Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
TÁMOP-3.1.1-11/1-2012-0001
XXI. századi közoktatás
(fejlesztés, koordináció) II. szakasz

MATEMATIKA

3. MINTAFELADATSOR

KÖZÉPSZINT

2015

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
1143 Budapest, Szobránc u. 6-8.
Telefon: (+36-1) 235-7200
Fax: (+36-1) 235-7202
www.ofi.hu

SZÉCHENYI 2020
MAGYARORSZÁG KORMÁNYA
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

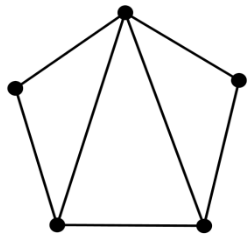
1.		
$H = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13\}$	1 pont	
$B = \{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$	1 pont	
$H \cap B = \{3; 5; 7; 11; 13\}$	1 pont	
$B \setminus H = \{2\}$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2.		
25 (%-kal)	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
48	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4.		
(16 + 4 + 1 =) 21	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
$x \mapsto 3x - 2$	2 pont	
A zérushely: $x = \frac{2}{3}$.	1 pont	*$x \approx 0,67$ is elfogadható.*
Összesen:	**3 pont**	

6.		
Egy megfelelő gráf rajza. (Öt pontja és hét éle van.) Például: 	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

7.		
(A harmadik tag) –6,	1 pont	
(a negyedik tag) 12.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

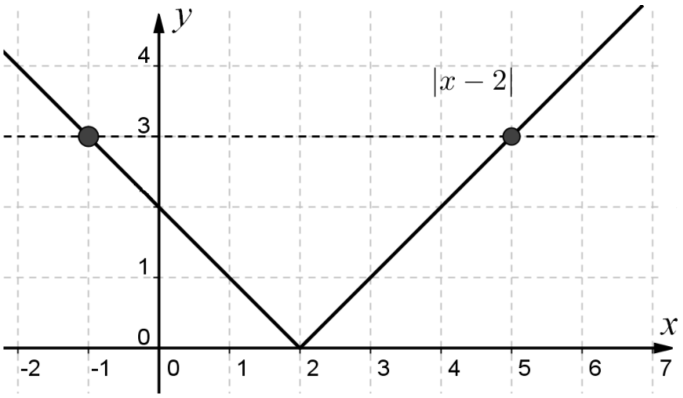
8.		
$\log_3(6x) = 4$	1 pont	
$6x = 3^4$	1 pont	
$x = \frac{81}{6}\left(= \frac{27}{2} = 13{,}5\right)$ (valóban pozitív szám)	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9.		
(A koszinusztételből:) $7^2 = 5^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot \cos\gamma$	1 pont	
$\cos\gamma = -\frac{1}{2}$	1 pont	
$\gamma = 120°$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

10.		
$\varnothing$	1 pont	*Más helyes jelölés is elfogadható.*
{2}, {3}, {2; 3}	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

11.		
y = 1,25 -ben	2 pont	*(0; 1,25) pontban*
Összesen:	**2 pont**	

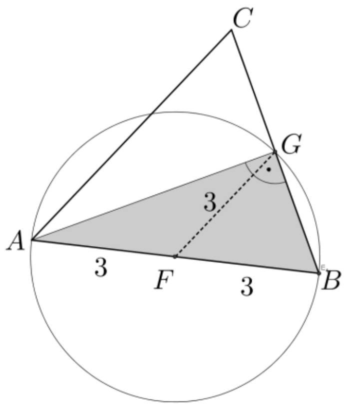
12.		
Az első félévben jegyeinek összege (4,25·8 =) 34.	1 pont	
Ha 4 darab jelest szerez még, akkor átlaga az év végén: $\frac{34+20}{12} =$	1 pont	
= 4,5.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

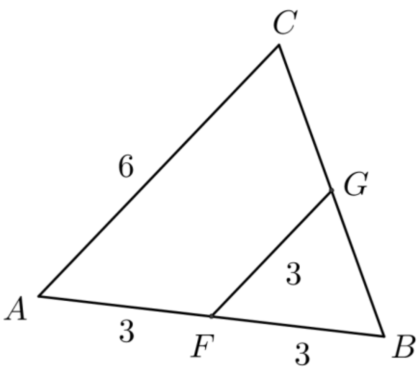
13. a) első megoldás		
Az $f(x) = \lvert x-2 \rvert$ függvény ábrázolása. 	2 pont	
Az $y = 3$ egyenes segítségével $x_1 = -1$ és $x_2 = 5$ értékek leolvasása.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel: $\lvert -1-2 \rvert = 3$, valamint $\lvert 5-2 \rvert = 3$ valóban.	1 pont	
$-1 < x < 5$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

