Elsőfokú egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

1. Elsőfokú egyváltozós egyenletek

1000. Érdemes egyes tagokat, illetve tényezőket alkalmasan csoportosítani, valamint kiemeléseket végezni. Például:

a) $58 - 68 = -10$, $-23 + 33 = 10$, ezen tagok összege 0;
$a = 44 + 56 = 100$.

b) $218 - 217 = 1$, $523 - 521 = 2$, ezen tagok összege 3;
$3 + 1997 = 2000$, $b = 2000 - 1042 = 958$.

c) $\frac{1}{3} + \frac{2}{6} + \frac{4}{12} = 1$, $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$, $-\frac{3}{10} - \frac{17}{10} = -2$, ezért
$c = 1 + 1 - 2 = 0$.

d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = 0$, $\frac{2}{5} - \frac{4}{10} = 0$, $d = \frac{6}{7} - \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$.

e) $e = 4 \cdot 25 \cdot 133 = 100 \cdot 133 = 13\,300$.

f) $f = 615 \cdot (97 + 3) = 61\,500$.

g) $g = 38 \cdot (22 - 21 + 19) = 38 \cdot 20 = 760$.

1001. *a)* $x = 1{,}5$; *b)* $x = 0{,}2$; *c)* $x = -1$; *d)* $x = -4$; *e)* $x = -2{,}5$; *f)* $x = -10$;
g) $x = -1$; *h)* $-\frac{36x}{60} + \frac{105}{60} = \frac{30x}{60} - \frac{20}{60}$, innen $x = \frac{125}{66}$;
i) $4(x - 2) + 20 \cdot 1{,}2 = 5(2x + 1) + 4 \cdot 3$, innen $x = -\frac{1}{6}$.

Megjegyzések:
Helytakarékossági okokból nem végeztünk ellenőrzést, de ez az egyenletek megoldásának szerves része. Az ellenőrzés egyik módja a kapott eredmény visszahelyettesítése.
Ha a megoldás során minden lépésben ügyeltünk arra, hogy azonos (másképpen ekvivalens) átalakításokat végezzünk, akkor nem szükséges a kapott eredményt visszahelyettesíteni. (Ekvivalens átalakítások során ekvivalens egyenleteket kapunk. Két egyenlet ekvivalens, ha ugyanazok a gyökei. Ekvivalens átalakítások alkalmazásakor tehát nem veszítünk gyököt, és nem keletkezik hamis gyök sem.)
Előfordulhat, hogy egy egyenlet gyökeit nem tudjuk visszahelyettesítéssel ellenőrizni; például végtelen sok megoldást kaptunk, vagy egyet sem. Ekkor feltétlenül meg kell vizsgálnunk, hogy azonos átalakításokat végeztünk-e.
Általában tehát azt mondhatjuk, hogy a megoldás ellenőrzését *vagy* a kapott eredmény visszahelyettesítésével, *vagy* az átalakítások ekvivalenciájának vizsgálatával végezhetjük el.

1002. *a)* $x = \frac{2}{3}$; *b)* nincs megoldás ($x = 0$ nincs benne az alaphalmazban).

IV

c) A zárójelek felbontása után $2x - 4 - 6x - 3 = -6x + 9 - x + 2 + 3$, innen $x = 7$.

d) $x = \frac{1206}{525} \approx 2{,}297$; *e)* $x = \frac{26}{15}$.

f) Mindkét oldalt 6-tal szorozva $48 - 2 \cdot 2x = 18 - 3 \cdot (x - 1)$, innen $x = 27$.

g) $x = -\frac{10}{7}$; *h)* $x = 5$ nem megoldás; *i)* $x = -21$ nem természetes szám;

j) $x = \frac{51}{82}$.

1003. *a)* $3x + 1 - x - 2 + (x - 1) = 2x - 1$, innen $x = 1$, és $x \in \mathbf{Q}$.

b) A bal oldal $-x + 2[x - 3(x + 4)] = -x + 2x - 6(x + 4) = -x + 2x - 6x - 24 = -5x - 24$. Innen $x = -\frac{29}{5}$, de ez nem pozitív. Nincs megoldás.

c) Azonosságot kapunk, minden $x < 5$ valós szám megoldás.

d) $x = \frac{18}{25}$;

e) $x = -\frac{189}{61}$;

f) *Első megoldás:* A bal oldal $\frac{1}{2} - x + \left[\frac{3}{8} + x - 2\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{8}\right)\right] =$

$= \frac{1}{2} - x + \frac{3}{8} + x - 2\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} - x + \frac{3}{8} + x - 2 \cdot \frac{x}{4} - 2 \cdot \frac{1}{8} =$

$= \frac{4 - 8x + 3 + 8x - 4x - 2}{8} = \frac{5 - 4x}{8}$ alakra hozható, innen

$\frac{5 - 4x}{8} = \frac{3x}{4} - \frac{1}{8}$, $x = 0{,}6$, és $x \in]-2; 3]$.

Második megoldás: A kifejezést „belülről kifelé haladva” átalakítjuk.

A bal oldal $\frac{x}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2x + 1}{8}$, $\frac{3}{8} + x - 2 \cdot \frac{2x + 1}{8} = \frac{3 + 8x - 4x - 2}{8} =$

$= \frac{4x + 1}{8}$, $x - \frac{4x + 1}{8} = \frac{4x - 1}{8}$, $\frac{1}{2} - \frac{4x - 1}{8} = \frac{5 - 4x}{8}$ alakra hozható stb.

g) $x = \frac{12}{25}$; *h)* $x = 44$, $x \in \mathbf{N}$.

1004. *a)* $x = -5$; $-5 \in [-6; 6]$; *b)* $x = 3{,}5$, és $3{,}5 \in \mathbf{Q}$;

c) nincs megoldás;

d) $x = 9{,}6$, de ez nem megoldás, mert kívül esik az alaphalmazon;

e) nincs megoldás ($x = -\frac{60}{23}$, de ez nem pozitív);

f) $x = -0{,}5625$, és $x < 0$; *g)* $x = 0{,}1$.

1005. *a)* A két tört nevezője ugyanaz, a számlálóknak is meg kell egyezniük; $x = 8$ (és $x \neq 3$).

b) $x_1 = 3, x_2 = 8$.

Megjegyzés:

Ha az *a)* feladatbeli egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk $(x - 3)^2$-nel, a *b)* egyenletet kapjuk. Azonban az átalakítás nem ekvivalens, *b)*-nek $x = 3$ is gyöke.

c) Nincs megoldás, $x = 3$ nem lehet.

d) $\dfrac{8}{5-x} = \dfrac{-8}{x-5}$, innen $x = -8$ $(x \neq 5)$.

e) $\dfrac{5}{x-4} + 3 = \dfrac{3x-7}{x-4}$, innen $9 - x = 3x - 7$, $x = 4$. Ekkor a tört nevezője 0 lenne, így nincs megoldás.

Másik megoldási lehetőség: $\dfrac{9-x}{x-4} - \dfrac{5}{x-4} = \dfrac{4-x}{x-4} = -1 \neq 3$.

f) $\dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$, az egyenlet azonosság. Az $x = 0$ kivételével minden valós szám megoldás.

g) Minden valós szám megoldás.

h) $x_1 = 0$, vagy a $2(3x + 1) = x - 3$ egyenletből $x_2 = -1$.

i) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

j) Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0; $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

k) Egy tört értéke akkor és csak akkor nulla, ha számlálója nulla, és nevezője nem nulla. A megoldás $x \in \{1; -1; -2\}$.

1006. A hagyományos, egyenletrendezésen alapuló megoldások mellett speciális megoldási módszereket is alkalmazhatunk.

a) Az egyenlet jobb oldalán pozitív szám áll, a bal oldalon nem; nincs megoldás.

b) A bal oldalon pozitív szám áll, a jobb oldalon is annak kell lennie; ezért $x = 0$ vagy $x = 1$ lehet csak megoldás. Visszahelyettesítés után $x = 1$.

c) A jobb oldalon pozitív (egész) szám áll, a bal oldalon is annak kell lennie, ezért $x = -1$ vagy $x = -2$ lehet csak megoldás. Visszahelyettesítés után $x = -1$.

d) Észrevehetjük, hogy $5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3$, ezért adjunk az egyenlet mindkét oldalához 3-at (a bal oldalon minden taghoz 1-et). Ekkor
$$\frac{x+6}{5} + \frac{x+6}{4} + \frac{x+6}{3} = (x+6)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = 0, \text{ innen } x = -6.$$

e) A négyzetgyök alatt nem állhat negatív szám, ezért $x \geq 3$; a jobb oldal nem lehet negatív, ezért $x \leq 2$. Nincs megoldás.

IV

f) A bal oldalon páros szám áll, a jobb oldalon páratlan. Nincs megoldás.

g) $(x; y) = (0; 0)$.

h) $(x; y; z) = (0; 0; 0)$.

1007. *a)* $\frac{12x-9}{3x-2} + \frac{6x-5}{2-3x} = \frac{12x-9}{3x-2} + \frac{5-6x}{3x-2} = \frac{6x-4}{3x-2} = 2$, ha $x \neq \frac{2}{3}$.
Innen $2 = 2x - 2$, $x = 2$.

b) $2 = 3x$, nincs megoldás. (A nevező nem lehet 0.)

c) $2 = 2$ azonosság $\left(\text{minden valós szám megoldás, kivéve } x = \frac{2}{3}\right)$.

d) $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$, ha $x \neq 1$. $x + 1 = 3$, innen $x = 2$.

e) $x + 1 = 2$, innen $x = 1$ lenne, de ez nem megoldás.

f) $\frac{x^2+4x+4}{x+2} = \frac{(x+2)^2}{x+2} = x+2$, ha $x \neq -2$. $x + 2 = 2x - 3$, innen $x = 5$.

g) $x + 2 = 2x + 4$, innen $x = -2$ lenne, de ez nem megoldás.

h) $\frac{7}{x+3} + \frac{5}{x-3} = \frac{7(x-3)+5(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{12x-6}{x^2-9}$. Ha $x \neq \pm 3$, akkor $12x - 6 = 3$, $x = \frac{3}{4}$.

i) $x = \frac{2}{9}$.

j) $\frac{2}{x^2-4} - \frac{x}{x^2-2x} + \frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{2x - x(x+2) + (x-4)(x-2)}{x(x+2)(x-2)} =$
$= \frac{-6x+8}{x(x+2)(x-2)}$, innen $x = \frac{4}{3}$.

k) $\frac{x+2}{x+6} : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right) = \frac{x+2}{x+6} : \frac{x+2}{2x} = \frac{x+2}{x+6} \cdot \frac{2x}{x+2} = \frac{2x}{x+6}$, ha $x \neq 0$, $x \neq -2$ és $x \neq -6$. A $\frac{2x}{x+6} = \frac{2x}{3}$ egyenletből $x_1 = 0$ és $x_2 = -3$ adódik, de x_1 nem megoldás.

1008. *a)* $x \neq 3$, ekkor $3x = x^2$, $x(x-3) = 0$. Innen $x_1 = 0$ megoldás, $x_2 = 3$ nem felel meg a kikötésnek.

b) $x = 3$;

c) $x = 2{,}5$;

d) $x = 0$;

e) $x = 1$;

f) $x^2 = 1$, innen $x = \pm 1$;

g) $x = 2$.

1009. *a)* $x + 2y + z = 3$, innen $y = 0$ vagy $y = 1$ lehetséges.
Ha $y = 0$, akkor $x + z = 3$, minden $(x; z) = (t; 3 - t)$, $t \in \mathbf{N}$, $t \le 3$ alakú megoldás jó.
Ha $y = 1$, akkor $x + z = 1$, s innen $(x; z) = (0; 1)$ vagy $(x; z) = (1; 0)$.
b) $3x + 2y + z = 3$, innen $(x; y; z) \in \{(0; 0; 3), (0; 1; 1), (1; 0; 0)\}$.
c) $y = 12 - 6x$, így y osztható 6-tal. $(y; x)$ lehetséges értékei: $(0; 2)$, $(6; 1)$ vagy $(12; 0)$.
d) $\frac{4x+6y}{7} + 5t = z$. A jobb oldalon 3 és 5 közötti egész szám van, így $t = 0$ vagy $t = 1$.
Ha $t = 0$, akkor $4x + 6y$ lehetséges értékei: 21, 28, 35. Innen csak $4x + 6y = 28$ lehetséges $(z = 4)$, s ekkor $(x; y) = (1; 4), (4; 2)$ vagy $(7; 0)$.
Ha $t = 1$, akkor $z = 5, x = y = 0$.
e) $3x + 8z = y + 5$. A jobb oldal értéke legfeljebb 15, így $z = 0$ vagy $z = 1$ lehetséges.
Ha $z = 0$, akkor $(x; y) = (2; 1), (3; 4), (4; 7)$ vagy $(5; 10)$; ha $z = 1$, akkor $(x; y) = (0; 3), (1; 6)$ vagy $(2; 9)$.
f) Nincs megoldás; a bal oldal osztható 3-mal, a jobb oldal nem.

1010. *a)* $x = \frac{97 - 5y}{2} = 48 - 3y + \frac{1 + y}{2}$. Mivel x egész, $y = 2t - 1$ $(t \in \mathbf{N}^+)$, s ekkor $x = 51 - 5t$. A lehetséges megoldásokat az alábbi táblázatban soroltuk fel:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	46	41	36	31	26	21	16	11	6	1
y	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

b) $(x; y) = (160 - 7t; 5t)$, ahol $t = 9, 10, 11, \ldots, 19$.
c) $y = 3x - 5 + \frac{x - 1}{2}$, innen $x = 2t + 1$, $y = 7t - 2$ $(t \in \mathbf{Z})$. A megoldások:

t	−1	0	1
x	−1	1	3
y	−9	−2	5

d) Nincs megoldás; a bal oldalon páros, a jobb oldalon páratlan szám áll.
e) $y = \frac{19 - 3x}{2} = 9 - x + \frac{1 - x}{2}$, innen $x = 1 - 2t$, $y = 3t + 8$ $(t \in \mathbf{Z})$.
f) $x = \frac{17y + 132}{5} = 26 + 3y + \frac{2 + 2y}{5}$, innen $y = 5t - 1$, $x = 17t + 23$ $(t \in \mathbf{Z})$.

Egyszerű szöveges feladatok

Helytakarékossági okokból általában nem végeztük el az eredmények ellenőrzését, de szöveges feladatok esetén kötelező a kapott eredményt a szöveg alapján, a szövegbe való visszahelyettesítéssel ellenőrizni!
A szöveges feladatok egy részét – az egyenlettel, egyenletrendszerrel való megoldás mellett – következtetéssel is megoldhatjuk. Néhány esetben erre is mutatunk példát.

1011. Jelöljük x-szel a keresett számot!

a) $\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}x + 5$, innen $x = -60$.

b) $\frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x + 5$, innen $x = 7{,}5$.

(Következtetéssel: a szám $\frac{4}{3}$-a kétszerese $\frac{2}{3}$-ának; ha ez 5-tel nagyobb, akkor a szám $\frac{2}{3}$-a éppen 5, s maga a szám 7,5.)

c) Nincs megoldás. *d)* $x = \frac{216}{11}$. *e)* $x = -\frac{216}{11}$. *f)* $x = 0$. *g)* $x = 24$.

h) $x = -1{,}5$. *i)* $x = \frac{35}{8}$. *j)* Azonosság; minden valós x szám megoldás.

1012. *a)* Ha a keresett szám $\frac{5}{4}$-e 15, akkor $\frac{1}{4}$-e 3, s a szám 12.

b) A kimondatlan kérdés lehet: „Mekkora a térfogatom?” Jelöljük V-vel a térfogatunkat! Ekkor $3V + \frac{V}{3} + \frac{V}{9} + \frac{V}{9} = 1$, ahonnan $V = \frac{9}{32}$ (térfogategység). Megkaptuk az edény térfogatát is, ez $\frac{27}{32}$ térfogategység.

c) Jelöljük a keresett számot s-sel! Ekkor $s + \frac{2s}{3} - \frac{1}{3}\left(s + \frac{2s}{3}\right) = 10$, innen $s = 9$.

d) A szám 42.

e) *Első megoldás:* Jelöljük a keresett kincsek számát k-val! Ekkor $k - \frac{k}{13} - \frac{1}{17}\left(k - \frac{k}{13}\right) = 150$, ahonnan $k = \frac{5525}{32} = 172 + \frac{21}{32}$.

Második megoldás: Ha elvesszük egy mennyiség $\frac{1}{17}$ részét, akkor $\frac{16}{17}$ része marad meg. Így $\frac{12k}{13} \cdot \frac{16}{17} = 150$, $k = \frac{5525}{32}$.

Harmadik megoldás: Okoskodhatunk „visszafelé”! Ha a második személy elvitte a maradék tizenheted részét, akkor a kincs $\frac{16}{17}$ része maradt meg. Mivel ez 150, a második személy előtt $150 \cdot \frac{17}{16}$ kincs volt a kamrában. Ez pedig az első személy által elvitt $\frac{1}{13}$-nyi kincs maradéka, vagyis az összes $\frac{12}{13}$ része. Így eredetileg $150 \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{13}{12} = 172 + \frac{21}{32}$ kincs volt a kamrában.

Megjegyzés:
Mai értelmezéssel csak egész számú kincset fogadnánk el megoldásként.

1013. *Első megoldás:* Az életkorok összege a kiállítás előtt 242 év, a kiállítás után 210 év. A kiállított játékos 32 éves volt.
Második megoldás: Ha a kiállított játékos x éves volt, $\frac{21 \cdot 10 + x}{11} = 22$, innen $x = 32$ (év).

1014. Jelölje a számokat x és $x + 1$, ekkor $x + x + 1 = 2x + 1$.
a) $2x + 1 = 2004$, innen $x = 1001{,}5$, ez nem megoldás. (Két szomszédos egész szám összege páratlan.)
b) $2x + 1 = 2005$, innen $x = 1002$. A számok 1002 és 1003.

1015. *Első megoldás:* Jelölje x az osztálylétszámot, ekkor $\frac{4}{9}x + 3 = \frac{x+3}{2}$, innen $x = 27$.

