Az ellenőrzés problémaköre az érettségi vizsgán

A tanulmány a TÁMOP 3.1.1-11/1-2012-0001 XXI. századi közoktatás (fejlesztés, koordináció) II. szakasz keretében készült.

Csapodi Csaba

Koncz Levente

Kósa Tamás

Orosz Gyula

2015.

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
1143 Budapest, Szobránc utca 6-8.
Telefon: (+36-1) 235-7200
Fax: (+36-1) 235-7202
www.ofi.hu

SZÉCHENYI 2020
Magyarország Kormánya
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Tartalom

„Javításra idődet ne sajnáld. A javítás is alkotás. Gyöngy, gyémánt, ha csak borsónyi is, értékesebb magánál a koronánál. S ha egy nap csak egy gyémántszemet alkotsz is, egy mondatban vagy csak egy szóban: gyűrűbe illesztettél drágakövet.”

(Gárdonyi Géza)

Néhány bevezető gondolat

Az ellenőrzés minden írásbeli érettségi vizsgán megjelenő, ***problematikus témakör***. A nehézségét elsősorban a ***definiálatlanság*** okozza: maga a fogalom értelmezése, az alkalmazási kör kérdése, a végrehajtás módja – ezek a feladatmegoldás nem egyértelműen, nem egységesen megállapított részterületei.

Összegyűjtöttük és részletesen elemeztük a 2005 óta tartó kétszintű érettségi vizsgák ellenőrzéssel kapcsolatos feladat- és megoldásrészleteit. A vizsgák hivatalos javítási útmutatóiból idézett nagyszámú példa talán világosabbá teszi a mondanivalónkat, de így az anyag meglehetősen hosszú terjedelmű lett. Ezért az áttekinthetőséget egyrészt ***sorszámozással*** próbáltuk megőrizni – ezek alkalmanként egy-egy jól körülhatárolt problémakört azonosítanak. Másrészt a gyűjtőmunka és az elemzés során körvonalazódott fontosabb megállapításokat, javaslatokat ***kiemeltük***. Ezek kivonatoló, összefoglaló jellege talán könnyebben emészthetővé és jobban áttekinthetővé teszi az írást.

Jelenleg nem található közismert, könnyen elérhető, a témához kapcsolódó szakirodalom, hiánypótló munkánk ezért elsősorban ***tanár kollégáink számára készült***. Célunk egyrészt az volt, hogy a témakör kissé képlékeny fogalmait, eljárásait igyekezzünk egységesíteni, és ahol lehet egyértelműsíteni; másrészt a példák elemzésével, bizonyos következtetések megfogalmazásával a tanítási gyakorlaton keresztül segítsük a diákok felkészítését. A pontozási útmutatók elemzésével jobban megérthetjük az értékelő-javító munka „szellemiségét”, ezáltal megkönnyíthetjük az elkövetkező dolgozatok értékelését; a tanárok segítségével pedig fejleszthető a vizsgázók írásbeli munkájának, a megoldások kidolgozásának a színvonala.

Mivel az ***ellenőrzés*** témaköréhez szorosan kapcsolódnak az ***eredmény***, ***válasz***, ***pontos érték*** fogalmak, így néhány olyan részletet is kigyűjtöttünk, amelyek erre a tágabb feladatkörnyezetre jellemzőek. Igyekeztünk módszeresen, kategorizálva feldolgozni az anyagot, de az ***egész témakörre jellemző egyfajta kettősség***. A szakmai igényesség nagyfokú precizitást követelne meg, de a téma jellege miatt ez nem mindig lehetséges – gondoljunk például a szereplő fogalmak definiálatlanságára. Ugyanakkor az érettségi vizsgán pontokat lehet veszíteni a helytelen vagy hiányos ellenőrzéssel, a dolgozat eredményének pedig komoly tétje van – így a kérdéskört gyakorlati szempontok szerint is meg kell vizsgálnunk.

A témában gyakran csak körülírással megadott, nem egyértelműen definiált fogalmakkal dolgozunk. Az *ellenőrzés*, *eredmény*, *válasz*, *pontos érték* fogalmak tartalma függhet a közmegegyezéstől, a helyi módszertani kultúráktól, a tanítási hagyományoktól – a definiálatlanság (néha definiálhatatlanság) tehát a téma jellegéből adódik. Ilyen feltételek mellett a problémákra nem mindig lehet egységes, megnyugtató választ adni, és ***sok esetben a következtetéseink sem lesznek egyértelműek***. Észrevételeket, megállapításokat, több esetben javaslatot is megfogalmazhatunk, de lehetnek olyan tananyagelemek, amik „rendberakása”, egyértelműsítése nem sikerül. (Még a nem túlságosan bonyolult problématípusok esetén is előfordul, hogy közvetlen kollégáink tőlünk eltérő véleményt fogalmaznak meg!) Néhány esetben már az is eredménynek számít, ha azonosítjuk a problémát, illetve a probléma mélységét; vagy ha a problémák kezelésére többé-kevésbé elfogadható javaslatot sikerül tenni…

A kétszintű érettségi vizsga bevezetésének korai éveiben a javítási útmutatók gyakran következetlenek, és néha egymásnak is ellentmondók az ellenőrzés témakörében. Ez csak részben indokolható a téma jellegével. Az utóbbi évek útmutatóiban egyes kérdéskörökben viszont ***érezhetően egységesedik a gyakorlat***. Az elemzéssel erősíteni kívánjuk ezt a folyamatot – vagyis hogy az érettségi vizsgán egységes, következetes, kiszámítható és természetesen szakmailag jól indokolható gyakorlat alakuljon ki. (Az érettségi visszacsatoló funkciója miatt ez a gyakorlat várhatóan a tanításban is érvényesül majd.)

A ***felhasznált szakirodalomban*** a klasszikus és az újabb típusú, kétszintű érettségi vizsgával kapcsolatos, ismert írásokat sorolunk fel.

Felhasznált szakirodalom:

[1] Lukács Ernőné – Rábai Imre (1974): Feladatok és megoldások, Gondolat Kiadó, Budapest.[21-22., 35-36., 55-58. oldalak]

[2] Rábai Imre (1985): Készüljünk együtt matematikából! Gondolat Kiadó, Budapest.[31-33., 43-45. oldalak]

[3] Dr. Kántor Sándor szakdidaktikai írásai a feladatok és megoldások konvencióiról (pl.: http://matekold.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Kantor_Sandor/index.html

[4] Dr. Kántor Sándor (2010): Az érettségi példasorok hibajegyzéke

[5] Frigyesi Miklós (2015): Az ellenőrzésről (szakanyag)

[6] Katz Sándor (2002): Egyenletek ekvivalenciája, Tanári Kincsestár, szeptember, Raabe Kiadó, Budapest.

Felhasználtuk az Oktatási Hivatal honlapján szereplő hivatalos feladatsorokat és javítási útmutatókat.

1. Az ellenőrzés fogalma

Az ellenőrzés fogalmát többféleképpen használjuk a gyakorlatban. Ezek a „definíciók” persze nem egymást kizárók, hasonlítanak is egymásra, de az átfedések mellett kisebb-nagyobb eltérések is vannak közöttük.

A matematika feladatok egy részét egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek láncolatának felírásával oldjuk meg. A megoldás záró lépéseként meg kell győződnünk arról, hogy a feladat kérdésére adott válaszunk megfelelő ([5] alapján ezt elvileg mindig meg kell tenni.)

A megoldás befejezésével, az *ellenőrzés* elvi kérdésével kapcsolatban a szakirodalom egységes.

Az A, B egyenletek esetén az $A = 0 \;\Rightarrow\; B = 0$ következmény-átalakítás során hamis gyökök keletkezhetnek, így az eredményül kapott számokat ***ellenőrizni*** kell. Ekkor a $B = 0$ megoldásait ***visszahelyettesítjük*** az eredeti $A = 0$ egyenletbe, s meggyőződünk arról, hogy teljesül-e az egyenlet.

Az $A = 0 \;\Leftrightarrow\; B = 0$ ekvivalens átalakítás során nem veszítünk gyököt, és nem kapunk hamis gyököt sem. Ekkor a kapott megoldások (és csak azok, azonos multiplicitással) az eredeti egyenletnek is gyökei. A megoldást kétféleképpen fejezhetjük be. Alkalmazhatjuk most is a ***visszahelyettesítést***, vagy ***megállapíthatjuk az ekvivalens átalakítások tényét***.

1.1. Az ellenőrzés szűkebb értelmezése – „ellenőrzés = visszahelyettesítés”

Ebben az értelmezésben az ellenőrzés a visszahelyettesítés végrehajtását jelenti.

1.2. Az ellenőrzés tágabb értelmezése

Ebben az értelmezésben a visszahelyettesítést, illetve az ekvivalenciára való hivatkozást együttesen nevezik ellenőrzésnek. Ekkor tehát az ellenőrzés nem más, mint „meggyőződés arról, hogy a feladat kérdésére az adott válasz megfelelő” ([5]).

Megjegyzés:
A tanárok körében nem egységes a szóhasználat, mindkét értelmezésnek vannak hívei. ***A javítási útmutatókban is mindkét értelmezéssel találkozunk***.
A vizsgázói gyakorlat általában letisztult, egységes:
– következmény-átalakítások során visszahelyettesítünk (nem is tehetünk mást);
– ekvivalens átalakítások alkalmazásakor pedig vagy megállapítjuk ennek a tényét, vagy szintén alkalmazhatjuk a visszahelyettesítést.
A vizsgáztatói gyakorlat ezzel összhangban van. Például a javítási útmutatókban a kikötés (alaphalmaz meghatározása) és az ekvivalenciára való hivatkozás 1-1 pontját visszahelyettesítés esetén is megkapja a vizsgázó.

