Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
TÁMOP-3.1.1-11/1-2012-0001
XXI. századi közoktatás
(fejlesztés, koordináció) II. szakasz

MATEMATIKA

2. MINTAFELADATSOR

EMELT SZINT

2015

Az írásbeli vizsga időtartama: 240 perc

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet

1143 Budapest, Szobránc u. 6-8.
Telefon: (+36-1) 235-7200
Fax: (+36-1) 235-7202
www.ofi.hu

SZÉCHENYI 2020
Európai Unió
Európai Szociális Alap
Magyarország Kormánya
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.

3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**

6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**

7. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.

8. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!

9. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.

10. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!

11. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2 \cdot \sin^2 x - 5 \cdot \sin x - 3 = 0$

b) $\sqrt{2x-6} + |x-2| = 1$

a)	6 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	12 pont	

2. Az **A**, **B** és **C** kisvárosokban egészségügyi felmérést készítettek a felnőtt lakosság körében. Megállapították, hogy az **A** városban az átlagos testmagasság jó közelítéssel 168,2 cm, **B**-ben 167,9 cm és **C**-ben 167,2 cm. Az adatok elemzésekor kiderült, hogy az **A**-beli és **B**-beli lakókra együttesen kiszámolt átlagos testmagasság 168,0 cm, az **A** és a **C** város lakóié együttesen 167,8 cm.
Megvizsgálták a **B** és a **C** város lakosainak eredményeit is, de sajnos az együttes átlagmagasságra vonatkozó adatok elkallódtak.

a) Számítsa ki a három város összes felnőtt lakójának átlagos testmagasságát!
Válaszát cm-ben, egy tizedesjegy pontossággal adja meg!

A felmérés alapján az is kiderült, hogy az **A** városban a felnőttek közelítőleg 20%-a, míg a **B** városban a felnőttek kb. 15%-a sportol rendszeresen. Az egyik élelmiszerboltban egy adott időpontban hat felnőtt vásárol egyszerre, öten az **A** városból és egy személy **B**-ből.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy közülük pontosan ketten sportolnak rendszeresen?

a)	8 pont	
b)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

3. A derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(-11; 2)$, $B(-9; -1)$ és $C(-8; 1)$ pontok. A C centrumú, $\lambda = -3$ arányú középpontos hasonlóság végrehajtása után az A pont képe D, a B pont képe pedig E.

a) Számítsa ki a D és E pontok koordinátáit!

b) Határozza meg a BAC szöget!

c) Igazolja, hogy a BCD és ACE háromszögek területe megegyezik!

a)	4 pont	
b)	4 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	13 pont	

4. Adott az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 + 1$ és a g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 2x + 3$ függvény.

a) Határozza meg az $f \circ g$ függvény hozzárendelési szabályát!
(A polinomfüggvény fokszám szerint rendezett alakját adja meg!)
Az $f \circ g$ összetett függvény definíciója: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

b) Számítsa ki a $g \circ f$ függvény $x = 1$ helyen felvett helyettesítési értékét!

c) Állapítsa meg a $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g}{f}$ határértéket, és adjon meg egy olyan x_0 küszöbértéket, amelynél nagyobb x-ekre $\dfrac{g}{f}$ 0,01-nál jobban megközelíti a határértéket!

a)	2 pont	
b)	2 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	10 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a fontos tudnivalók között található üres négyzetbe!

5. Egy korábbi munkából megmaradt, háromszög alakú bútorlap oldalainak közelítő méretei: 200 cm, 120 cm és 160 cm. A bútorlapból egy félkör alakú asztallapot vágnak ki a műhelyben úgy, hogy a félkör átmérője a leghosszabb oldalra illeszkedik.

a) Legfeljebb mekkora lehet az így kapott félkör alakú asztallap sugara?
Válaszát egész centiméter pontossággal adja meg!

Az O középpontú kör sugara $r = 5$ cm. Felveszünk egy körön kívüli P pontot úgy, hogy $OP = 13$ cm, és a P ponton át húzott e egyenessel elmetsszük a kört. A P-hez közelebbi metszéspontot jelölje A, a P-től távolabbit B.

b) Mekkora az O pont és az e egyenes távolsága, ha $PA = 10$ cm?

a)	8 pont	
b)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a fontos tudnivalók között található üres négyzetbe!

6. Bonifác mester, egy kisváros pékmestere minden nap hajnalban kel, és 12 órát tölt a műhelyében. Idejének egy részében nehéz fizikai munkát végez, a fennmaradó időben pihen. Saját becslése szerint a naponta elkészített péksütemények $M(t)$ számát a munkavégzésre fordított t óra függvényében jó közelítéssel adja meg a következő képlet: $M(t) = t^2(12-t)$.

a) A napi 12 órából mennyi időt fordítson a mester fizikai munkára, illetve pihenésre, hogy a lehető legtöbb péksüteményt tudja elkészíteni?

Pisti minden nap két péksüteményt vásárol, és a mesterre bízza, hogy ő éppen milyen összeállítást ad neki. Egyik nap a mester nyitáskor kifliket és zsömléket tett ki a polcokra. Ha aznap Pisti az első vásárló, és a mester véletlenszerűen ad két péksüteményt, akkor $\frac{3}{29}$ annak a valószínűsége, hogy két kiflit kap.
Az első vásárló 10 zsömlét megvásárolt a polcról. Ha Pisti ezután tér be vásárolni, akkor már ugyanakkora valószínűséggel kap két kiflit, mint két zsömlét.