Második megoldás: Eredetileg az osztály $\frac{5}{9}$ része fiú, ez $\frac{1}{9}$ résszel nagyobb, mint a lányok aránya. Ha az osztályba három lány érkezne, a fiúk és lányok száma megegyezne, így az osztály $\frac{1}{9}$ része három, az osztálylétszám tehát $9 \cdot 3 = 27$.

1016. Jelöljük a kétjegyű szám első számjegyét a-val, a másodikat b-vel! Ekkor az eredeti szám $10a + b$, a számjegyek felcserélésével kapott szám $10b + a$, innen $10b + a = \frac{8}{3} \cdot (10a + b)$, $2b = 7a$.
Az egyenlet jobb oldalán álló szám osztható 7-tel. 2 és 7 relatív prímek, ezért 7 osztja b-t is. Mivel b számjegy, így csak 0 vagy 7 lehet. Ha $b = 0$, nem kapunk kétjegyű számot; míg ha $b = 7$, akkor $a = 2$. A keresett szám tehát a 27.

1017. Mindegyik gyerek öt évvel lesz idősebb, az életkorok összege 25 évvel nő, vagyis 70 év lesz.

1018. Ha a fiú most x éves, akkor az apa életkora $3x$. 14 év múlva a fiú $(x + 14)$, az apa $(3x + 14)$ éves lesz, innen $3x + 14 = 2(x + 14)$. A fiú most 14, az apa 42 éves.

IV

1019. *a)* Ha a néző által kigondolt szám x, akkor a műveletsor eredménye $\frac{10(2x+5)-100}{10} = 2x-5$. Tehát a bűvész a bemondott számhoz fejben hozzáad 5-öt, a kapott számnak a felét veszi, és megtudja, milyen számra gondolt a néző.

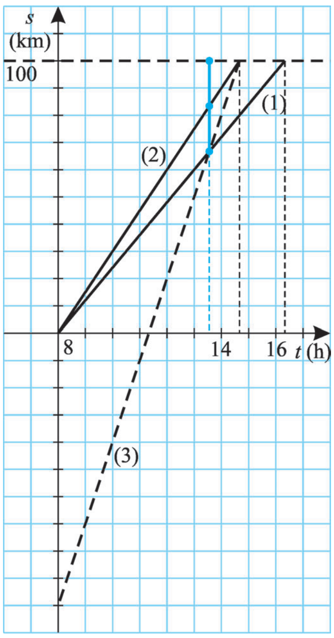
b) $\frac{111+5}{2} = 58$.

1020. *a)* Az átlagsebesség, megtett út és eltelt idő között $s = v \cdot t$ a kapcsolat. Innen $t_1 = \frac{100}{12} = 8$ óra 20 perc, illetve $t_2 = \frac{100}{15} = 6$ óra 40 perc a menetidő, tehát az érkezési idő 16 óra 20 perc, illetve 14 óra 40 perc.

b) Ha a kerékpárosok t óra óta úton vannak, akkor:

Kerékpárosok	Sebesség (km/h)	Idő (óra)	Út (km)	Hátralévő út (km)
Első kerékpáros	12	t	$12t$	$100-12t$
Második kerékpáros	15	t	$15t$	$100-15t$

1020.



Innen

$2(100-15t) = 100-12t$,

$t = \frac{50}{9} \approx 5{,}56$ (óra).

Az út – idő grafikon (1020. ábra):
(Az ábrán (3)-mal jelölt egyenes meredeksége 30.)

c) A második kerékpáros menetideje $t_2 = \frac{20}{3}$, így az első kerékpáros menetideje legfeljebb $t_1 = \frac{23}{3}$ lehet.

Innen

$v = \frac{100}{\frac{23}{3}} = \frac{300}{23} \approx 13{,}04$ (km/h) legalább.

1021. *a)* Ha t idő múlva találkoznak:

Kerékpárosok	Sebesség (km/h)	Idő (óra)	Út (km)
Első kerékpáros	12	t	$12t$
Második kerékpáros	15	t	$15t$

A két kerékpáros együttesen 100 km-t tesz meg, így $12t + 15t = 100$, innen $t = \frac{100}{27} \approx 3{,}70$, tehát $\approx$ 11 óra 42 perckor találkoznak.

Másképpen is okoskodhatunk:

A két kerékpáros egymáshoz viszonyított relatív sebessége $12 + 15 = 27$ (km/h), s ekkora sebességgel kell 100 km-t megtenni.

b) Tegyük fel, hogy Gödöllő és Hatvan között találkoznak az indulás után t órával!

Kerékpárosok	Sebesség (km/h)	Idő (óra)	Út (km)	Hátralévő út Hatvanig (km)
Első kerékpáros	12	t	$12t$	$28 - 12t$
Második kerékpáros	15	t	$15t$	$72 - 15t$

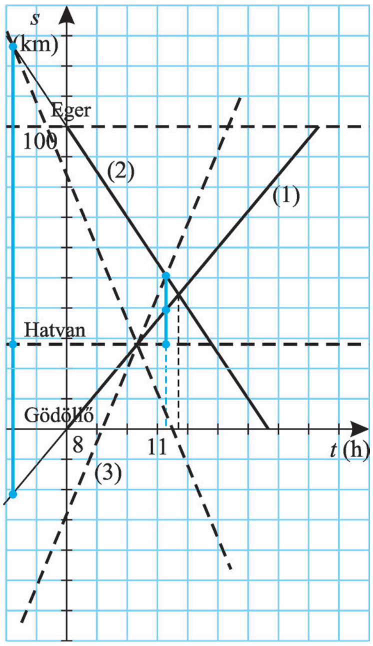
Ekkor $2(28 - 12t) = 72 - 15t$, de $t = -\frac{16}{9}$ nem ad megoldást (bár fizikai szempontból van értelme az eredménynek).

Ha Hatvan és Eger között találkoznak:

Kerékpárosok	Sebesség (km/h)	Idő (óra)	Út (km)	Távolság Hatvantól (km)
Első kerékpáros	12	t	$12t$	$12t - 28$
Második kerékpáros	15	t	$15t$	$72 - 15t$

Ekkor $2(12t - 28) = 72 - 15t$, innen $t = \frac{128}{39} \approx 3{,}28$ (óra).

1021.



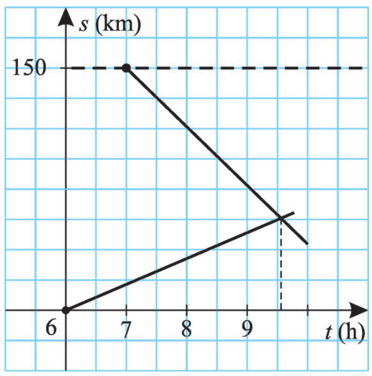
Az út – idő grafikon (1021. ábra):
A (3) egyenes (1) affin képe (az arány 2).

c) $28 - 12t = 15t$, innen $t = \frac{28}{27} \approx 1{,}04$ (óra).

d) A találkozási idő $t = \frac{100}{27} - 1 = \frac{73}{27}$, így $\frac{73}{27}(v + 15) = 100$, s innen $v = 21{,}99$ (km/h). Az első kerékpárosnak ekkorára kell növelnie az átlagsebességét.

1022. *a)* Az első kerékpáros t órányi idő alatt $16t$ utat tesz meg, a második kerékpáros $(t - 1)$ óra alatt $36(t - 1)$-et. Együtt 150 km-nyi utat tesznek meg, így $16t + 36(t - 1) = 150$. Innen $t = \frac{186}{52} \approx 3{,}58$, a találkozási idejük ≈ 9 óra 35 perc. (*Másképpen:* a relatív sebességük 52 km/h, így az első óra utáni menetidő $\frac{150 - 16}{52} = \frac{134}{52}$ stb.)

1022.



b) 1022. ábra

c) Az első kerékpáros által a találkozásig megtett út 150 km-rel több, így $16t + 150 = 36(t - 1)$. Innen $t = 9{,}3$, tehát 15 óra 18 perckor találkoznak. (A relatív sebességgel számolva $1 + \frac{150 + 16}{20}$ óra a találkozási idő.)

1023. Ha a gyorsvonat a két város közötti s távolságot t idő alatt tette meg:

Vonatok	Sebesség (km/h)	Út (km)	Idő (óra)
Személyvonat	60	s	$t + 1{,}5$
Gyorsvonat	90	s	t

Ekkor $60(t + 1{,}5) = 90t$, innen $t = 3$ (óra), és $s = 270$ km.

1024. *a)* A „százalék” századrészt jelent, 3500 Ft 1%-a tehát 3500 Ft egy századrésze. $3500 \cdot 0{,}01 = 35$ (Ft).
b) $3500 \cdot 0{,}1 = 350$ (Ft); *c)* $3500 \cdot 0{,}22 = 770$ (Ft); *d)* $3500 \cdot 0{,}75 = 2625$ (Ft);
e) 3500 Ft; *f)* $3500 \cdot 1{,}2 = 4200$ (Ft); *g)* $3500 \cdot 2{,}1 = 7350$ (Ft);
h) $3500 \cdot 0{,}002 = 7$ (Ft); *i)* $3500 \cdot 0{,}000\,4 = 1{,}4$ (Ft);
j) $3500 \cdot 0{,}004 = 14$ (Ft); *k)* $3500 \cdot 0{,}000\,6 = 2{,}1$ (Ft).

1025. *a)* 48 a 240-nek $\frac{48}{240} = \frac{1}{5} = \frac{20}{100}$ része, vagyis 20 %-a.

IV

b) $\frac{60}{240} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100}$ rész, vagyis 25%.
c) $\frac{2,4}{240} = \frac{1}{100}$ rész, vagyis 1%.
d) $\frac{100}{240} \approx 0{,}4167$ rész, vagyis $\approx 41{,}67\%$.
e) 100%.
f) $\frac{500}{240} \approx 2{,}0833$ rész, vagyis $\approx 208{,}33\%$.
g) $\frac{1}{240} \approx 0{,}0042$ rész, vagyis $\approx 0{,}42\%$.
h) Az 1 méternek 10-ed része, vagyis a 240 méternek $\approx 0{,}042\%$-a.

1026. *a)* 1503; *b)* 2505.

1027. A keresett számot jelöljük x-szel, ekkor $0{,}3x - \frac{1}{5}x = 90$. Innen a keresett szám $x = 900$.

1028. Egy szám 5%-a egyenlő $\frac{1}{20}$ részével; $\frac{1}{19}$ és $\frac{1}{20}$ része csak a 0-nak egyenlő.

1029. $\frac{5}{3}$-szor.

1030. A nadrág eredeti árát jelöljük x-szel, ekkor a végső ár $1{,}2x \cdot 0{,}8 = 0{,}96x$. A kétszeri árváltozás után tehát csökkent az áru ára. (4%-kal.)
Megjegyzés:
A kapott eredmény nem függ a nadrág eredeti x árától, ezért a hasonló típusú feladatokban megtehetjük, hogy az eredeti árat pl. egységnyinek vagy 100 egységnek tekintjük.

1031. Jelölje x a nadrág eredeti árát!
a) Az áremelkedés utáni ár $1{,}25x$. Ha ezután az árcsökkentés arányát y-nal jelöljük, akkor $1{,}25x \cdot y = x$. Innen $y = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$, vagyis a kereskedőnek az új árat 20%-kal kell csökkentenie.
b) Az árleszállítás utáni ár $0{,}75x$. Ha ezután az árnövelés arányát y-nal jelöljük, akkor $0{,}75x \cdot y = x$. Innen $y = \frac{1}{0{,}75} = 1{,}\dot{3}$, vagyis a kereskedőnek az új árat $\approx 33{,}3\%$-kal kell növelnie.

IV

1032. Jelölje x az eredeti árat! Az új ár ekkor $1{,}4x \cdot 0{,}7 = 0{,}98x$, vagyis az áru 2%-kal lett olcsóbb.

1033. Az eredeti árat jelölje x.

a) Az 1. esetben a végső ár $1{,}1x \cdot 1{,}15 = 1{,}265x$, a 2. esetben $1{,}15x \cdot 1{,}1 = 1{,}265x$, az áru ára mindkét esetben 26,5%-kal nőtt.

b) Az 1. esetben a végső ár $1{,}1x \cdot 0{,}85 = 0{,}935x$, a 2. esetben $0{,}85x \cdot 1{,}1 = 0{,}935x$, az áru ára mindkét esetben 6,5%-kal csökkent.

c) Az 1. esetben a végső ár $1{,}1x \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}968x$, a 2. esetben $1{,}1x \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}1 = 0{,}968x$, az áru ára mindkét esetben 3,2%-kal csökkent.

1034. 20 liter 30%-os alkoholban $20 \cdot 0{,}3 = 6$ liter, 30 liter 25%-os alkoholban $30 \cdot 0{,}25 = 7{,}5$ liter tiszta alkohol van. Jelöljük x-szel a keverék töménységét, s tekintsük az alábbi táblázatot!

Keverékek	Térfogat (liter)	Töménység (%)	Tiszta alkohol (liter)
1. keverék:	20	30	6
2. keverék:	30	25	7,5
Összeöntve:	50	x	13,5

$x = \frac{13{,}5}{50} \cdot 100 = 27$, vagyis a keverék 27%-os lesz.

Megjegyzés:
A keverék töménységét az ún. súlyozott közép (vagy súlyozott átlag) képletével is kiszámíthatjuk: $\frac{0{,}3 \cdot 20 + 0{,}25 \cdot 30}{20 + 30} = 0{,}27$.

1035. *a)*

Keverékek	Térfogat (liter)	Töménység (%)	Tiszta alkohol (liter)
1. keverék:	4	55	2,2
2. keverék:	6	25	1,5
Összeöntve:	10	x	3,7

$\frac{3{,}7}{10} = 0{,}37$, a keverék 37%-os lesz.

b) $\frac{40 \cdot 0{,}15 + 50 \cdot 0{,}22}{40 + 50} \approx 0{,}189$, a keverék 18,9%-os lesz.

c) 26,6%.

d) $\frac{50 \cdot 0{,}3}{50 + 30} = 0{,}1875$, a keverék 18,75%-os lesz.

e) $\frac{50 \cdot 0{,}3 + 30}{50 + 30} = 0{,}5625$, a keverék 56,25%-os lesz.

f) A három mennyiség súlyozott átlaga $\frac{25 \cdot 0{,}2 + 30 \cdot 0{,}23 + 40 \cdot 0{,}1}{25 + 30 + 40} \approx$ $\approx 0{,}167$, a keverék 16,7%-os lesz.

1036. Jelöljük L-lel a víz térfogatát!

a) Ekkor $\frac{32 \cdot 0{,}2}{32 + L} = 0{,}15$, innen $L = \frac{32}{3}$ (liter).

b) $\frac{40 \cdot 0{,}2}{40 + L} = 0{,}15$, innen $L = \frac{40}{3}$ (liter).

c) $\frac{40 \cdot 0{,}25}{40 + L} = 0{,}15$, innen $L = \frac{80}{3}$ (liter).

d) Nem lehetséges; a töménység nem nőhet.

e) $\frac{12 \cdot 0{,}18 + 22 \cdot 0{,}1}{12 + 22 + L} = 0{,}08$, innen $L = 20{,}5$ (liter).

1037. *a)* 8%.

b) 15%.

c) Ha a 10%-os sóoldat tömege $2m$, akkor $\frac{2m \cdot 0{,}1 + m \cdot 0{,}16}{3m} = 0{,}12$, a keverék 12%-os lesz. (Az eredmény m-től független, a két töménység súlyozott közepét kaptuk.)

d) 9%.

1038. *a)* Kétszer annyit.

b) Fele annyit.

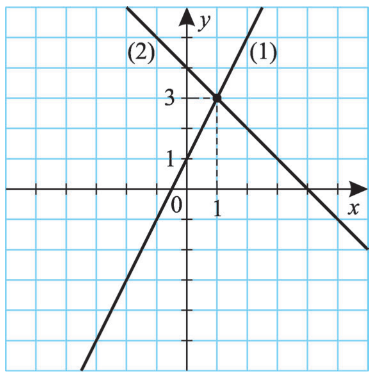
c) Semennyit.

Egyenletrendszerek

1039. *a)* *Grafikus megoldás:* Olyan $(x; y)$ számpárokat keresünk, melyek az (1) és (2) egyenletet egyszerre elégítik ki. A feladatot átfogalmazhatjuk: az (x, y) derékszögű koordináta-rendszerben (1) és (2) képe is egy-egy ponthalmaz, s ekkor olyan $P(x; y)$ koordinátájú pontokat keresünk, amelyek az (1) és (2) ponthalmazhoz egyaránt hozzátartoznak.

A derékszögű koordináta-rendszerben (1) képe olyan egyenes, melynek meredeksége 2, tengelymetszete 1, (2) képe pedig -1 meredekségű, 4 tengelymetszetű egyenes (1039/a. ábra). Olyan $P(x; y)$ pontokat keresünk, amelyek mindkét egyenesen rajta vannak. Egyetlen ilyen pont lesz, a két egyenes metszéspontja.

1039/a.

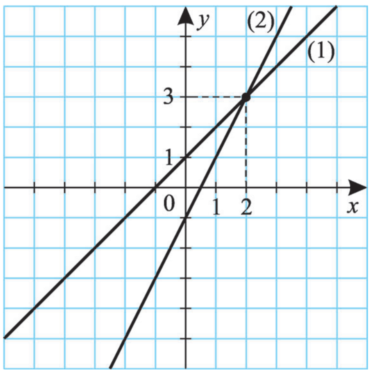


Az ábra alapján mindkét egyenes átmegy az (1; 3) ponton, erről ellenőrzéssel is meggyőződhetünk. A két egyenesnek több metszéspontja nincs.
Algebrai megoldás: Ha (1) $y = 2x + 1$ és (2) $y = -x + 4$, akkor $2x + 1 = -x + 4$ is teljesül. Innen $3x = 3$, $x = 1$, s visszahelyettesítve pl. (1)-be, $y = 3$. Az egyenletrendszer megoldása $(x; y) = (1; 3)$.
Ellenőrzés: (1) $3 = 2 \cdot 1 + 1$ és (2) $3 = -1 + 4$ valóban teljesül.