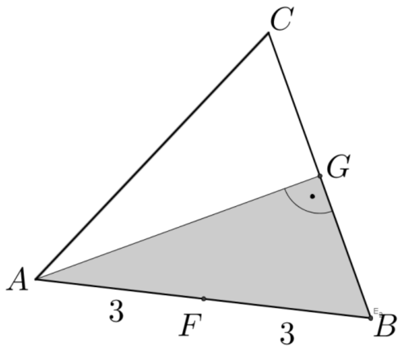
13. a) második megoldás		
$\lvert x-2 \rvert < 3$	1 pont	
(pontosan akkor, ha) $-3 < x-2 < 3$, így	2 pont	
$-1 < x < 5$	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

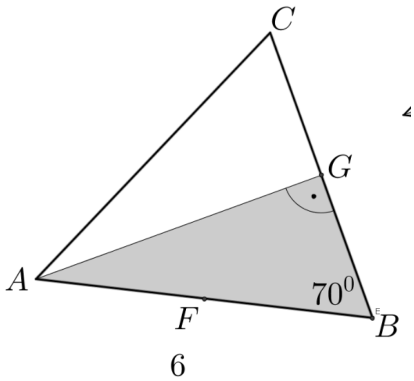
13. b) első megoldás		
Kikötés: $x \neq 2$	1 pont	
$\frac{2\cdot(2-x)}{x-2} < 0$	1 pont	
$\frac{-2\cdot(x-2)}{x-2} < 0$	1 pont	
$(x-2)$-vel egyszerűsítve ($x \neq 2$): $-2 < 0$.	1 pont	
Azonosságot kaptunk,	1 pont	
tehát $x \in [-5; 5]$ és $x \neq 2$.	1 pont	*Más helyes jelölés is elfogadható.*
Összesen:	**6 pont**	

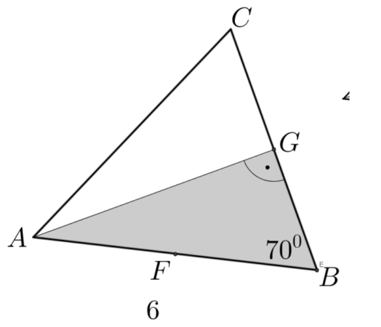
13. b) második megoldás		
Egy tört értéke pontosan akkor negatív, ha a számláló és a nevező különböző előjelűek.	1 pont	
Ha $4-2x>0$ és $x-2<0$, akkor	1 pont	
(mindkét egyenlőtlenségből) $2>x$.	1 pont	
Ha $4-2x<0$ és $x-2>0$, akkor	1 pont	
(mindkét egyenlőtlenségből) $2<x$.	1 pont	
Tehát a megoldás (a megadott intervallumon): $-5<x<2$ vagy $2<x<5$.	1 pont	*Más helyes jelölés is elfogadható.*
Összesen:	**6 pont**	

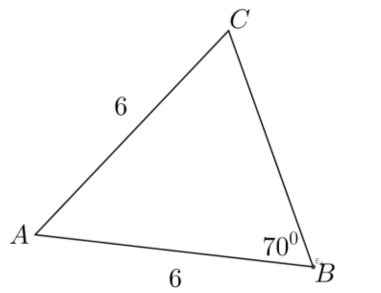
14. a)		
	1 pont	
Mivel *FA* = *FB* = *FG* = 3 cm,	1 pont	
így a Thalész-tétel miatt $AGB\angle = 90^\circ$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. b) első megoldás		
 *FG* középvonal,	1 pont	
így *AC* = 6,	1 pont	
ezért *AC* = *AB*, tehát a háromszög egyenlő szárú.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. b) második megoldás		
 *ABG* háromszög és *ACG* háromszög egybevágó,	1 pont	.
hiszen két-két oldaluk egyenlő hosszú, (*BG* = *CG* és *AG* közös) és a közbezárt szögük egyenlő (90°-os).	1 pont	*Az AG magasságvonal egyúttal oldalfelező merőleges (tehát tükörtengely) is.*
ezért *AC* = *AB*, tehát a háromszög egyenlő szárú.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. c) első megoldás		
 *ABG* derékszögű háromszögben $\cos 70^\circ = \frac{BG}{6}$.	1 pont	
$BG = 6 \cdot \cos 70° \approx 2{,}05$ (cm)	1 pont	
$\sin 70^\circ = \frac{AG}{6}$	1 pont	
$AG = 6 \cdot \sin 70° \approx 5{,}64$ (cm)	1 pont	
$T_{ABC} = \frac{BC \cdot AG}{2} = BG \cdot AG \approx$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\approx 11{,}57\ \text{cm}^2$.	1 pont	*Ha a vizsgázó nem ír mértékegységet, akkor ez a pont nem jár.* *Más, helyes kerekítések után kapott végeredmény is elfogadható.*
Összesen:	**6 pont**	

