2$) $a = \frac{29 - 3b}{2 + b} = \frac{-3(2 + b) + 35}{2 + b} = -3 + \frac{35}{2 + b}$. $2 + b$ 35 osztója, a befejezés az előző megoldáshoz hasonlóan végezhető el.

b) $(2a + 1)(b - 2) = 14$, a $(2a + 1)$ tényező csak páratlan lehet. Négy megoldás van:

$2a+1$	1	7	−1	−7
$b-2$	14	2	−14	−2
a	0	3	−1	−4
b	16	4	−12	0

c) $(4b+3)(a+1)=1$.

$4b+3$	1	-1
$a+1$	1	-1
b	$-0{,}5$	-1
a	0	-2

Egy megoldás van: $(a;b)=(-2;-1)$.

d) $(4b+3)(a+1)=0$, innen $(a;b)=(-1;0)$.

1410. *a) Első megoldás:* Szorzattá alakítunk, a két tényezőt $(a+xb+y)(a+z)$ alakban keressük. Az együtthatókat egyeztetve $xab=ab$, innen $x=1$ $(a,b\neq 0)$; $xzb=-2b$, innen $z=-2$; $a(z+y)=-a$, innen $z+y=-1$, $y=1$. Az eredeti egyenlet $(a+b+1)(a-2)=14$ alakra hozható, innen mindkét tényező 14 osztója. A megoldások:

$a+b+1$	1	2	7	14	-1	-2	-7	-14
$a-2$	14	7	2	1	-14	-7	-2	-1
a	16	9	4	3	-12	-5	0	1
b	-16	-8	2	10	10	2	-8	-16

Második megoldás: Kifejezzük b-t. $b(a-2)=16-a^2+a$, innen
$$b=\frac{-a^2+a+16}{a-2}=\frac{(a-2)(-a-1)+14}{a-2}=-a-1+\frac{14}{a-2},$$
s így $a-2$ osztója 14-nek.

b) Az egyenlet $(2a-1)(a+b-2)=10$ alakra hozható. Mivel $2a-1$ páratlan, a következő esetek lehetségesek:

$2a-1$	1	5	-1	-5
$a+b-2$	10	2	-10	-2
a	1	3	0	-2
b	11	1	-8	2

1411. Ha a két szám x és y $(x,y\in\mathbf{Z})$, akkor $x+y=xy$. Innen $(x-1)(y-1)=1$, a keresett számok $(x;y)=(2;2)$ vagy $(x;y)=(0;0)$.

1412. Ha a keresett szám kétjegyű, alakja $\overline{ab}$, akkor $ab+13=10a+b$ $(a=1,2,3,\ldots,9;\ b=0,1,2,\ldots,9)$. Innen $(a-1)(10-b)=3$, $\overline{ab}=49$ vagy $\overline{ab}=27$. Ha a keresett szám három- vagy többjegyű, akkor nincs megoldás. Ha ugyanis a szám n-jegyű $(n\geq 3)$, alakja $\overline{ab\ldots c}$, akkor $10^{n-1}\cdot a\leq\overline{ab\ldots c}=a\cdot b\cdot\ldots\cdot c+13\leq$ $\leq 9^{n-1}\cdot a+13$. $10^{n-1}\cdot a\leq 9^{n-1}\cdot a+13$ pedig nem teljesülhet, ha $n\geq 3$.

1413. $10a+b+10b+a+ab=113$, innen $(a+11)(b+11)=234$. $234=$ $=2\cdot 3^2\cdot 13$, s mivel mindkét tényező legalább 12, a $13\cdot 18$ felbontás lehetséges csak. Két megfelelő szám van: $(a;b)=(2;7)$ vagy $(7;2)$.

1414. Az $x_1 = 3$ helyettesítés után $3^3 + 3^2 - 14 \cdot 3 + m = 0$, innen $m = 6$. Az $x - 3$ gyöktényezőt kiemelve $x^3 + x^2 - 14x + 6 = (x - 3)(x^2 + 4x - 2) = 0$. A második tényező zérushelyei $x_2 = -2 + \sqrt{6}$, illetve $x_3 = -2 - \sqrt{6}$.

1415. Elvégezve a műveleteket $x^2(b + c) - x(ab + bc + ac - b) + abc - c \equiv 0$.
Minden x-re csak akkor teljesülhet az egyenlőség, ha
(1) $b + c = 0$;
(2) $ab + bc + ac - b = 0$;
(3) $abc - c = 0$.
(1)-ből $c = -b$, ezt (2)-be és (3)-ba helyettesítve
(2') $b^2 + b = 0$;
(3') $ab^2 - b = 0$.
Ha $b = 0$, akkor $c = 0$, a tetszőleges; ha $b = -1$, akkor $c = 1$, $a = -1$.
Az így kapott két polinom, illetve gyöktényezős alakjaik: $x^3 - ax^2 = x^2(x - a)$, $x^3 + x^2 - x - 1 = (x + 1)^2(x - 1)$.

1416. *Első megoldás:* Az egyenletet az a változóban másodfokúnak tekintve $a^2 - a(b + c) + b^2 + c^2 - bc = 0$. A diszkrimináns $(b + c)^2 - 4(b^2 + c^2 - bc) = -3(b - c)^2$, s ez csak akkor nemnegatív, ha $b = c$. Hasonlóan kapjuk, hogy $a = b$, így $a = b = c$ valóban teljesül.
Második megoldás: Négyzetösszegekké alakítunk. $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = 0$, innen $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$, s ez csak $a = b = c$ esetén teljesül.

1417. *a)* $|17 - x| = 9 + x - 6\sqrt{x}$.

Ha $x \le 17$, akkor a megoldandó egyenlet $17 - x = 9 + x - 6\sqrt{x}$. Az egyenlet $\sqrt{x}$-ben másodfokú, a gyökök: $\sqrt{x}_{1,2} = -1$ (ez hamis), illetve 4; innen $x_1 = 16$.
Ha $x > 17$, akkor $x - 17 = 9 + x - 6\sqrt{x}$; innen $x_2 = \frac{169}{9}$.

b) $2x^2 - 8x + 7 \neq 0$, innen x nem lehet $2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\approx 2{,}71$), illetve $2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\approx 1{,}29$).

Az $y = x^2 - 4x + 3$ helyettesítést alkalmazva az egyenlet $y + \frac{1}{2y+1} = 1$ alakra hozható, melynek megoldása $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{1}{2}$. Visszahelyettesítés után az első esetben $x^2 - 4x + 3 = 0$, ahonnan $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. A második esetben $x^2 - 4x + 3 = \frac{1}{2}$, ahonnan $x_3 \approx 3{,}22$, $x_4 \approx 0{,}78$.

c) Első megoldás: A „frontális" megoldás elég sok számolást igényel. Az egyenletet a $49 \cdot 50(x - 50)(x - 49)$ közös nevezővel megszorozva $99x^3 - 14\,702x^2 + 485\,199x = 0$. Innen $x_1 = 0$, a $99x^2 - 14\,702x + 485\,199 = 0$ egyenlet két gyöke pedig $x_2 = 99$, $x_3 = \frac{4901}{99}$.

Második megoldás: Kevesebb számolással érünk célhoz, ha mindkét oldalhoz tagonként egyet-egyet hozzáadunk. Ekkor $\frac{x+1}{50}+\frac{x-1}{49}=$ $=\frac{x-1}{x-50}+\frac{x+1}{x-49}$, innen $(x+1)\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{49-x}\right)=$ $=(x-1)\left(\frac{1}{x-50}-\frac{1}{49}\right)$, $\frac{(x+1)(99-x)}{50(49-x)}=\frac{(x-1)(99-x)}{49(x-50)}$.

$x=99$ gyök; ezután a $49(x-50)(x+1)=50(49-x)(x-1)$ másodfokú egyenlet gyökeit kell meghatároznunk.

Harmadik megoldás: A két oldalt külön hozzuk közös nevezőre: $\frac{49(x-49)+50(x-50)}{50\cdot 49}=\frac{49(x-49)+50(x-50)}{(x-49)(x-50)}$. A számlálók megegyeznek, ezért vagy a számlálók értéke nulla, vagy ha ez nem teljesül, akkor a nevezők egyenlők.

d) Szorzattá alakítjuk a két másodfokú kifejezést, majd a kapott tényezőket szimmetrikusan csoportosítjuk.

Az $x^2-4x+3=0$ egyenletből $x_1=1$ és $x_2=3$, így $x^2-4x+3=$ $=(x-1)(x-3)$. Hasonlóan $x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$.

Az $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)=-24$ egyenletből az első és negyedik tényező szorzata x^2+x-12, a második és harmadik tényezőé x^2+ $+x-2$; az $a=x^2+x-2$ helyettesítéssel $a(a-10)=-24$. Ennek két gyöke $a_1=4$, $a_2=6$; innen $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_3=\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$, $x_4=\frac{-1-\sqrt{33}}{2}$.

e) $x\geq 0$. $t=\sqrt[12]{x}$ helyettesítéssel $(t\geq 0)$ az egyenlet $t^6-2t^4+t^3=$ $=t^3(t^3-2t+1)=0$ alakra hozható. A második tényezőnek gyöke $t=1$, így szorzattá alakítás után $t^3(t-1)(t^2+t-1)=0$ adódik.