IV

Megjegyzések:
– A kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldásai mindig számpárok.
– A későbbiekben – helytakarékossági okokból – már nem írjuk le, de a kapott megoldásokat mindig ellenőriznünk kell. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a gyököket visszahelyettesítjük az eredeti egyenletekbe.
– A grafikus megoldás általában nem ad pontos értéket (a leolvasási pontosság függ pl. a tengelyek beosztásától). Az ábrázolás segítségével megsejthetjük a metszéspontok koordinátáit, s ezeket visszahelyettesítéssel tudjuk ellenőrizni.
– Miután a grafikus ábrázolás segítségével megtaláltuk a közös pontokat, mindig meg kell indokolnunk, hogy az ábrázolt ponthalmazoknak miért nincs több közös pontja. (Hiszen pl. a koordinátarendszer tengelyeit is csak véges tartományban ábrázoljuk; elképzelhető, hogy az ábrázolt tartományon kívül van még közös pont.)
– Két egyenesnek 0, 1 vagy végtelen sok közös pontja lehet (ha egybeesnek). Két különböző meredekségű egyenesnek egy közös pontja van, a továbbiakban nem indokoljuk a megoldás egyértelműségét.

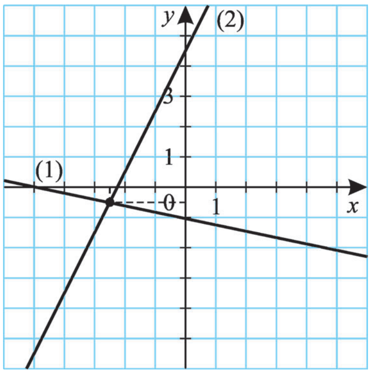
1039/b.



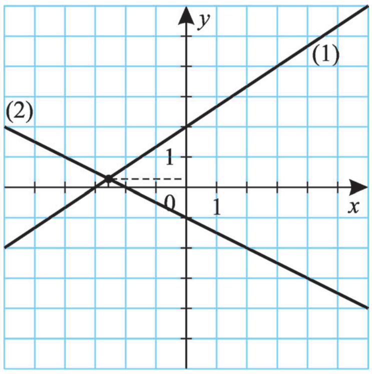
b) Grafikus megoldás: (1) és (2) képe az 1039/a. ábrán látható.
Leolvasás és ellenőrzés után a metszéspont (2; 3).
Algebrai megoldás: $x + 1 = 2x - 1$, innen $x = 2$, visszahelyettesítés után $y = 3$.

1040. *a) Grafikus megoldás:*
(1) és (2) képe az 1040/a. ábrán látható.
Leolvasás és ellenőrzés után a metszéspont (–2,5; –0,5).
Algebrai megoldás: $-\frac{x}{5} - 1 = 2x + 4{,}5$, innen $x = -2{,}5$, visszahelyettesítés után $y = -0{,}5$.
b) Grafikus megoldás:
A metszéspontot most nem tudjuk pontosan leolvasni; $-3 < x < -2$ és $0 < y < 1$. (1040/b. ábra).
Algebrai megoldás: $\frac{2}{3}x + 2 = -\frac{1}{2}x - 1$, innen $x = -\frac{18}{7}$, $y = \frac{2}{7}$.

1040/a.



1040/b.



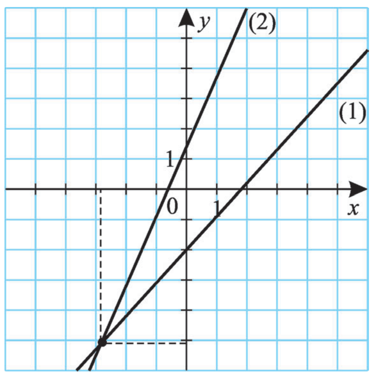
Megjegyzés:

Geometriai módszerekkel (az egyenletrendszer megoldása nélkül) meghatározhatjuk a metszéspontot. Tekintsük a koordináta-rendszer azon egységnégyzetét, amelyben metszi egymást a két egyenes, s jelöljük a-val, illetve b-vel az 1040/c. ábrán látható szakaszokat!

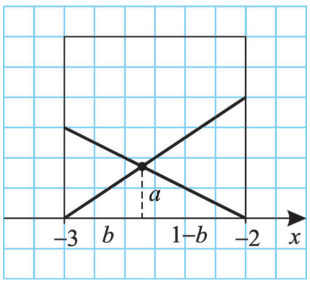
Derékszögű háromszögek hasonlósága miatt $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, innen (1) $a = \frac{2b}{3}$; valamint $\frac{a}{1-b} = \frac{1}{2}$, innen (2) $a = \frac{1-b}{2}$. Az egyenletrendszer megoldása $\frac{2b}{3} = \frac{1-b}{2}$ miatt $b = \frac{3}{7}$, $a = \frac{2}{7}$, s innen az $y = \frac{2}{7}$, $x = -\frac{18}{7}$ értékeket kapjuk.

1041. *a)* A metszéspont pontos koordinátáit nem tudjuk leolvasni.
$1{,}1x - 2 = 2{,}3x + 1{,}4$-ből
$x = -\frac{17}{6}$, $y = -\frac{307}{60}$.

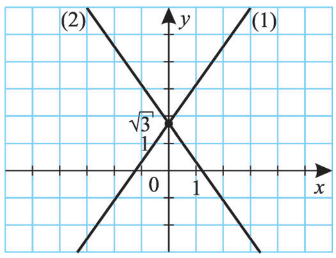
1041/a.



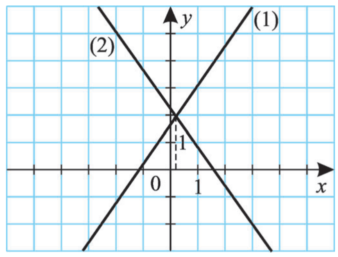
1040/c.



1041/b.



1042/a.



b)

A két egyenes tükrös helyzetű az y tengelyre, a metszéspont $\left(0; \sqrt{3}\right)$.
(A $\sqrt{3}$ értéket persze nem az ábráról olvastuk le, hanem az $x = 0$ helyettesítéssel mindkét egyenesre ugyanazt az y tengelymetszetet kaptuk.)
Algebrai megoldás: $\sqrt{2}\,x + \sqrt{3} = -\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}$, innen $(x; y) = \left(0; \sqrt{3}\right)$.

1042. *a)*

A metszéspont pontos koordinátáit nem tudjuk leolvasni.
$\sqrt{2}\ x + \sqrt{3} = -\sqrt{2}\ x + \sqrt{5}$, innen $x = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$.

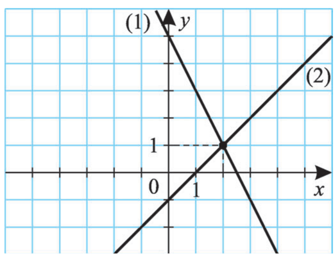
b) Az egyenleteket átalakíthatjuk. $2x + y = 5$, innen (1) $y = -2x + 5$; $-x + y = -1$, innen (2) $y = x - 1$ (ábra).

A metszéspont (2; 1).
Algebrai megoldás: $-2x + 5 = x - 1$, innen $x = 2$, $y = 1$.

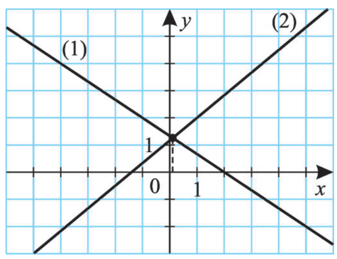
c) Az egyenleteket átalakíthatjuk. $2x + 3y = 4$, innen
(1) $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3}$; $5x - 6y = -7$, innen (2) $y = \dfrac{5}{6}x + \dfrac{7}{6}$.

A metszéspont pontos koordinátáit nem tudjuk leolvasni.
Algebrai megoldás: $-\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3} = \dfrac{5}{6}x + \dfrac{7}{6}$, innen $x = \dfrac{1}{9}$, $y = \dfrac{34}{27}$.

1042/b.



1042/c.



1043. Az egyik egyenletből kifejezzük valamelyik ismeretlent, s behelyettesítjük a másik egyenletbe. Ekkor egy egyenletet kapunk, melyben csak egy ismeretlen szerepel.

a) Pl. (2)-ből (2′) $x = 2y - 1$, ezt (1)-be helyettesítve $2(2y - 1) + 3y = 5$. Innen $7y = 7$, $y = 1$, s visszehelyettesítve (2′)-be $x = 1$. Megoldás: $(x; y) = (1; 1)$.

b) (1)-ből $y = 0{,}5x - 3$, innen (2)-ből $-x - 2(0{,}5x - 3) = 2$. $(x; y) = (2; -2)$.

1044. *a)* (1)-ből $x = \dfrac{7-1{,}3y}{2}$, innen (2)-ből $4\cdot\dfrac{7-1{,}3y}{2} - 1{,}1y = 14$.

$(x; y) = (3{,}5; 0)$.

b) (2)-ből $x = \dfrac{3y-1}{2}$, innen (1)-ből $2\cdot\dfrac{3y-1}{2} + 3y = 3$.

$(x; y) = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}\right)$.

1045. *a)* (1)-ből $x = \dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{3}y$, innen (2)-ből $-\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{3}y\right) + \dfrac{5}{6}y = y + \dfrac{7}{8}$.

$(x; y) = \left(-\dfrac{85}{54}; \dfrac{83}{36}\right)$.

b) (1)-ből $x = \dfrac{1+\sqrt{6}-\sqrt{3}\,y}{\sqrt{2}}$, innen (2)-ből $= 2 + \sqrt{2}$.

$(x; y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right)$.

1046. *a)* (1)-ből $x = \dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}\,y}{\sqrt{5}}$, innen (2)-ből $-\sqrt{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}\,y}{\sqrt{5}} + y -$ $-\sqrt{2} = 0$. $(x; y) = \left(0; \sqrt{2}\right)$.

b) (1)-ből $y = 2x - 7$, innen (2)-ből $-4x + 2(2x - 7) = -14$. Azonosságot kaptunk, az egyenletrendszernek minden $(x; y) = (a; 2a - 7)$ alakú valós számpár a megoldása.

A derékszögű koordináta-rendszerben (1) és (2) képe ugyanaz az egyenes.

c) (1)-ből $x = \dfrac{5}{2} - 2y$, innen (2)-ből $5\cdot\left(\dfrac{5}{2} - 2y\right) + 10y + 7 = 0$. Ellentmondást kaptunk, az egyenletrendszernek nincs megoldása.

A derékszögű koordináta-rendszerben (1) és (2) képe párhuzamos egyenes, melyeknek nincs közös pontja.

1047. Az egyenleteket megszorozzuk úgy, hogy valamelyik ismeretlen együtthatói megegyezzenek vagy egymás ellentettjei legyenek.

a) *Első megoldás:* Szorozzuk meg (1)-et 3-mal, (2)-t 2-vel, kapjuk:
$(1')\ 6x + 9y = 21;$
$(2')\ 6x - 4y = 8.$
A két egyenletben x együtthatója megegyezik, tehát a két egyenletet egymásból kivonva olyan egyenletet kapunk, melyben csak y szerepel. $(1') - (2')$: $13y = 13$, innen $y = 1$, visszehelyettesítve (1)-be vagy (2)-be $x = 2$.
Második megoldás: Szorozzuk meg (1)-et 2-vel, (2)-t −3-mal, kapjuk:
$(1')\quad 4x + 6y = 14;$
$(2')\quad -9x + 6y = -12.$
A két egyenletben y együtthatója megegyezik, a két egyenletet kivonásából $(1') - (2')$: $13x = 26$. Innen $x = 2$, visszehelyettesítve $y = 1$.
Harmadik megoldás: Szorozzuk meg (1)-et 2-vel, (2)-t 3-mal, kapjuk:
$(1')\quad 4x + 6y = 14;$
$(2')\quad 9x - 6y = 12.$
A két egyenletben y együtthatói egymás ellentettjei. A két egyenletet összeadásából $(1') + (2')$: $13x = 26$. Innen $x = 2$, visszehelyettesítve $y = 1$.
b) Az első egyenlet 2-szereséhez hozzáadjuk (2)-t, innen $-y = -3$, $y = 3$; visszahelyettesítés után $x = -2$.

1048. *a)* *Első megoldás:* $(1) - (2)$: $\frac{14}{3}y = 6$, $y = \frac{9}{7}$, és $x = -\frac{1}{2}$.
Második megoldás: $(1) + (2)$: $4x = -2$, innen $x = -\frac{1}{2}$, és $y = \frac{9}{7}$.
b) Az első egyenlet 6-szorosához hozzáadjuk a második egyenletet: $6 \cdot (1) + (2)$: $-2{,}5y = 0$, innen $(x; y) = (2; 0)$.

1049. *a)* $8 \cdot (1) + (2)$: $-\frac{27}{6}y = \frac{53}{24}$, innen $(x; y) = \left(-\frac{26}{81}; -\frac{53}{108}\right)$.
b) $(1) + (2)$: $\frac{1}{15}x = 5{,}2$, innen $(x; y) = \left(78; \frac{556}{15}\right)$.

1050. *a)* $0{,}5 \cdot (1) - (2)$: $\frac{19}{42}x = 0$, innen $(x; y) = (0; 4)$.
b) $(1) - (2)$: $\left(2 - \sqrt{2}\right)y = 7$, innen $y = \frac{7}{2 - \sqrt{2}}$, $x = \frac{5\sqrt{2} + 4}{\sqrt{6} - 2\sqrt{3}}$.

1051. *a)* $2 \cdot (1) - \sqrt{5} \cdot (2)$: $y\left(2 + 2\sqrt{7} - \sqrt{15}\right) = 0$, innen $(x; y) = \left(2\sqrt{5}; 0\right)$.
b) $2 \cdot (1) + (2)$: $0 = 13$. Nincs megoldás.
c) $2{,}5 \cdot (1) - (2)$: $0 = 0$. Minden $(x; y) = \left(a; \frac{-5 - 2a}{4}\right)$, $a \in \mathbf{R}$ számpár megoldás.

1052. *a)* Legyen $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, ekkor

(1′) $2a + 3b = 1$;

(2′) $3a - 4b = -7$.

Innen $(a; b) = (-1; 1)$, visszahelyettesítve $(x; y) = (-1; 1)$.

b) Legyen $a = \frac{1}{x+1}$, $b = \frac{1}{2y-4}$, ekkor

(1′) $-4a + 4b = 0$;

(2′) $3a + b = 4$.

Innen $(a; b) = (1; 1)$, visszahelyettesítve $(x; y) = (0; 2{,}5)$.

1053. *a)* Legyen $a = \frac{1}{2x+3y}$, $b = \frac{1}{2y-3x}$, ekkor

(1′) $7a - 2 = b$;

(2′) $3a - b = \frac{10}{7}$.

Innen $(a; b) = \left(\frac{1}{7}; -1\right)$, visszahelyettesítve $(x; y) = \left(\frac{17}{13}; \frac{19}{13}\right)$.

b) Legyen $a = \frac{1}{2x-y+2}$, $b = \frac{3}{x+y+1}$, ekkor

(1′) $4a + b = 5$;

(2′) $3a - 2b = 1$.

Innen $(a; b) = (1; 1)$, visszahelyettesítve $(x; y) = \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

c) Legyen $a = x + 2y - 1$, $b = 2x - y + 1$. Ekkor

(1′) $4a - 3b = -2$;

(2′) $3a - b = 6$.

Innen $(a; b) = (4; 6)$, visszahelyettesítve $(x; y) = (3; 1)$.

1054. *a)* $(x; y) = (-1; 4)$, és $x, y \in \mathbf{Q}$.

b) $(x; y) = (16; 0)$, és $-5 < y < 5$.

1055. *a)* $(x; y) = \left(\frac{1}{3}; 5\right)$, és $x, y > 0$.

b) $(x; y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}; \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$, és $x, y \in \mathbf{Q}^*$.

1056. *a)* $(x; y) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, de ez nem megoldás, mert $y < 0$ nem teljesül.

b) Nincs megoldás.

1057. *a)* $(x; y) = \left(\dfrac{5}{3+\sqrt{2}}; \dfrac{2-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\right)$, és $x \in \mathbf{Q}^*$.

b) $(x; y) = \left(\dfrac{1305}{794}; \dfrac{121}{397}\right)$.

c) Minden $(x; y) = \left(a; \dfrac{2,25a - 15,55}{4,1}\right)$ számpár megoldás, ahol $a \in \mathbf{Z}$.

d) $(x; y) = (1; 1)$.

IV

Egyenletrendszerrel megoldható egyszerű szöveges feladatok

1058. Jelölje a két számot x és y, ekkor

(1) $x + y = 20$;
(2) $x - y = 10$.

A két egyenlet összeadása után $2x = 30$, innen $x = 15$, ezt visszahelyettesítve $y = 5$.

Megjegyzés:
Ha az egyik számot a-val, a másikat $(20 - a)$-val jelöljük, akkor az egyenletrendszer helyett elég az $a - (20 - a) = 10$ egyenletet megoldani.

1059. Jelöljük a lovon lévő zsákok számát x-szel, a szamáron lévőkét y-nal! Ekkor

(1) $y + 1 = 2(x - 1)$;
(2) $y - 1 = x + 1$.

Az egyenletrendszer megoldása $(x; y) = (5; 7)$.

1060. *Első megoldás:* Jelölje a csirkék számát c, a nyulak számát n; ekkor

(1) $c + n = 23$ (a fejek száma);
(2) $2c + 4n = 66$ (a lábak száma).

$(2) - 2 \cdot (1)$-ből $2n = 20$, $n = 10$, s ekkor $c = 13$.
Tehát csirke van több a kertben.

Második megoldás (következtetéssel): Ha a kertben 23 csirke lenne, lábaik száma 46 volna. Ha egy csirkét egy nyúlra „cserélünk”, a fejek száma nem változik, a lábak száma 2-vel nő. Mivel 66 lábnak kell lennie, így pontosan 10 nyúl van a kertben; kevesebb, mint csirke.