Egy példa:

P.1.2. KSz 2005. május 28. 13. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\frac{x-1}{2}+\frac{2x}{5}=4$; (5 pont) **b)** $\lg(x-1)+\lg 4=2$. (7 pont)

a) (megoldásrészlet)

Ez valóban megoldása (behelyettesítés vagy ekvivalencia) az eredeti egyenletnek.	1 pont	

b)		
Értelmezési tartomány: $x > 1$.	1 pont*	
Logaritmus-azonosság alkalmazásával: $\lg 4(x-1) = 2$.	2 pont	*A hivatkozások nélkül is jár a 2-2 pont.*
A logaritmus definíciója alapján: $4(x-1) = 100$.	2 pont	
$x = 26$.	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont*	
Összesen:	**7 pont**	
** Ha a gyököt behelyettesítéssel ellenőrzi, vagy a helyesen megállapított értelmezési tartománnyal összeveti, és helyesen hivatkozik az átalakítások ekvivalenciájára, akkor mindkét pontot megkapja. Ha rosszul állapítja meg az értelmezési tartományt, de behelyettesítéssel ellenőriz, 2 pontot kap. Ha jól állapítja meg az értelmezési tartományt, de a kapott gyököt nem veti össze vele, akkor ebből a 2 pontból 1 pontot kap. Ha vizsgálja az értelmezési tartományt, és ennek alapján az x = 26-ot elfogadja, de nem hivatkozik ekvivalens átalakításokra, akkor szintén 1 pont jár.*		

Az útmutató részletezi az ellenőrzés javításával kapcsolatos elveket. Az újabb útmutatókban kissé más a megfogalmazás, de az elv változatlan.

1.3. Számolási próba, hibakeresés

Már az általános iskolában is igen fontos az ellenőrzésre szoktatás, de itt még nem beszélhetünk ekvivalens átalakításokról. Az ellenőrzés melletti fő érvünk praktikus: ha a feladatot meg tudjuk oldani, akkor kár lenne számolási hiba miatt pontokat veszíteni. Vagyis célszerű utánaszámolni, jók-e a kapott eredmények; és ha esetleg nem, akkor még mindig megéri átnézni a megoldást, újra nekiállni a feladatnak, megkeresni a számolási hibát.

Különböző módszerekkel hibákat is kereshetünk: egy példaeredményt visszahelyettesítünk, nagyságrendi becslést végezhetünk, vagy például a gyökök lehetséges előjele alapján is kiszűrhetjük a hamis értékeket.

A *számolási próbán* most tehát egy szubjektív eljárást értünk. Például egy egyenlőtlenség megoldására kapott intervallumból *próbaképpen* ellenőrzünk egy megoldást, és esetleg a megoldáshalmaz komplementeréből is visszahelyettesítünk (ha lehet) egy nem-megoldást. Vagy egy másik példa: tudatosan ekvivalens átalakításokat végeztünk, elvileg kész a feladatmegoldás; ilyenkor egy (próba)gyök visszahelyettesítésével az esetleges számolási hibát szeretnénk kiküszöbölni.

1.4. Szöveges feladat – a *modell* ellenőrzése

Középiskolában az általános iskolából hozott tudásként már számíthatunk a szöveges feladatok megoldási lépéseivel kapcsolatos ismeretekre (változók azonosítása, matematikai átfogalmazás, egyenlet megoldása, ellenőrzés a szövegbe helyettesítéssel, szöveges válasz). Itt a szöveg „kódolásaként” kapjuk a megoldandó egyenletet[1]. Ez a lépés általában nem ekvivalens, ezért az ellenőrzés az eredeti szöveg alapján történő visszahelyettesítést jelenti.

[1] Természetesen egyenletrendszert vagy egyenlőtlenséget is felírhatunk, a továbbiakban az egyszerűség kedvéért írunk csak egyenleteket.

[3] és [5] alapján az egyenletbe is visszahelyettesíthetünk, ha a szövegből való matematikai átírás nem következmény-, hanem ekvivalens átfogalmazásnak minősül. Ez a módszertani finomság ritkán valósul meg a gyakorlatban, talán azért, mert a modell $\Leftrightarrow$ egyenlet ekvivalenciájának igazolása gyakran igen nehéz. Ha az ekvivalens átfogalmazás ténye nyilvánvaló, akkor az egyenletbe helyettesítés eléggé természetes lépés.)

A szöveg alapján tehát ***felállítunk egy modellt;*** az itt felírt ***egyenlettel*** kezeljük a problémát; majd a kapott eredményt ***ellenőrizzük.*** De hogyan?

Az ellenőrzés szempontjából azért bonyolult a helyzet, mert ***kettős ellenőrzésről*** van szó. Egyrészt a felírt „tiszta” egyenlet megoldását is ellenőrizni kellene, visszahelyettesítéssel vagy ekvivalencia-hivatkozással; másrészt ellenőrizni kellene, hogy a kapott eredmény értelmes-e a modellben. Ez utóbbit általában a szövegbe való visszahelyettesítéssel tehetjük meg.

A modell ellenőrzésére sincs mindig jól algoritmizálható eljárás, így a szöveges feladatok ellenőrzése bonyolult kérdés, amit később külön elemzünk.

Egy egyszerű példa:

P.1.4. Az *ABC* háromszög oldalai mértani sorozatot alkotnak, nagyságviszonyuk $c < b < a$. Mennyi lehet a sorozat hányadosa, ha $19b - 15c = 6a$?

„Megoldás”: Legyen a hányados $q > 1$, ekkor $19qc - 15c = 6q^2c$. Innen $q_1 = \frac{3}{2}$ vagy $q_2 = \frac{5}{3}$.

Itt az okozza a problémát, hogy a „tiszta” másodfokú egyenleten túl a modell ekvivalenciáját is ellenőrizni kell. Ekkor kiderül, hogy q_2 hamis, mert nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

1.5. Az utolsó ellenőrzés-fejezetben megadunk még néhány további ellenőrzés-értelmezést.

2. A fogalommal kapcsolatos észrevételek

2.1. A „tiszta” algebrai egyenletek esetén az írásbeli érettségi vizsgán ellenőrzés néven ***általában az első két értelmezés jelenik meg***. Ekkor párhuzamosan kétfajta, egyenértékű eljárás szerepel: a következmény-egyenletek miatti visszahelyettesítés mellett a másik eljárás az értelmezési tartomány vizsgálata és az ekvivalenciára hivatkozás. (**P.1.2**-ben ilyen az a) és a b) feladat megoldása.)

2.2. A számolási próba vagy a hibakeresés alkalmazását a gyakorlatban általában ***nem követeljük meg*** és ***nem is értékeljük***. Bizonyos műveleteknél javasolhatók (például egy számológéppel kapott eredmény becslése), de a továbbiakban csak melléktémaként értelmezzük, a tevékenységet ***nem tekintjük ellenőrzésnek.*** Néhány indok:

– a kötelező jelleg szokatlan lenne (más tantárgyakból sincs olyan előírás, például történelem írásbelinél, hogy „kötelező elolvasni még egyszer, amit írtál”), a végrehajtása pedig nehezen ellenőrizhető;

– szakmailag nem mindig kellően indokolt (például néhány gyök próbaszerű visszahelyettesítése még nem bizonyítja a többi gyök helyességét);

– és végül a számolási próbát is el lehet számolni – ekkor pedig tisztázatlan helyzet alakul ki, esetleg a helyes eredmény kérdőjeleződik meg. (Még az is lehet, hogy a számolási próba nagyobb munka, mint maga a megoldás.)

2.3. A ***modell vizsgálata, ellenőrzése*** gondolatilag és technikailag is ***nehéz lehet***. (Ide tartozhatnak az utólagos „realitás-vizsgálatok” is: egy gyakorlati feladat életszerűsége, vagy a kapott eredmény alkalmazhatósága.) A kétszintű érettségi sorokban például akkor is megjelenik ez a gondolat, amikor leszűkített alaphalmazon oldjuk meg az egyenletet, szöveges feladatokban vagy „tiszta” egyenletek esetén is. Ekkor a vizsgázónak kötelező az eredményét összevetnie az eredeti feltételekkel. Talán ide sorolható a következő példa:

P.2.3. ESz 2006. május
2. Legyen adott az f: [–2,5; 2,5] → **R**, $f(x) = x^3 - 3x$ függvény.
a) Határozza meg az f függvény zérushelyeit!
b) Vizsgálja meg az f függvényt monotonitás szempontjából!
c) Adja meg az f függvény legnagyobb és legkisebb értékét! (4 + 6 + 4 = 14 pont)

2. a)		
Mivel $x^3 - 3x = \left(x+\sqrt{3}\right)x\left(x-\sqrt{3}\right)$, ezért f zérushelyei lehetnek: $x_1 = -\sqrt{3}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \sqrt{3}$.	3 pont	*Zérushelyenként 1 pont.*
Az egyenlet mindhárom gyöke eleme az f értelmezési tartományának, ezért mindegyik zérushely.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Itt az utolsó pont (részben) a modell ellenőrzéséért jár. (Ez a legegyszerűbb típusok egyike, tulajdonképpen direkt módon adott a modell érvényességi köre.)

2. Megjegyzések, következtetések

Az első és második értelmezés a diákok számára is könnyen érthető, elsajátítható. A számolási próba és hibakeresés elemzése is viszonylag könnyen elfogadtatható, de a modell ekvivalenciájának ellenőrzése gyakran nehéz gondolat.

A számolási próbát az érettségi vizsgán soha nem jutalmazzák ponttal. Esetleges végrehajtása a vizsgázók magánügye, önérdek. Érdemes hangsúlyozni, hogy az érettségi vizsgán ***az ellenőrzés nem hibakeresést jelent.*** Nem tilos hibákat keresni, de az ellenőrzésért kapható részpontok nem a hibakeresésért járnak.

Az ellenőrzésben való számolási hibázás is előfordulhat, így a tanítási órán ezt a lehetőséget is érdemes megemlíteni.

A továbbiakban egyelőre a „tiszta” algebrai egyenletek, egyenletrendszerek ellenőrzéséről lesz szó, és ellenőrzés alatt az első vagy második értelmezést értjük.

3. Az ellenőrzés megjelenése az érettségi feladatokban

3.1. Statisztika

A javítási útmutatókban feladatsoronként általában 1-3 feladat vagy alfeladat tartalmaz ellenőrzést. Ritkán fordul elő az ellenőrzés teljes hiánya (pl. KSz 2014. október vagy ESz 2010. május), és ritkán alkalmazzuk háromnál többször (pl. KSz 2005. május 29: 13. a), b); 15. c); 17. d) alfeladatok vagy ESz 2014. október: 1. a), b); 3. a); 5. b) alfeladatok).