14. c) második megoldás		
 (*ABG* derékszögű háromszögben) $\cos 70^\circ = \frac{BG}{6}$.	1 pont	
$BG = 6 \cdot \cos 70^\circ \approx 2{,}05$ (cm)	1 pont	
$BC = 2 \cdot BG \approx 4{,}1$	1 pont	
$T = \frac{6 \cdot 4{,}1 \cdot \sin 70^\circ}{2} \approx$	2 pont	
$\approx 11{,}57\ \text{cm}^2$.	1 pont	*Ha a vizsgázó nem ír mértékegységet, akkor ez a pont nem jár. Más, helyes kerekítések után kapott végeredmény is elfogadható.*
Összesen:	**6 pont**	

14. c) harmadik megoldás		
	1 pont	
$BAC\angle = 180^\circ - (70^\circ + 70^\circ) =$	1 pont	
$= 40^\circ$.	1 pont	
$T = \frac{6 \cdot 6 \cdot \sin 40^\circ}{2} \approx$	2 pont	
$\approx 11{,}57\ \text{cm}^2$.	1 pont	*Ha a vizsgázó nem ír mértékegységet, akkor ez a pont nem jár. Más, helyes kerekítések után kapott végeredmény is elfogadható.*
Összesen:	**6 pont**	

15. a)		
Ha a második asztalnál n diák ült, akkor az elsőnél $n-1$ és a harmadiknál $n+2$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$	2 pont	
$n^2-7n=0$	1 pont	
$n_1=0$ nem lehetséges.	1 pont	
$n_2=7$ esetén	1 pont	
a második asztalnál 7 diák ült.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján. (Az első asztalnál 6, a másodiknál 7, a harmadiknál 9 diák ült, és az összefüggés fennáll.)	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

15. b) első megoldás		
Összesen $\binom{15}{2}$-féleképpen választhatunk ki két élt.	1 pont	
A két él közös csúcsa 6-féle lehet.	1 pont	
Egy csúcsból $\binom{5}{2}$-féleképpen választhatunk ki két élt (az így kiválasztott élpárokat még nem számoltuk eddig).	1 pont	
A keresett valószínűség: $p=\frac{6\cdot\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}}=$	1 pont	
$=\frac{60}{105}=\frac{4}{7}$.	1 pont	*Százalékban megadott helyes érték is elfogadható.*
Összesen:	**5 pont**	

15. b) második megoldás		
Az első él kiválasztása tetszőleges.	1 pont	
A második élt a fennmaradó 14 él közül választhatjuk (összes eset),	2 pont	$\binom{4}{2}=6$ *él nem csatlakozik a kiválasztott élhez,*
de csak 8 olyan van, amelyik csatlakozik ehhez az első élhez (kedvező esetek).	1 pont	*így 14 – 6 = 8 csatlakozik.*
A keresett valószínűség: $p=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

16. a)		
A) Igaz B) Igaz C) Hamis D) Hamis	3 pont	*Egy hiba esetén 2 pont, két hiba esetén 1 pont, három vagy 4 hiba esetén 0 pont jár.*
Összesen:	**3 pont**	

16. b)		
A hordóba naponta beletöltött víz mennyisége számtani sorozatot alkot: $a_1 = 1$, $d = 2$.	1 pont	
n nap alatt a hordóba töltött víz mennyisége: $\frac{1+(1+(n-1)\cdot 2)}{2}\cdot n$ liter.	1 pont	
(Azt a legkisebb pozitív n számot keressük, amelyre) $\frac{1+(1+(n-1)\cdot 2)}{2}\cdot n > 500$.	1 pont	
$n^2 > 500$	1 pont	
(Mivel n pozitív szám, így) $n > \sqrt{500} \approx 22{,}36$.	1 pont	
A hordó a 23. napon telik meg.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