A gyökök: $t_1=0$, $t_2=1$, $t_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $t_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (ez hamis), s innen $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{12}$.

1418. *a)* Nevezőben nem állhat nulla, négyzetgyök alatt nem lehet negatív szám; az egyenlet értelmezési tartománya $x<-5$ vagy $19\leq x$.

Az egyenlet $(x-19)(x+5)-30(x+5)\sqrt{\frac{x-19}{x+5}}-175=0$ alakra hozható. $\sqrt{(x+5)^2}=|x+5|$, így az $(x+5)$ tényezőt csak előjelétől függően vihetjük be a négyzetgyök alá.

IV

Első eset: ha $x + 5 > 0$, vagyis $x > -5$. Ekkor $\sqrt{(x+5)^2} = x + 5$, a kapott egyenlet $(x - 19)(x + 5) - 30\sqrt{(x+5)(x-19)} - 175 = 0$. (Az alaphalmaz leszűkült az $x \geq 19$ intervallumra.)
Az egyenlet az $y = \sqrt{(x+5)(x-19)}$ helyettesítéssel az $y^2 - 30y - 175 = 0$ egyenletre vezethető vissza. Ennek két gyöke $y_1 = -5$ és $y_2 = 35$. Az első gyök hamis, a másodikat visszahelyettesítve $\sqrt{(x+5)(x-19)} = 35$. Négyzetre emelés és rendezés után az $x^2 - 14x - 1320 = 0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei $x_1 = 44$ és $x_2 = -30$. Az $x \geq 19$ leszűkítés miatt csak $x_1 = 44$ a valódi gyök, melyről visszahelyettesítéssel meggyőződhetünk.
Második eset: ha $x + 5 < 0$, vagyis $x < -5$. Ekkor $\sqrt{(x+5)^2} = -(x + 5)$, az egyenlet $(x - 19)(x + 5) + 30\sqrt{(x+5)(x-19)} - 175 = 0$ alakra hozható. (Az értelmezési tartomány $x < -5$.)
Az $y = \sqrt{(x+5)(x-19)}$ helyettesítéssel az $y^2 - 30y - 175 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, ennek gyökei $y_1 = 5$ és $y_2 = -35$. A második gyök hamis, az elsőt visszahelyettesítve $\sqrt{(x+5)(x-19)} = 5$. Rendezés után $x^2 - 14x - 120 = 0$, a gyökök $x_3 = 20$ és $x_4 = -6$. Az $x < -5$ leszűkítés miatt $x_4 = -6$ a valódi gyök.
Összefoglalva: az egyenlet megoldáshalmaza $\{44; -6\}$.
Megjegyzés:
A megoldás folyamán minden lépésben rögzítettük az alaphalmaz változását, végig ekvivalens átalakításokat végeztünk. Technikailag egyszerűbb, ha nem törődünk az ekvivalenciával, s a kapott gyököket visszahelyettesítéssel utólag ellenőrizzük. (Ha azonban pl. az eredeti feladatot egyenlet helyett egyenlőtlenség alakjában tűzzük ki, akkor az eredmény intervallum lesz; végtelen sok számot pedig nem lehet visszahelyettesítéssel ellenőrizni.)

b) Emeljük köbre mindkét oldalt! Az $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ azonosság alkalmazásával $x + 9 - x + 3\sqrt[3]{x(9-x)}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{9-x}\right) = 27$, vagyis $\sqrt[3]{x(9-x)}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{9-x}\right) = 6$. Tegyük fel, hogy az egyenletnek van megoldása; ekkor a kiindulási egyenletet felhasználva a második tényező 3, így $\sqrt[3]{x(9-x)} = 2$, $x(9-x) = 8$, $x_1 = 1$, $x_2 = 8$.
Ellenőrzés: $\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{9-1} = 3$, $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{9-8} = 3$. Mindkét gyök megfelelő.
Megjegyzés:
A megoldás folyamán felhasználtuk a kiindulási egyenletet. Ez nem ekvivalens átalakítás, ezért kötelező az ellenőrzés. (Valójában azt

mutattuk meg, hogy ha létezik megoldás, akkor az csak $x_1 = 1$ vagy $x_2 = 8$ lehet; hogy ezek ténylegesen gyökök, visszahelyettesítéssel igazolhatjuk.)

1419. *a)* Az előző megoldáshoz hasonlóan járunk el.
Mindkét oldalt köbre emelve

$x + 2 - x + 3\sqrt[3]{x(2-x)}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2-x}\right) = -1$, innen $\sqrt[3]{x(2-x)} = 1$,

$x(2-x) = 1,\ x = 1$.

Ha tehát van megoldás, az csak $x = 1$ lehet. De a visszahelyettesítés alapján ez hamis gyök, így az egyenletnek nincs megoldása.

b) $x+2\sqrt{x-1} = \left(1+\sqrt{x-1}\right)^2$, hasonlóan $x - 2\sqrt{x-1} = \left(1-\sqrt{x-1}\right)^2$,

ezért az egyenlet $\sqrt{\left(1+\sqrt{x-1}\right)^2} + \sqrt{\left(1-\sqrt{x-1}\right)^2} = 2 - y^2$ alakba írható. Az egyenlet alaphalmaza $x \geq 1$.

A $\sqrt{a^2} = |a|$ azonosság alkalmazásával $\left|1+\sqrt{x-1}\right| + \left|1-\sqrt{x-1}\right| = 2 - y^2$. Mivel $1 + \sqrt{x-1}$ mindig pozitív, csak a második abszolútértékes tag előjelét kell megvizsgálnunk.

Ha $1 - \sqrt{x-1} \geq 0$, vagyis $2 \geq x$, akkor $\left|1-\sqrt{x-1}\right| = 1 - \sqrt{x-1}$, az egyenlet $1 + \sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} = 2 - y^2$ alakú. Ekkor végtelen sok megoldást kaptunk; az alaphalmazt figyelembe véve $y = 0,\ 1 \leq x \leq 2$.

Ha $1 - \sqrt{x-1} < 0$, vagyis $2 < x$, akkor $\left|1 - \sqrt{x-1}\right| = \sqrt{x-1} - 1$, az egyenlet $1 + \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} - 1 = 2 - y^2$ alakú. A $2\sqrt{x-1} = 2 - y^2$ egyenlet bal oldala nagyobb, mint 2 ($x > 2$), a jobb oldala legfeljebb 2; az egyenletnek nincs megoldása.

Az összes megoldás: $1 \leq x \leq 2,\ y = 0$.

Megjegyzés:

Ha közvetlenül nem sikerül $x + 2\sqrt{x-1}$ teljes négyzetté alakítása, alkalmazhatjuk a $b = \sqrt{x-1}$ helyettesítést. Ekkor $x + 2\sqrt{x-1} = b^2 + 1 + 2b$, ami már nevezetes azonosság.

1420. *a)* $x + y - z \geq 0$. Küszöböljük ki a négyzetgyökös tagot: $a = \sqrt{x+y-z}$ helyettesítéssel $a^2 = x + y - z$, innen $z = x + y - a^2$, s az eredeti egyenlet $x^2 + y^2 + \frac{3}{4} = x + y - a^2 + a$ alakra hozható.

Négyzetösszegekké alakítás után $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 = 0$,

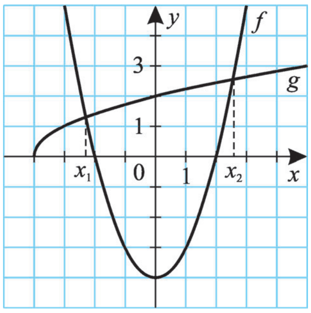
innen $(x; y; a) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, vagyis $(x; y; z) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

IV

IV

b) Az egyenlet bal oldalát négyzetösszegekké alakíthatjuk: $x^2 - 4xz + 4z^2 + z^2 - 4yz + 4y^2 + y^2 - 2y + 1 = (x - 2z)^2 + (z - 2y)^2 + (y - 1)^2 = 0$. Innen $(x; y; z) = (4; 1; 2)$.

1421.



1421. *Első megoldás:* Az $f\colon x \mapsto x^2 - 4$, $x \geq 0$ és $g: x \mapsto \sqrt{x+4}$, $x \geq -4$ függvények egymás inverzei. Ábrázoljuk az $f: x \mapsto x^2 - 4$, $x \in \mathbf{R}$ és g függvényeket! Az f és g függvények görbéi tükrös helyzetűek az $y = x$ egyenesre, ezért az $x^2 - 4 = x$, vagyis $x^2 - x - 4 = 0$ egyenlet pozitív gyöke az eredeti egyenletnek is megoldása.
$x^2 - 4 = \sqrt{x+4}$ négyzetre emelése és rendezés után $x^4 - 8x^2 - x + 12 = 0$, s a bal oldalból kiemelve az $x^2 - x - 4$ tényezőt, az egyenlet $(x^2 - x - 4)(x^2 + x - 3) = 0$ alakra hozható. A négy gyök közül a feltételeknek $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ és $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$ felel meg.