Az ellenőrzés értéke 1-2 pont, kikötéssel együtt 1-3 pont, ami ***a feladat összpontszámának általában az 5-15%-a***. Az alacsony pontszám egyrészt helyeselhető (a teljes megoldásnak ne legyen túl nagy százaléka egy kontroll-lépés), másrészt azonban problémát jelenthet olyan feladatoknál, ahol az ellenőrzés csak munkaigényesen végezhető el.

3.2. Kikötés és/vagy ellenőrzés? (egy örök tanulói kérdés)

A tanítási gyakorlatban kialakult megállapodás szerint a megoldási sorok egymás utáni írása következményegyenleteket jelöl. Az alkalmankénti ekvivalens átalakításokat tehát jelöléssel vagy szavakkal („akkor és csak akkor") külön hangsúlyozni kell. Például azonos egyenlőtlenségek igazolásakor általában kitesszük lépésenként a '$\Leftrightarrow$' ekvivalencia jelét, de az átalakítások ekvivalenciájának alkalmazására – értelemszerűen – a megoldás végén hivatkozunk.

A kérdést illetően a kezdeti bizonytalanságok után ***egységes a javítási koncepció***. A kikötés és ellenőrzés 1-1 pontja akkor is megkapható, ha a dolgozatban nem szerepel konkrétan a kikötés, illetve a visszahelyettesítés: az első pontot kiválthatja a visszahelyettesítés, a másodikat pedig a kikötés és az ekvivalenciára való hivatkozás.

P.1.2. javításakor ez aprólékosan megjelenik, és a pontozási útmutatókra azóta is jellemző e javítási elv megjelenése, részletezése.

Az elv – amely választási lehetőséget enged például a kikötés végrehajtására – a szakmaiság mellett ***gyakorlati szempontból is feltétlenül helyeselhető***. Vannak olyan feladatok, amelyekben a kikötés bonyolultabb, mint a teljes egyenletmegoldás és a visszahelyettesítés. És persze vannak olyan feladatok is, ahol az alaphalmaz meghatározása jelentősen megkönnyíti a megoldást. (Vagy az is lehetséges, hogy egyáltalán nem lehet visszahelyettesíteni, például mert az eredmény egy intervallum.)

3.3. Az ellenőrzés lélektana (elvárások)

Nem nevezhetjük „igazi" ellenőrzésnek az újra-megoldást, azaz amikor a korábbi megoldási lépéseket – vagy esetleg a velük egyenértékű műveleteket – ismételten végrehajtjuk. Ekkor ugyanis a megoldás rossz menetét vagy a hibázást újra elkövethetjük. Az ellenőrzéstől tehát elvárjuk, hogy más műveleti lépéseket (esetleg *újdonságot* vagy *többletet*) tartalmazzon, mint az eredeti megoldás.

Persze ebben az esetben sem mindig egyértelmű a helyzet, legyen a példa egy tipikus általános iskolás felvételi feladat:

P.3.3. Megoldandó a $2x-3-\dfrac{5-x}{3}=8-\dfrac{2x-1}{9}$ egyenlet.

Az elsőfokú egyenlet gyöke $x = 5$. A megoldáskor a lényegi nehézséget a 9-cel való szorzás után kapott $18x-3(5-x)=99-(2x-1)$ egyenletben a zárójel felbontása (illetve a zárójel esetleges korábbi hibás elhagyása) okozza. Az ellenőrzés során viszont konstansokkal dolgozunk, így az egyszerűbb számolás miatt a zárójel-felbontás problémája elkerülhető. Az ellenőrzés folyamata ekkor tartalmilag más lesz, mint az eredeti megoldás lépései: $2\cdot5-3-\dfrac{5-5}{3}=8-\dfrac{2\cdot5-1}{9}$ teljesül, mert a bal oldal 10 – 3 = 7, és a jobb oldal 8 – 1 = 7 szintén. (Ne felejtsük el: visszahelyettesítéskor elvileg még az egyenlet átrendezése is tilos, hiszen elhibázhatjuk.)

Ez esetben az ellenőrzés tehát nem jelenti a feladat újra-megoldását.

Most tegyük fel, hogy egy tanuló megoldása során a második zárójelet – hibásan – elhagyja. A helytelen eredményt visszahelyettesíti az eredeti egyenletbe, majd ezután *ugyanazokat a lépéseket végzi el*, ezúttal a konkrét számokkal, mint eredetileg (3 hozzáadása mindkét oldalhoz, szorzás 9-cel stb.). Ekkor a hibás gyökkel is sikeres lesz az ellenőrzése, mert a korábbi számolási hibát ismételten elköveti.

Ekkor viszont a visszahelyettesítés az egyenlet újra-megoldását jelenti, nem tekinthető „igazi” ellenőrzésnek.

Hasonló a helyzet az alábbi érettségi feladat ellenőrzésekor:

P.3.4. ESz 2006. október, 1. b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

b) $2^x = 3^{2x+1}$

Megoldásvázlat:

$$2^x = 3 \cdot 9^x \iff 4{,}5^x = \frac{1}{3} \iff x = \log_{4,5}\frac{1}{3}, \text{ és } \log_{4,5}\frac{1}{3} = \frac{\lg\frac{1}{3}}{\lg 4{,}5} \approx -0{,}7304.$$

A kapott irracionális gyök ellenőrzése lényegében csak az egyenlet újra-megoldásával képzelhető el. Ennél a feladatnál tehát az ekvivalenciára hivatkozás jelentheti az ellenőrzést.

3.4. Megjegyzések, következtetések

Az ellenőrzés fogalmát (alaphalmaz meghatározása, visszahelyettesítés) elsősorban az egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek megoldásához kötjük. Az egyes típusokkal kapcsolatban egységes tanítási gyakorlat alakult ki:

1. A „tiszta” egyenletek, egyenletrendszerek esetén elfogadott módszer a kikötés és az ekvivalenciára hivatkozás vagy a visszahelyettesítés alternativitása.

2. Egyenlőtlenségek esetén az eredmény általában egy intervallum, tehát végtelen sok gyök. Ezeket nem lehet ellenőrizni, így a megoldás során szükségképpen ekvivalens lépéseket kell tenni, mert a következmény-átalakítások elvi hibásak. Tehát minden lépésben vizsgálni kell az alaphalmaz változását (ha felvetődik a kikötés, akkor elengedhetetlen), az átalakítások ekvivalens voltát stb. Az eredmény előállítása után, befejező lépésként az ekvivalenciára való hivatkozás szerepeltetése – amit tehát kötelező jelleggel végeztünk – jelenleg nem egységes.

A hivatkozás szerepeltetése mellett két érv szólhat. Az egyik szerint elvárható, hogy a vizsgázó jelezze a munkája tudatosságát (tehát hogy csak ekvivalens lépéseket tehetett). A másik érv az egyik legerősebb hagyományú konvencióra hivatkozik, mely szerint a megoldási lépések egymás után írása következmény-átalakításokat jelöl. Az ettől való eltérést dokumentálni kell, szavakkal vagy jelölésekkel.

Az ellenvélemény szerint egy egyenlőtlenség megoldása után nem kell semmit sem ellenőrizni – azaz az ekvivalenciára hivatkozni –, mert a helyes megoldásnak elengedhetetlen feltétele az ekvivalens átalakítások alkalmazása. Tehát ennek újra-említése hasonló lenne a hibakereséshez (1.3.).

A második véleményt – szakmai finomsága mellett – a gyakorlat erősíti. Az érettségi vizsgák javításakor általában nem jár külön pont arra, ha az egyenlőtlenség eredményes megoldása után a vizsgázó megemlíti az ekvivalens lépések alkalmazását.

3. Ha egy egyenlet megoldása intervallum (például valamely halmazon azonosság), akkor sem tudunk visszahelyettesíteni, így az ekvivalencia-hivatkozásra van szükség. (Sőt, ha megoldás közben akár csak egyetlen következmény-átalakítást is végeztünk, akkor a végtelen megoldáshalmaz ismeretében az egyenletmegoldást újra el kell kezdeni.)

4. Azonosságok, azonos egyenlőtlenségek igazolása is csak ekvivalens átalakításokkal lehetséges. (Az azonos egyenlőtlenségeknél fokozottan kell figyelni az ekvivalenciára, hiszen műveletvégzés közben a relációs jel iránya is változhat.)

4. Az ellenőrzés technikai végrehajtása

A korábbi évek javítási útmutatói ebből a szempontból sajnos ***nem egységesek***.

4.1. Néhány példa:

1) „Ellenőrzés. 1 pont”

2) „Ellenőrzés, vagy annak rögzítése, hogy ezek megoldások, mert ekvivalens átalakításokat végeztünk. 1 pont”

3) „Az értékek kielégítik az eredeti egyenletet. 1 pont”

4) „Mindkét megoldás megfelel. 1 pont”

5) „A gyökök a valós számok halmazán megfelelnek. 1 pont”

6) „Ellenőrzés behelyettesítéssel. 1 pont”

7) „Ellenőrzés: $x = 2$ megoldás. 1 pont. $x = -2$ nem megoldás. 1 pont”

8) „A kapott pozitív értékek kielégítik az egyenletrendszert (ellenőrzés). 1 pont”

9) **KSz 2008. október, 13:** „A megoldások ellenőrzése. 2 pont”

10) **KSz 2006. október, 13. c):** „Az $x = -\dfrac{2}{3}$ esetén mindkét oldal értéke $\dfrac{7}{3}$, ezért ez megfelelő valós gyök. 1 pont”

11) **KSz 2007. május, 18. a):** „Az ellenőrzést külön nem értékeljük.”

12) **KSz 2010. május, 13:** „Megfogalmazott válasz, vagy ellenőrzött számpár esetén jár ez a pont.”

13) **ESz id 2008. május, 3:** „Hamis gyökök kiszűrése. 2 pont”

14) **P.4.1. ESz 2012. október, 2.** Két valós szám összege 29. Ha az egyikből elveszünk 15-öt, a másikhoz pedig hozzáadunk 15-öt, az így kapott két szám szorzata éppen ötszöröse lesz az eredeti két szám szorzatának. Melyik lehet ez a két szám?