Megjegyzés:
Egyenletrendszer nélkül is célt érhetünk, ha a nyulak számát közvetlenül $23 - c$-vel jelöljük; ekkor $2c + 4(23 - c) = 66$ a megoldandó egyenlet.

1061. Jelölje a kétágyas szobák számát k, a háromágyasokét h! Ekkor

(1) $k + h = 72$;
(2) $2k + 3h = 176$.

Innen $(k; h) = (40; 32)$.

A feladatot megoldhatjuk egyenlettel vagy következtetéssel is.

1062. Ha T_1 m^2 az egyik és T_2 m^2 a másik terület nagysága, akkor:

(1) $T_1 \cdot \frac{2}{3} - T_2 \cdot \frac{1}{2} = 500$;

(2) $T_1 + T_2 = 1800$.

Innen $T_1 = 1200$ m^2, $T_2 = 600$ m^2.

1063. Jelöljük a nagyobbik számot n-nel, a kisebbiket k-val! Ekkor

(1) $0{,}2n = \frac{5}{6}k + 12$;

(2) $2n = 3k + 280$.

Innen $(k; n) = (30; 185)$.

1064. Legyen a keresett szám első számjegye a, a második b! Ekkor

(1) $10a + b = a + b + 18$;
(2) $a = 2b$ vagy $b = 2a$.

(1)-ből $a = 2$, (2)-ből $b = 1$ vagy $b = 4$, így két megfelelő szám van: 21 és 24.

1065. Legyen a keresett szám első számjegye x, a második y! Ekkor $10x + y = 2(x + y) + 7$, innen $8x = 7 + y$. A bal oldalon álló szám osztható 8-cal, innen $y_1 = 1$ és $y_2 = 9$, ekkor $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$. Tehát két megfelelő szám van: 11 és 29.

1066. Jelölje a kutyák számát k, ekkor a lakosok száma $400k$. 2 év múlva a kutyák száma $1{,}04^2k$, a lakosok száma $0{,}88^2 \cdot 400k$. A keresett arány $\frac{0{,}88^2 \cdot 400k}{1{,}04^2 \cdot k} \approx 286{,}4$, tehát ennyi lakosra jut majd egy kutya.

1067. *Első megoldás* (egyenletrendszerrel): Jelöljük az első számot x-szel, a másodikat y-nal! Ekkor

(1) $x + y = 34{,}44$;

(2) $\frac{x}{10} = 2y$.

(2)-ből $x = 20y$, ezt (1)-be beírva $21y = 34{,}44$. Innen $y = 1{,}64$, $x = 32{,}8$.

Második megoldás (egyenlettel): Ha az első szám tizedrésze a második kétszerese, akkor az első szám éppen hússzorosa a másodiknak. Legyen az első szám x, a második ekkor $\frac{x}{20}$, összegük $x + \frac{x}{20} = 34{,}44$. Innen $x = 32{,}8$ és $\frac{x}{20} = 1{,}64$ a két szám.

Harmadik megoldás (egyenlettel): Jelöljük az első számot x-szel, ekkor a második szám $34{,}44 - x$. A feltétel szerint $\frac{x}{10} = 2 \cdot (34{,}44 - x)$, innen a két szám $x = 32{,}8$ és $34{,}44 - x = 1{,}64$.

IV

Többváltozós egyenletrendszerek

1068. Az ismeretleneket fokozatosan kiküszöböljük.

a) (1)-ből $z = 2x + 3y - 1$; ha ezt behelyettesítjük (2)-be és (3)-ba, két egyenletből álló, kétváltozós egyenletrendszert kapunk.

$x - 6y + 2{,}5(2x + 3y - 1) = 1$, innen $6x + 1{,}5y - 2{,}5 = 1$, vagyis

(2′) $6x + 1{,}5y = 3{,}5$, és hasonlóan

(3′) $2x + 3y = 2$.

Innen $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, s visszahelyettesítés után $z = 1$.

b) Első megoldás: (1)-ből $x = 3 - y - 2z$, innen

(2′) $-4y - 3z = -5$,

(3′) $3y + 3z = 6$.

Az egyenletrendszer megoldása $(y; z) = (-1; 3)$, s ekkor $x = -2$. *Második megoldás:* (2) + (3) összegből $y = -1$, (1) − (2) különbségből $4y + 3z = 5$, s innen $z = 3$. Végül visszahelyettesítés után $x = -2$-t kapjuk.

1069. *a)* $(x; y; z) = (1; 1; 1)$.

b) $(x; y; z) = (0{,}25; 4; 3)$.

1070. *a)* $(x; y; z) = (1{,}5; -1; 0)$.

b) $(x; y; z) = (2; 1; -1)$.

1071. *a)* $(x; y; z) = (2; 1; 4)$.

b) $(x; y; z) = (3; -2{,}5; -1)$.

1072. *a)* Nincs megoldás. Az $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{1-y}$ új változók bevezetésével az egyenletrendszer

(1′) $2a + 3b + z = 4$;

(2′) $a + 5b + z = 3{,}5$;

(3′) $-a - b + 3z = 8{,}5$

alakú lesz. Ennek megoldása $(a; b; z) = \left(\frac{1}{2}; 0; 3\right)$, innen $x = 2$ és $z = 3$ adódik, de $\frac{1}{1-y} = 0$ nem lehetséges.

b) Nincs megoldás, (1) és (2) ellentmondó egyenletek.

1073. *a)* $(3) = -2 \cdot (1)$, így valójában két különböző egyenlet adott három ismeretlennel. Ha az egyenletek nem tartalmaznak ellentmondást, akkor végtelen sok megoldást kapunk, mert az egyik változóval kifejezhetjük a másik kettőt. Pl. ha y-t és z-t fejezzük ki x-szel, akkor (1) + (2)-ből $-y = 3 - 2x$, innen $y = 2x - 3$; $3 \cdot (1) + 2 \cdot (2)$-ből $z = 5x - 8$. Az egyenletrendszer megoldásai az $(x; y; z) = (x; 2x - 3; 5x - 8)$ számhármasok (x szabadon választható).

b) (3) = − 2 · (2). (1) − (2)-ből $y = 2$; (1) + (2)-ből $x + z = 4$. Így pl. x-et z-vel kifejezve $(x; y; z) = (4 - z; 2; z)$, ahol z szabadon választható.

1074. Az ún. ciklikus egyenletrendszerek esetén a hagyományos megoldási módszerek mellett egyéb eljárásokat is alkalmazhatunk. (Pl. az egyenletek összeadása után szimmetrikus egyenletet kapunk.)

a) Az egyenleteket összeadva $2(x + y + z) = 24$, innen $x + y + z = 12$, s rendre visszahelyettesítve (1), (2), (3)-ba, $z = 5$, $x = 3$, $y = 4$.

b) Az egyenleteket összeadva $0 = 0$ azonosságot kapjuk. Ennek oka, hogy (1)-ből és (2)-ből következik (3): (1) + (2) = −(3). A három ismeretlenre csak két egyenlet adott, végtelen sok megoldás van. Pl. (1)-ből $y = x - 3$, (3)-ból $z = x + 3$, így a megoldások $(x; y; z) = (x; x - 3; x + 3)$, ahol x szabadon választható.

IV

1075. *a)* (1)-ből $x = 6 - 2y$, (2)-ből $z = \frac{1-y}{2}$, ezt (3)-ba helyettesítve $\frac{1-y}{2} +$ $+ 2(6 - 2y) = 3,5$. Innen $y = 2$, $(x; y; z) = (2; 2; -0,5)$.

b) Ha pl. $x \le y \le z$, akkor $2x + 3y \le 2y + 3z$; egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $x = y = z$. Ha pedig $x \le z \le y$, akkor $2z + 3x \le 2y + 3z$, s egyenlőség csak $x = y = z$ esetében állhat fenn. Egymáshoz képest x, y, z nagyság szerint hatféleképpen helyezkedhet el; a fennmaradó 4 eset a fenti kettőhöz hasonlóan vizsgálható (logikailag szimmetrikus). Tehát a megoldás $(x; y; z) = (1,4; 1,4; 1,4)$.

A „hagyományos” megoldási módszert is alkalmazhatjuk.
Az első két egyenletből y-t kiküszöbölve $9z - 4x = 7$, ezt (3)-mal egybevetve $z = 1,4$ stb.

1076. *a)* Legyen $a = \frac{1}{x}$ és $b = z^2$, ekkor az egyenletrendszer:

(1′) $a - 2b = -3;$
(2′) $b - 2y = -1,2;$
(3′) $y - 2a = -0,4.$

(1′) + 2 · (2′)-ből $a - 4y = -5,4$, ennek 2-szeresét (3′)-höz adva $-7y =$ $= -11,2$, innen $y = 1,6$, s visszahelyettesítve $b = 2$, $a = 1$. Megoldás: $(x; y; z) = \left(1; 1,6; \sqrt{2}\right)$ vagy $(x; y; z) = \left(1; 1,6; -\sqrt{2}\right)$.

b) (1) + (2) − (3)-ból $x + y + z = 28,5$, visszahelyettesítve rendre (1), (2), (3)-ba $y = 11,5$, $z = 5$, $x = 12$.

c) (1) + (2) + (3) + (4)-ből $x + y + z + u = 10$, innen $(x; y; z; u) = (1; 2; 3; 4)$.

1077. *Első megoldás:* Jelölje a számokat x, y, z, ekkor

(1) $x + y + z = 1680;$
(2) $x = 0,3y;$
(3) $z = \frac{3}{2}y.$

Innen $0,3y + y + \frac{3}{2}y = 1680$, $y = 600$, s ekkor $x = 180$, $z = 900$.

Második megoldás: Egyenletrendszer felállítása nélkül is megoldhatjuk a feladatot. Ha a középső számot y jelöli, akkor az első szám $0{,}3y$, a harmadik $\frac{3}{2}y$, s innen $0{,}3y + y + \frac{3}{2}y = 1680$ rögtön adódik.

1078. *Első megoldás* (egyenletrendszerrel): Jelöljük a polcokon lévő könyvek számát rendre x, y, z-vel! Ekkor

(1) $x + y + z = 82,$
(2) $y = 2x + 2,$
(3) $z = 3x - 4.$

(2)-t és (3)-t (1)-be helyettesítve $x + 2x + 2 + 3x - 4 = 82$, s innen $x = 14$. A polcokon rendre 14, 30, 38 könyv van.
Második megoldás (egyenlettel): Legyen az első polcon x számú könyv, ekkor a másodikon $2x + 2$, a harmadikon $3x - 4$ darab könyv van. Ekkor $6x - 2 = 82$, amiből $x = 14$ adódik. Az első polcon 14, a másodikon 30, a harmadikon 38 könyv van.

1079. *Első megoldás:* Ha a barátoknak rendre a, b, c, d darab bélyegük van, akkor

(1) $a = 34 + \dfrac{b+c+d}{5}$, (2) $b = 34 + \dfrac{a+c+d}{5}$,

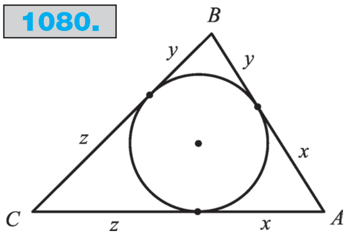
(3) $c = 34 + \dfrac{a+b+d}{5}$, (4) $d = 34 + \dfrac{a+b+d}{5}$.

Vezessük be az $a + b + c + d = s$ jelölést, s adjuk össze az egyenleteket! Ekkor $s = 136 + \frac{3}{5}s$, innen $s = 340$. (1)-ből $5a = 170 + s - a$, $a = 85$. Hasonlóan számolhatjuk ki a többi változót is, így a jóbarátoknak fejenként 85 bélyege van.
Második megoldás: (1) – (2)-ből $a - b = \dfrac{b-a}{5}$ adódik, innen $6(a - b) = 0$. Tehát $a = b$, s hasonlóan mutathatjuk meg, hogy $a = c = d$. (1) átalakítva $a = 34 + \frac{3}{5}a$, innen $a\ (= b = c = d) = 85$.

1080. Külső pontból húzott érintőszakaszok hossza megegyezik (1080. ábra), ezért

(1) $x + y = 10,$
(2) $y + z = 12,$
(3) $x + z = 14.$

1080.



(1) + (2) + (3)-ból $2(x + y + z) = 36$, $x + y + z = 18$. Innen $(x; y; z) = (4; 6; 8)$.

Megjegyzés:
A háromszög oldalait a, b, c-vel, félkerületét s-sel jelölve $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$.

Paraméteres egyenletek, egyenletrendszerek

1081. A paraméteres egyenleteket a paraméterek *minden lehetséges értékére* meg kell vizsgálnunk.

a) Ha $a = 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

Ha $a \neq 0$, akkor $x = \dfrac{3}{a}$.

b) Ha $a = 0$, akkor az egyenletnek minden valós szám megoldása.

Ha $a \neq 0$, akkor $x = 0$.

c) Ha $a = 0$, akkor

1. ha $b = 0$, akkor minden valós szám megoldás;
2. ha $b \neq 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $a \neq 0$, akkor $x = \dfrac{b}{a}$.

d) $x(a - 2) = -8$.

Ha $a = 2$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

Ha $a \neq 2$, akkor $x = \dfrac{-8}{a-2}$.

e) $x(a - 2) = b - 3$.

Ha $a = 2$ és $b = 3$, akkor minden valós szám megoldás.

Ha $a = 2$ és $b \neq 3$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

Ha $a \neq 2$, akkor $x = \dfrac{b-3}{a-2}$.

f) $x(a + 2) = 4(a + 2)$.

Ha $a = -2$, akkor minden valós szám megoldás.

Ha $a \neq -2$, akkor $x = 4$.

1082. *a)* $x(2a - 3) = a - 5$.

Ha $a = 1{,}5$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

Ha $a \neq 1{,}5$, akkor $x = \dfrac{a-5}{2a-3}$.

b) $x(2a - 3) = b - 5$.

Ha $a = 1{,}5$, akkor

1. ha $b = 5$, akkor minden valós szám megoldás;
2. ha $b \neq 5$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

Ha $a \neq 1{,}5$, akkor $x = \dfrac{b-5}{2a-3}$.

c) $(a + 1)(a - 1)x = a + 1$.

Ha $a = -1$, akkor minden valós szám megoldás.

Ha $a = 1$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

Ha $a \neq -1$ és $a \neq 1$, akkor $x = \dfrac{1}{a-1}$.

d) $a(a + 3)x = 5(a + 3)$.

Ha $a = 0$, akkor nincs megoldás.
Ha $a = -3$, akkor minden valós szám megoldás.
Ha $a \neq 0$ és $a \neq -3$, akkor $x = \dfrac{5}{a}$.

e) $a(a-1)x = (a+1)(a-1)$.
Ha $a = 0$, akkor nincs megoldás.
Ha $a = 1$, akkor minden valós szám megoldás.
Ha $a \neq 0$ és $a \neq 1$, akkor $x = \dfrac{a+1}{a}$.

1083. *a)* $x = \dfrac{p-3}{2}$. $x > 0$, ha $p > 3$; $x = 0$, ha $p = 3$; $x < 0$, ha $p < 3$.

b) $x(p+2) = 2$.
Ha $p = -2$, nincs megoldás.
Ha $p \neq -2$, akkor $x = \dfrac{2}{p+2}$. $x > 0$, ha $p > -2$; $x < 0$, ha $p < -2$.

c) $x(p-2) = p-3$.
Ha $p = 2$, nincs megoldás; egyébként $x = \dfrac{p-3}{p-2}$. Egy tört akkor pozitív, ha számlálója és nevezője azonos előjelű. Ezért:
$x > 0$, ha $p > 3$ vagy $p < 2$;
$x = 0$, ha $p = 3$;
$x < 0$, ha $2 < p < 3$.

d) $x(p-2) = p-2$.
Ha $p = 2$, minden x valós szám megoldás, tehát a gyökök tetszőleges előjelűek.
Ha $p \neq 2$, akkor $x = 1$, a gyök pozitív.

e) $x(p-2) = 3p-6$.
Ha $p = 2$, minden x valós szám megoldás, a gyökök tetszőleges előjelűek.
Ha $p \neq 2$, akkor $x = 3$, a gyök pozitív.

f) $x(p-3) = p^2 - 9$.
Ha $p = 3$, akkor minden x valós szám megoldás, a gyökök tetszőleges előjelűek.
Ha $p = -3$, akkor $x = 0$.
Ha $p \neq 3$ és $p \neq -3$, akkor $x = p + 3$.
Tehát: ha $p > -3$ (és $p \neq 3$), akkor $x > 0$;
ha $p < -3$, akkor $x < 0$.

1084. *a)* $x \neq 2$, ekkor $(3-2p)x = 7$.
Ha $p = 1{,}5$, nincs megoldás.
Ha $p \neq 1{,}5$, akkor $x = \dfrac{7}{3-2p}$. A kikötés miatt $\dfrac{7}{3-2p} \neq 2$, innen $p \neq -0{,}25$.
Tehát: $x > 0$, ha $p > 1{,}5$; $x < 0$, ha $p < 1{,}5$, de $p \neq -0{,}25$.

b) $x \neq 1$, ekkor $(2-p)x = 7$.
Ha $p = 2$, nincs megoldás.
Ha $p \neq 2$, akkor $x = \dfrac{7}{2-p}$. A kikötés miatt $\dfrac{7}{2-p} \neq 1$, innen $p \neq -5$.
Tehát: $x > 0$, ha $p < 2$, de $p \neq -5$; $x < 0$, ha $p > 2$.
c) Ha $p = 1{,}5$, akkor $x = -2$ kivételével minden valós szám megoldás.
Ha $p \neq 1{,}5$, akkor $x = -3$, a gyök negatív.
d) $x \neq -3$, ekkor $x(1-p) = 2p - 1$.
Ha $p = 1$, nincs megoldás.
Ha $p \neq 1$, akkor $x = \dfrac{2p-1}{1-p}$. A kikötés miatt $\dfrac{2p-1}{1-p} \neq -3$, innen $p \neq 2$.
Tehát: $x > 0$, ha $0{,}5 < p < 1$; $x = 0$, ha $p = 0{,}5$; $x < 0$, ha $p < 0{,}5$ vagy $1 < p$, de $p \neq 2$.

