Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
TÁMOP-3.1.1-11/1-2012-0001
XXI. századi közoktatás
(fejlesztés, koordináció) II. szakasz

MATEMATIKA

1. MINTAFELADATSOR

EMELT SZINT

2015

Az írásbeli vizsga időtartama: 240 perc

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
1143 Budapest, Szobránc u. 6-8.
Telefon: (+36-1) 235-7200
Fax: (+36-1) 235-7202
www.ofi.hu

SZÉCHENYI 2020
MAGYARORSZÁG KORMÁNYA
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.

3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**

6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**

7. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.

8. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!

9. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.

10. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!

11. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. **a)** Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$2\cdot 4^x - 5\cdot 2^x - 3 = 0\,.$$

Egy dobókockával ötször dobtunk. A dobott számok egyetlen módusza 2, átlaga 3,6.

b) Határozza meg a dobott számokat!

a)	5 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	11 pont	

2. Két kerékpáros csapat többnapos túrán vesz részt. Reggel 9 órakor az első csapat az *A*, a második a *B* tájékozódási ponttól indul, s mindkettő ugyanazon az úton, azonos irányban haladva a *C* pont felé tart. Az előre kijelölt túraútvonalon az *A*-tól *B*-ig tartó útszakasz hossza 20 km, majd *B*-ből továbbhaladva további 30 km után következik a *C* tájékozódási pont.
A csapatok egyenletes sebességgel haladnak.
Az első csapat átlagsebessége 20 km/h, a másodiké 14 km/h.

a) Mennyi idő múlva lesz az első csapat kétszer olyan távol a *C* ponttól, mint a második? (A *C* pontnál egyik csapat sem áll meg, hanem továbbkerekeznek.)

Az első csapatban a tagok háromnegyede fiú, a lányok $\frac{2}{5}$ része szemüveges. A második csapatban – amelynek létszáma éppen kétszerese az első csapaténak – a résztvevők 40 %-a lány, és közülük minden második hord szemüveget.

b) A két csapat összes túrázójának hányadrésze szemüveges lány?

a)	10 pont	
b)	4 pont	
Ö.:	14 pont	

3. A derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsai: $A(-8; 24)$, $B(48; 16)$, $C(0; 0)$. Jelölje D a háromszög CF súlyvonalának C-hez közelebbi negyedelő pontját!

a) Mekkora szöget zárnak be az $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{AF}$ vektorok?

b) Számítással igazolja, hogy a C pont az AB átmérőjű körön van!

a)	9 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	14 pont	

4. A Pepita Sakkegyesület benevezi csapatát egy ifjúsági versenyre. Az egyesületnek 10 versenyző-je van ebben a korosztályban: 6 lány és 4 fiú. A fiúk közül Attila és Balázs testvérek.

a) Hányféleképpen alakítható ki a tíz versenyzőből olyan hatfős sakkcsapat, amelynek a két testvér közül legalább az egyikük tagja?

A hat lány között három különböző ajándékot sorsolnak ki. Kétféle sorsolási mód lehetséges:

(I.) Mindenki legfeljebb egy ajándékot kaphat.
(II.) Egy személy több ajándékot is kaphat.

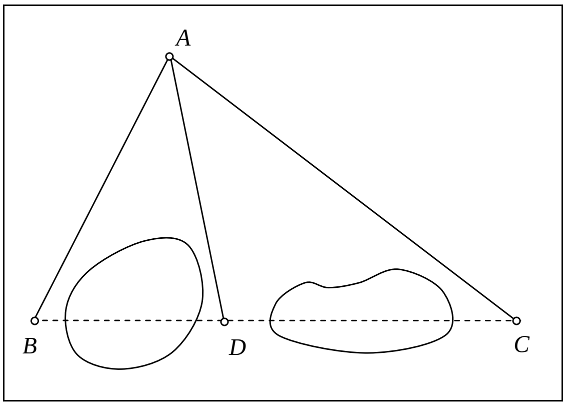
b) Mekkora eséllyel kap ajándékot az első (I.), illetve a második (II.) esetben Kati, az egyik csapattag?

a)	4 pont	
b)	8 pont	
Ö.:	12 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a fontos tudnivalók között található üres négyzetbe!