(megoldásrészlet)

Ellenőrzés a szöveg alapján: Ha a két szám a –6 és a 35, akkor (az összegük 29,) a szorzatuk –210. A megváltoztatott számok a –21 és az 50, ezek szorzata –1050, ami valóban 5-szöröse a –210-nek.	1 pont	*Ha a vizsgázó a számolás leírása nélkül annyit ír, hogy a szöveg alapján ellenőrizte a megoldásokat, és azok megfelelőek, akkor ezért 1 pontot kaphat.*
Ha a két szám a 27,5 és az 1,5, akkor (az összegük 29,) a szorzatuk 41,25. A megváltoztatott számok a 12,5 és a 16,5, ezek szorzata 206,25, ami valóban 5-szöröse a 41,25-nek.	1 pont	

1) – 5) nagyjából egyenértékűek, **6)** kicsit többet jelent, **8)** a válaszban ad egy szűkítést (feleslegesen), **10)** már megköveteli a számolás nyomát, **12)** pedig a választ és az ellenőrzést egybemossa. (A válasszal kapcsolatos problémákkal később még foglalkozunk.)

Láthatjuk tehát, hogy a korábbi évek útmutatói nem egységesek, és így az sem teljesen egyértelmű, mit várunk el a diáktól. Az utóbbi években viszont következetesség figyelhető meg e területen: ***az útmutatók általában leírják***, hogy ***mit várnak el*** ellenőrzésképpen, mire adható pont stb. (Típuspélda erre **P.4.1.** részletező megjegyzése.)

4.2. Melyik forma fogadható el az alábbiak közül, ha egy dolgozatban szerepelnek?

I. „Ellenőriztem."
II. „Ellenőriztem, és kijött." Vagy másképpen: „Ell: √ " (a 'pipa' jele).
III. „A kapott gyökök kielégítik az eredeti egyenletet."
IV. „Ha $x = 1$, akkor az eredeti egyenlet mindkét oldala 2, így ez valóban gyök."

A **II.** és **III.** lényegében megegyeznek (s velük egyenértékű **1) – 5)**), de nem küszöbölik ki az esetleges „blöffölést". **IV**-re is van példa (ekkor tehát számolási nyoma kell, legyen az ellenőrzésnek), ilyen a **10)** vagy a **14)** szöveges feladat megjegyzése.

Egy lehetséges megoldás a ***kitűzési elv*** alkalmazása, azaz amikor a **II.** vagy **III.** utalásokat fogadjuk el, és olyan feladatot tűzünk ki, amely hamis gyököt eredményez. (Ekkor ugyanis a blöffölő vizsgázó lebukik.) Itt problémát jelenthet, hogy ha egy vizsgázó a **II.** vagy **III.** utalás leírása után konkrét számításokat is végez (ezek tehát többletmunkát jelentenek, mint amit az útmutató megkívánt), és ezek során hibát követ el, akkor nehéz jól pontozni a megoldást. Az 1 pont járhat például **III.** miatt, de ha utána elvi hibás a tényleges ellenőrzés, akkor visszavonjuk a pontot?

Hasonló helyzetben általában 0 pontot ad a javító tanár, mert ez a pont az ellenőrzés helyes végrehajtásáért jár.

4.2. Megjegyzések, következtetések

1. Szakmai szempontból ***nem fogadható el a blöffölés*** (még akkor sem, ha sokszor nem dönthető el biztosan, hogy mi a blöff és mi nem), az útmutatónak tehát törekednie kell a kiküszöbölésére.

2. Az utóbbi években az útmutatók egységességre törekednek, általában megkövetelik, hogy az ellenőrzés során ***látszódjon valamilyen munkának a nyoma***. (Tehát nem elég csak az üres utalás felírása – lásd **P.4.1.**) Ez persze akkor igazán meggyőző – és a diákok számára is leginkább akkor érthető –, ha az útmutatóban is ténylegesen, nemcsak jelzéssel, hanem kiírva szerepelnek az ellenőrzési lépések. Ez a részletezés egyébként morálisan is elvárható.

Az egységesedő javítási gyakorlatban az I-III. módokat általában nem fogadjuk el, míg a IV-et igen, hiszen itt bizonyítható módon számolnia kellett a vizsgázónak.

Megemlítünk itt is egy kivételt. Ha az ellenőrzés nagyon bonyolult, akkor nem biztos, hogy az adott pontszámért jogos a teljes végigszámolás megkövetelése. (3.1-ben láttuk, hogy az ellenőrzéssel legfeljebb néhány pont szerezhető a feladat összpontszámából.) Ekkor alkalmazható az „Ellenőrzés a szövegbe helyettesítéssel." formula, s így a javító tanárra van bízva, milyen mélységű ellenőrzést vár el a vizsgázótól.

Persze probléma ekkor is jelentkezik. A felületes munkát végző diákkal szemben hátrányba kerül az, aki a tanult módon, részletesen, nagy időveszteséggel végigszámolja az ellenőrzést – ugyanazért a pontszámért. Itt is szerepe lehet a kitűzési elvnek – ilyen feladat kitűzése kerülendő.

3. ***Túl bonyolult ellenőrzés nem várható el minimális pontszámért.***

4.3. Néhány szó a kitűzési elvről

A kitűzési elvvel a későbbiekben is találkozunk még, valójában mindegyik résztémánkban – *ellenőrzés*, *eredmény*, *válasz* – megvan a maga gyakorlati szerepe. A szakmai öntudat a nehézségeket inkább leküzdené, mint elkerülné – és így legszívesebben minimalizálná a kitűzési elv szerepét. (Például: milyen dolog az, hogy egyes feladattípusokat csak azért ne tűzzünk ki az érettségi vizsgán, mert nehezen pontozhatók?!)

Pedig a kitűzési elv praktikus; és igen, ha például egy feladat ellenőrzése csak újramegoldásként képzelhető el, vagy a túl bonyolult ellenőrzésért aránytalanul magas részpontszámot kellene adni – nos, akkor ezt a feladatot valóban ne tűzzük ki az érettségi vizsgán. (Valamely gyakorló tanítási órán, megfelelő időben természetesen helye lehet a feladatnak.)

4.4. Ellenőrizni csak pontos értékkel lehet

A következő tartalmi idézet egy jelenleg is használt tankönyvből származik.

P.4.4.1. „Oldjuk meg a valós számok halmazán a $4\cdot 7^x - 21 = 0$ egyenletet!

Megoldás: $x = \log_7 5{,}25 = \dfrac{\lg 5{,}25}{\lg 7} \approx 0{,}8522$.

Ellenőrzés: $4\cdot 7^{0,8522} - 1 \approx 0{,}0002 \neq 0$.

Világos, hogy a 0,8522 racionális szám nem megoldása az eredeti egyenletnek, de nem is ezt állítottuk. Azt mondtuk, hogy a megoldás 4 tizedesjegyre kerekítve 0,8522. Ezt pedig a behelyettesítéssel kapott eredmény megerősítette.”

A megoldást kis bizonytalanság lengi körül. Az eredményt közelítő értékként kaptuk meg, és az ellenőrzés során a behelyettesítés is csak „kb.” erősítette meg a gyök helyességét. Az eljárás további problémákat is felvet (például mikor tekintünk két számot egyenlőnek, vagy mit tekintünk ebben a szituációban matematikai értelemben *pontosság*nak).

Az ellenőrzést elvégezhetjük a pontos értékkel: $4\cdot 7^{\log_7 5{,}25} = 4\cdot 5{,}25 = 21$.

Hasonló esetekben inkább az tanácsolható, hogy az ekvivalens átalakításokra hivatkozzunk.

P.4.4.2. ESz 2006. május 9, 1. A *PQRS* négyszög csúcsai: $P(3; -1)$, $Q(1; 3)$, $R(-6; 2)$ és $S(-5; -5)$.

Döntse el, hogy az alábbi három állítás közül melyik igaz és melyik hamis! Tegyen * jelet a táblázat megfelelő mezőibe! Válaszait indokolja, támassza alá számításokkal!

a) A állítás: A *PQRS* négyszögnek nincs derékszöge.
b) B állítás: A *PQRS* négyszög húrnégyszög.
c) C állítás: A *PQRS* négyszögnek nincs szimmetriacentruma.

	igaz	hamis
A		
B		
C		

A **P.4.4.2.** feladatban az a) állítás hamis, $P\angle = R\angle = 90°$. A feladat javítása során az okozott nehézséget, hogy a vizsgázók egy része közelítő értékekkel határozta meg a szögeket, és „kb. 90°” eredményt kapott. (Ez lehetett 89,9999° vagy 90,0001° is; vagy akár a számológép által kiírt 90°-ot is ide sorolhatjuk. Ugyanis a gép kerekített értéket ír ki; semmi garancia nincs arra nézve még ekkor sem, hogy a szög *pontosan* derékszög.)

Nyilván a közelítő értékekkel kiszámolt „kb. 90°” eredmény alapján ***nem következtethetünk arra***, hogy a szóban forgó szög derékszög. Hasonló a helyzet az ellenőrzéssel is.

A közelítő értékekkel történő ellenőrzés „kb. egyenlő” eredménye ***nem fogadható el teljes értékű megoldásnak***. Ugyanis $A \approx B$ alapján általában nem dönthető el, hogy mi a helyzet: valódi egyenlőség áll fenn, a számolási hibahatáron belül, vagy $A \neq B$? Egyáltalán milyen pontossággal kell megegyeznie a két oldalnak?

P.4.4.3. Oldja meg az $x^2 - 2x - 1 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

Eredmény: $x_1 = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41$ és $x_2 = 1 - \sqrt{2} \approx -0{,}41$.

Ellenőrzés: $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right) - 1 = 3 + 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} - 1 = 0$ valóban, hasonlóan a másik gyökre is. (Közelítő értékekkel ≈ 0,02 adódik.)

Itt is megjelenik a fentebb említett utalás, majd elvi hibás ellenőrzés problémája: hány pontot adjunk annak, aki az előző pontbeli III. utalást tette („Ellenőriztem, és kijött.”), majd közelítő értékekkel próbált ellenőrizni?

Az utóbbi évek egységesedő gyakorlatában ez a pont az ellenőrzés helyes végrehajtásáért jár; szigorúan véve tehát a közelítő értékekkel történő ellenőrzésért nem jár pont.