16. c)		
0,7 annak a valószínűsége, hogy egy adott napon nem esik.	1 pont	
P(legalább 3 csapadékmentes) = = 1 – P(2 csapadékmentes) – P(1 csapadékmentes) – – P(0 csapadékmentes)	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
P(2 csapadékmentes) = $\binom{7}{2}\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}3^5$	1 pont	
P(1 csapadékmentes) = $\binom{7}{1}\cdot 0{,}7^1\cdot 0{,}3^6$	1 pont	
P(0 csapadékmentes) = $0{,}3^7$	1 pont	
A keresett valószínűség: $p \approx 1 - 0{,}0250 - 0{,}0036 - 0{,}0002 \approx$	1 pont	
$\approx 0{,}9712$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

17. a)		
A kocka testátlója a gömb átmérője.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A 8 cm élű kocka testátlója $8\sqrt{3}$ cm.	2 pont	
A gömb sugara ennek a fele, azaz ($4\sqrt{3}\approx$) 6,93 cm.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. b)		
A kocka térfogata $V = 8^3 = 512$ cm^3.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A gömb térfogata megközelítőleg: $\frac{4}{3}\cdot 6{,}93^3\pi \approx$	2 pont	
≈ 1393 cm^3.	1 pont	
Mivel $\frac{512}{1393}\approx 0,3676$,	1 pont	
így a kocka térfogata kb. 37%-a a gömb térfogatának.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. c)		
A gömb felszíne $A\approx 4\cdot 6{,}93^2\pi\approx$	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\approx 603{,}19$ cm^2.	1 pont	*Más, megfelelő és helyesen kerekített érték is elfogadható.*
Megközelítőleg 150,8 cm^2-t kell befesteni egy gömb esetén.	1 pont	
1 m^2 = 10 000 cm^2 (így a festék 50 000 cm^2 felület festésére elegendő).	1 pont	
50 000 : 150,8 $\approx$	1 pont	
$\approx$ 331,57	1 pont	
331 gömb befestésére elegendő a patron.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

18. a)		
Ha a számok átlaga 6, akkor összegük ($5\cdot 6 =$) 30.	1 pont	.
A móduszból legalább kettő van (és kettőnél több: 8 nem lehet, mert akkor nem lenne 7 a medián.)	1 pont	
Mivel a terjedelem 5, így a legkisebb szám a ($8-5=$) 3.	1 pont	
Az ötödik szám a ($30-8-8-7-3=$) 4	1 pont	
Az öt szám: 3, 4; 7; 8; 8. (Ez az egyetlen ilyen számötös.)	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. b)		
Az adatok átlaga $\left(\frac{5+6+7+8}{4}=\right)$ 6,5.	1 pont	
A szórás: $\sqrt{\frac{(5-6{,}5)^2+(6-6{,}5)^2+(7-6{,}5)^2+(8-6{,}5)^2}{4}}\approx$	1 pont	$\sqrt{\frac{5^2+6^2+7^2+8^2}{4}-6{,}5^2}$ *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\approx 1{,}12$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. c)		
Megfelelő egyjegyű szám csak a 8.	1 pont	
Megfelelő kétjegyű szám az 56, 76, 68, 88.	2 pont	*2 vagy 3 megfelelő szám megadása esetén 1 pont jár.*
Egy (legalább kétjegyű) szám pontosan akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegyéből álló kétjegyű szám osztható 4-gyel.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Megfelelő háromjegyű számot úgy kapunk, ha a megfelelő kétjegyűek elé írunk egy tetszőleges számjegyet (az 5, 6, 7 vagy 8 közül).	1 pont	
$(4 \cdot 4 =)$ 16 ilyen szám van.	1 pont	
Megfelelő négyjegyű számot úgy kapunk, ha a megfelelő háromjegyűek elé írunk egy tetszőleges számjegyet (az 5, 6, 7 vagy 8 közül).	1 pont	
$(4 \cdot 16 =)$ 64 ilyen szám van.	1 pont	
Összesen 85 megfelelő szám van.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	