Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
TÁMOP-3.1.1-11/1-2012-0001
XXI. századi közoktatás
(fejlesztés, koordináció) II. szakasz

MATEMATIKA

3. MINTAFELADATSOR

EMELT SZINT

2015

Az írásbeli vizsga időtartama: 240 perc

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet

1143 Budapest, Szobránc u. 6-8.
Telefon: (+36-1) 235-7200
Fax: (+36-1) 235-7202
www.ofi.hu

Széchenyi 2020
Magyarország Kormánya
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.

3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**

6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**

7. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.

8. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!

9. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.

10. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!

11. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $x^4 - 3(x-2)^2 - 12x + 8 = 0$

b) $\log_2 x^2 + \log_4 x^2 = 9 \cdot \log_8 5$

a)	6 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	12 pont	

2. Két hajó mozgását a derékszögű koordináta-rendszer első síknegyedében modellezzük ($x \geq 0$, $y \geq 0$). A koordináta-rendszerben 1 egység 1 km-t jelöl. Az egyik hajó az y tengely (0; 28) pontjából indul, átlagsebessége $v = 6$ km/h, útiránya az y tengely pozitív irányával 40°-os szöget zár be. A másik hajó ugyanakkor indul a koordináta-rendszer kezdőpontjából, átlagsebessége $w = 12$ km/h, útiránya az y tengely pozitív irányával β fokos szöget zár be. A hajók jó közelítéssel egyenes vonalú, egyenletes sebességű mozgást végeznek.

a) Határozza meg β értékét úgy, hogy a második hajó éppen találkozzon az elsővel! Számítsa ki a találkozásig eltelt időt is!

A hajók találkozásakor kiderült, hogy az első hajón 18-cal többen utaztak, mint a másodikon; valamint az első hajón az utasok átlagéletkora 46 év, a másodikon 38 év, és a két hajó együttes utazóközönségének az átlagéletkora 43 év.

b) Hányan utaztak az egyes hajókon?

a)	8 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	13 pont	

3.

a) Adottak a 2, 3 és 7 számjegyek. Válasszon melléjük egy negyedik számjegyet úgy, hogy az így kapott számjegyek segítségével felírható négyjegyű számok között legyen olyan, amely az összes egyjegyű prímszámmal osztható! (Mind a négy számjegyet fel kell használni.)

b) Milyen számot válasszunk a 2, 3 és 7 számok mellé, hogy az így kapott négy szám esetén minimális legyen a négy szám szórása?

a)	6 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	13 pont	

4.

a) Hány olyan 4 pontú, 3 élű gráf van, amelynek vannak többszörös élei?
(Két gráfot nem tekintünk különbözőnek, ha csúcsaik között van olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy mindkét gráfban ugyanazok a csúcsok vannak élekkel összekötve.)

Három szám $d = 1$ differenciájú növekvő számtani sorozatot alkot. Ha az első számot 5-tel csökkentjük, a harmadik számot pedig 23-mal növeljük (a középső szám változatlan marad), akkor az így kapott három szám egy mértani sorozat első, harmadik és ötödik tagjával egyenlő.

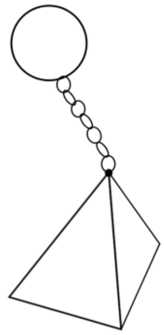
b) Számítsa ki az eredeti három számot, és a kapott mértani sorozat hányadosát!

a)	6 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	13 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a fontos tudnivalók között található üres négyzetbe!

5. Egy kulcstartó dísze tömör, könnyű fémből készült, háromszög alapú, nem szabályos gúla. A dísz lapjai ötféle színnel festhetők: pirosra, zöldre, lilára, kékre vagy sárgára. (A dísz lapjait megkülönböztetjük egymástól, és egy háromszöglap csak egyszínű lehet.)



a) Hányféleképpen színezhető a dísz, ha van kék **vagy** sárga lapja?
b) Hányféleképpen színezhető a dísz, ha van kék **és** sárga lapja is?

a)	6 pont	
b)	10 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a fontos tudnivalók között található üres négyzetbe!