1085. *a)* (1)-ből $x = 2 - ay$, ezt (2)-be beírva $2(2 - ay) - 4y = 4$, innen
(3) $y(4 + 2a) = 0$.
Ha $a \neq -2$, akkor $y = 0$, $x = 2$.
Ha $a = -2$, akkor (3)-ból y tetszőleges szám lehet, s ekkor $x = 2 + 2y$.
A megoldás tehát minden $(x; y) = (2 + 2y; y)$ alakú számpár.
b) Az előző átalakításhoz hasonlóan eljárva $y(4 + 2a) = -2$.
Ha $a \neq -2$, akkor $y = -\dfrac{1}{a+2}$, és pl. (2)-ből $x = \dfrac{6a+8}{a+2}$.
Ha $a = -2$, akkor nincs megoldás.

1086. *a)* $(x; y) = (a + 1; 2a)$.
b) $(x; y) = (a; 1)$.

1087. *a)* (1) + (2) összegéből $x(a + 2) = 6$.
Ha $a = -2$, nincs megoldás.
Ha $a \neq -2$, akkor $x = \dfrac{6}{a+2}$, $y = \dfrac{a-a^2}{2a+4}$.
b) $x, y \neq 0$; legyen $u = \dfrac{1}{x}$, $v = \dfrac{1}{y}$. Ekkor
(1′) $u + v = 2a$;
(2′) $u - v = 2$
megoldása $(u; v) = (a + 1; a - 1)$. Tehát:
ha $a = -1$ vagy $a = 1$, nincs megoldás;
ha $a \neq \pm 1$, akkor $(x; y) = \left(\dfrac{1}{a+1}; \dfrac{1}{a-1}\right)$.

IV

1088. *a)* $x, y \neq 0$; legyen $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$. Ekkor

(1′) $u + v = a$;
(2′) $u - v = b$

megoldása $(u; v) = \left(\frac{a+b}{2}; \frac{a-b}{2}\right)$. Tehát

ha $a = b$ vagy $a = -b$, nincs megoldás;

ha $a \neq \pm b$, akkor $(x; y) = \left(\frac{2}{a+b}; \frac{2}{a-b}\right)$.

b) (3) $a \neq 1$; $a \neq -2$.

$2 \cdot (1) + (2)$-ből $x\left(\frac{2}{a-1}+1\right) = \frac{2}{a+2}+3-a$, $\frac{a+1}{a-1}x = \frac{-a^2+a+8}{a+2}$.

Ha $a = -1$, nincs megoldás.
Ha $a \neq -1$ (és persze (3) is teljesül), akkor
$x = \frac{(-a^2+a+8)(a-1)}{(a+2)(a+1)}$.

1089. *a)* Ekkor (3) $(ab + 2)y = 5b + 1$.
Ha $b = -0{,}2$, akkor (3) jobb oldala 0, így
1. ha $a = 10$, minden $(x; y)$ megoldás;
2. ha $a \neq 10$, akkor nincs megoldás.
Ha $b \neq -0{,}2$, akkor (3) jobb oldala nem nulla, így
1. ha $a = -\frac{2}{b}$, nincs megoldás;
2. ha $a \neq -\frac{2}{b}$, $y = \frac{5b+1}{ab+2}$, s ekkor $x = \frac{10-a}{ab+2}$.

b) (3) $x, y \neq 0$; legyen $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$. Ekkor

(1′) $au + bv = 2$;
(2′) $5u - v = 4$, innen

(4) $u(a + 5b) = 4b + 2$.

Ha $b = -0{,}5$, akkor:
1. Ha $a = 2{,}5$, akkor minden u kielégíti (4)-et, tehát $(u; v) =$
$= (u; 5u - 4)$ a megoldás, innen pedig (3) figyelembevételével
$(x; y) = \left(\frac{1}{u}; \frac{1}{5u-4}\right)$, ahol $u \notin \{0; -0{,}8\}$.

2. Ha $a \neq 2{,}5$, akkor nincs megoldás.

Ha $b \neq -0{,}5$, akkor
1. ha $a = -5b$, akkor nincs megoldás;
2. ha $a \neq -5b$, akkor $(u; v) = \left(\dfrac{4b+2}{a+5b}; \dfrac{10-4a}{a+5b}\right)$, s innen $(x; y) =$
$= \left(\dfrac{a+5b}{4b+2}; \dfrac{a+5b}{10-4a}\right)$.

1090. *a)* $x + y + z = a + 2$, így $(x; y; z) = (2a + 2; 2 - 2a; a - 2)$.

b) (1)-ből $x = 4 - y$, így
(2′) $az = 0$;
(3′) $4 - 2y - z = a$.
Ha $a = 0$, akkor z tetszőleges lehet: $(x; y; z) = (2 + 0{,}5z; 2 - 0{,}5z; z)$.
Ha $a \neq 0$, akkor $z = 0$, s innen $(x; y; z) = \left(\dfrac{a+4}{2}; \dfrac{4-a}{2}; 0\right)$.

1091. *a)* $y(4 - a) = 0$. Ha $a = 4$, akkor y tetszőleges lehet, s ekkor végtelen sok megoldás van: $(x; y) = (5 - 2a; a)$, ahol $a \in \mathbf{R}$ tetszőleges.
Ha $a \neq 4$, akkor $(x; y) = (5; 0)$.
b) $y(a + 5) = b - 7{,}5$.
Végtelen sok megoldás van, ha $(a; b) = (-5; 7{,}5)$;
nincs megoldás, ha $a = -5$, $b \neq 7{,}5$.

1092. *a)* $y(10{,}5 - 1{,}5b) = a - 10{,}5$.
Végtelen sok megoldás van, ha $(a; b) = (10{,}5; 7)$;
nincs megoldás, ha $b = 7$, de $a \neq 10{,}5$.
b) $y(ab - 6) = 6b + 36$.
Végtelen sok megoldás van, ha $(a; b) = (-1; -6)$.
Nincs megoldás, ha $ab = 6$, de $b \neq -6$.

1093. *a)* $y(ab - 2) = 2ab - 2a - 2$.
Végtelen sok megoldás van, ha
(1) $ab = 2$;
(2) $2ab - 2a - 2 = 0$.
(2)-ből $a = 1$, (1)-ből $b = 2$.
Nincs megoldás, ha $ab = 2$, de $a \neq 1$. Ekkor $(a; b) = \left(a; \dfrac{2}{a}\right)$, ahol $a \in \mathbf{R} \setminus \{0; 1\}$ szabadon választható.
b) $y(ab - 2) = 2ab - 2a - 4$.
Végtelen sok megoldás lenne, ha
(1) $ab = 2$;
(2) $2ab - 2a - 4 = 0$.

(2)-ből $a = 0$, (1) ellentmondó, tehát nem lehet végtelen sok megoldás.
Nincs megoldás, ha $ab = 2$, mert $a = 0$ nem lehet.
Ekkor $(a; b) = \left(a; \frac{2}{a}\right)$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges.

1094. *a)* $y(3 + ab) = -3ab + 2.$
Végtelen sok megoldás lenne, ha
(1) $3 + ab = 0$;
(2) $-3ab + 2 = 0$.
(2)-ből $0 = 11$, tehát nem lehet végtelen sok megoldás.
Nincs megoldás, ha $ab = -3$; $(a; b) = \left(a; -\frac{3}{a}\right)$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges.
b) $y(a + 2) = -2a^2 + 4a + 2.$
Végtelen sok megoldás nem lehet; nincs megoldás, ha $a = -2$.

1095. Ha a racionális számokkal a négy alapműveletet végezzük, racionális számot kapunk. Ha pedig $r \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, $i \in \mathbf{Q}^*$, akkor $r + i$, $r - i$, $r \cdot i$, $\frac{r}{i}$ egyaránt irracionális.

a) $x = \frac{3 - a}{2} \in \mathbf{Q}$, ha $a \in \mathbf{Q}$.

b) Nincs megoldás, $x = \frac{5 - \sqrt{2}}{2} \in \mathbf{Q}^*$.

c) Ha pl. $a = -\sqrt{2}$, akkor $x = 1{,}5$.

d) $(x; y) = \left(\frac{a}{2}; 0\right)$.

e) Csak akkor lehet megoldás, ha $a \in \mathbf{Q}^*$. Pl.: $a = \sqrt{2}$, $(x; y) = (0; 1)$.

f) Ha pl. $y = 0$ és $a \neq 0$, akkor $x = \frac{a - 1}{a}$, $a \in \mathbf{Q}$.

1096. *a)* $x = \frac{p + 2}{2} > 2$, ha $p > 2$.
b) $x(3 - p) = 2 + p.$
Ha $p = 3$, nincs megoldás; egyébként $x = \frac{p + 2}{3 - p} > 2$, ha $\frac{8 - p}{3 - p} > 0$.
Egy tört értéke pozitív, ha számlálója és nevezője azonos előjelű, ezért $p < 3$ vagy $8 < p$.

c) $x(p-2) = 3p-6$.
Ha $p = 2$, akkor minden valós x megoldás, tehát vannak 2-nél kisebb gyökök is.
Ha $p \neq 2$, akkor $x = 3$, ez megoldás.

d) $x \neq 4$, ekkor $(3-p)x = 13$.
Ha $p = 3$, nincs megoldás; ha $p \neq 3$, akkor $x = \frac{13}{3-p}$. A kikötés miatt $\frac{13}{3-p} \neq 4$, innen $p \neq -0{,}25$. Ekkor $\frac{13}{3-p} > 2$, ha $\frac{7+2p}{3-p} > 0$, vagyis $-3{,}5 < p < 3$, de $p \neq -0{,}25$.

e) $x \neq -3$, ekkor $(3-p)x = 7p-8$.
Ha $p = 3$, nincs megoldás; ha $p \neq 3$, akkor $x = \frac{7p-8}{3-p}$. A kikötés miatt $\frac{7p-8}{3-p} \neq -3$, innen $p \neq -0{,}25$. Ekkor $\frac{7p-8}{3-p} > 2$, ha $\frac{9p-14}{3-p} > 0$, vagyis $\frac{14}{9} < p < 3$.

1097. *a)* $x = \frac{33-5y}{3} = 11 - y - \frac{2y}{3}$, s mivel x és y pozitív egészek, ezért y a 3 többszöröse. $(x; y) = (6; 3)$ vagy $(x; y) = (1; 6)$.

b) (1)-ből $x = 20 - y - \frac{1+y}{2}$, ezért $y = 2k+1$ alakú ($k \in \mathbf{N}$), s ekkor $x = 18 - 3k$. A megoldásokat az alábbi táblázatban soroltuk fel.

k	0	1	2	3	4	5
x	18	15	12	9	6	3
y	1	3	5	7	9	11

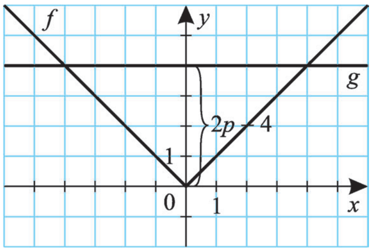
(2)-ből $x = 18 - y$, a megoldások $(k; 18-k)$ alakúak, ahol k 18-nál kisebb pozitív egész szám.
A két megoldáshalmaz uniója adja az összes megoldást.

c) (1)-ből $x = 15 - y - \frac{y}{3}$, innen $y = 3k$ alakú ($k \in \mathbf{Z}$), s ekkor $x = 15 - 4k$.
Figyelembe véve az adott intervallumot, $(x; y)$-ra az alábbi megoldások adódnak:

k	0	1	2	3	4
x	15	11	7	3	-1
y	0	3	6	9	12

(2)-ből $y = 2x - 5$, a megoldások $(k; 2k-5)$ alakúak, ahol $k \in \{-1; 0; 1; 2; 3; \ldots; 10\}$.
A két megoldáshalmaz uniója adja az összes megoldást.

1098/a.



1098. *a) Első megoldás:* A feladatot visszavezethetjük elsőfokú paraméteres egyenlet megoldására.
Ha $x \geq 0$, akkor $x = 2p - 4$; innen $2p - 4 \geq 0$, $p \geq 2$.
Ha $x < 0$, akkor $-x = 2p - 4$, vagyis $x = -2p + 4$; innen $-2p + 4 < 0$, $p > 2$.
Tehát egyetlen megoldás van, ha $p = 2$ (ekkor $x = 0$); és két megoldás van, ha $p > 2$ (ekkor $x = 2p - 4$ vagy $x = -2p + 4$.

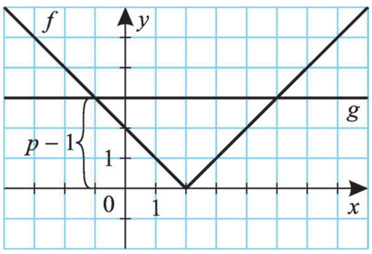
Második megoldás: Grafikus segítséget alkalmazunk. Az $f: x \mapsto |x|$ és g: $x \mapsto 2p - 4$ függvények képeiből következtethetünk a metszéspontok (és így a megoldások) számára.
A g függvény képe (p-től függően) az x tengellyel párhuzamos egyenes, innen (1098/a. ábra):
ha $2p - 4 > 0$, vagyis $p > 2$, akkor 2 megoldás van;
ha $2p - 4 = 0$, vagyis $p = 2$, akkor 1 megoldás van;
ha $2p - 4 < 0$, vagyis $p < 2$, akkor nincs megoldás.

Megjegyzés:
Általában a grafikus megoldást, ha lehetőségünk van, érdemes alkalmazni.

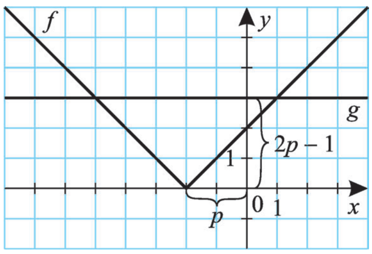
b) $|x - 2| = p - 1$. Az $f: x \mapsto |x - 2|$ és $g: x \mapsto p - 1$ ábrázolása alapján (1098/b. ábra):
ha $p - 1 > 0$, vagyis $p > 1$, akkor 2 megoldás van;
ha $p - 1 = 0$, vagyis $p = 1$, akkor 1 megoldás van;
ha $p - 1 < 0$, vagyis $p < 1$, akkor nincs megoldás.

c)
Ha $2p - 1 > 0$, vagyis $p > 0{,}5$, akkor 2 megoldás van;
ha $2p - 1 = 0$, vagyis $p = 0{,}5$, akkor 1 megoldás van;

1098/b.



1098/c.

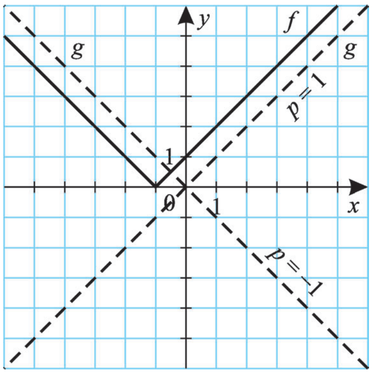


ha $2p - 1 < 0$, vagyis $p < 0{,}5$, akkor nincs megoldás (1098/c. ábra).

d) Az $f: x \mapsto |x+1|$ és $g: x \mapsto px$ ábrázolása alapján (g képe az origón áthaladó, p meredekségű egyenes, 1098/d. ábra):

p értéke	Megoldások száma
$p \le -1$	1
$-1 < p < 0$	2
$p = 0$	1
$0 < p \le 1$	0
$1 < p$	1

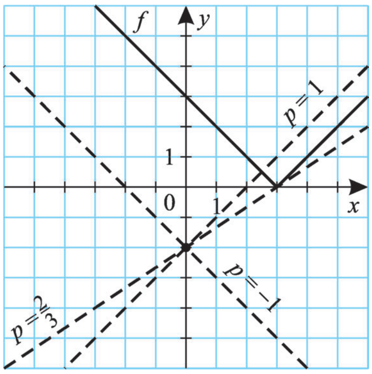
1098/d.



e) 1098/e. ábra

p értéke	Megoldások száma
$p < -1$	1
$-1 \le p < \frac{2}{3}$	0
$p = \frac{2}{3}$	1
$\frac{2}{3} < p < 1$	2
$1 \le p$	1

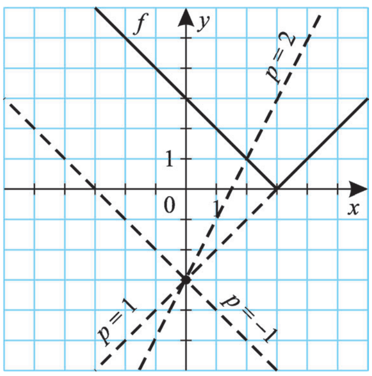
1098/e.



f) 1098/f. ábra:

p értéke	Megoldások száma
$p < -1$	1
$-1 \le p < 1$	0
$p = 1$	végtelen sok ($x \ge 3$)
$1 < p$	1

1098/f.



IV

IV

1099. *a)* $x = \dfrac{p-3}{2} > -1$, ha $p > 1$. Ekkor 1 megoldás van, egyébként nincs megoldás.

b) $x(p+2) = 5$. Ha $p = -2$, nincs megoldás; egyébként $x = \dfrac{5}{p+2} < 1$, ha $\dfrac{p+7}{p+2} < 0$, vagyis $-7 < p < -2$. Ekkor 1 megoldás van, egyébként nincs megoldás.