P.4.4.4. ESz 2006. október, 1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\lg(x + 7) + \lg(3x + 1) = 2$ **b)** $2^x = 3^{2x+1}$ (5 + 6 = 11 pont)

b) (megoldásrészlet)

Innen $x = \log_{4,5}\left(\frac{1}{3}\right)$ $\left(= \frac{\lg\frac{1}{3}}{\lg 4{,}5} \approx -0{,}7304\right)$.	1 pont	*Az exponenciális egyenlet gyökeként fogadjuk el a helyes közelítő értéket.*
A kapott gyök kielégíti az eredeti egyenletet, mert ekvivalens átalakításokat végeztünk.	1 pont	*Az ellenőrzést fogadjuk el közelítő értékkel is.*

Nem lenne szabad elfogadni a megjegyzésben írt, közelítő értékekkel történő kerekítést. (Szinte reménytelen a pontos érték visszahelyettesítése, ezért ekvivalens lépések alkalmazása tanácsolható, és az útmutató is elsősorban erre hivatkozik.)

4.4. Megjegyzések, következtetések

1. A közelítő értékekkel végzett ellenőrzés persze „jobb, mint a semmi”, kiszűrhetünk így bizonyos hamis gyököket (például előjel-eltérés alapján); mégis inkább csak a hibakeresés-kategóriába sorolható az eljárás.

2. A pontos értékkel való ellenőrzés rendkívül munkaigényes lehet, ráadásul gyakran az egyenlet „újra-megoldását” jelenti. (A **P.4.4.3.** példát is bonyolultabb ellenőrizni, mint megoldani.) Itt is szerepe lehet a ***kitűzési elvnek***: lehetőség szerint kerülendő az olyan feladat kitűzése, amely ezt a problémát felveti. A megoldási útmutatókban 2005 óta nem is találtunk példát hasonló ellenőrzésre.

Ilyen esetekben érdemes tehát elkerülni a visszahelyettesítést: alkalmazzunk ekvivalens átalakításokat, és hivatkozzunk rájuk.

3. A helyzetet bonyolítja a különböző (esetenként csúcskategóriás) számológépek piaci megjelenése. Sajnos jelenleg ***a számológép-használat nem kellően szabályozott***; például az ellenőrzéssel kapcsolatban sem rögzített, milyen (számológépes) eljárást fogadunk el, és hogy a vizsgázónak ebből mit kell dokumentálnia.

5. Amikor hiányzik (elmarad) az ellenőrzés

Először nézzük a ***vizsgázói oldalt***.

A vizsgázók körében az ellenőrzés elmaradásának (a pszichikai tényezőkön túl, mint például a feledékenység) több oka is lehet.

5.1. ***Túl egyszerű a feladat***, a vizsgázó feleslegesnek érzi mind az ellenőrzést, mind az ekvivalenciára való hivatkozást. (Az ellenőrzés esetleg fejben is elvégezhető.) Általában ilyenek a középszintű érettségi vizsga I. részében szereplő egyenletek.

Ide sorolhatjuk azt a gyakori típust is, amikor az egyszerű ellenőrzést kiváltja vagy helyettesíti a válasz. Egy tipikus példa az általános iskolás folklórból:

P.5.1. Egy panzióban három- és négyágyas szobák vannak, összesen 12. Melyik szobából hány darab van, ha 41 vendéget még éppen el tudtak szállásolni?

Megoldás: Jelölje x a háromágyas szobák számát, ekkor a négyágyas szobák száma $(12 – x)$. $3x + 4·(12 – x) = 41$, innen $x = 7$.

Válasz: A háromágyas szobák száma 7, a négyágyas szobáké $12 – 7 = 5$.

Itt az utolsó megoldási lépés burkoltan az ellenőrzést is tartalmazza, hiszen pl. nem kaptunk negatív darabszámot.

5.2. ***Túlságosan nagy munka*** lenne elvégezni az ellenőrzést; a befektetett munka nincs arányban a szerezhető +1 (+2) ponttal.

5.3. Az ellenőrzés gyakorlatilag ***nem hajtható végre***, mert túlságosan nagyszámú megoldás van. (Ha az eredmény például egy intervallum, akkor a végtelen sok gyök miatt nem lehetséges a visszahelyettesítés. A megoldás során szükségképpen ekvivalens lépéseket kell tenni, és hivatkozni ezekre.)

A ***kitűzési oldal*** esetén is maradnak el ellenőrzések, gyakran hasonló okok miatt. (**3.3**-ban vagy **4.2**-ben – az újra-megoldás, illetve az ellenőrzés formája – már érintettük a kérdést.) Ezek egy része hiányosság, egy másik része azonban indokolható.

5.4. ***„Túl egyszerű” feladatoknál*** (ezek lehetnek „tiszta” algebrai vagy szöveges feladatok is) előfordul, hogy nem kér az útmutató ellenőrzést. (Az eljárás indokolható: aránytalan lenne egy 3-4 pontos feladatból 1-2 pontot adni (vagy elveszíteni) az ellenőrzésért.)

5.5. Szintén nem szokott kérni az útmutató ellenőrzést olyankor, amikor annak végrehajtása a ***megoldási út megismétlése*** lenne.

5.6. Ha ***túlságosan nagy munka*** lenne elvégezni az ellenőrzést, akkor a tényleges visszahelyettesítés helyett az útmutató is megelégedhet az „Ellenőrzés a szövegbe helyettesítéssel.” formulával.

(Megismételjük a korábban jelzett problémát: ekkor a szakmailag alapos ellenőrzést végző tanuló hátrányba kerül a felületesen dolgozó társával szemben, mert több időt fordít nem honorált (nem értékelt) tevékenységre.)

5.7. Gyakorlati akadályt jelenthet, ha ***túlságosan nagyszámú megoldás van***.

A modellalkotást igénylő szöveges feladatokkal a következő fejezetben foglalkozunk. Az érettségi feladatok között azonban sok különböző témakörhöz tartozó, *hosszabb-rövidebb szövegezésű* feladat is szerepel. Ezek besorolása a szöveges feladatok közé kérdéses, a modellalkotás értelmezésétől függ. (Ezt később kissé részletesebben kifejtjük.)

5.8. Az útmutatókban a tiszta algebrai egyenleteken kívül ***csak bizonyos szövegkörnyezetű feladatok esetében*** van ellenőrzés (és ott sem mindig), egyéb feladattípusoknál – a jelenlegi feladatmegoldó kultúránkban – azt „***nem szokás***” elvégezni.

A fizika-jellegű feladatok (mozgás, keverés) egy része ellenőrzött; a számtani-mértani sorozat témaköröknél is több ellenőrzés található; de például síkgeometriai, térgeometriai vagy koordinátageometriai feladatoknál ***általában nincs ellenőrzés***. Még akkor sem, ha egy nem könnyű egyenletrendszer megoldása a részfeladat.

Ez a következetlenség szakmai szempontból nehezen indokolható, bár ezzel kapcsolatban néhány észrevételt megfogalmazunk a későbbiekben.

P.5.8. ESz 2005. május 10. 1. Az *ABC* háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:

AB: $y = 0$; *BC*: $x + 10y = 20$; *CA*: $y = \frac{1}{2}x - 4$.

a) Számítsa ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit! (7 pont)
b) Számítsa ki a háromszög *B* csúcsánál lévő belső szöget! (4 pont)

a) (megoldásrészlet)

Az $x + 10y = 20$ és $y = \frac{1}{2}x - 4$ egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása $x = 10$; $y = 1$,	2 pont	
ezért a háromszög harmadik csúcsa $C(10; 1)$.	1 pont	

P.5.8. a)-ban a geometria feladatbeli egyenletrendszer megoldását nem ellenőrizzük. Persze az egyenletrendszer megoldása nem nehéz, de ha összevetjük a **P.1.2. a)** feladattal (egyszerű elsőfokú egyenlet ellenőrzése), nyilvánvaló a következetlenség.

Ugyanezt az egyenletrendszert ellenőriznénk, ha „tiszta alakban” tűzzük ki, míg az ellenőrzést általában nem végezzük el, ha pl. egy koordinátageometriai feladat megoldásához, segédeszközként oldjuk meg az egyenletrendszert. (A konkrét feladattal kapcsolatban a modell elemzése is szóba kerülhet: ekkor az lehetne az ellenőrzés, hogy a kapott pontok valóban egy háromszöget határoznak meg, azaz a három egyenes nem megy át egy ponton.)

A hasonló feladatok elemzése alapján újabb megfogalmazást tehetünk:

5.9. ***Ha eszközként használunk egyenletet*** (például a fenti **P.5.8. a)** koordinátageometriai feladatban két egyenes metszéspontját az egyenletrendszer megoldásával határozzuk meg), akkor az útmutató az általános gyakorlat szerint nem kéri (nem értékeli) az ellenőrzést.

Ez a kialakult gyakorlat több problémát is felvet.

– Mikor alkalmazunk *eszközként* egy egyenletet, és mikor alkalmazzuk a *modell* jellemzésére? Azaz néha kérdéses a feladat státusza, nem egyértelmű például a *szöveges feladat* és a *„szöveges jellegű” (hosszabb szövegezésű) feladat* megkülönböztetése.

– Természetesen egy eszközként használt egyenlettel is előfordulhat (bár ez az érettségi viszonylatában ritka), hogy következmény-átalakításokkal oldjuk meg. Ekkor nem derülnek ki a hamis gyökök, ha nem végzünk ellenőrzést. A kialakult gyakorlat az, hogy utólagos vizsgálat alapján „észrevesszük” a hamis gyököt; például rossz előjel, vagy geometriailag lehetetlen érték jön ki.

– A gyakorlat természetesen védhető is. Például ha a hasonló feladatokban mindig végeznénk ellenőrzést, akkor az így kapható részpontok összege tekintélyes (és aránytalan) nagyságúra növekedne egy vizsgadolgozatban.

5. Megjegyzések, következtetések

1. Egy vizsgadolgozat pontozásakor alapvető dilemmát jelent, hogy miközben főszabályként elvárjuk a feladatok megoldásának ellenőrzését, ***nem lenne szerencsés, ha ennek a kompetenciának a mérése túl nagy súlyt kapna*** az összpontszámban. (Akár egy-egy feladaton belül is gondot jelenthet az ellenőrzésért járó pontszámok aránytalanul nagy súlya. Ilyenkor léphet életbe a kitűzési elv: az ilyen feladat kitűzését lehetőleg kerülni kell.)