Második megoldás: Az eredeti egyenlet helyett az
(1) $y = x^2 - 4$,
(2) $y = \sqrt{x+4}$
egyenletrendszert oldjuk meg. (1)-ből kivonva (2) négyzetét $x^2 - y^2 = -(x - y)$, $(x - y)(x + y + 1) = 0$. Innen $y = x$ vagy $y = -x - 1$, ezt (1)-be helyettesítve megkapjuk az első megoldás másodfokú egyenleteit.

1422. *a) Első megoldás:* A megoldóképletet alkalmazva

$x_{1,2} = \dfrac{-5m \pm \sqrt{25m^2 + 24m^2}}{4}$, innen $x_1 = \dfrac{m}{2}$, $x_2 = -3m$. Általában két megoldás van; egy megoldás van, ha $\dfrac{m}{2} = -3m$, vagyis ha $m = 0$. (Ekkor $x = 0$ kétszeres gyök.)

Második megoldás: Ha $m = 0$, akkor $x = 0$.

Ha $m \neq 0$, akkor az egyenletet m^2-tel osztva $2\left(\dfrac{x}{m}\right)^2 + 5\left(\dfrac{x}{m}\right) - 3 = 0$ adódik. Innen $\dfrac{x}{m} = \dfrac{1}{2}$ $\left(\text{ekkor } x = \dfrac{m}{2}\right)$ vagy $\dfrac{x}{m} = -3$ (ekkor $x = -3m$).

Harmadik megoldás: Szorzattá alakítunk csoportosítással.
$0 = 2x^2 + 5mx - 3m^2 = 2x^2 + 6mx - mx - 3m^2 = 2x(x + 3m) - m(x + 3m) = (2x - m)(x + 3m)$, s ebből $2x - m = 0$ vagy $x + 3m = 0$ következik.

b) $m_1 = 2x$, $m_2 = -\dfrac{x}{3}$. Általában két megoldás van; egy megoldás van, ha $x = 0$. (Ekkor $m = 0$ kétszeres gyök.)

1423. Ha az $f(x)=6x^3-7x^2+px+12=0$ egyenlet egyik gyöke 2, akkor az $f(2)=0$ egyenletből $6\cdot 2^3-7\cdot 2^2+2p+12=0$, innen $p=-16$.
Mivel $x=2$ gyök, az $f(x)$ polinomból kiemelhető az $(x-2)$ gyöktényező: $6x^3-7x^2-16x+12=(x-2)(6x^2+5x-6)$. A $6x^2+5x-6=0$ egyenletből $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{3}{2}$.

1424. *a)* Átalakítások után $(a+1)x^2-x(6+8a)+8+15a=0$.
Ha $a=-1$, akkor az egyenlet elsőfokú, melynek $x=3{,}5$ a gyöke. Ha $a\neq-1$, akkor az egyenlet diszkriminánsa
$D=(6+8a)^2-4(a+1)(8+15a)=4a^2+4a+32=$
$=(2a+1)^2+31>0$, tehát az egyenletnek az a paraméter tetszőleges értékére van két (különböző) gyöke.

b) Ha $p=3$, az egyenlet elsőfokú, egyetlen gyöke van: $x=1{,}2$. Ha $p\neq 3$, akkor a diszkrimináns $25-24(p-3)=97-24p$. Ha $p<\frac{97}{24}$ (és $p\neq 3$), akkor két megoldás van; ha $p=\frac{97}{24}$, egy (kétszeres) gyök; ha $p>\frac{97}{24}$, nincs megoldás.

c) Az egyenlet $3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ac=0$ alakra hozható. Ennek az egyenletnek $x=a$ nem lehet gyöke, hiszen a
$3a^2-2(a+b+c)a+ab+bc+ac=0$ egyenletből átalakítások után $(a-c)(a-b)=0$ adódik, s ez ellentmondás (a, b, c különbözők). Hasonlóképpen nem lehet gyök $x=b$ vagy $x=c$ sem.
Az egyenlet diszkriminánsa $D=4(a+b+c)^2-12(ab+bc+ac)=$
$=2\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)>0$, tehát mindig van két különböző gyök.

1425. *a)* Vizsgálhatjuk a diszkrimináns előjelét, vagy az egyenlet bal oldalát négyzetösszegekké alakíthatjuk. Ez utóbbi alapján az $(ax+b)^2+x^2+$ $+c^2=0$ egyenletnek csak a $b=c=0$ (a tetszőleges) esetben van megoldása (ekkor $x=0$), a paraméterek más értékére nincs megoldás.

b) Nincs valós gyök.

c) $(ax-b)^2+x^2=1$, innen $x=-1, 0, 1$ lehetséges.
Ha $x=-1$, akkor $a=-b$ (a, b tetszőleges); ha $x=1$, akkor $a=b$ (a, b tetszőleges), ha $x=0$, akkor a tetszőleges, $b=\pm1$. Tehát egy megoldás van a következő esetekben: $(a;\,b)=(t;\,-t)$, $(t;\,t)$, $(t;\,1)$, $(t;\,-1)$, ahol $t\in\mathbf{Z}$ tetszőleges.

1426. *a)* Az (1) $x^4+2px^2+p+1=0$ egyenlet $y=x^2$ helyettesítéssel (2) y^2+ $+2py+p+1=0$ alakra hozható. A gyökök létezésének szükséges feltétele, hogy a diszkrimináns ne legyen negatív. $D=(2p)^2-$ $-4(p+1)=4p^2-4p-4$, így $4p^2-4p-4\geq 0$. A két zérushely

$p_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}62$ és $p_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$, az egyenlőtlenség megoldása (3) $p \le \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ vagy $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \le p$.

A (3) feltétel teljesülése esetén (2)-nek az y változóra nézve van gyöke; (1)-nek akkor van gyöke (x-ben), ha $y \ge 0$.

A Viète-formulákból $y_1 + y_2 = -2p$, $y_1 \cdot y_2 = p + 1$; két pozitív gyököt akkor kaphatunk y-ra, ha $-2p > 0$ és $p + 1 > 0$, vagyis $-1 < p < 0$.

Ezt a (3) feltétellel egybevetve $-1 < p \le \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ adódik.

Egy pozitív és egy negatív gyököt akkor kaphatunk, ha $p + 1 < 0$, vagyis $p < -1$; ezt (3)-mal egybevetve $p < -1$.

(Két negatív gyök keletkezik y-ban, ha $-2p < 0$ és $p + 1 > 0$, vagyis $0 < p$. (3)-mal egybevetve ekkor $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \le p$.)

Végül azt az esetet vizsgáljuk meg, amikor $y = 0$ gyöke (2)-nek. Ekkor $p = -1$, az egyenlet $y^2 - 2y = 0$ alakú lesz, a másik gyök $y = 2$ pozitív. Mivel $y = x^2$, így minden $y > 0$ gyökhöz pontosan két megfelelő x érték tartozik ($x = \pm\sqrt{y}$). Ha (3)-ban egyenlőség van, akkor (2) teljes négyzet, a két gyök megegyezik.

Foglaljuk össze az eredményeket egy táblázatban:

p értéke	(2) gyökei ’y’-ban	(1) gyökei ’x’-ben
$p < -1$	egy pozitív és egy negatív gyök	két gyök
$p = -1$	egy pozitív és egy zérus gyök	három gyök (a 0 kétszeres gyök)
	két pozitív gyök	négy gyök
	egy (kétszeres) pozitív gyök	két (kétszeres) gyök
	nincs gyök	nincs gyök
	egy (kétszeres) negatív gyök	nincs gyök
	két negatív gyök	nincs gyök

b) Alkalmazzuk az $y = x^2$ helyettesítést ($y \geq 0$)! Ekkor az (1) $x^4 + 2x^2 + p = 0$ egyenletből a (2) $y^2 + 2y + p = 0$ egyenletet kapjuk. (2)-nek (y-ban) két gyöke van, ha $p < 1$; egy gyöke, ha $p = 1$ ($y = -1$); s nincs gyöke, ha $p > 1$. Mivel $y \geq 0$, meg kell vizsgálni a (2)-ben kapott y_1, y_2 gyökök előjelét.

A két gyök összege -2, tehát az egyik gyök biztosan negatív: $y_2 < 0$. $y_1 > 0$, ha a két gyök szorzata negatív, tehát $p < 0$. Ekkor (2)-ben egy pozitív gyök van, így (1)-ben két gyököt kapunk: $x_1 = \sqrt{y_1}$, $x_2 = -\sqrt{y_1}$.