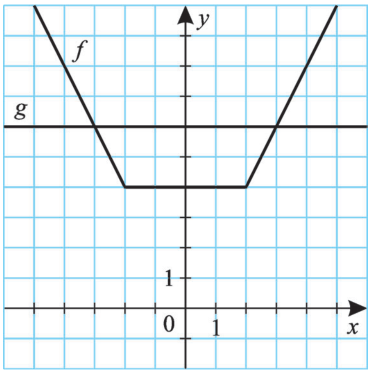
c) $x(p-2) = p-3$. $p \neq 2$, ekkor $x = \dfrac{p-3}{p-2} \leq 0$, ha $2 < p \leq 3$. Ekkor 1 megoldás van, egyébként nincs megoldás.

d) $x(p-3) = 2(p-3)$. Ha $p = 3$, minden $x \in \mathbf{R}^+$ megoldás; ha $p \neq 3$, akkor $x = 2$; ekkor 1 megoldás van.

e) $x(p-2) = (p+2)(p-2)$. Ha $p = 2$, minden $-3 < x < 3$ megoldás; ha $p \neq 2$, akkor $x = p+2$. Ekkor 1 megoldás van, ha $-3 < p+2 < 3$, vagyis ha $-5 < p < 1$.

f) Ábrázoljuk az $f\colon x \mapsto |x-2| + |x+2|$ és $g\colon x \mapsto p$ függvényeket (1099/f. ábra)!

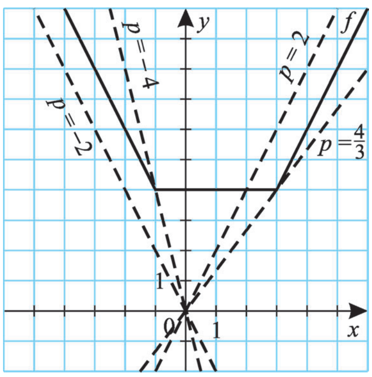
1099/f.



p értéke	Megoldások száma
$p < 4$	0
$p = 4$	végtelen sok ($-2 \leq x \leq 2$)
$4 < p$	2

g) 1099/g. ábra

1099/g.

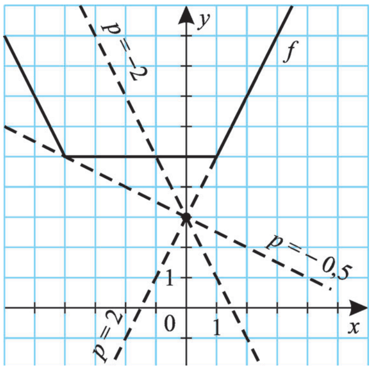


p értéke	Megoldások száma
$p < -2$	1
$-2 \leq p < \dfrac{4}{3}$	0
$p = \dfrac{4}{3}$	1
$\dfrac{4}{3} < p < 2$	2
$2 \leq p$	1

h) 1099/h. ábra

p értéke	Megoldások száma
$p \leq -2$	1
$-2 < p < -0{,}5$	2
$p = -0{,}5$	1
$-0{,}5 < p < 2$	0
$p = 2$	végtelen sok ($x \geq 1$)
$2 < p$	1

1099/h.



1100. *a)* (1)-ből és (2)-ből $(x; y) = (2; 1)$, ezt (3)-ba helyettesítve $k = 3$.

b) (2)-ből és (3)-ból $(x; y) = (-11{,}5; 4{,}25)$, ezt (1)-be helyettesítve $k = \frac{7}{23}$.

1101. *a)* $(3p + 1)x = 0$. Ha $p \neq -\frac{1}{3}$, egy megoldás van; ha $p = -\frac{1}{3}$, akkor végtelen sok.

b) Ha $p \neq 2$, egyetlen megoldás van; ha $p = 2$, végtelen sok.

c) Ha $p \neq 2$, egyetlen megoldás van; ha $p = 2$, nincs megoldás.

d) $y(2 + p) = 2q - 8$.

Ha $p = -2$, akkor

1. ha $q = 4$, végtelen sok megoldás van;
2. ha $q \neq 4$, nincs megoldás.

Ha $p \neq -2$, akkor egyetlen megoldás van.

e) $x(3p - q) = 3p - q - 7$.

Ha $3p = q$, nincs megoldás; ha $3p \neq q$, egyetlen megoldás van.

1102. *a)* (1)-ből $p \in \mathbf{Q}$; $x = \frac{2 + p(1+\sqrt{3})}{3} \in \mathbf{Q}$, ha $p = 0$.

$\left(\text{Ekkor } (x; y) = \left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right).\right)$

b) (1)-ből $p \in \mathbf{Q}$; ekkor (2)-ből $y = 0$ lehet csak. Innen $6 + 2p = 3p$, $p = 6$; $(x; y) = (9; 0)$.

c) (1)-ből $p \in \mathbf{Q}$; ekkor (2)-ből $y = 0$; innen $3 + p = p + 2$, de ez ellentmondás. Nincs megoldás.

IV

d) (1) – (2)-ből $y\left(\sqrt{2}+1\right)=1-\sqrt{2}-p$, innen $y=\dfrac{1-\sqrt{2}-p}{\sqrt{2}+1}$.

Gyöktelenítés után $\left(\sqrt{2}-1\text{-gyel bővítünk}\right)$

$y=p\left(1-\sqrt{2}\right)+2\sqrt{2}-3=\sqrt{2}\,(2-p)+p-3.$

A feltétel szerint p racionális, így csak $p=2$ lehetséges (egyébként y irracionális lenne), s ekkor $(x;y)=(1{,}5;-1)$.

Szöveges feladatok

1103. Ha a keresett szám x, akkor $x+0{,}1x+20x+3=467{,}2$, innen $x=22$.
1104. Jelöljük az arányossági tényezőt x-szel, ekkor az egyik szám $2x$, a másik $5x$. A feltétel szerint $2x+5x=21$, innen $x=3$, a keresett számok $3x=6$ és $5x=15$.
1105. A terület $10^6\cdot 0{,}4=4\cdot 10^5\ \text{mm}^2=40\ \text{dm}^2$.
1106. Ha egy alkalmazott hetente 60 játékot készít el, akkor egy munkanap alatt 12, egy óra alatt 1,5 játékot készít átlagban. A négy alkalmazott 8 órás munkanapokat számítva $4\cdot 1{,}5\cdot 8\cdot 5=240$ darabot tud készíteni, tehát túlórázni kell. 10 órás munkanapokat számítva 300 darab készíthető, tehát 20 darabot a vállalkozónak is készítenie kell.

1107. *Első megoldás:* Jelölje x a versenyzők létszámát, ekkor $\frac{1}{3}x+1+\frac{1}{2}x=x$.
Innen $x=6$, s Anna a 3. helyezett lett.

Második megoldás (következtetéssel): A versenyzők $\frac{2}{6}$-a Anna előtt, $\frac{3}{6}$-a pedig mögötte ért célba, így a versenyzők $\frac{1}{6}$-a maga Anna. 6 versenyző volt, Anna a 3.

1108. A vonat 300 métert halad, amíg az eleje eléri és a vége elhagyja a hidat, így $v=\dfrac{300}{0{,}25}=1200$ (m/perc). A vonat sebessége 72 km/h.

1109. Legyen a téglalap két oldala a és b! Ekkor $(a-2)(b+3)=ab-6$, innen $1{,}5a=b$. A téglalap egyik oldala másfélszerese a másiknak.
1110. Tekintsük az alábbi táblázatot:

Egyjegyű szám	1-től 9-ig	9 darab	9 számjegy	9 oldal
Kétjegyű szám	10-től 99-ig	90 darab	180 számjegy	99 oldal
Háromjegyű szám	100-tól 999-ig	900 darab	2700 számjegy	999 oldal

A háromjegyű számok közül csupán $600-(180+9)=411$ számjegy kell, ez $\dfrac{411}{3}=137$ oldalt jelent. A könyv tehát összesen $9+90+137=236$ oldalas.

1111. A feladat kitűzője valószínűleg a négyzetek oldalainak hosszára volt kíváncsi.

Jelöljük az egyik négyzet oldalát a-val, akkor a másik oldala $\frac{3}{4}a$. Az egyenlet: $a^2+\left(\frac{3}{4}a\right)^2=100$, a megoldás: $a=8$; tehát a négyzetek oldala 8, illetve 6 egység.

1112. A kitűzött utat jelöljük s-sel, ekkor $s\cdot\frac{2}{3}\cdot 0{,}25=10$, innen $s=60$ (km). A hátralévő 50 km 40%-át, azaz 20 km-t 30 perc alatt teszi meg a teherautó.

1113. Ha a tört $\frac{5x}{6x}$, akkor $11x$ háromjegyű négyzetszám, tehát x valamely négyzetszám 11-szerese. Az alábbi táblázatból leolvasható a két megoldás.

x	11	44	99
$11x$	121	484	1 089
a tört	$\frac{55}{66}$	$\frac{220}{264}$	

Ha $x\ge 99$, akkor $11x$ legalább négyjegyű.

1114. $\frac{B}{A}\cdot 100$ százaléka.

1115. *Első megoldás:* Jelölje az osztálylétszámot x, ekkor $0{,}3x$ a jelesek és $0{,}7x$ a jelestől különböző osztályzatúak száma. A feltétel szerint $5(0{,}3x-4)=0{,}7x+4$, innen $x=30$ fő az osztálylétszám.

Második megoldás: Ha ötször annyi tanulónak lett volna jelestől különböző osztályzata, mint ahány jeles lett volna, akkor az osztálylétszám 6 többszöröse. Az osztálylétszám 30%-a egész szám, ezért az osztálylétszám 10 többszöröse is. 6 és 10 legkisebb közös többszöröse 30, ez megoldást is ad. 30 nagyobb többszöröseire a nem jelesek és jelesek aránya csökken $\left(\frac{7}{3}\text{-hoz közelít}\right)$, más megoldás nincs. (Egyébként is helyesebb ilyen nagy létszámoknál osztályok helyett pl. évfolyamokról beszélni.)

1116. Ha a résztvevők számát n jelöli, akkor $0{,}6n+0{,}6n-9=n$, hiszen kétszer számoltuk azokat a versenyzőket, akik mindkét feladatot megoldották. (*Másképpen:* $0{,}6n-9+0{,}6n-9+9=n$.)
Innen $n=45$, ennyien vettek részt a versenyen.

1117. Ha a ruha x tallért ért, akkor egyévi munkabér $100+x$, héthavi munkabér $\frac{7}{12}(100+x)$, innen $\frac{7}{12}(100+x)=20+x$. A ruha $x=92$ tallért ért.

1118. *a)* Ha a gondolt szám x, a műveletek elvégzése után $y = 2(3(x + 4) - 11 - x) - 1 = 4x + 1$-et kapunk. Ha tehát a társ elárulja y-t, akkor $x = \frac{y-1}{4}$.

b) 25.

1119. Ha a gondolt szám x, akkor a műveletek elvégzése után az eredmény $\frac{2(x+8)-4}{2} - x - 4 = 2$ mindig, x-től függetlenül. Azonosságot kaptunk, a gondolt számot nem lehet kitalálni.

1120. *a)* Jelölje a három szomszédos számot x, $x + 1$, $x + 2$. Ekkor $3x + 3 = 600$, $x = 199$, a keresett számok 199, 200, 201.

Megjegyzés:

Kicsit elegánsabb, ha a három számot $y - 1$, y, $y + 1$-gyel jelöljük; ekkor összegük $3y = 600$, innen a középső szám $y = 200$.

b) $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 600$, $x = 148{,}5$; nincs megoldás.

Más megoldási lehetőség: Négy szomszédos egész szám maradékai 4-gyel osztva – valamilyen sorrendben – 0, 1, 2, 3. Összegük maradéka 2, míg 600 maradéka 0, tehát nincs megoldás.

1121. Jelölje a páros számokat $x - 2$, x, $x + 2$; ekkor a közöttük lévő páratlan számok $x - 1$ és $x + 1$.

Innen

a) $x - 2 + x + x + 2 - (x - 1 + x + 1) = 2004$, $x = 2004$. A három páros szám 2002, 2004, 2006.

b) $x - 2 + x + x + 2 - (x - 1 + x + 1) = 2005$, $x = 2005$. Nincs megoldás, mert x páratlan.

1122. Jelöljük a két számot x-szel, illetve y-nal, ekkor

(1) $x + y = 759$;
(2) $x = 10y$.
Innen $(x; y) = (690; 69)$.

1123. *Első megoldás:* Ha az eredeti szám $\overline{ab}$ alakú (a, b számjegyek), akkor

(1) $a + b = 12$;
(2) $10a + b - (10b + a) = k^2$, $(k \in \mathbf{N}^+)$.

(2)-ből $10a + b - (10b + a) = 9(a - b) = k^2$, innen $a - b \in \{1; 4; 9\}$ lehet csak. (1) miatt $a - b = 4$, $a = 8$, $b = 4$, a négyzetszám $k^2 = 84 - 48 = 36$. Tehát az eredeti szám 84.

Második megoldás: $\overline{ab} \in \{93, 84, 75, 66\}$, a négy eset közül ellenőrzéssel választhatjuk ki a megfelelőt.

1124. Ha az eredeti szám $\overline{ab}$ alakú (a, b számjegyek), akkor

a) (1) $a + 4 = b$;

(2) $10b + a - (10a + b) = 27$.

Ekkor $10(a + 4) + a - (10a + (a + 4)) = 27$, innen $36 = 27$, ellentmondást kapunk. Nincs ilyen szám.

b) Ekkor $10(a+4)+a-(10a+(a+4))=36$, innen a $36=36$ azonosságot kapjuk. Minden olyan kétjegyű szám megfelel, amelyre (1) teljesül. Ezek: 15, 26, 37, 48, 59, így 5 megoldás van.

1125. Az előző feladat jelöléseit használva $10b+a-(10a+b)=10(a+3)+a-$ $-(10a+(a+3))=27$.

a) A $27=27$ azonosságot kapjuk, a megoldások: $\overline{ab}\in\{14, 25, 36, 47, 58, 69\}$, így 6 megoldás van.

b) A $27=36$ ellentmondást kapjuk, nincs megoldás.

IV

1126. Legyen a fiú életkora x; ekkor elkészíthetjük az alábbi táblázatot:

	Most	Hét évvel ezelőtt
Apa	$3x$	$3x-7$
Fiú	x	$x-7$

Innen $3x-7=5(x-7)$, $x=14$. A fiú jelenleg 14 éves, az apa 42 éves.

Legyen y év múlva az apa kétszer annyi idős, mint a fia. Ekkor:

	Most	Amikor kétszer annyi idős lesz
Apa	42	$42+y$
Fiú	14	$14+y$

Innen $42+y=2(14+y)$, $y=14$.
14 év múlva lesz az apa kétszer annyi idős, mint a fia.

1127. *Első megoldás:* Ha az apa életkora a, akkor a fiúé $50-a$. Ekkor:

	Most	Öt év múlva
Apa	a	$a+5$
Fiú	$50-a$	$55-a$

Innen $a+5=3(55-a)$, $a=40$; az apa 40, a fia pedig 10 éves.

Tegyük fel, hogy x év múlva a fiú feleannyi idős lesz, mint az apa!

	Most	x év múlva
Apa	40	$40+x$
Fiú	10	$10+x$

Ekkor $40+x=2(10+x)$, innen $x=20$. A fiú 20 év múlva lesz feleannyi idős, mint az apa.

Második megoldás (következtetéssel): Öt év múlva összesen 60 évesek lesznek. Mivel az apa ekkor háromszor annyi idős lesz, mint a fia, így $60 \cdot \frac{3}{4} = 45$ éves lesz, a fiú pedig $60 \cdot \frac{1}{4} = 15$ éves. A korkülönbség 30 év, így jelenleg az apa 40, a fiú pedig 10 éves, és az apa 20 év múlva lesz kétszerannyi idős, mint a fia.

1128. Ha Nagy Sándor x évet élt és u évet uralkodott, akkor

(1) $\frac{x-3}{3} = u - 3$ és
(2) $\frac{x+7}{2} = u + 7$.

Innen $(x; u) = (33; 13)$, vagyis Nagy Sándor 13 évig uralkodott.
Megjegyzés:
Nagy Sándor Kr. e. 356 – 323-ig élt, és 336 – 323 között uralkodott.

1129. Jelölje András és Béla jelenlegi életkorát a, ill. b! Ekkor:

	Most	Akkor
András	a	b
Béla	b	$b-(a-b)=2b-a$

Innen

(1) $a + b = 70$;
(2) $a = 2(2b - a)$.

Az egyenletrendszer megoldása $(a; b) = (40; 30)$, tehát Béla most 30 éves.

1130. A nagymutató egy óra alatt 360°-os, egy perc alatt 6°-os szögelfordulást végez. A kismutató egy óra alatt 30°-ot, egy perc alatt 0,5°-ot halad. 9 órakor a mutatók által bezárt szög 270°, 9 óra 20 perckor $270° - 120° + 10° = 160°$.

1131. Tegyük fel, hogy a k. óra után ($k = 0, 1, 2, \ldots, 11$) t perccel fedik egymást a mutatók. Ekkor $t \cdot 6°$ a nagymutató szögelfordulása, $k \cdot 30° + t \cdot 0{,}5°$ a kismutatóé. Innen $t \cdot 6° = k \cdot 30° + t \cdot 0{,}5°$, $t = k \cdot \frac{60}{11}$. Vagyis az időpontok: 0 óra 0 perc, 1 óra $\frac{60}{11}$ perc, 2 óra $2 \cdot \frac{60}{11}$ perc, … , 11 óra $11 \cdot \frac{60}{11}$ perc = 12 óra 0 perc. A délutáni fedések időpontjai hasonlóan számíthatók: 13 óra $\frac{60}{11}$ perc stb.

1132. Az első esetben a bevétel $10 \cdot 50 + 15 \cdot 40 = 1100$ (Ft).
A második esetben $12 \cdot 90 = 1080$ (Ft).
A bevétel nem ugyanannyi, az első esetben 20 Ft-tal többet kap árujáért.