Az ellenőrzés pontszámának redukálása a „feledékeny” vizsgázók érdekét is szolgálja. Szerencsétlen helyzet alakulna ki, ha egy egyébként jól sikerült dolgozat sok részpontot veszítene az ellenőrzések elmaradása miatt.

2. Ha egy geometriai, koordinátageometriai, kombinatorikai stb. feladatban ***segédeszközként használjuk az egyenletet*** (egyenletrendszert, egyenlőtlenséget), akkor általában nem végzünk ellenőrzést. Érvelhetünk például azzal, hogy ha az ilyen alkalmazásokban mindig elvégeznénk az ellenőrzést, akkor a feladatok megoldása elbonyolódna, jelentősen megnövekedne a megoldási idő, és az ellenőrzés-kompetencia túlságosan nagy szeletet kapna az összpontszámból.

3. Egy másik fajta érvelés lehet, hogy az eszközként használt egyenletek (egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek) segítségével ***már létező objektumok közötti kapcsolatokat írunk le***. Például koordináta-geometriai feladatok esetében alakzatok egyenletét írjuk fel vagy az egyenletek, egyenletrendszerek megoldását alakzatok metszéspontjainak meghatározásához használjuk. Ilyenkor általában nem követeljük meg az ellenőrzést, hiszen létező alakzatok egyenleteiből álló egyenletrendszer az eredeti feladattal ekvivalens.

(Természetesen kivételt jelenthetnek azok a feladatok, ahol a koordináta-geometria használata valamilyen modell alkalmazását jelenti, mert ekkor szükség van a ***modell ellenőrzésére***.)

Egy példa:

P.5.10. Adott a derékszögű koordinátarendszerben az *e*: $y=\frac{3}{4}x$ egyenes és a *k*: $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kör. Az *ABC* háromszög csúcsai $A(2; –1)$, $B(11; 2)$, a *C* csúcs pedig rajta van az *e* egyenesen és a *k* körön is. Határozzuk meg *C* koordinátáit!

„Megoldás”: Az egyenes és a kör metszéspontjai $C_1(–4; –3)$ és $C_2(4; 3)$.

Itt szükség van a modell ellenőrzése.

Ellenőrzés: C_1 hamis gyök, mert *A*-val és *B*-vel egy egyenesre esik, így nem kapunk háromszöget.

6. Szöveges (jellegű) feladatok

6.1. Szövegkörnyezetbe ágyazott, „szöveges jellegű” feladatok

A feladatok egy része valamilyen környezetbe ágyazott, esetleg hosszabb szövegezésű feladat. Ezeket a ***„szöveges jellegű” feladatokat*** vajon tekinthetjük matematikai értelemben ***szöveges feladatoknak***, csak azért, mert szöveges környezetbe ágyaztuk a kérdést?
Véleményünk szerint általában nem.

P.6.1.1. KSz 2005. május 10.
14. c) Gábor olyan sorrendben írja fel 25 863 számjegyeit, hogy a kapott szám néggyel osztható legyen. Milyen számjegy állhat a tízes helyiértéken? (Válaszát indokolja!)

P.6.1.2. KSz 2009. október 20.
15. Béla egy fekete és egy fehér színű szabályos dobókockával egyszerre dob. Feljegyzi azt a kétjegyű számot, amelyet úgy kap, hogy a tízes helyiértéken a fekete kockával dobott szám, az egyes helyiértéken pedig a fehér kockával dobott szám áll. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a feljegyzett kétjegyű szám
a) négyzetszám;
b) számjegyei megegyeznek;
c) számjegyeinek összege legfeljebb 9?

P.6.1.3. Csaba megoldotta az $x^2 + 3x - 4 = 0$ egyenletet. Mit kapott eredményül?

Ezekben a példákban a „csomagolás” valóban szöveges, de pusztán emiatt nem lenne szerencsés egyiket sem *szöveges feladatnak* tekinteni. Hiszen a szöveges feladatokkal kapcsolatban – például az ellenőrzés vagy a modellalkotás kapcsán – további ***elvárásokat*** fogalmazhatunk meg.

Kiindulhatunk például az általános iskolai tézisből: szöveges feladatot mindig ellenőrizni kell. Vagy kicsit finomítunk az előző **5.3.** alapján (amikor az ellenőrzés nem hajtható végre): ***szöveges feladatot mindig ellenőrizni kell, ha ez lehetséges***. A fenti 1. és 2. példa egyáltalán nem olyan, amely ellenőrzést igényel. (Nem egyenlet megoldására vezetnek.)

Az igazi elvárás a szöveges feladatokkal szemben a (legalább részbeni) ***modellalkotási kötelezettség***, amelyet a következő pontban részletezünk. És hát ebben az írásban az *ellenőrzés* szempontjából vizsgálódunk, így a szöveges feladatokkal szemben az is elvárásunk, hogy kezelésük egyenlet (egyenlőtlenség, egyenletrendszer) felírását és megoldását igényelje.

6.2. A szöveges feladat fogalma

A szöveges feladatokban a megoldó egy modellt szerkeszt a szöveg alapján, és ebben a modellben fogalmaz meg (esetleg részben készen kap) valamilyen egyenletet, egyenletrendszert, egyenlőtlenséget. (A ***szöveges feladat*** megoldása tehát mindig egy ***modellalkotási feladattal*** kezdődik. Definíciós fogódzkodóként pedig elvárjuk, hogy szöveges feladatban – nevéhez méltóan – ne kapjuk készen a felírható egyenletet.)

Az egyenlet megoldása után kétféle ellenőrzés képzelhető el: a „tiszta” egyenleté (visszahelyettesítés vagy ekvivalencia-hivatkozás), valamint ezen túlmenően a modellalkotás helyességéé.

A kétféle ellenőrzés végrehajtási módjában és tartalmában is nagyon különbözik.

A ***modell ellenőrzése*** nyilván ***kötelező***: bármilyen szép ellenőrzött gyököt kaptunk az egyenletmegoldáskor, elképzelhető, hogy az a modell érvényességi körén kívül esik. Ugyanakkor a ***„tiszta” egyenlet gyökeit nem kötelező*** formálisan ***ellenőrizni***. Hiszen lehetséges, hogy a következmény-átalakítások miatt keletkezett néhány hamis gyök, de a modell ellenőrzése során ezeket úgyis kiszűrjük. (Ha nem-ekvivalens lépésekkel gyököt veszítünk, akkor ezeket a modell szempontjából is elveszítjük; a megoldás hibás lesz, éppen úgy, mintha a „tiszta egyenleteknél” veszítünk gyököt.)

A formális visszahelyettesítés általában nem okoz elvi nehézséget, de a modell ellenőrzése sokkal bonyolultabb lehet. Ez a lépés nem mindig algoritmizálható, ötletességet és kreativitást is igényelhet és így tovább.

6.3. A feladattípusok kategorizálása

Az ellenőrzés szempontjából megkülönböztethetünk néhány feladattípust.

Elég jól azonosíthatók a tiszta egyenletek és a szöveges feladatok, valamint azok a feladatok, amelyekben az – esetleg készen kapott – egyenleteket eszközként alkalmazzuk. Ezen típusok ellenőrzési módja a gyakorlat alapján egyértelmű.

A szövegkörnyezetbe ágyazott feladatok egyfajta átmenetet képeznek, ellenőrzésük több mindentől függ. Szükséges-e valamilyen mértékű modellalkotás, illetve ennek érvényesség-vizsgálata; a kapott eredményt egyáltalán lehet-e ellenőrizni; vagy az is elképzelhető, hogy az egyenletek megoldását csak segédeszközként alkalmazzuk.

Éles határvonal természetesen nem húzható, egy-egy formálisan hasonló feladat többféleképpen is kitűzhető vagy értelmezhető.

P.6.3.

a) Szöveges feladatban egy modell alapján felírható az $\frac{n(n+1)}{2}=5050$ egyenlet, amit a pozitív egész számok halmazán kell megoldani. (Például a számtani sorozat összegképletét alkalmazzuk, ha egymásra helyezett dobozok sorainak száma a kérdés.)

b) Egy hosszabb szövegezésű feladat utolsó mondatai lehetnek a következők: „Anna házi feladata az $\frac{x(x+1)}{2}=5050$ egyenlet megoldása a pozitív (egész) számok halmazán. Milyen eredményt kapott, ha jól számolt?”

c) „Határozza meg az $\frac{x(x+1)}{2}=5050$ egyenlet megoldását, ha x pozitív (egész) szám!”

d) „Oldja meg az $x \in\,]0; \infty]$, $\frac{x(x+1)}{2}=5050$ egyenletet!”

e) „Oldja meg az $\frac{x^2+x-10100}{\sqrt{x}}=0$ egyenletet!”

A fenti példában mindegyik feladat megoldása lényegében azonos, x_1 = 100 mellett x_2 = –101 hamis gyök. Míg az **e)** feladat „tiszta” algebrai, addig az **a)** szöveges, de a **b)**-re ezt már nem szívesen mondanánk. Nemcsak azért, mert az egyenletet készen kapjuk, hanem azért is, mert hiányoljuk a szöveges feladatokra jellemző modellalkotási kezdőlépést.

Ugyanakkor mindegyik feladatra jellemző egyfajta háttérmodell, hiszen az egyenletet a pozitív (egész) számok halmazán kell megoldanunk. (Az első **a)** – **c)** feladatokban ez szóbeli előírás, a **d)**-ben formai jelöléssel adott, az **e)**-ben pedig az alaphalmaz leszűkítése miatti következmény.) Tehát végső megoldási lépésként mindegyik feladatban össze kell vetni a kapott gyököket és az alaphalmazt.

Ha a matematika főbb témaköreit nézzük (geometria és részterületei, algebra, számelmélet, kombinatorika, valószínűségszámítás, analízis), fontos megjegyeznünk, hogy bármelyik témakörben szerkeszthető olyan feladat, amely (esetleg modellalkotás után) egyenletek felírására vezet. Vagyis a szöveges feladatok és az ellenőrzés problematikája ***a matematika minden részterületét érinti***.