IV

Végül (2)-nek gyöke 0, ha $p = 0$. Ekkor (1)-ben $x = 0$ az egyetlen (kétszeres) gyök.
Összefoglalva:

p értéke	(2) gyökei ’y’-ban	(1) gyökei ’x’-ben
$1 < p$	nincs gyök	nincs gyök
$p = 1$	egy (kétszeres) negatív gyök	nincs gyök
$0 < p < 1$	két negatív gyök	nincs gyök
$p = 0$	0; -2	0
$p < 0$	két különböző előjelű gyök	két gyök

c) Az $y = x^2$ helyettesítéssel $y^2 + (1 + p)y + p = 0$, innen $y_1 = 1$ és $y_2 = p$.
Látható, hogy $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$ mindig megoldás.
Ha $p < 0$, két gyök van;
ha $p = 0$, három gyök (közülük $x = 0$ kétszeres gyök);
ha $p > 0$, $p \neq 1$, akkor négy gyök van;
ha $p = 1$, akkor két (kétszeres) gyök van.

1427. *a)* *Első megoldás:* Az egyenlet $x(p + 2 - 2x) = 6$ alakra hozható, innen x_1 osztója 6-nak. x_1 ismeretében $(p + 2 - 2x_1)$-ből számolható p, s az eredeti egyenletből x_2.

x_1	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
$p + 2 - 2x_1$	6	3	2	1	-6	-3	-2	-1
p	6	5	6	11	-10	-9	-10	-15
x_2	3	1,5	1	0,5	-3	$-1,5$	-1	$-0,5$

Két megoldást kaptunk: ha $p = 6$, akkor a két gyök 1 és 3; ha pedig $p = -10$, akkor a két gyök -1 és -3.

Második megoldás: A Viète-formulák alapján $x_1 \cdot x_2 = 3$ és $x_1 + x_2 = \frac{p+2}{2}$. Innen $(x_1;\ x_2) = (1; 3)$, s ekkor $p = 6$; vagy $(x_1;\ x_2) = (-1; -3)$, ekkor pedig $p = -10$.

IV

Megjegyzés:
A második megoldásban nem használtuk ki, hogy p egész.

b) A két gyök szorzata 1,5, nincs megoldás.

c) $(p; x_1; x_2) \in \{(-3{,}5; 1; 6), (-2{,}5; 2; 3), (3{,}5; -1; -6), (2{,}5; -2; -3)\}$.

d) $x(x+p-3)=p$, így $x \mid p$. Legyen $p = kx$ $(k \in \mathbf{Z})$, ekkor $x(x+kx-3) = kx$.
Ha $x=0$, akkor $p=0$, s ez megoldás.
Ha $x \neq 0$, akkor $(k+1)x = 3+k$, $x = \dfrac{k+3}{k+1} = 1 + \dfrac{2}{k+1}$ $(k=-1$ nem lehetséges), s innen az alábbi táblázatot kapjuk:

k_1	-3	-2	0	1
x	0	-1	3	2
p	0	2	0	2

1428. *a)* Tekintsük y-t paraméternek, ekkor

$$x_{1,2} = \frac{8y-16 \pm \sqrt{(8y-16)^2 - 4(16y^2+34y-1798)}}{2} =$$

$= 4(y-2) \pm 7\sqrt{2(19-y)}$. Innen $y \leq 19$ (és a feladat értelmében $y \geq 0$), és $19 - y = 2k^2$ alakú $(k \in \mathbf{N})$. A kapott megoldások: $(x; y) = (8; 11)$, $(64; 11)$, $(50; 1)$.

b) *Első megoldás:* Az előző megoldáshoz hasonlóan járhatunk el. y-t paraméternek tekintve $x_{1,2} = 2 - y \pm \sqrt{17-8y}$, s innen $y \in \{0, 1, 2\}$.
Eredmény: $(x; y) = (4; 1)$ vagy $(1; 2)$. (A $(-2; 1)$ és $(-1; 2)$ értékpárok nem felelnek meg.)
Második megoldás: Az egyenlet $(x-2)^2 + (y+2)^2 + 2xy = 21$ alakra hozható, innen $xy \leq 10$, s némi próbálkozás után megkapjuk a gyököket.

c) *Első megoldás:* $x_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 12(y^2-3)}}{6} = \dfrac{9 \pm \sqrt{117 - 12y^2}}{6}$,
innen $y^2 \leq 9$, $y \in \{0; 1; 2; 3\}$. Eredmény: $(x; y) = (1; 3)$ vagy $(x; y) = (2; 3)$.
Második megoldás: Az egyenlet 12-vel szorozva $3(2x-3)^2 + 4y^2 = 39$ alakra hozható. Innen y osztható 3-mal és legfeljebb 3, tehát $y = 3$, s ekkor $x = 1$ vagy $x = 2$.

1429. *Első megoldás:* $10a + b - (10b + a) = (a+b)^2$-ből $9(a-b) = a^2 + b^2 + 2ab$, innen $a^2 + a(2b-9) + b^2 + 9b = 0$. Az a-ban másodfokú egyenlet megoldása $a_{1,2} = \dfrac{9 - 2b \pm \sqrt{81 - 72b}}{2}$. A diszkrimináns nem lehet negatív, így $b = 0$ vagy $b = 1$ lehetséges csak.

Ha $b = 0$, akkor $a = 9$. (Ezt a megoldást csak akkor fogadhatnánk el, ha a $\overline{ba} = 09$ alakot használnánk, de ez nem lenne szerencsés.)
Ha $b = 1$, akkor $a = 2$ vagy $a = 5$.
Két megoldást kaptunk: 21, 51. (A 90 nem felel meg.)
Második megoldás: $9(a - b) = (a + b)^2$, így $a - b$ négyzetszám, lehetséges értékei 0, 1, 4, 9. Ezek visszahelyettesítésével az előző megoldásokat kapjuk.

1430. *Első megoldás:* Az $n^2 + n + 41 = k^2$ egyenletben ($k \in \mathbf{N}$ feltehető) k-t paraméternek tekintve a megoldhatóság szükséges feltétele, hogy a diszkrimináns ne legyen negatív. $D = 1 - 4 \cdot (41 - k^2) \geq 0$, innen $k^2 \geq 40{,}75$, $|k| \geq 6{,}38$, $k \geq 7$.

Mivel $n_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4k^2 - 163}}{2}$ egész szám, a diszkriminánsnak négyzetszámnak kell lennie.
Innen $4k^2 - 163 = m^2$ (ahol $m \in \mathbf{N}$), $4k^2 - m^2 = 163$, $(2k + m)(2k - m) = 163$. 163 prímszám, így $2k + m = 163$, $2k - m = 1$. Az egyenletrendszer megoldása $k = 41$, $m = 81$. Visszahelyettesítve $n_{1,2} = \dfrac{-1 \pm m}{2} = \dfrac{-1 \pm 81}{2}$, tehát $n = 40$ vagy $n = -41$ esetén lesz $n^2 + n + 41$ négyzetszám.
Második megoldás: Más megoldási lehetőség a teljes négyzetté alakítás.

Ha $n^2 + n + 41 = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{163}{4}$ négyzetszám, akkor négyszerese is az.

A $(2n + 1)^2 + 163 = 4k^2$ egyenletből $163 = 4k^2 - (2n + 1)^2 =$
$= (2k + 2n + 1)(2k - 2n - 1)$, s innen az első megoldáshoz hasonlóan folytathatjuk.

1431. *a)* $b^2 - 16 \geq 0$, innen $b \leq -4$ vagy $b \geq 4$.
b) $b < -4$ vagy $b > 4$.
c) a gyökök összege $-b$, szorzata 4, innen $b < -4$.
d) Nem lehetséges; a gyökök szorzata pozitív.
e) $1 + b + 4 = 0$, innen $b = -5$.
f) Nem lehetséges.
g) Az $f(x) = x^2 + bx + 4$ függvény képe felfelé nyitott parabola, minimuma az $x = -\dfrac{b}{2}$ helyen van. A két gyök -2-nél nagyobb, ha

$f(-2) > > 0$ és $-2 < -\dfrac{b}{2}$ (és persze van két (esetleg egyenlő) gyök: $b \leq -4$ vagy $b \geq 4$). Nincs megoldás.

h) $f(-6) > 0$ és $-6 < -\dfrac{b}{2}$, vagyis $b < \dfrac{20}{3}$ és $b < 12$; innen $b < \dfrac{20}{3}$.
A diszkrimináns nem lehet negatív, így a megoldás: $b \leq -4$ vagy $4 \leq b < \dfrac{20}{3}$.

i) Elégséges feltétel $f(-6) < 0$, innen $b > \dfrac{20}{3}$.

j) A feltételek: pozitív diszkrimináns mellett $f(-4) > 0$, $f(-1) > 0$, $-4 < \frac{b}{2} < -1$. Az egyenlőtlenségek megoldása $2 < b < 5$, innen $4 < b < 5$.