1133. Az osztályzatok összege $25 \cdot 3{,}44 = 86$.
a) Lehetséges, pl. 18 darab 4-es és 7 darab 2-es dolgozattal.
b) Ha 25 osztályzat összege 86, és a jegyek között a lehető legtöbb a 2-es, ez csak úgy lehetséges, ha a maradék jegyek között a lehető legtöbb az 5-ös. Te-

gyük fel, hogy csak 2-es és 5-ös dolgozat született; jelölje a 2-esek számát x, ekkor az 5-ösök száma $25 - x$. Innen $2x + 5(25 - x) = 86$, $x = 13$.
Ha kevesebb az 5-ös dolgozat, akkor nem lehet több 2-es, ezért legfeljebb 13 darab 2-es dolgozat lehetett.
Megjegyzés:
Precízebben:
A $2x + k(25 - x) = 86$ egyenletben keressük x maximumát, ha $3 \le k \le 5$. Átalakítva az egyenletet $x = 25 - \frac{36}{k-2}$, s x valóban $k = 5$ esetén maximális.

1134. Ha az orvosok száma x, az ügyvédeké y, akkor $\frac{35x + 50y}{x+y} = 40$. Innen $\frac{x}{y} = 2$, vagyis a csoportban kétszer annyi az orvos, mint az ügyvéd.

1135. A labdarúgók, teniszezők és kézilabdázók számát jelölje rendre f, t, k, ekkor a tagok összéletkora $37f + 41t + 23k$. A labdarúgók és a teniszezők átlagéletkora $\frac{37f + 41t}{f+t} = 39{,}5$, innen $\frac{t}{f} = \frac{5}{3}$. Hasonlóan a labdarúgók és a kézilabdázók átlagéletkora $\frac{37f + 23k}{f+k} = 29$, $\frac{f}{k} = \frac{3}{4}$. Végül innen $\frac{41t + 23k}{t+k} = 33$, $\frac{k}{t} = \frac{4}{5}$. Az egyes sportágak résztvevőinek aránya $f : t : k = 3 : 5 : 4$, s ha $f = 3x$, $t = 5x$, $k = 4x$, akkor az átlagéletkor $\frac{37f + 41t + 23k}{f+t+k} = \frac{408x}{12x} = 34$ év.

1136. Alkalmas arányossági tényezőt bevezetve $77x$, $70x$, $63x$ a játék elején és $110x$, $70x$, $30x$ a játék végén a zsetonok száma (összesen $210x$ zsetonnal játszottak). Csak Cili veszített, így $33x = 363$, innen $x = 11$, tehát a gyerekeknél a játék végén rendre 1210, 770 és 330 zseton volt.

1137. Jelöljük a jó válaszok számát J-vel, a rossz válaszokét R-rel! ($R, J \in \mathbf{N}$, $R + J \le 20$.) A feltételek szerint $5J - 2R = 48$, innen $R = 2J - 24 + \frac{J}{2}$. Alkalmazzuk a $J = 2k$ helyettesítést ($k \in \mathbf{N}$), ekkor $R = 5k - 24$. Mivel $0 \le R + J \le 20$, $5 \le k \le 6$. Két megoldás van: $(R; J) = (1; 10)$ vagy $(R; J) = (6; 12)$.

1138. Ha az A iskolából x_A fiú és y_A lány vizsgázott, akkor az iskola összpontszáma

(1) $71x_A + 76y_A = 74(x_A + y_A)$

volt. Hasonlóan a B iskolában

(2) $81x_B + 90y_B = 84(x_B + y_B)$;

továbbá tudjuk még, hogy

(3) $71x_A + 81x_B = 79(x_A + x_B)$.

Ezen feltételek mellett keressük $\dfrac{76y_A+90y_B}{y_A+y_B}$ értékét.

(1)-ből $2y_A=3x_A$; (2)-ből $2y_B=x_B$; (3)-ból $x_B=4x_A$. Innen $y_B=\dfrac{x_B}{2}=\dfrac{4x_A}{2}=$ $=2x_A=\dfrac{4y_A}{3}$, így $\dfrac{76y_A+90y_B}{y_A+y_B}=\dfrac{76y_A+90\cdot\dfrac{4y_A}{3}}{y_A+\dfrac{4y_A}{3}}=\dfrac{588}{7}=84$, ennyi volt a lányok átlaga.

IV

Az összes tanuló átlaga $\dfrac{71x_A+76y_A+81x_B+90y_B}{x_A+y_A+x_B+y_B}=$

$$=\frac{71\cdot\dfrac{2}{3}y_A+76y_A+81\cdot\dfrac{8}{3}y_A+90\cdot\dfrac{4}{3}y_A}{\dfrac{2}{3}y_A+y_A+\dfrac{8}{3}y_A+\dfrac{4}{3}y_A}=\frac{1378}{17}\approx 81{,}06 \text{ pont.}$$

1139. *Első megoldás:* Jelöljük a három szöget rendre A, B, C-vel! Ekkor

(1) $B=2A+10°$;
(2) $C=B-30°$;
(3) $A+B+C=180°$ (a háromszög belső szögeinek összege).

(1)-ből $A=\dfrac{B-10°}{2}$, így (3)-ból kapjuk: $\dfrac{B-10°}{2}+B+B-30°=180°$. Innen rendezés után $B=86°$, amiből visszahelyettesítéssel $C=56°$ és $A=38°$.

Második megoldás: Jelöljük az első szöget A-val; ekkor a második szög $2A+10°$, a harmadik $2A-20°$. A három szög összege $A+2A+10°+2A-20°=180°$, innen $A=38°$, s a másik két szög az előző megoldáshoz hasonlóan adódik.

1140. Ha a téglalap eredeti két oldala a és b, akkor területe ab. Az új téglalap egyik oldala $0{,}8a$, a merőleges oldalt jelöljük c-vel.

a) $0{,}8ac=ab$, innen $c=1{,}25b$, tehát a másik két oldalt növelni kell 25%-kal.

b) $0{,}8ac=2ab$, innen $c=2{,}5b$, a másik oldalt növelni kell 150%-kal.

c) $0{,}8ac=\dfrac{ab}{3}$, innen $c=\dfrac{5}{12}b\approx 0{,}417b$, a másik oldalt csökkenteni kell $\approx$ 58,3%-kal.

d) $0{,}8ac=0{,}7ab$, innen $c=\dfrac{7}{8}b$, a másik oldalt csökkenteni kell 12,5%-kal.

e) A másik oldalt nem kell változtatni.

f) $c=\dfrac{9}{8}b$, a másik oldalt növelni kell 12,5%-kal.

1141. Jelöljük a-val a kocka élét, ekkor $6a^2=a^3$, innen $a=6$ cm. A téglatest élei 4 cm, 5 cm, 12 cm hosszúak.

1142. *Első megoldás* (következtetéssel): Tegyük fel, hogy a szántás t óráig tart! A régi traktor 1 óra alatt a terület $\dfrac{1}{6}$, az új traktor pedig a terület $\dfrac{1}{4}$ részét szántja fel. Egy óra alatt együtt a terület $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$ részét szántják fel, így a teljes munkaidő $\frac{12}{5}=2{,}4$ óra, vagyis 2 óra 24 perc.

Második megoldás (egyenlettel): Tegyük fel, hogy a szántás t óráig tart! A régi traktor 1 óra alatt a terület $\frac{1}{6}$, t óra alatt a terület $\frac{t}{6}$ részét szántja fel; az új traktor pedig a terület $\frac{t}{4}$ részét. Innen $\frac{t}{6}+\frac{t}{4}=1$, $t=2{,}4$ (óra).

1143. *Első megoldás* (következtetéssel): 1 óra alatt a csövek együttesen az $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$ részét töltik meg a medencének, tehát a medence 2 óra alatt telik meg.

Második megoldás (egyenlettel): Tegyük fel, hogy a medence t óra alatt telik meg! Az első cső 1 óra alatt a medence $\frac{1}{4}$ részét, t óra alatt $\frac{t}{4}$ részét tölti meg; a második $\frac{t}{6}$, a harmadik $\frac{t}{12}$ részét. Innen $\frac{t}{4}+\frac{t}{6}+\frac{t}{12}=1$, $t=2$ (óra).

1144. *a)* Tegyük fel, hogy a medence t idő alatt telik meg! Ekkor $\frac{t}{6}+\frac{t}{8}=1$, innen $t=\frac{24}{7}\approx 3{,}43$ (óra).

b) $\frac{t}{8}-\frac{t}{10}=1$, innen $t=40$ (óra). (Feltettük, hogy a nyitás után azonnal, egyenletes sebességgel folyik ki a víz a lefolyón.)

c) $\frac{t}{6}-\frac{t}{10}=1$, innen $t=15$ (óra).

d) $\frac{t}{6}+\frac{t}{8}-\frac{t}{10}=1$, innen $t=\frac{120}{23}\approx 5{,}22$ (óra).

e) Az első szakaszon $\frac{t_1}{6}+\frac{t_1}{8}=\frac{3}{10}$, innen $t_1=\frac{36}{35}$; a második szakaszon $\frac{t_2}{6}=\frac{7}{10}$, innen $t_2=\frac{21}{5}$. Összesen $t_1+t_2=\frac{183}{35}\approx 5{,}23$ óráig tart a feltöltés.

f) Az első szakaszon $\frac{2}{6}$, a második szakaszon $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{7}{24}$, összesen $\frac{15}{24}$ része telik meg a medencének. A harmadik szakaszon $\frac{t_3}{6}+\frac{t_3}{8}-\frac{t_3}{10}=\frac{3}{8}$, innen $t_3=\frac{45}{23}$. Összesen $2+1+\frac{45}{23}\approx 4{,}96$ óra.

g) $\frac{t}{6}+\frac{t}{8}=\frac{2}{3}$, innen $t=\frac{16}{7}\approx 2{,}29$ (óra).

IV

1145. Jelölje a és b azt az időt (másodpercben), amelyre Andrásnak és Bélának szüksége van ahhoz, hogy saját figuráit felállítsa a táblára. Ekkor a teljes táblát $2a$, illetve $2b$ idő alatt állítanák fel külön-külön. Ha a figurákat közösen raknák fel t idő alatt, akkor $\frac{t}{2a}+\frac{t}{2b}=1$. Továbbá a feltételek miatt $a=t-6$ és $b=t+10$, így $\frac{t}{2(t-6)}+\frac{t}{2(t+10)}=1$. Az egyenlet megoldása $t=30$ másodperc, innen $a=36$ másodperc, $b=40$ másodperc; ennyi idő alatt rakja fel ki-ki a saját figuráit.

1146. A legrövidebb idő alatt akkor lesz készen a munka, ha mindketten folyamatosan dolgoznak, s ehhez az anyagot 3 : 2 arányban kell kettéosztaniuk. Ha az együttes munka t óráig tart, akkor $\frac{t}{2}+\frac{t}{3}=1$, innen $t=1{,}2$, vagyis 1 óra 12 perc alatt lesznek készen.

1147. *a)* $\frac{t}{a}+\frac{t}{b}=1$, innen $t=\frac{ab}{a+b}$.

$\left(t=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right.$, vagyis a és b harmonikus közepének a fele.$\left.\right)$

b) $\frac{t}{a}+\frac{t}{b}+\frac{t}{c}=1$, innen $t=\frac{abc}{ab+bc+ac}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

(a, b, c harmonikus közepének a harmada.)

1148. Az átlagsebességet az összes megtett út és az összes idő hányadosa adja. A harmadik szakasz hossza $2\cdot 15=30$ (km), az összes út $9+37+30=76$ (km). 5 m/s = 18 km/h, az első szakasz menetideje 0,5 h, az összes idő 0,5 h + 1,5 h + + 2 h = 4 h.

Az átlagsebesség $v=\frac{76}{4}=19$ km/h.

1149. Jelölje a kérdéses időt t (órában számolva).

a) Az egyik lehetőség, hogy a motoros B-ből A-felé indult el.

Ha a járművek egymástól 15 km-re vannak és még nem találkoztak, akkor $30t+60(t-1)=300-15$, innen $t=\frac{23}{6}=3$ óra 50 perc.

Ha találkozásuk után vannak 15 km-re egymástól, akkor $30t+60(t-1)=300+$ $+15$, innen $t=\frac{25}{6}=4$ óra 10 perc.

(*Másik megoldási út,* ha a két jármű relatív 90 km/h sebességével számolunk.)
b) A másik lehetőség, hogy a motoros B-ből A-val ellentétes irányban indult el. Ha a járművek egymástól 15 km-re vannak és még nem találkoztak, akkor $60(t-1)+15=30t+300$, innen $t=11{,}5$ óra.
Ha találkozásuk után vannak 15 km-re egymástól, akkor $60(t-1)=30t+300+$ $+15$, innen $t=12{,}5$ óra.

1150. *a)* Jelölje s az utat, v az átlagsebességet, ekkor

$$t=\frac{\frac{s}{2}}{60}+\frac{\frac{s}{2}}{80},\quad v=\frac{s}{\frac{\frac{s}{2}}{60}+\frac{\frac{s}{2}}{80}}=\frac{480}{7},$$

az átlagsebesség $\approx 68{,}57$ km/h. (Tehát *nem* 70 km/h.)

b) $v=\dfrac{60\cdot\frac{t}{2}+80\cdot\frac{t}{2}}{t}=70$ (km/h).

c) $v=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}$, vagyis az a és b sebességek harmonikus közepe. (Ha $a\neq b$, ez az érték mindig kisebb, mint a számtani közép.)

d) $v=\dfrac{a+b}{2}$.

e) $v=\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\dfrac{3abc}{ab+bc+ac}$.

f) $v=\dfrac{a+b+c}{3}$.

1151. Meggyújtása után t órával az első gyertyából $3t$ cm égett el, magassága $15-3t$; a második gyertya magassága pedig $10-\dfrac{5t}{3}$.

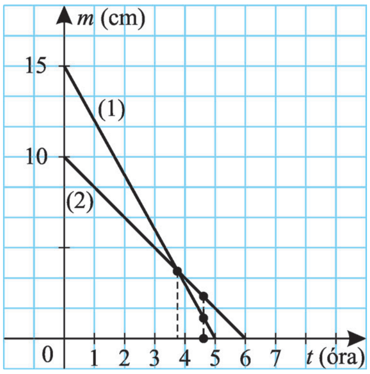
a) $15-3t=10-\dfrac{5t}{3}$, innen $t=3$ óra 45 perc.

b) A $15-3t=2\left(10-\dfrac{5t}{3}\right)$ egyenletnek nincs megoldása ($t=-15$ hamis gyök), a $2(15-3t)=10-\dfrac{5t}{3}$ egyenletből $t=\dfrac{60}{13}$, tehát $\approx 4{,}62$ óra múlva lesz a második gyertya kétszer akkora, mint az első.

Megjegyzések:

IV

1151/b.



A feladatoknak matematikai értelemben a (semmitmondó) $t \geq 6$ óra is megoldása, hiszen ekkor mindkét gyertya magassága nulla.

A két gyertya magasságát ábrázolhatjuk az idő függvényében. Az 1151/b. ábrán jelöltük a keresett időpontokat.

c) Egy óra alatt az első gyertya magassága 12 cm lesz.

További t óra múlva $12 - 3t = 10 - \frac{5t}{3}$, innen $t = 1{,}5$, tehát az első gyertya meggyújtása után 2 óra 30 perccel lesznek egyenlő hosszúak a gyertyák.

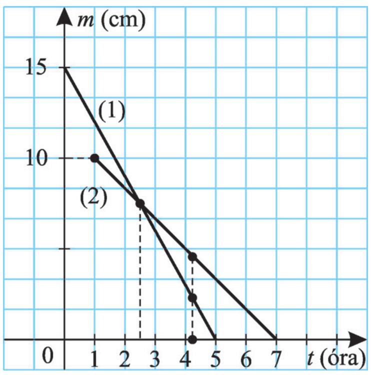
(*Másik lehetőség* a $15 - 3t = 10 - \frac{5(t-1)}{3}$ egyenlet megoldása.)

Ha az első gyertya hossza kétszerese a másodikénak, akkor $2(12 - 3t) = 10 - \frac{5t}{3}$, $t = \frac{42}{13} \approx 3{,}23$, így ez az eset az első gyertya meggyújtása után 4,23 órával következhet be (1151/c. ábra).

Ha a második gyertya hossza kétszerese az elsőének, akkor $12 - 3t = 2\left(10 - \frac{5t}{3}\right)$, innen $t = 24$, ez nem megoldás. (A $t \geq 7$ óra esetén mindkét gyertya magassága nulla.)

1152. Jelöljük x-szel és y-nal a sík, illetve a hegyi útszakasz hosszát! Ekkor az egyes menetidők összege $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{y}{6} + \frac{x}{4} = 5$, innen $x + y = 10$. Összesen 20 km-t gyalogolt.

1151/c.



Megjegyzés:

Két ismeretlen tartalmazó egyenletünkkel „szerencsénk” volt, mert az összevonások után x és y együtthatója megegyezett. Más adatokkal általában nem oldható meg egyértelműen a feladat.

1153. Jelöljük a hajó sebességét (állóvízben) v-vel, a folyóét f-fel, az útszakasz hosszát s-sel! Ekkor

(1) $s = 3(v + f)$;

(2) $s = 4(v - f)$,

és keressük $\frac{s}{f}$ értékét.

(1)-ből és (2)-ből $v = 7f$, így $s = 24f$, s ezt a tutaj 24 óra alatt teszi meg.

1154. Jelölje a pálya hosszát s (km), Béla sebességét v (km/h)! Ekkor András, Béla és Csaba rendre $\frac{s}{v+15}$, $\frac{s}{v}$, $\frac{s}{v-3}$ idő alatt ért célba, így

(1) $\frac{s}{v+15}+\frac{1}{5}=\frac{s}{v}$;

(2) $\frac{s}{v-3}-\frac{1}{20}=\frac{s}{v}$.

$4\cdot(2)+(1)$-ből $\frac{s}{v+15}+\frac{4s}{v-3}=\frac{5s}{v}$, vagyis v nem függ s-től. Innen Béla sebessége $v = 75$ km/h, visszahelyettesítve (1)-be $s = 90$ km, s a menetideje 1 óra 12 perc. Tehát:

a) $s = 90$ km; *b)* rendre 90 km/h, 75 km/h, 72 km/h; *c)* rendre 1 óra, 1 óra 12 perc, 1 óra 15 perc.