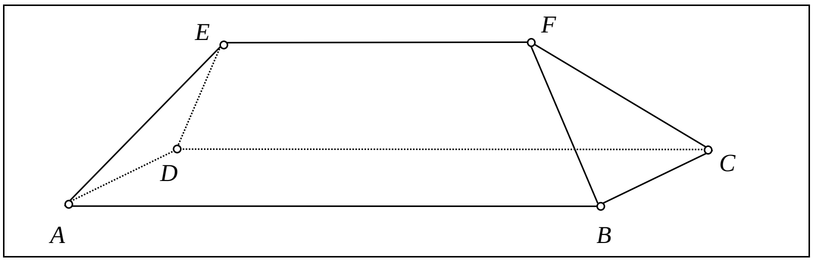
b) Hány kifli volt kezdetben a polcokon?

a)	7 pont	
b)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a fontos tudnivalók között található üres négyzetbe!

7. Egy családi ház tetőterének alapja téglalap, a tető gerince a téglalap középvonalának az alapra merőleges síkjában helyezkedik el.

Az ábra szerinti *ABCD* téglalap méretei: *AB* = 10 méter és *BC* = 8 méter, *EF* hossza 6,8 méter, az *EF* gerincet az alappal összekötő gerendák méretei pedig: *EA* = *ED* = *FB* = *FC* = 5,8 méter.



A lakók a tetőteret tárolásra használják, így itt – alapos szigetelés után – bizonyos mértékben télen is fűteni kell. A fűtés tervezésekor fontos tudni, mekkora a kifűtendő térfogat.

a) Mekkora a tetőtér térfogata? Válaszát m^3-ben, egész értékre kerekítve adja meg!

A lakók télen a tetőtér hőmérsékletét egyenletes, 15°C-os hőmérsékleten tartják. Sajnos egy téli napon a fűtés elromlott, így a kinti, állandónak tekinthető, –5°C-os környezeti hőmérsékleten a jól hőszigetelt tetőtér hőmérséklete fokozatosan csökkeni kezdett. A tervezőmérnök kiszámolta, hogy a tetőtér T hőmérsékletét az idő függvényében jó közelítéssel a $T = T_k + A \cdot 0{,}9^{\frac{t}{3}}$ összefüggés írja le, ahol T_k (a külső környezet hőmérséklete) és A °C-ban megadott állandók, a t pedig órában mérve a lehűlés kezdete óta eltelt időt jelenti.

b) A kezdeti feltételek ismeretében határozza meg a képletben szereplő T_k és A állandók értékét! Mennyi idő múlva éri el a tetőtér hőmérséklete a kritikus +3°C-ot?

a)	10 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a fontos tudnivalók között található üres négyzetbe!

8. **a)** Mely helyen veszi fel a $p(x) = (2x - 3)^8$ polinom a 256 értéket?

A $p(x)$ polinom kifejtett alakjában a konstans tag mellett az x^8, x^7, x^6, …, x^2 és x hatványok szerepelnek, a megfelelő együtthatókkal szorozva.

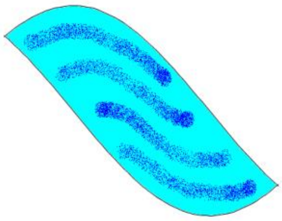
b) Számítsa ki az x^5 tag együtthatóját!

c) Igazolja, hogy az $a_n = 4^n - 3n - 1$ képlettel megadott sorozat minden tagja osztható 9-cel!

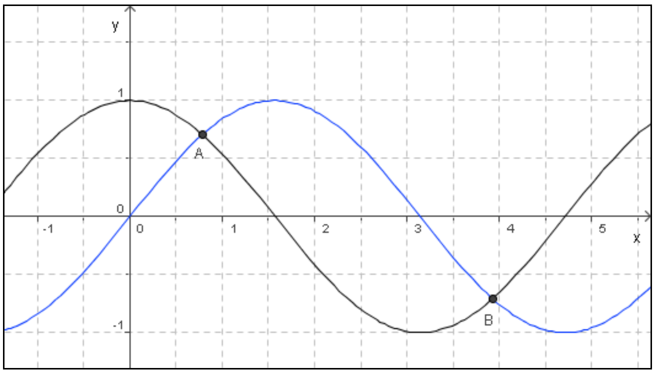
a)	3 pont	
b)	4 pont	
c)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a fontos tudnivalók között található üres négyzetbe!

9. Az ábrán egy cég által tervezett, ún. „csepp” logó látható.



Ezt az alakzatot az alábbi grafikonon látható *A* és *B* pontok közötti
$a(x) = \sin x$ és $b(x) = \cos x$ egyenletű függvénygörbék határolják.



a) Határozza meg az *A* és a *B* pont koordinátáit!
Mekkora a „csepp” logó területe, ha a koordináta-rendszerbeli 1 egység a valóságban 3 cm-nek felel meg?

A cég egyszerű emblémákat, kitűzőket, ajándéktárgyakat is tervez. Az egyik ilyen tárgy egy zászló alakú ajándék, amelyen a zászló négy vízszintes sávból áll. A sávok mindegyike egymástól függetlenül négy színnel (piros, zöld, kék, sárga) színezhető, és egy-egy szín többször is használható. (Egy-egy sávot egyszerre csak egy színnel színezünk, és a szomszédos sávok is lehetnek azonos színűek.)

b) Hányféle zászló készíthető, ha a megrendelő kérése alapján az alsó vagy a felső sáv közül legalább az egyiknek sárgának kell lennie?

a)	11 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	maximális pontszám	elért pontszám	maximális pontszám	elért pontszám
I. rész	1.	12		**51**	
	2.	16			
	3.	13			
	4.	10			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum

javító tanár