1432. *Első megoldás* (együtthatók és függvényértékek vizsgálata):

a) $(2-p)^2 + 4(4p+8) \geq 0$; innen $(p+6)^2 \geq 0$, s ez mindig teljesül.

b) $p \neq -6$.

c) a gyökök összege $2-p > 0$, szorzata $-4p-8 > 0$, innen $p < -2$ $(p \neq -6)$.

d) $-4p-8 < 0$, innen $p > -2$.

e) $-1 + p - 2 + 4p + 8 = 0$, innen $p = -1$.

f) Az $f(x) = -x^2 + (2-p)x + 4p + 8$ függvény képe lefelé nyitott parabola, maximuma az $x = \frac{2-p}{2}$ helyen van. A két gyök 1-nél nagyobb, ha $f(1) < 0$ és $1 < \frac{2-p}{2}$. Innen $-1 + 2 - p + 4p + 8 < 0$ és $p < 0$, vagyis $p < -3$.

g) Elégséges feltétel $f(1) > 0$, innen $p > -3$.

h) A feltételek: pozitív diszkrimináns mellett $f(1) < 0$, $f(5) < 0,1 < \frac{2-p}{2} < 5$. Az egyenlőtlenségek megoldása $p < -3$, $p > -7$, $-8 < p < 0$. Innen $-7 < p < -3$, $p \neq -6$.

Második megoldás: Mivel a diszkrimináns teljes négyzet, érdemes a két gyököt meghatároznunk. $x_{1,2} = \frac{p-2 \pm (p+6)}{-2}$, innen $x_1 = -p-2$, $x_2 = 4$. Az x_2 ismerete lényegesen megkönnyíti a feltételek felírását.

c) $x_2 > 0$ mindig teljesül, így elégséges feltétel $-p-2 > 0$, innen $p < -2$ $(p \neq -6)$.

d) $-p-2 < 0$, innen $p > -2$.

e) $-p-2 = -1$, innen $p = -1$.

f) $-p-2 > 1$, innen $p < -3$.

g) $-p-2 < 1$, innen $p > -3$.

h) $1 < -p-2 < 5$, innen $-7 < p < -3$ $(p \neq -6)$.

1433. *a)* Ha $p = -2$, akkor az egyenlet elsőfokú, melynek gyöke $x = -2$. Egyéb p értékekre a diszkrimináns $(2p+3)^2 + 8(p+2) = 4p^2 + 20p + 25 = (2p+5)^2 \geq 0$, tehát minden p értékre van gyöke az egyenletnek.

b) Két különböző gyök van, ha $p \neq -2{,}5$. (És persze $p \neq -2$.) A két gyök $x_1 = \frac{1}{p+2}$ és $x_2 = -2$.

c) $x_1 > 0$, ha $p > -2$. *d)* $p = -3$. *e)* Nem lehetséges, $x_2 < -1$.

f) $\frac{1}{p+2} > -3$, ha $\frac{3p+7}{p+2} > 0$; ez pedig $p < -\frac{7}{3}$ vagy $p > -2$ esetben teljesül.

g) $x_1 = \frac{1}{p+2} < -3$, ha $-\frac{7}{3} < p < -2$. ($p = -2{,}5$ esetén kétszeres gyök van.)

h) $-3 < \frac{1}{p+2} < -1$, ha $-3 < p < -\frac{7}{3}$.

1434. A valós gyökök létezése miatt a másodfokú kifejezés diszkriminánsa nemnegatív. $D = (1{,}2p)^2 - 4(p^2 - 3p) = -2{,}56p^2 + 12p$, így $-2{,}56p^2 + 12p \ge 0$, $p(12 - 2{,}56p) \ge 0$. Az egyenlőtlenség megoldása: $0 \le p \le 4{,}6875$.
A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján
$x_1 + x_2 = -1{,}2p$, $x_1 \cdot x_2 = p^2 - 3p$.
Innen $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (-1{,}2p)^2 - 2(p^2 - 3p) = -0{,}56p^2 + 6p$, vagyis a $0 \le p \le 4{,}6875$ feltétel mellett az $f(p) = -0{,}56p^2 + 6p$ kifejezés maximumát keressük.
A $p \mapsto f(p)$ függvény két zérushelye $p_1 = 0$ és $p_2 \approx 10{,}71$, szélsőértékhelye $p = \frac{-6}{2 \cdot (-0{,}56)} \approx 5{,}36$. A $0 \le p \le 4{,}6875$ intervallum nem tartalmazza az abszolút maximumhelyet, ezért f(p) akkor maximális, ha $p = 4{,}6875$. A valós gyökök négyzetösszegének maximuma $f(4{,}6875) = -0{,}56 \cdot 4{,}6875^2 + 6 \cdot 4{,}6875 \approx \approx 15{,}82$.

1435. (2)-ből $(p^2 - 4)x = y(p^2 - 1)$. (1)-et beszorozva $(p-1) \ne 0$-val $2(p+2)(p-1)x - p(p-1) = y(p^2 - 1)$ adódik, innen $(p^2 - 4)x = 2(p+2)(p-1)x - p(p-1)$. Az egyenlet rendezésével kapjuk, hogy
(3) $p(p+2)x = p(p-1)$.
Ha $p = 1$, akkor (2)-ből $x = 0$, (1)-ből $y = -0{,}5$.
Ha $p \ne 1$, akkor (3) vizsgálatát három esetre bontjuk.
1. Ha $p = 0$, akkor (3)-at minden x kielégíti, (2)-ből $y = 4x$. A megoldások $(x; y) = (t; 4t)$ alakúak, ahol $t \in \mathbf{R}$ tetszőleges.
2. Ha $p = -2$, akkor (3) ellentmondó, nincs megoldás.
3. Ha $p \ne 0$ és $p \ne -2$ (és persze $p \ne 1$), akkor $x = \frac{p-1}{p+2}$, ezt (1)-be visszahelyettesítve $(p+1)y = p - 2$. Innen $p = -1$ ellentmondásra vezet, egyébként $y = \frac{p-2}{p+1}$. (Ez a megoldás tartalmazza a $p = 1$ esetben kapott gyökpárt is.)
Összefoglalva:

p	x	y
0	$t \in \mathbf{R}$ tetszőleges	$4t$
-2	nincs megoldás	nincs megoldás
-1	nincs megoldás	nincs megoldás
egyébként	$\frac{p-1}{p+2}$	$\frac{p-2}{p+1}$

1436. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$, így (1) $x^2+xy+y^2 = p$ alakra hozható. (2)-ből $x = p + y$, ezt (1)-be helyettesítve $3y^2 + 3py + p^2 - p = 0$. Egyetlen megoldást kapunk, ha az egyenlet diszkriminánsa zérus: $9p^2 - 12(p^2 - p) = 0$, innen $p = 4$ ($p = 0$ nem felel meg), s ekkor $(x; y) = (2; -2)$.

1437. Legyen $x + y = xy = q$, s ekkor a gyökök és együtthatók közötti összefüggések miatt a $z^2 - qz + q = 0$ egyenlet két gyöke x és y. Az egyenlet diszkriminánsa nem lehet negatív: $D = q^2 - 4q \geq 0$, ha $q \leq 0$ vagy $4 \leq q$. (Ehhez az eredményhez úgy is eljuthatunk, ha az $x + y = q$, $xy = q$ egyenletrendszer megoldhatóságát vizsgáljuk meg.)

IV

(1)-ből $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = q^3 - 3q^2 + 3q = p$, innen $(q-1)^3 = p - 1$. A q-ra kapott feltételbe visszahelyettesítve $(q-1)^3 \leq -1$ vagy $3^3 \leq (q-1)^3$, innen $p - 1 \leq -1$ vagy $27 \leq p - 1$, $p \leq 0$ vagy $28 \leq p$.
A lépések megfordíthatók, tehát a $p \leq 0$ vagy $28 \leq p$ értékekre van megoldása az eredeti egyenletrendszernek.

1438. *Első megoldás:* (2) miatt $p \in \mathbf{N}$. (1)-ből és (2)-ből

$$\left(x - \frac{p}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{p}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{p}{3}\right)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2p}{3}(x+y+z) + \frac{p^2}{3} =$$

$= p - \dfrac{2p^2}{3} + \dfrac{p^2}{3} = \dfrac{p}{3}(3-p)$. Ez utóbbi szorzat nem lehet negatív, így $p \in \{0; 1; 2; 3\}$. Ezekre a p értékekre az egyenletrendszernek van megoldása, pl. az x, y, z ismeretlenek közül p számút 1-nek választunk, a többit 0-nak.
Második megoldás: Alkalmazhatjuk a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget: $\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^2 \leq \dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}$, ahonnan $\dfrac{p^2}{9} \leq \dfrac{p}{3}$, $p(p-3) \leq 0$, $p \in \{0; 1; 2; 3\}$.