6.

a) Egy templom nagyméretű toronyóráján a kismutató 56 cm, a nagymutató 92 cm hosszú.
Mekkora a mutatók végpontjainak távolsága 6 óra 10 perckor?

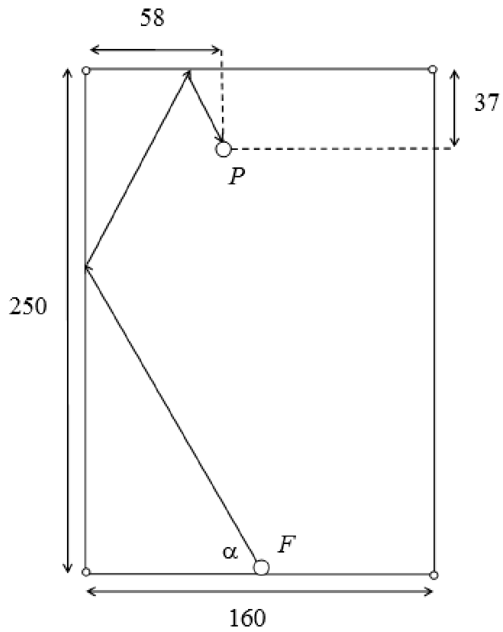
b) Igaz-e az alábbi állítás? Válaszát indokolja!
„Ha az *ABC* háromszögben $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, akkor a háromszög egyenlő szárú.”
(α és β hagyományos módon a háromszög *A*, illetve *C* csúcsánál lévő szögét jelöli.)

c) Egy téglatest alaplapja az *ABCD*, fedőlapja az *EFGH* téglalap; az *AE*, *BF*, *CG*, *DH* élek párhuzamosak. A téglatest éleinek hossza *AB* = 3, *AD* = 4, *AE* = 2 egység.
Határozza meg az *AE* egyenes és a *BH* testátló távolságát!

a)	5 pont	
b)	6 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a fontos tudnivalók között található üres négyzetbe!

7. Az ábrán egy biliárdasztal oldalait láthatjuk, a jelzett hosszúságok cm-ben szerepelnek. A fehér golyó az asztal alsó szélének *F* felezőpontjában van, a piros golyó a *P* pozícióban. A fehér golyót úgy kell meglökni, hogy az asztal baloldali, majd szemközti oldalának érintése után eltalálja a pirosat.



a) Határozza meg, mekkora α nagyságú kezdőszöggel kell meglökni a fehér golyót! (A golyókat pontszerűnek tekinthetjük, valamint feltételezzük, hogy a falnak való ütközéskor a golyó beesési és visszaverődési szöge megegyezik.)

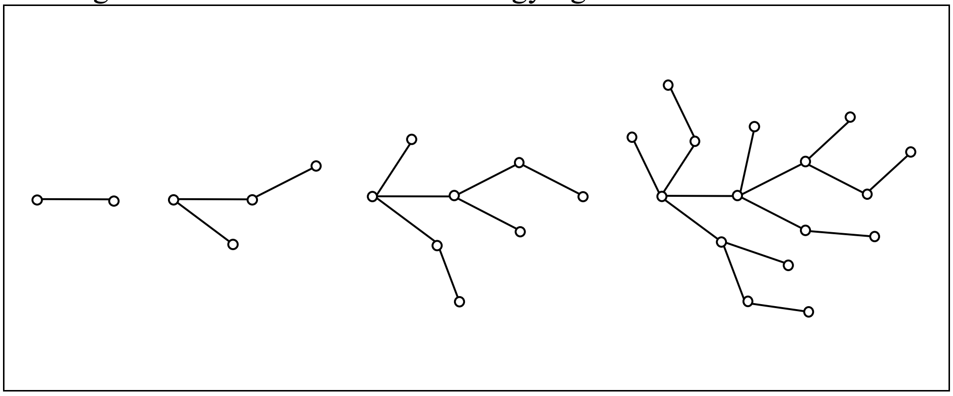
András és Béla évek óta biliárdoznak. Számos mérkőzésük összesítése alapján András kicsivel jobb játékos, 5 játszmájukból átlagosan 3-at nyer meg, míg Béla 2-t.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 6 mérkőzésükből András 3-nál többször győz? Válaszát 2 tizedesjegyre kerekítve adja meg!

a)	9 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a fontos tudnivalók között található üres négyzetbe!