Korábban már említettük, hogy a jelenlegi feladatmegoldó-módszertani kultúránkban – közmegegyezés alapján – ritkán követeljük meg azon feladatok ellenőrzését, amelyekben a tiszta egyenleteket ***segédeszközként*** használjuk. A kialakult gyakorlat mellett több érvet is felsoroltunk: az ellenőrzés kötelező szerepeltetésével hosszadalmassá válna a megoldás; túlságosan nagy súlyt kapna az ellenőrzés-kompetencia a pontozáskor; vagy tartalmi szempontból ezekben a feladatokban gyakran már létező objektumok közötti kapcsolatokat írunk le, ekkor pedig már nem követeljük meg az ellenőrzést. (A modell érvényességének vizsgálata persze nem maradhat el.)

Tematikus szempontból a helyzet kissé kusza, bár a fentiek alapján többé-kevésbé érthető. Tegyük fel, hogy egy egyenlet megoldására vezethető vissza a feladat. Ha ez számtani-mértani sorozattal kapcsolatos, akkor néha szerepel az ellenőrzés; ha például kamatszámítási vagy kombinatorikai feladat, akkor csak nagyon ritkán; ha pedig geometriai, akkor szinte soha.

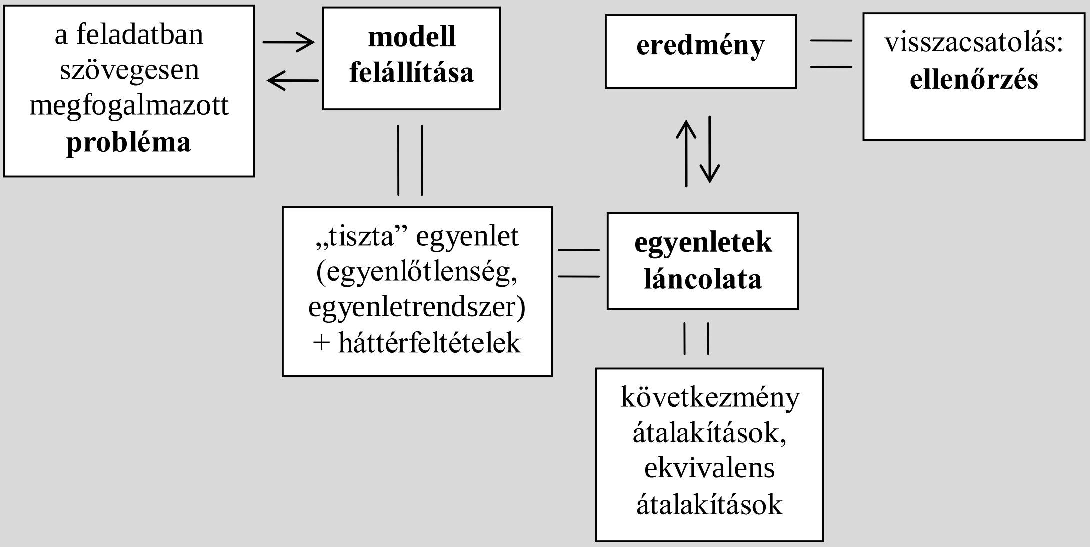
Persze nem számíthatjuk ide az ellenőrizhetetlen feladatokat, ilyenek általában a valószínűségszámítási feladatok, vagy a nagy számokat eredményező kombinatorika példák. De sajnos nincs egységes konvenció, mi számít még ellenőrizendő eredménynek. Ha például egy kombinatorika vagy számelmélet feladatban 1-2 esetet kapunk, ellenőrizhetjük; 3-4 esetében ez már kérdéses; de a gyakorlatban 10 esetet biztosan nem fogunk visszahelyettesítéssel ellenőrizni. (A későbbi fejezetekben konkrét példákat mutatunk.)

Azoknál a feladatoknál, ahol eszközként használjuk az egyenleteket, az ellenőrzést tehát ritkán várjuk el. Leginkább csak akkor, ha az ellenőrzéssel a háttérmodell szempontjából hamis eredményt szűrünk ki.

6.4. Megjegyzések, következtetések

1. A szöveges feladatok megoldása során először a feladat szövegének megfelelő modellt alkotjuk meg. A modellalkotás matematikailag egy egyenlet (egyenlőtlenség, egyenletrendszer) felállítását jelenti, bizonyos háttérfeltételek figyelembe vételével.

A kapott „tiszta” egyenletből további egyenletek láncolatának felírásával kapjuk a megoldást; az ellenőrzés során pedig meg kell győződnünk arról, hogy a kapott eredmények az eredeti problémának is a megoldásai.



Az ***ekvivalencia*** kérdése kétszeresen is felvetődik:

– egyrészt a „tiszta" egyenletek megoldásakor (kérdés, hogy a felírt ***egyenletek láncolata*** ekvivalens átalakítások eredménye-e);

– másrészt a ***probléma*** és a felállított ***modell*** kapcsolatának vizsgálatakor.

(Egy feladatot (problémát) és a hozzátartozó modellt (egyenletet, egyenletrendszert, egyenlőtlenséget) ekvivalensnek nevezünk, ha a megoldáshalmazuk megegyezik.)

2. Ha a feladat szövegéből az algebra nyelvére történő „kódolás" ekvivalens átfogalmazás volt, akkor a tiszta egyenletek ellenőrzése egyúttal a feladat ellenőrzését is jelenti. Elvileg ekkor nem szükséges a szövegbe való visszahelyettesítés; de az összetettebb feladatoknál bonyolult lehet a szöveg ⇔ modell ekvivalencia igazolása.

3. Sok esetben természetesnek vesszük a szöveg ⇔ modell ekvivalenciát. (Például a Pitagorasz-tétel felírása derékszögű háromszögben, egy koszinusz-tétel alkalmazása, a másodfokú megoldóképlettel való számolás, két egyenes metszéspontjának kiszámítása, vagy egy kombinatorika feladatban a permutációk számának felírása.) Ilyenkor általában nem végzünk ellenőrzést.

4. A szövegbe való visszahelyettesítés elsősorban azért ajánlható, mert – mint ellenőrzés – teljes megoldást ad akkor is, ha az egyenletek láncolatában következmény-egyenletek szerepeltek, és akkor is, ha a modell a szövegnek nem ekvivalens-, hanem csak következmény-átírása volt.

7. Példák szöveges feladatok ellenőrzésére

A szöveges feladatok ellenőrzésének *technikájával* kapcsolatban az útmutatókban szereplő elvárások nem egységesek. Nem világos, a vizsgázónak melyik módszert kötelező alkalmaznia:

– „Ellenőrzés a szövegbe helyettesítéssel."

– „A szövegbe helyettesítéssel ellenőriztem, és kijött."

– Vagy amikor számolásos nyoma van a szövegbe (nem az egyenletbe!) történő helyettesítésnek.

(Az utóbbi években a gyakorlat érezhetően egységesedik, az útmutatókban általában szerepel a szövegbe történő helyettesítésre utalás.)

Néhány példát választottunk 2005-ből.

P.7.1. KSz 2005. május 10. 17. Anna és Zsuzsi is szeretné megvenni az újságosnál az egyik magazint, de egyik lánynak sincs elegendő pénze. Anna pénzéből hiányzik a magazin árának 12%-a, Zsuzsi pénzéből pedig az ár egyötöde. Ezért elhatározzák, hogy közösen veszik meg a magazint. A vásárlás után összesen 714 Ft-juk maradt.
a) Mennyibe került a magazin, és mennyi pénzük volt a lányoknak külön-külön a vásárlás előtt? (10 pont)
b) A maradék 714 Ft-ot igazságosan akarják elosztani, azaz úgy, hogy a vásárlás előtti és utáni pénzük aránya azonos legyen. Hány forintja maradt Annának, illetve Zsuzsinak az osztozkodás után? (7 pont)

(megoldásrészlet)

a)

Ellenőrzés.	1 pont	

b)

Ellenőrzés.	1 pont	

Ebben a régi útmutatóban (a kétszintű érettségi vizsga korai szakaszából) nincs egyértelműen megkövetelve a szövegbe való helyettesítés (és ezen kívül sem utal semmi arra, hogy mi várható el ezért az 1 pontért); az újabb feladatsorok pontozási útmutatóiban ez már következetesen szerepel.

P.7.2. KSz 2005. május 29. 15. Egy számtani sorozat első tagja 5, második tagja 8.
a) Adja meg a sorozat 80. tagját! (2 pont)
b) Tagja-e a fenti sorozatnak a 2005? (Válaszát számítással indokolja!) (3 pont)
c) A sorozat első *n* tagját összeadva az összeg 1550. Határozza meg *n* értékét! (7 pont)

c) (megoldásrészlet)

c)		
Az első n tag összege: $S_n = \frac{5+5+(n-1)\cdot 3}{2}\cdot n = 1550$.	2 pont	
Ebből $(10+3n-3)\cdot n = 3100$, azaz $3n^2+7n-3100=0$.	1 pont	

$n_1 = 31$,	1 pont	
$n_2 = \frac{-200}{6}$.	1 pont	
Mivel $n_2 \notin \mathbf{N}^+$, $n_1 = 31$ lehet csak a válasz.	1 pont	*Ha nem jelzi, hogy $n_2 \notin \mathbf{N}^+$, de helyesen választja ki az n értékét, akkor is jár az 1 pont.*
Ellenőrzés: $\frac{10+30\cdot 3}{2}\cdot 31 = 1550$, tehát 31 tagot kell összeadni.	1 pont	

Az ellenőrzés ebben a megoldásban inkább a megoldás újraszámolásának tűnik. Az utolsó 2 pontból az elsőt a modell ellenőrzésére adhatjuk, míg a másodikat inkább a válaszra (amiben burkoltan megjelenhet az ellenőrzés, lásd P.5.1.).