1439. *a)* Az egyenlet $(x-1)^2 + (y-1)^2 = -1$ alakra hozható. Nincs megoldás.

b) Szorozzuk 4-gyel mindkét oldalt! Ekkor $(2x+1)^2 + (2y+1)^2 = 394$. Mivel 394-nek egyetlen négyzetösszeg-felbontása van ($394 = 13^2 + 15^2$), így $(x; y)$ lehetséges értékei: $(\pm 6; \pm 7)$ és $(\pm 7; \pm 6)$. (Összesen 8 megoldás van.)

c) Az egyenlet $(x^2 - y)^2 + 2y^2 + 2 = 0$ alakra hozható. Nincs megoldás.

d) x páratlan, legyen $x = 2k + 1$ alakú ($k \in \mathbf{Z}$). Ekkor $y = \dfrac{3x^2+5}{2} =$
$= x^2 + 2 + \dfrac{x^2+1}{2} = (2k+1)^2 + 2 + \dfrac{(2k+1)^2+1}{2} = 4k^2 + 4k + 3 +$
$+ 2k^2 + 2k + 1 = 6k^2 + 6k + 4$. Megoldás: $(x; y) =$
$= (2k+1; 6k^2 + 6k + 4)$, ahol k tetszőleges egész szám.

1440. *a)* Az egyenlet $7(x+1)(x-1) - 4y^2 = 14$ alakra hozható. $x + 1$ és $x - 1$ csak páros számok lehetnek, de ekkor a bal oldal osztható 4-gyel, míg a jobb oldal nem. Nincs megoldás.

b) Szorzattá alakíthatunk: $2x^2 + 5xy - 12y^2 = y^2\left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{y}\right) - 12\right) =$

$= 2y^2\left(\frac{x}{y} - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{x}{y} + 4\right) = (2x - 3y)(x + 4y)$. (*Ugyanezt megkaphatjuk* alkalmas csoportosítással is: $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 2x^2 - 3xy + 8xy - 12y^2 = x(2x - 3y) + 4y(2x - 3y) = (2x - 3y)(x + 4y)$.)

A $(2x - 3y)(x + 4y) = 21$ egyenletből a két tényező 21 társosztója lehet csak. A 8 esetet végignézve két megoldást kapunk: $(x;\, y) = (3;\, 1)$ vagy $(x;\, y) = (-3;\, -1)$.

c) Első megoldás: Az egyenlet $(x - 2y)^2 + y^2 = 4$ alakra hozható. Innen $y = 0$ vagy ± 2 lehet, a megoldásokat az alábbi táblázatban soroltuk fel.

y	0	0	2	-2
$x - 2y$	2	-2	0	0
x	2	-2	4	-4

Második megoldás: Az $x^2 - 4xy + 5y^2 - 4 = 0$ egyenletben y-t paraméternek tekintjük. Ekkor a diszkrimináns
$16y^2 - 4(5y^2 - 4) = -4y^2 + 16 \geq 0$, innen $|y| \leq 2$.

d) Az 1416. feladat alapján minden $x = y = z$ egész számhármas megoldás.

e) $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 = 8$, amiből következik, hogy két tag 4, az egyik tag pedig zérus. Ha pl. $x = y$, akkor $|x - z| = 2$, ahonnan $x = z + 2$ vagy $x = z - 2$. Hasonlót állíthatunk, ha valamelyik másik két változó egyenlő, így a megoldások: $(x;\, y;\, z) = (t \pm 2;\, t \pm 2;\, t)$, $(t;\, t \pm 2;\, t \pm 2)$ vagy $(t \pm 2;\, t;\, t \pm 2)$ alakúak, ahol $t \in \mathbf{Z}$ tetszőleges. (Egy-egy megoldáshoz a képletekben azonos előjelek tartoznak, összesen 6 alapmegoldás van.)

1441. Ha a keresett kétjegyű szám alakja $\overline{ab}$ ($a = 1, 2, 3, \ldots, 9$; $b = 0, 1, 2, \ldots, 9$), akkor $10a + b = a^2 - b^2$ vagy $10a + b = b^2 - a^2$. Az első esetben $a(a - 10) = b(b + 1)$ nem lehetséges (a bal oldalon negatív szám áll), a második esetben $b(b - 1) = a(a + 10)$. Ekkor a bal oldalon két szomszédos egész szám szorzata, tehát páros szám áll; emiatt a jobb oldalon a is páros; de ekkor a jobb oldal (s így a bal oldal is) osztható 4-gyel. A $b = 4, 5, 8, 9$ lehetőségek közül $b = 8$, $a = 4$ ad megoldást.

1442. Jelöljük $\overline{ab}$-vel a keresett számot (a, b számjegyek, $a \neq 0$), ekkor $(10a + b)(a + b) = a^3 + b^3$. Mivel $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ és $a + b \neq 0$, innen $10a + b = a^2 - ab + b^2$. Az egyenletet 2-vel megszorozva négyzetek összegét állíthatjuk elő: $a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 20a + b^2 - 2b = 0$, $(a - b)^2 + (10 - a)^2 + (b - 1)^2 = 101$. Némi próbálgatás után a talált felbontások: $10^2 + 1^2 + 0^2 = 101$, $9^2 + 4^2 + 2^2 = 101$, $8^2 + 6^2 + 1^2 = 101$, $7^2 + 6^2 + 4^2 = 101$; melyekből $\overline{ab} = 37$ vagy $\overline{ab} = 48$ adódik.

1443. Ha a kapott szám $\overline{abc5}$ alakú ($a, b, c < t$ számjegyek, $a \neq 0$), akkor $at^3 + bt^2 + ct + 5 = 74$, s innen $t(at^2 + bt + c) = 69$. $t < 10$, így $t = 3$ lehetséges csak, s ekkor $(a;\, b;\, c) = (2;\, 1;\, 2)$.

IV

1444. $\dfrac{1}{10a-b}-\dfrac{1}{10b-a}=\dfrac{1}{270}$, innen $270\cdot 9\cdot(b-a)=101ab+10(a^2+b^2)$.
$101ab$ osztható 10-zel, tehát $a=5$ (és b páros) vagy $b=5$ (és a páros).
Ha $a=5$, b-re nem kapunk egész megoldást; ha $b=5$, $a=4$ megfelelő.
Másik elindulási lehetőség: $101ab+10(a^2+b^2)=10(a+b)^2+81ab$; $10(a+b)^2$ osztható 81-gyel, $a+b=9$.

1445. A két egyenlet összeadásából $a^2+b^2+c^2-2a-16b-16c+128=0$, innen $(a-1)^2+(b-8)^2+(c-8)^2=1$. Valamelyik tag értéke 1, a másik kettő 0.
A második egyenlet miatt c páros, így $c=8$.
Ha $(a-1)^2=1$, akkor $a=2$, $b=c=8$. Visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ez nem megoldás, tehát $a=1$.
Ha $(b-8)^2=1$, akkor $b=9$ vagy $b=8$. Az $a^2+b^2=82$ egyenletből $b=9$, s az $(a;b;c)=(1;9;8)$ esetben $c^2=2a+16b-82$ teljesül.
A keresett szám 1983.

1446. $S_0=1=1^2$, $S_1=25=5^2$, $S_2=121=11^2$, $S_3=361=19^2$ stb. A sejtés:
$S_n=n(n+1)(n+2)(n+3)+1=\big((n+1)(n+2)-1\big)^2$.
Bizonyíthatunk teljes indukcióval vagy pl. a következő átalakítással:
$n(n+3)(n+1)(n+2)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=$
$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2$.

1447. $a, b, c, x, y, z\neq 0$. Alkalmazzuk pl. az $u=\dfrac{x}{a}$, $v=\dfrac{y}{b}$, $w=\dfrac{z}{c}$ helyettesítést; ekkor a két egyenlet $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{w}=0$ és $u+v+w=1$ alakba írható, s $u^2+v^2+w^2$ értéke a kérdés. $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{w}=\dfrac{uv+vw+uw}{uvw}=0$ miatt $uv+vw+uw=0$; az $(u+v+w)^2=u^2+v^2+w^2+2(uv+vw+uw)$ átalakításból kapjuk, hogy $u^2+v^2+w^2=1$.

1448. (2)-ből $1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=1+2(ab+bc+ac)$, innen $ab+bc+ac=0$. (1)-ből $y=\dfrac{bx}{a}$, $z=\dfrac{cx}{a}$, így (3)-ból $xy+xz+yz=$
$=\dfrac{bx^2}{a}+\dfrac{cx^2}{a}+\dfrac{bcx^2}{a^2}=\dfrac{x^2}{a^2}(ab+ac+bc)=0$, s ezt kellett bizonyítanunk.