1155. *a)* Ha a felderítő útja t óráig tart, akkor $30t + 60t = 120$, innen $t = 1$ óra 20 perc.

b) Tegyük fel, hogy a felderítő t óráig távolodik, majd $2 - t$ ideig közeledik a karavánhoz. Ekkor az első szakaszon $30t$ km távolságra kerül a karavántól, ezt 90 km/h relatív sebességgel teszi meg, így $30t = 90(2 - t)$. Innen $t = 1{,}5$ óra, a felderíthető távolság $1{,}5\cdot 60 =$ $= 90$ (km).

1156. *Első megoldás:* Jelöljük v-vel a motorcsónak sebességét! $\frac{15}{v}$ ideig távolodtak egymástól a járművek, ekkor a csónak $\frac{4\cdot 15}{v}$ utat tett meg. A közeledési időtartam $\frac{9}{v}$, ezalatt a csónak $\frac{4\cdot 9}{v}$ utat tett meg. A csónak által megtett összes út $\frac{60}{v}+\frac{36}{v}=6$, innen $v = 16$ (km/h).

Második megoldás: $\frac{15}{v}$ ideig távolodtak egymástól a járművek, ekkor távolságuk $\frac{15}{v}(v-4)$. Ezután $\frac{9}{v}$ ideig közeledtek egymáshoz $v + 4$ relatív sebességgel, innen $\frac{15}{v}(v-4)=\frac{9}{v}(v+4)$.

1157. *a)* Jelölje h a mozgólépcső hosszát méterben, ekkor a lépcső sebessége $\frac{h}{15}$, a gyalogosé $\frac{h}{12}$. Ha a gyalogos lefelé lépeget a működő mozgólépcsőn, akkor a sebességek összeadódnak, így a menetidő $\frac{h}{\frac{h}{15}+\frac{h}{12}}=\frac{60}{9}\approx 6{,}67$ másodperc.

b) $t=\frac{1}{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}}=\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}$ másodperc.

1158. Jelölje a hosszabbik oldalt a, a rövidebb oldalt b! Ekkor $\frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}}$, innen $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ a két oldal aránya.

1159. Az n oldalú sokszögnek $\frac{n(n-3)}{2}$ darab átlója van, innen $3n = \frac{n(n-3)}{2}$, $n = 9$.

IV

1160. A sorozat különbsége 12.

a) $1 + 12n = 2004$, innen $n = \frac{2003}{12}$, de ez nem egész szám. A sorozatnak nem tagja a 2004.
Másképp is okoskodhatunk: Észrevehetjük, hogy a sorozat tagjai 12-vel (és emiatt 3-mal is) osztva 1 maradékot adnak, míg 2004 osztható 3-mal.

b) $1 + 12n = 2005$, innen $n = 167$. A sorozat 168. tagja 2005.

1161. 1 tonna fű szárazanyag-tartalma 400 kg, ennyi a szénáé is. Mivel a széna 85%-a 400 kg, tömege $\frac{100}{85} \cdot 400 \approx 470{,}6$ kg.

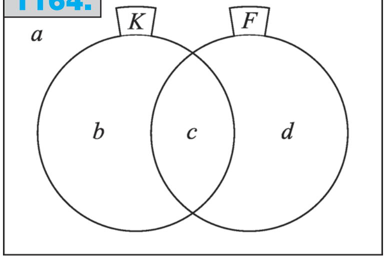
1162. 100 kg aszalt szilvában 60 kg a szárazanyag-tartalom, ennyi a szilvában is. A szilva 20%-a 60 kg, így tömege 300 kg.

1163. Matematika szakkörre $25 \cdot 0{,}48 = 12$-en, fizika szakkörre $25 \cdot 0{,}36 = 9$-en, kémia szakkörre $25 \cdot 0{,}56 = 14$-en járnak. Jelölje x a mindhárom szakkörre járók számát, ekkor $12 - x + 9 - x + 14 - x + x = 25$, innen $x = 5$.
Más befejezési lehetőség: A $12 + 9 + 14$ összegben a mindhárom szakkörre járókat háromszor számoltuk, innen $12 + 9 + 14 = 25 + 2x$.

1164. *Első megoldás:*
Vegyük fel a két versenynek megfelelő halmazábrát (az alaphalmaz maga az osztály), s jelöljük a megfelelő tartományokba sorolt tanulók számát a, b, c, d-vel! Ekkor

(1) $a + b + c + d = 33$,
(2) $b + c = 13$,
(3) $c + d = 16$,
(4) $a = 2c$.

1164.



(4) miatt (1) – (2) – (3)-ból $c = 4$ adódik, innen $a = 8$, $b = 9$, $d = 12$. 4 tanuló szerepelt mindkét versenyen.
Második megoldás: Ha mindkét versenyen c tanuló vett részt, akkor $2c$ tanuló egyik versenyen sem indult.
Legalább az egyik versenyen $13 + 16 - c$ tanuló vett részt, hiszen c tanulót kétszer számoltunk; tehát az osztálylétszám $13 + 16 - c + 2c$. Innen $13 + 16 - c + 2c = 33$, $c = 4$.

1165. Jelölje x a könyv árleszállítás előtti árát! Ekkor árleszállítás után $0{,}9x$ a könyv ára, ebből $0{,}9x \cdot 0{,}08 = 0{,}072x$ a haszon, $0{,}9x \cdot 0{,}92 = 0{,}828x$ az önköltség. Az eredeti ár esetén tehát $0{,}172x$ a haszon, ami 17,2 %.

1166. Jelölje B a beszerzési árat, H a hasznot! Eredetileg az eladási ár $B + H$ volt; a kétszeri árleszállítás után $(B + H) \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = (B + H) \cdot 0{,}64$. A feltételek szerint $(B + H) \cdot 0{,}64 - B = 0{,}5H$, innen $0{,}14H = 0{,}36B$, $\frac{H}{B} = \frac{18}{7} \approx 257{,}1\%$-a.
Meglepő eredményt kaptunk, végezzünk ellenőrzést! Legyen pl. a beszerzési ár $B = 1000$ (egység), ekkor az eredeti eladási ár ≈ 3571, a haszon $H = 2571$. A kétszeri árleszállítás után az eladási ár $3571 \cdot 0{,}64 \approx 2285{,}4$, az új haszon 1285,4, s ez kb. fele az eredeti haszonnak.

1167. A harmadik utazó után a gombócok $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ része maradt meg, tehát eredetileg 27 gombóc volt.

1168. Jelöljük az arányossági tényezőt x-szel, ekkor a három szám $3x$, $4x$, $5x$. Innen $9x^2 + 16x^2 + 25x^2 = 200$, $x^2 = 4$, $x = 2$ vagy $x = -2$. A három szám 6, 8, 10 vagy -6, -8, -10.

1169. *Első megoldás:* Jelöljük x-szel az első iskolába járó tanulók számát, ekkor a második iskola tanulóinak száma $805 - x$. A feltétel szerint $\frac{1}{3}x = \frac{805 - x}{2}$, innen $x = 483$.
Így az első iskolába 483, a másodikba $805 - 483 = 322$ gyerek jár.
Második megoldás (következtetéssel): Ha az egyik iskola tanulói számának harmada egyenlő a másik iskola tanulói számának felével, akkor az összes tanuló $\frac{3}{5}$-e jár az egyik, és $\frac{2}{5}$-e a másik iskolába. $\frac{805}{5} = 161$, az egyik iskolába $3 \cdot 161 = 483$, a másikba $2 \cdot 161 = 322$ tanuló jár.

1170. Jelölje a számokat a, b, c, d, ekkor

(1) $a + b = 8;$
(2) $a + c = 9;$
(3) $b + c = 11;$
(4) $a + b + c + d = 24.$

Az első három egyenlet összeadása után $a + b + c = 14$, rendre visszahelyettesítve $(a; b; c; d) = (3; 5; 6; 10)$.

1171. $70 - 30 = 40$ dolgozó fele nyáron, másik fele az év többi részében üdült. 50-en üdültek nyáron, ez az összes üdülő személy $\frac{50}{70}$ része, $\approx 71{,}4\%$-a.

1172. „Visszafelé” okoskodhatunk. Ha a módosítások után valamennyiük pénze x Ft volt, akkor előtte $x - 200$, $x + 200$, $\frac{x}{2}$, $2x$ pénzük volt. Innen $x - 200 + x + 200 + \frac{x}{2} + 2x = 4500$, $x = 1000$. A testvérek pénze külön-külön 800 Ft, 1200 Ft, 500 Ft és 2000 Ft volt.

IV

1173. Jelöljük x-szel a kezdeti tőkét! Ekkor az első év végén $x - 100 + \frac{x-100}{3} = \frac{4x-400}{3}$ font, a második év végén $\frac{4x-400}{3} - 100 + \frac{\frac{4x-400}{3} - 100}{3} = \frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9} = \frac{16x-2800}{9}$ font, a harmadik év végén $\frac{16x-2800}{9} - 100 + \frac{\frac{16x-2800}{9} - 100}{3} = \frac{16x-3700}{9} + \frac{16x-3700}{27} = \frac{64x-14800}{27}$ font volt a kereskedő pénze. Innen $\frac{64x-14800}{27} = 2x$, $x = 1480$. A kereskedő kezdeti tőkéje tehát 1480 font volt.

1174. *Első megoldás:* Jelölje x és y a 2 forintosok, illetve az 5 forintosok számát! Ekkor

(1) $x + y = 18$;
(2) $2 \cdot (2x + 5y) = 5x + 2y$.

(1)-ből $x = 18 - y$, ezt (2)-be írva $2 \cdot (2 \cdot (18 - y) + 5y) = 5 \cdot (18 - y) + 2y$. Innen $y = 2$, $x = 16$. Annának $2 \cdot 16 + 5 \cdot 2 = 42$ forintja van.

Második megoldás: Az eredeti és a csere utáni összeg $18 \cdot (2 + 5) = 126$ Ft. A cserével Anna pénze megkétszereződött, így eredetileg a 126 Ft harmada, 42 Ft (16 darab 2 Ft-os és 2 darab 5 Ft-os) volt a pénze.

1175. *Első megoldás:* Jelöljük a piacra vitt dinnyék számát x-szel! Ekkor

– az első árusnak eladott $\frac{x}{2} + 1 = \frac{x+2}{2}$ darabot, maradt $x - \frac{x+2}{2} = \frac{x-2}{2}$ dinnyéje;

– a második árusnak eladott $\frac{\frac{x-2}{2}}{2} + 1 = \frac{x+2}{4}$ darabot, maradt $\frac{x-2}{2} - \frac{x+2}{4} = \frac{x-6}{4}$ dinnyéje;

– a harmadik árusnak eladott $\frac{\frac{x-6}{4}}{2} + 1 = \frac{x+2}{8}$ darabot, maradt $\frac{x-6}{4} - \frac{x+2}{8} = \frac{x-14}{8}$ dinnyéje.

Innen $\frac{x-14}{8} = 3$, $x = 38$, tehát 38 dinnyével indult a piacra.

Második megoldás: „Visszafelé” oldjuk meg a feladatot.

– A harmadik árushoz 8 dinnyével érkezett a dinnyetermelő, hiszen a három dinnye, amit megettek, az utolsó maradék felénél 1-gyel kevesebb volt;

– a második árushoz hasonló okok miatt 18 dinnyével érkezett (18 felénél 1-gyel kevesebb a 8);

– az első árushoz pedig 38 dinnyét vitt, mert eladta a dinnyék felét és még 1-et, s így 18 dinnye maradt.

IV

1176. Legyen az összlétszám x; ekkor év elején $0{,}4x$ fiú és $0{,}6x$ lány járt az iskolába. A változás után a fiúk száma $0{,}4x \cdot 1{,}1 = 0{,}44x$, a lányok száma $0{,}6x \cdot 0{,}95 = 0{,}57x$ lett. Az összlétszám változása $\frac{0{,}44x + 0{,}57x}{x} = 1{,}01$, vagyis a létszám 1%-kal nőtt.

1177. Ha a felnőttek száma x, akkor a gyerekek száma $1{,}2x$. Innen $3311 = x + 1{,}2x$, $x = 1505$ felnőtt van és 1806 gyerek. Ha a gyerekek között y fiú van, akkor $y + 1{,}1y = 1806$, innen $y = 860$ a fiúk száma. Ha a felnőttek között z nő van, akkor $1505 = z + 1{,}15z$, innen $z = 700$; a férfiak száma $700 \cdot 1{,}15 = 805$.

1178. Jelöljük az 1-es, 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös dolgozatok számát d_1, d_2, d_3, d_4, d_5-tel, ekkor:

(1) $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 24;$
(2) $2d_5 = d_4.$
(3) $1{,}2d_2 = d_3.$
(4) $d_1 + d_2 + d_3 = d_4 + d_5\ (= 12),$

és keressük $\frac{1 \cdot d_1 + 2 \cdot d_2 + 3 \cdot d_3 + 4 \cdot d_4 + 5 \cdot d_5}{24}$ értékét.

(2)-ből és (4)-ből $d_5 = 4$, $d_4 = 8$. (3)-ból d_2 5-nek többszöröse.

Ha $d_2 = 5$, akkor $d_3 = 6$, $d_1 = 1$, az átlag $\frac{1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 4 \cdot 5}{24} = 3{,}375.$

10 vagy több 2-es nem lehetséges, viszont a 0 darab 2-esnek matematikailag van értelme. Ekkor az átlag $\frac{12 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 4 \cdot 5}{24} \approx 2{,}67.$

1179. Ha az eredeti szám $\overline{a7b}$ alakú (a, b számjegyek), akkor

(1) $a = b - 4;$
(2) $100b + 70 + a = 396 + 100a + 70 + b.$
(2)-ből $99(b - a) = 396$, $b - a = 4$, visszakaptuk (1)-et.

A kapott azonosság miatt minden olyan szám megfelel, amelyre (1) teljesül, s ilyen szám 5 darab van.

Megjegyzés:
Az eredmény nem függ a tízesek helyén álló számjegytől. Ha az eredeti szám $\overline{acb}$ alakú, akkor $100b + 10c + a - (100a + 10c + b) = 99(b - a) = 99 \cdot 4 = 396$, c-től függetlenül.

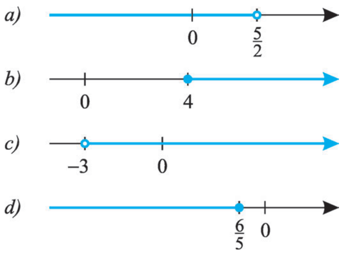
1180. Jelölje a férfiak számát x, ekkor a nők száma $1440 - x$. $1440 \cdot 0{,}2 = 288$, így $0{,}1875x + 0{,}225(1440 - x) = 288$. Innen $x = 960$ a férfiak és $1440 - 960 = 480$ a nők száma.

1181. Igen, következik. Vezessük be a következő jelöléseket: SzK: a kék szemű szőkék száma; K: a kékszeműek száma; Sz: a szőkék száma; $Ö$: az összes ember száma ($SzK < K$, $Sz < Ö$). A feltétel szerint $\frac{SzK}{K} > \frac{Sz}{Ö}$, innen átrendezéssel $\frac{SzK}{Sz} > \frac{K}{Ö}$, s ez éppen a keresett arány.

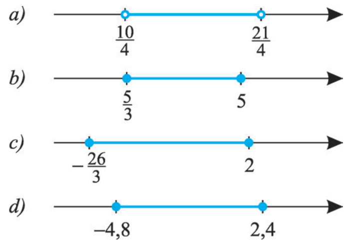
IV

Elsőfokú egyenlőtlenségek

1182.



1184.



1182. *a)* $x < \frac{5}{2}$; *b)* $x \geq 4$; *c)* $x > -3$; *d)* $x \leq \frac{6}{5}$.

1183. *a)* $a = 1; 2; 3; 4$. *b)* $b = -3; -2; -1; 0; 1$. *c)* $c = 2$.
d) Nincs ilyen egész szám. *e)* $e = 1; 2, 3; 4$. *f)* $f = -1; 0$.

1184. *a)* $\frac{10}{4} < x < \frac{21}{4}$; *b)* $\frac{5}{3} \leq x \leq 5$; *c)* $-\frac{26}{3} \leq x \leq 2$; *d)* $-4{,}8 \leq x < 2{,}4$.

1185. *a)* $a < 3{,}5$; *b)* $a > -\frac{40}{3}$; *c)* $b \geq \frac{1}{4}$; *d)* $m > -2$.

1186. *a)* $x > 10$; *b)* $x \leq 2$; *c)* $y \geq -1$; *d)* $y > 0$.

1187. *a)* $n \geq 12$; *b)* $z < 4$; *c)* $y \leq -21{,}75$; *d)* $e < 2{,}25$.

1188. *a)* $f > -\frac{5}{2}$; *b)* $r \leq 0$; *c)* $a > -1$; *d)* $b \leq 1$.

1189. *a)* Az első egyenlőtlenségből: $x < -5$. A második egyenlőtlenségből: $x < 1$. Összegezve: $x < -5$.
b) Az első egyenlőtlenségből: $x > 5{,}5$. A második egyenlőtlenségből: $x < 24$. Összegezve: $5{,}5 < x < 24$.
c) Az első egyenlőtlenségből: $x > -\frac{10}{9}$. A második egyenlőtlenségből: $x < -2$. Összegezve: nincs ilyen valós szám.
d) Az első egyenlőtlenségből: $x > 19$. A második egyenlőtlenségből: $x > 0{,}9$. Összegezve: $x > 19$.

1190. *a)* Az első egyenlőtlenségből: $a > 5$, a másodikból $a \leq 27$, így a közös megoldás: $5 < a \leq 27$.
b) A két egyenlőtlenség közös megoldása: $1 \leq b < \frac{3}{2}$.

1191. A megoldandó egyenlőtlenség: $150\,000 \leq 5x - 10\,000 \leq 160\,000$.
A megoldása: $32\,000 \leq x \leq 34\,000$, Így tehát az íróasztal darabja 32 000 Ft és 34 000 Ft között várható.

1192. $19 \leq 7t + 11 \leq 22$ egyenlőtlenség megoldása: $1{,}14 \leq t \leq 1{,}57$. A test 1,17s-nál több, és 1,54 s-nál kevesebb ideig mozgott.