8. Egy modell szerint a tengeri moszat ágainak időegységenkénti számát az $a_{n+1} = 2a_n + 1$ $(n \geq 1)$ rekurzív összefüggés írja le, ahol a_n a moszat ágainak számát jelenti az n-edik időegység végére. (A növekedési modellt úgy képzelhetjük el, hogy a moszatnak minden időegység alatt egy új ága nő, továbbá minden régi ága is egy-egy újabb ágat növeszt. Az ábrán $a_1 = 1$, azaz egyetlen kezdeti ág esetén a következő három időegység alatti növekedést szemléltettük.)



a) Igazolja, hogy ha az első időegység végére egy ága van a moszatnak ($a_1 = 1$), akkor az n-edik időegység végére a moszat ágainak száma $a_n = 2^n - 1$!

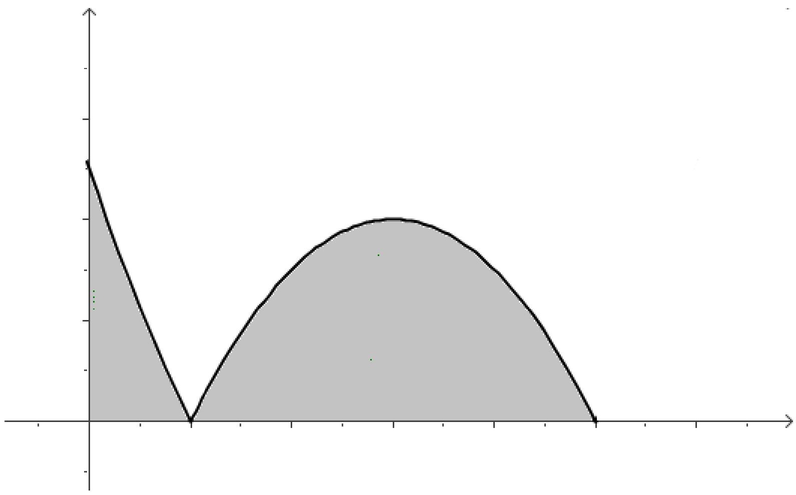
b) A moszat ágainak száma melyik időegység végére éri el a 800-at?

c) Határozza meg a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{2^{n-3} - 17}$ határértéket!

a)	8 pont	
b)	4 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a fontos tudnivalók között található üres négyzetbe!

9. Egy folyóparti kettős földgát két homokból épített töltésből áll, melyeket egymás mellé építettek. A töltés egy részének a keresztmetszetét jó közelítéssel az $x \in [0; 5]$, $h(x) = 0{,}5|x^2 - 6x + 5|$ függvény írja le. (A gátak x szélessége és h magassága egyaránt méterben adott.) A kettős gátnak a folyóparttal párhuzamos, kb. kilenc méteres szakasza lényegében egyenesnek tekinthető.



a) Hány köbméter földre volt szükség ennek a kilenc méteres szakasznak a kiépítéséhez? Válaszát egész értékre kerekítve adja meg!

b) Határozza meg a $h(x)$ függvény $x = 4$ abszcisszájú pontjába húzott érintőjének egyenletét!

a)	11 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	maximális pontszám	elért pontszám	maximális pontszám	elért pontszám
I. rész	1.	12		**51**	
	2.	13			
	3.	13			
	4.	13			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum

javító tanár