1449. *Első megoldás:* Az (1) $\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a}{a+b}=b$ egyenletet b hatványai szerint rendezve $(1-a)b^2+a(2-a)b+2a^2=0$. $a=1$ esetén az egyenlet b-re nézve elsőfokú, megoldása racionális szám, tehát van racionális megoldása az eredeti (1) egyenletnek. (A kapott megoldás $(a;b)=(1;-2)$.)
Második megoldás: Ha (1)-et a hatványai szerint rendezzük, akkor $(2-b)a^2+$ $+b(2-b)a+b^2=0$. Az egyenlet diszkriminánsa $d=b^2(2-b)^2-4(2-b)b^2=$ $=b^2(b^2-4)$; ez pl. akkor lehet egy egész szám négyzete, ha $b=\pm 2$. A $b=2$ választás ellentmondásra vezet, $b=-2$ esetén $a=1$-et kapjuk.

Harmadik megoldás: Ha (1)-nek a, b megoldása, akkor $\frac{a}{b} = r$ racionális szám. Ekkor $a = br$ helyettesítéssel (1)-ből $\frac{br+b}{br} + \frac{br}{br+b} = b$, ahonnan $\frac{r+1}{r} + \frac{r}{r+1} = b$. Tehát ha $r \neq 0$ és $r \neq -1$, akkor b racionális, és $a = br$ is az.

1450. Az egyenlet két gyöke $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$. A gyökök csak akkor lehetnek racionálisak, ha $\sqrt{b^2 - 4c}$ racionális; egy n természetes szám négyzetgyöke pedig csak akkor lehet racionális, ha n négyzetszám. Ha $n = k^2$ ($k \in \mathbf{N}$), akkor $x_{1,2} = \frac{-b \pm k}{2}$. Mivel b, $b^2 - 4c$, k^2 és k paritása megegyezik, $-b \pm k$ páros, x_1 és x_2 tehát egész számok.

1451. Tegyük fel indirekt módon, hogy az egyenletnek van racionális gyöke. Az egyenlet diszkriminánsa $d = b^2 - 4c$. Egy természetes szám négyzetgyöke vagy egész, vagy irracionális, így $b^2 - 4c = k^2$ ($k \in \mathbf{N}$, k páratlan). Az egyenlet két gyöke ekkor $\frac{-b+k}{2}$ és $\frac{-b-k}{2}$ egyaránt egész szám; de két egész szám összege ($-b$) és szorzata (c) nem lehet egyszerre páratlan. Ellentmondást kaptunk, az egyenletnek nincs racionális gyöke.

Megjegyzés:

Az előző feladat eredményét felhasználva a feladat állítása rögtön adódik. Ha az $x^2 + bx + c = 0$ egyenletnek lenne racionális gyöke, akkor azok egészek is; viszont ezek létezésének ellentmondanak a Viète-formulák.

1452. Jelöljük $n = \overline{ab}$-vel a keresett számot (a, b számjegyek, $a \neq 0$), ekkor $n - s = 10a + b - (a^2 + b^2) = a(10 - a) - b(b - 1)$.

A különbség maximális, ha $a(10 - a)$ maximális és $b(b - 1)$ minimális. Ekkor $(a; b) = (5; 1)$ vagy $(5; 0)$, $(n - s) = 25$.

A különbség minimális, ha $a(10 - a)$ minimális és $b(b - 1)$ maximális. Ekkor $(a; b) = (1; 9)$ vagy $(9; 9)$, $(n - s) = -63$.

1453. *Első megoldás:* A kifejezést átalakíthatjuk: $\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5} = 1 + \frac{x^2+2x+1}{x^2+4x+5} = 1 + \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2+1}$. A második tag nem negatív, tehát akkor minimális, ha $x = -1$. A minimum értéke 1.

Ugyanakkor $\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5} = 3 - \frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+5} = 3 - \frac{(x+3)^2}{(x+2)^2+1}$. A második tag minimális, ha $x = -3$; ekkor a kifejezésnek maximuma van, a maximum értéke 3.

Második megoldás: A $\dfrac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$ kifejezés értékkészlete azon p valós számok halmaza, amelyekre a $\dfrac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}=p$ egyenletnek van megoldása. Ezért szélsőérték-keresés helyett elég a paraméteres egyenlet megoldhatóságát vizsgálni. Rendezés után $x^2(2-p)+x(6-4p)+6-5p=0$ egyenletet kapjuk. Ennek akkor lehet megoldása, ha diszkriminánsa nem negatív:
$D=(6-4p)^2-4(2-p)(6-5p)\geq 0$, innen $1\leq p\leq 3$.
Mivel x^2 együtthatója $(2-p)$, külön meg kell vizsgálni a $2-p=0$ esetet; de a $p=2$ érték nem befolyásolja a szélsőértékeket.

IV

Megjegyzés:
Ha a kifejezés értékkészlete lett volna a kérdés, akkor $p=2$ esetén $-2x-4=0$ a kapott egyenlet. Ennek megoldása $x=-2$, tehát $p=2$ is az értékkészlethez tartozik.

1454. A K kétváltozós kifejezés alaphalmaza $\sqrt{x^2-1}$ miatt $|x|\geq 1$, vagyis $x\geq 1$ vagy $x\leq -1$.

Az első négyzetgyök alatt teljes négyzet áll: $x^2+2\sqrt{x^2-1}=\left(\sqrt{x^2-1}+1\right)^2$,

így $\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}}=\left|\sqrt{x^2-1}+1\right|=\sqrt{x^2-1}+1$. Ez a kifejezés akkor minimális, ha $x=1$ vagy $x=-1$.
$(1+x-y)^2$ akkor minimális, ha $1+x-y=0$, vagyis $y=1+x$. Figyelembe véve az x-re kapott értékeket, K akkor veszi fel a minimumát, ha $(x;y)=(1;2)$ vagy $(x;y)=(-1;0)$, s ezekben az esetekben a minimum értéke 0.

Megjegyzés:
Ha a négyzetgyökös kifejezésben nem sikerül felismerni a teljes négyzetet, érdemes megpróbálkozni pl. a $\sqrt{x^2-1}=z$ helyettesítéssel. Ekkor $x^2=z^2+1$, tehát $x^2+2\sqrt{x^2-1}=z^2+1+2z$, s innen a racionális teljes négyzet már könnyebben felismerhető.

1455. A bal oldalon álló kifejezést négyzetösszeggé alakíthatjuk: $x^2y^2+x^2-10xy-8x+16=(xy-5)^2+(x-4)^2=25$. Innen $(xy-5)^2\leq 25$, $|xy-5|\leq 5$, $-5\leq xy-5\leq 5$, $0\leq xy\leq 10$. A $[0;10]$ intervallum minden z értékét felveheti xy, hiszen az $(x-4)^2=25-(z-5)^2$ egyenletnek mindig van ($z=0$ és $z=10$ esetén egy, egyébként kettő) megoldása x-re, s innen $y=\dfrac{z}{x}$. (Az $x=0$ eset akkor állna elő, ha $z=2$ vagy $z=8$; de ekkor $x=8$ is megoldás, s így $y=\dfrac{1}{4}$ vagy $y=1$.)

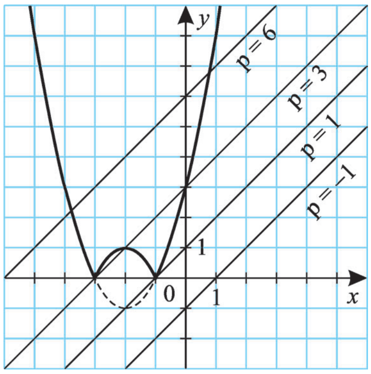
1456. Közös nevezőre hozás után $K=\dfrac{a^2+2ab+b^2+2bc+c^2+2ac}{abc}=$ $=\dfrac{(a+b+c)^2}{abc}=\dfrac{90\,000}{abc}$. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt $\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3} = 100$, innen $abc \le 1\,000\,000$. abc maximális, ha $a = b = c = 100$; ekkor K minimális, a felvett minimum $K = \frac{90\,000}{1\,000\,000} = \frac{9}{100}$.

1457. A hagyományos algebrai eljárásnál lényegesen gyorsabban célhoz érünk, ha az egyenlet két oldalán álló kifejezéseket mint függvényeket ábrázoljuk; ekkor a görbék közös pontjai számának meghatározása a feladat.

IV

a) A jobb oldal képe 1-meredekségű párhuzamos egyenesekből álló egyenessereg. Az ábráról leolvashatjuk, hogy a $p > 3$ esetben van olyan (határ)helyzet, amikor a két görbének három közös pontja lesz; ehhez az szükséges, hogy az $x + p = -x^2 - 4x - 3$ egyenletnek egyetlen megoldása legyen. Ennek feltétele, hogy az $x^2 + 5x + 3 + p = 0$ egyenlet diszkriminánsa zérus legyen:
$D = 25 - 4(3 + p) = 0$, innen $p = 3{,}25$.
Tehát az ábra alapján:

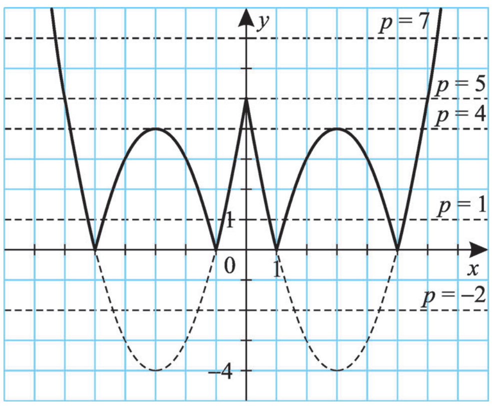
1457/a.



p értéke	gyökök száma
$p < 1$	0
$p = 1$	1
$1 < p < 3$	2
$p = 3$	3
$3 < p < 3{,}25$	4
$p = 3{,}25$	3
$3{,}25 < p$	2

b) $\left|x^2 - 6|x| + 5\right| = p$ átalakítás után ábrázolhatjuk a két függvényt. (A jobb oldal képe az x tengellyel párhuzamos egyenessereg; a bal oldalt pedig elég az $x > 0$ tartományban ábrázolni, mert képe tükrös az y tengelyre.)