5. Egyetemisták egy csoportja geodéziai (földmérési) gyakorlatot végez sík terepen. Az ábra szerinti *A*, *B* és *C* tereptárgyak távolságai közül megmérték az *AB* és *AC* távolságokat, ezek hosszára jó közelítéssel *AB* = 42 méter és *AC* = 63 méter adódott. Szeretnék megtudni a *BC* távolság értékét, de ez közvetlenül nem mérhető. Ezért kijelölték azt a *D* pontot a *BC* oldalon, melyre *AD* az *ABC* háromszög belső szögfelezője. A mérhető *DA* szakasz hosszára 39 métert kaptak.



a) Számítsa ki a *BC* szakasz hosszát, valamint a *BAC* szög nagyságát!
A *BC* szakasz hosszát méterben, egészre kerekítve adja meg!

A mérés után két diák vitába bonyolódik. Dénes szerint a háromszög belső szögfelezője akár mindkét közrefogó oldalnál is hosszabb lehet; míg Csilla azt állítja, hogy a szögfelező az egyik közrefogó oldalnál lehet hosszabb, de mindkettőnél már nem.

b) Melyiküknek van igaza? Válaszát indokolja!

a)	10 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a fontos tudnivalók között található üres négyzetbe!

6. Enikő három különböző pozitív számra gondolt, és ezekről az alábbi információkat árulta el:

I. A számok tekinthetők egy növekvő számtani sorozat három szomszédos tagjának.
II. A három szám közül a legnagyobb és a legkisebb tag köbének összege 1072.
III. A legnagyobb és a legkisebb tag négyzetének különbsége éppen 32-szerese a számtani sorozat differenciájának.

a) Határozza meg a három számot!

Egy másik alkalommal Enikő négy különböző, egyjegyű pozitív egész számra gondolt, és segítségképpen csak annyit árult el, hogy a legnagyobb gondolt szám a 9, és a számok mediánja 5. Feri ezekből az információkból nem tudja kitalálni a gondolt számokat, ezért tippelnie kell.

b) Mekkora valószínűséggel találja el Feri egy próbálkozással Enikő számnégyesét, ha a feltételeknek megfelelő számnégyessel próbálkozik?

a)	10 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a fontos tudnivalók között található üres négyzetbe!

7. Egy asztalon álló doboz alakja olyan négyzet alapú, egyenes hasáb, amelyben az oldalél hossza kétszerese az alapél hosszának. A doboz egy 30 cm átmérőjű, félgömb alakú tállal éppen lefedhető úgy, hogy a tál alsó széle az asztalon fekszik, és érinti a doboz egyik négyzetlapjának négy csúcsát. (A félgömb és a hasáb tengelye egybeesik.)

a) Milyen hosszúak a doboz élei?

Egy négyzet alapú, egyenes hasáb éleinek hossza (centiméterben mérve) egész szám. A hasáb felszínének és térfogatának a mérőszáma egyenlő.

b) Milyen hosszúak a hasáb élei?

a)	7 pont	
b)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a fontos tudnivalók között található üres négyzetbe!

8. A valós számok halmazán értelmezett *f, g* és *h* függvényekről a következőket tudjuk:

I. A *g* és *h* elsőfokú függvények képei egymásra merőleges egyenesek.
II. A két egyenes az *y* tengelyt a (0; 3) pontban metszi.
III. A $g \circ h$ függvény zérushelye $x = 9$.
A $g \circ h$ összetett függvény definíciója: $(g \circ h)(x) = g(h(x))$.

a) Adja meg a *g* és *h* függvények hozzárendelési szabályát, és igazolja, hogy az $f = g \cdot h$ függvény hozzárendelési szabálya $f : x \mapsto -x^2 + \frac{9}{2}x + 9$!

b) Adja meg az *f* függvény $x = 2$ abszcisszájú pontjába húzott érintőjének az egyenletét!

a)	11 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a fontos tudnivalók között található üres négyzetbe!

9. **a)** Igazolja, hogy szomszédos pozitív egész számok reciprokainak különbsége egyenlő a számok szorzatának reciprokával! (A nagyobbik számból vonjuk ki a kisebbet.)

Tekintsük az $\frac{1}{10\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 16}+\dots$ végtelen sort. (A második tagtól kezdve minden nevezőben az előző nevező tényezőinél 2-vel nagyobb számok szerepelnek.)

b) Igazolja, hogy a sor n-edik részletösszegének értéke $S_n=\frac{n}{100+20n}$.

(S_n a sor első n tagjának összegét jelöli.)

c) Határozza meg a $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ határértéket!

a)	3 pont	
b)	10 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	maximális pontszám	elért pontszám	maximális pontszám	elért pontszám
I. rész	1.	11		**51**	
	2.	14			
	3.	14			
	4.	12			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum

javító tanár