1457/b.



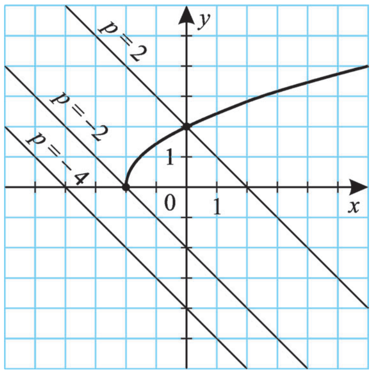
IV

Az ábra alapján:

p értéke	gyökök száma
$p < 0$	0
$p = 0$	4
$0 < p < 4$	8
$p = 4$	6
$4 < p < 5$	4
$p = 5$	3
$5 < p$	2

c) A $\sqrt{2x+4} = -x + p$ átalakítás után a két függvény képe:

1457/c.



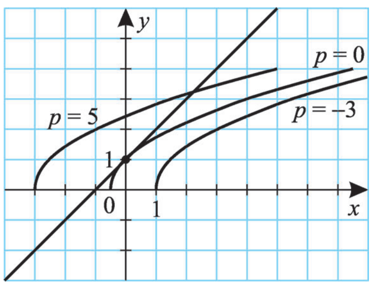
Az ábra alapján:

p értéke	gyökök száma
$p < -2$	0
$-2 \le p$	1

d) $\sqrt{2x+p+1} = x + 1$ átalakítás után a két függvény képe (a bal oldal képe $-\frac{p+1}{2}$-vel eltolt négyzetgyökfüggvény):

Az egyenes akkor érinti a gyökfüggvényt, ha az egyenlet négyzetre emelésével kapott $2x + p + 1 = (x + 1)^2$ egyenletben a diszkrimináns nulla. Innen $x^2 - p = 0$, vagyis $p = 0$.

1457/d.

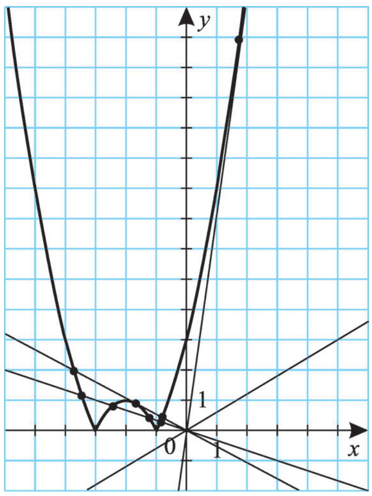


Ez alapján:

p értéke	gyökök száma
$p < 0$	0
$p = 0$	1
$0 < p \le 1$	2
$1 < p$	1

e) $|x^2 + 4x + 3| = px$.
A jobb oldalon álló függvény képe origón átmenő egyenes (az y tengely kivételével az összes egyenes).

1457/e.



Az $x^2 + 4x + 3 = px$ egyenletből (ábra)
$x^2 + (4 - p)x + 3 = 0$, ennek diszkriminánsa
$d = (4 - p)^2 - 12 = 0$, ha $p = 4 + 2\sqrt{3}$
(a $p = 4 - 2\sqrt{3}$ érték hamis). Hasonlóan
a $-x^2 - 4x - 3 = px$ egyenletből
$x^2 + (4 + p)x + 3 = 0$, ennek diszkriminánsa
$d = (4 + p)^2 - 12 = 0$, ha $p = -4 + 2\sqrt{3}$
(a $p = -4 - 2\sqrt{3}$ érték hamis).

p értéke	gyökök száma
$p < -4 + 2\sqrt{3}$	2
$p = -4 + 2\sqrt{3}$	3
$-4 + 2\sqrt{3} < p < 0$	4
$p = 0$	2
$0 < p < 4 + 2\sqrt{3}$	0
$p = 4 + 2\sqrt{3}$	1
$4 + 2\sqrt{3} < p$	2

1458. Ha
(1) $P(x) = 2x^2 + 2mx + m^2 - 10$
felírható $(ax + b)^2 - (cx + d)^2$ alakban (ahol a, b, c, d egészek), akkor $(ax + b)^2 - (cx + d)^2 = (ax + b + cx + d)(ax + b - cx - d)$ miatt
(2) $P(x) = (Ax + B)(Cx + D)$
alakban is felírható, ahol $A = a + c$, $B = b + d$, $C = a - c$, $D = b - d$. (Itt sem A, sem C nem lehet zérus, mert akkor (2)-ben $P(x)$ elsőfokú lenne.) Mivel A, B, C, D egészek, a (2) előállításból következik, hogy:
(3) $P(x)$-nek (1)-ben két gyöke van (ui. létezik a (2) gyöktényezős alak), és
(4) $P(x)$ két gyöke racionális $\left(x_1 = -\frac{B}{A},\ x_2 = \frac{D}{C}\right)$.

Tovább vizsgálva a (2) alakot, $P(x) \equiv A \cdot C \cdot x^2 + (AD + BC)x + B \cdot D$, s ez az azonosság csak úgy teljesülhet minden valós x–re, ha
(5) $A \cdot C = 2,\ AD + BC = 2m,\ B \cdot D = m^2 - 10$.
A továbbiakban a (3), (4), (5) feltételeket vizsgáljuk meg.
Az (5) egyenletrendszer első egyenlete alapján feltehetjük, hogy $A = 2$, $C = 1$. (A és C szimmetrikus szerepű; ha pedig $A = -2$, $C = -1$ lenne, akkor a (2) gyöktényezős alakban mindkét tényezőből kiemelhetünk (-1)-et.) Az (5) egyenletrendszer második egyenlete alapján m egész szám vagy egy egész szám fele lehet. Végül az egyenletrendszer harmadik egyenletéből $m^2 - 10$ is egész szám, tehát m^2 is az, vagyis az egyenletrendszer második egyenletét is figyelembe véve m egész szám.
(3) miatt (1) diszkriminánsa nemnegatív: $4m^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m^2 - 10) = -4m^2 + 80 \ge 0$, $m^2 \le 20,\ -\sqrt{20} \le m \le \sqrt{20}$.
Innen a feladat próbálgatással is befejezhető: az $m = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4$ értékeket rendre visszaírhatjuk (1)-be, és megnézhetjük, hogy sikerül-e a (2) szorzattá alakítás.
Egy másik lehetőség a (4) feltétel felhasználása.
Csak akkor kaphatunk racionális gyököket, ha $\sqrt{-4m^2 + 80}$ racionális, vagyis ha $-4m^2 + 80$ egy egész szám (sőt páros egész szám) négyzete. Innen $4k^2 + 4m^2 = 80,\ k^2 + m^2 = 20$, s ez csak $m = \pm2$ és $m = \pm4$ értékekre teljesül.
Helyettesítsünk vissza:
Ha $m = \pm2$, akkor (1) diszkriminánsa 64, (1) gyökei $x_{1,2,3,4} = \dfrac{-2m \pm 8}{4}$ miatt $x_1 = 1,\ x_2 = -3$ vagy $x_3 = 3,\ x_4 = -1$; ha pedig $m = \pm4$, akkor $x_{5,6,7,8} = \dfrac{-2m \pm 4}{4}$ miatt $x_5 = -1,\ x_6 = -3$ vagy $x_7 = 3,\ x_8 = 1$. Mind a négy esetben felírható a (2) gyöktényezős alak.

Másodfokú egyenlőtlenségek

1459. *a)* $x < 5$ vagy $x > 9$;
b) $z \le 0$ vagy $z \ge 6$;
c) $1 < x < 3$.

1460. *a)* $a < -11 - \sqrt{13}$ vagy $a > -11 + \sqrt{13}$;
b) Mivel $b^2 - 6b + 9 = (b-3)^2 \ge 0$, ezért nincs ilyen valós szám.
c) $1 \le c \le 4$;
d) $d < 1$ vagy $d > 7$.

1461. *a)* Nincs ilyen valós szám.
b) Nincs ilyen valós szám.
c) $r \le -\dfrac{1}{3}$ vagy $r \ge 4$; *d)* $s < -\dfrac{2}{5}$ vagy $s > 2$.