P.7.3. KSz 2005. október 14. Egy kultúrpalota színháztermének a nézőtere szimmetrikus trapéz alaprajzú, a széksorok a színpadtól távolodva rövidülnek. A leghátsó sorban 20 szék van, és minden megelőző sorban 2-vel több, mint a mögötte lévőben. 500 diák és 10 kísérő tanár pont megtöltik a nézőteret. Hány széksor van a nézőtéren? (12 pont)

Legyen a széksorok száma: n.	1 pont*	**A pontok akkor is járnak, ha a gondolatmenet a képletek helyes használatából derül ki.*
A sorokban levő székek száma egy $d = 2$ differenciájú számtani sorozat egymást követő elemeit adja.	1 pont*	
$a_1 = 20$	1 pont*	
Az n-edik (első) sorban $a_n = 20 + (n-1)\cdot 2$ szék van.	1 pont*	
Az összes helyre az $S_n=\frac{n}{2}\cdot(a_1+a_n)$ alkalmazható.	1 pont*	
$510=\frac{n}{2}\cdot(20+20+(n-1)\cdot 2)$	2 pont	
$2n^2 + 38n - 1020 = 0$	2 pont	
$n_1 = 15$ és $n_2 = -34$	1 pont*	**Akkor is jár mindkét pont, ha csak megállapítja, hogy n_2 negatív, és ezért nem ad megoldást.*
n_2 nem ad megoldást.	1 pont*	
15 széksor van a nézőtéren.	1 pont	
		Ha tagonkénti összeadással kapja meg az n = 15 megoldást, az 5 pont; ha kimondja, hogy más megoldás nincs, további 2 pont.

n_1 = 15 esetén még ellenőrizni kellene, hogy nem kapunk negatív számú ülést az első sorban. Itt tehát a modell ellenőrzése hiányzik.

P.7.2. c)-ben a szövegbe helyettesítéssel ellenőrzünk, míg a teljesen azonos struktúrájú **P.7.3.**-ban egyáltalán nincs ellenőrzés. A következetlenség mellett mindkét feladatban megjelenik viszont a *modell vizsgálata*, ami alapján a negatív gyök kizárásra kerül.

P.7.2. c)-ben nem a $3n^2 + 7n - 3100 = 0$ egyenletbe helyettesítünk (ez lenne a „tiszta” egyenlet ellenőrzése), hanem a szövegbe helyettesítéssel a számtani sorozat tulajdonságát ellenőrizzük. (Ami persze megoldja a „tiszta” egyenlet ellenőrzését is.) Viszont a feladat kérdéses abból a szempontból, hogy az ellenőrzés nyújt-e valamilyen megoldási többletet, azaz valóban szükség van-e rá. Az ellenőrzés az $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ összegképlet kiszámolását jelenti, aminek végigszámolása lényegében a megoldás megismétlése. (Bár nem teljesen: a kapott másodfokú egyenlet gyökeit a megoldóképlettel keressük meg, míg a visszahelyettesítés konstansokkal dolgozik.)

Az újra-számolásos ellenőrzéseket pedig az utóbbi időben nem kérik az útmutatók.

(**P.7.3**-ban inkább hiányolható a modell ellenőrzése, a negatív számú ülés lehetőségének kizárása.)

P.7.4. ESz 2005. május 10. 3. Egy növekedő számtani sorozat első három tagjának összege 60. Az első tagot 64-gyel növelve, a másik két tagot változatlanul hagyva, egy mértani sorozat első három tagjához jutunk. Mennyi a két sorozat első három tagja? (13 pont)

Ha a számtani sorozat második tagja a_2 és differenciája d, akkor $a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 60$,	2 pont	*Az első feltétel két ismeretlennel való felírásáért összesen 2 pont.*
ahonnan $a_2 = 20$.	1 pont	*Vagy $a_1 + d = 20$.*
A mértani sorozat első három tagja: $84 - d$; 20; $20 + d$,	1 pont	
ezért $(84 - d)(20 + d) = 400$, vagy $\frac{20}{84-d} = \frac{20+d}{20}$.	2 pont	*Az egyismeretlenes másodfokú egyenlethez való eljutásért összesen 3 pont.*
Rendezve az egyenletet $d^2 - 64d - 1280 = 0$.	2 pont	*Az egyenletrendezésért.*
Innen $d_1 = -16$ vagy $d_2 = 80$.	2 pont	*Másodfokú egyenlet megoldásáért.*
$d_1 = -16$ nem megoldás, mert a számtani sorozat növekedő.	1 pont	*Amennyiben nem zárja ki ezt az esetet, és két sorozatot kap megoldásként, ezt az 1 pontot veszíti el.*
$d_2 = 80$ esetén a számtani sorozat első három tagja: –60; 20; 100, ami valóban megoldás.	1 pont	*A számok helyes felírásáért az 1 pont jár.*
Az ebből kapott 4; 20; 100 valóban egy mértani sorozat első három tagja.	1 pont	*A számok helyes felírásáért az 1 pont jár.*

A **P.7.4.** példában is az utolsó 3 pont kiosztása többféleképpen értékelhető. Néhány gondolat:

Értékelhetünk úgy, hogy a 3 pont a modell ellenőrzéséért jár. Bár magát a helyettesítést nem végzi el az útmutató, a számtani és mértani sorozat-tulajdonság igen egyszerűen látszik. (Nézőpont kérdése, hogy a $d_1 = -16$ kizárását is (modell) ellenőrzési lépésnek tekintjük-e.)

Soknak tűnik a 3 pont; értékelhetünk úgy is, hogy az utolsó két pont tulajdonképpen a válaszért jár. (Erre utal a jobboldali hasáb két megjegyzése is.) Az ellenőrzésre utaló „valóban megoldás” formulák kissé a levegőben lógnak: a számtani és a mértani sorozat képzése is a definíció szerint történt a feladatban, nem nagyon képzelhető el, hogy ne kapjunk pl. mértani sorozatot. Az ellenőrzésük feleslegesnek, inkább egyfajta „nyugtázásnak” tűnik.

Ugyanakkor tény, hogy a tanítási gyakorlatban, a hagyományok alapján a hasonló feladatokat általában ellenőrizni (nyugtázni?) szoktuk.

(Egy utolsó észrevétel: a modell ellenőrzése megkövetelheti annak a vizsgálatát, hogy nem jöhet-e ki pl. 0 a mértani sorozat valamelyik tagjaként.)

A következő **P.7.5. c)**-ben az útmutató nem kér ellenőrzést, hiszen az a feladat újraszámolása lenne.

P.7.5. ESz 2005. október, 8. a) Egy osztály tanulói a tanév során három kiránduláson vehettek részt. Az elsőn az osztály tanulóinak 60 százaléka vett részt, a másodikon 70 százalék, a harmadikon 80 százalék. Így három tanuló háromszor, a többi kétszer kirándult. Hány tanulója van az osztálynak?
b) A három közül az első kiránduláson tíz tanuló körmérkőzéses asztalitenisz bajnokságot játszott. (Ez azt jelenti, hogy a tíz tanuló közül mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést vívott.) Mutassa meg, hogy 11 mérkőzés után volt olyan tanuló, aki legalább háromszor játszott!
c) A második kirándulásra csak az osztály kosárlabdázó tanulói nem tudtak elmenni, mivel éppen mérkőzésük volt. A kosarasok átlagmagassága 182 cm, az osztály átlagmagassága 174,3 cm. Számítsa ki a kiránduláson részt vevő tanulók átlagmagasságát!

c)		
A második kiránduláson 21 tanuló volt.	1 pont	
Jelölje a kiránduláson résztvevők átlagmagasságát $\overline{h}$. Ezzel a feltételek alapján: $174{,}3=\frac{21\cdot\overline{h}+9\cdot182}{30}$,	3 pont	
ahonnan $\overline{h}=171\,\text{cm}$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Szép példa a modell ellenőrzésére egy régebbi felvételi feladat:

P.7.6. (Pótfelvételi, 1968/7.) Egy n-szög belső szögei olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek első eleme 120° és különbsége 5°. Hány oldalú a sokszög?

Megoldás: Az $(n-2)\cdot180°=\frac{120°+120°+(n-1)\cdot5°}{2}\cdot n$ egyenletben az n_1 = 16 és n_2 = 9 eredmények közül az első nem fogadható el, mert ekkor a sokszögnek volna egy 180°-os szöge is.

Ez a **P.7.6.** feladat tekinthető szövegesnek, hiszen a sokszögek szögösszege és a számtani sorozat jellemzői segítségével fogalmazható meg az egyenlet. Ugyanakkor arra is jó példa, hogy néha mennyire nehéz a modell érvényességét ellenőrizni.

P.7.7. Milyen g alapú számrendszerben lesz $\overline{144}_g$ négyzetszám?

Megoldás: A $g^2+4g+4=(g+2)^2$ átalakítás miatt g bármilyen pozitív egész szám lehet – de csak 4-nél nagyobb, mert a vizsgált számban szerepel a 4-es számjegy.

Ez a **P.7.7.** példa már nem igazán tekinthető szöveges feladatnak (készen kapjuk az állítást), de a feladathoz köthető modell ellenőrzésére – miszerint g > 4 – szükség van.

8. További példák és észrevételek

8.1. Periodikus eredmények

A trigonometrikus egyenletek megoldásakor általában ***végtelen sok gyököt kapunk***, ezek ellenőrzése nehézkes, érdemes tehát az ekvivalens átalakításokra hivatkozni. Ha visszahelyettesítéssel ellenőrzünk – például mert következmény-átalakításokat is alkalmaztunk –, akkor az ellenőrzés

– csak a ***pontos értékkel*** végezhető (pl. $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ az alábbi példában; semmiképpen sem $x_1 = 1{,}05 + 2k\pi$ vagy $x_1 = 1{,}05 + k \cdot 6{,}28$);

– és csak úgy, hogy az eredményül kapott ***periódust is visszahelyettesítjük***.

(A diákok kedvelt eljárása, hogy egyszerűen a [0; 2π[alapperiódusba eső gyököket helyettesítik vissza. Ez helytelen, a trigonometrikus függvények periódusa módosulhat a feladatban. Például sin(2x) periódusa π, $\sin\frac{x}{3}$ periódusa 6π.)

P.8.1. KSz 2005. május 10, 13. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán! $\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$. (12 pont)

13.		
$\cos^2 x + 4\cos x = 3\left(1 - \cos^2 x\right)$.	2 pont	*Ha csak $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ összefüggést írja fel, akkor 1 pont.*
Rendezve: $4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$.	1 pont	
Ennek gyökei: $\cos x = \frac{1}{2}$ vagy	1 pont	
$\cos x = -\frac{3}{2}$.	1 pont	
Ha $\cos x = \frac{1}{2}$, akkor $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, vagy $x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$,	3 pont	*Ha a periódus valahol hiányzik, legfeljebb 2 pont. Elfogadható a fokokban megadott megoldás is. Ha keveri a fokot és a radiánt, legfeljebb 1 pontot kaphat.*
ahol $k \in Z$.	1 pont	
Ha $\cos x = -\frac{3}{2}$, akkor nincs megoldás, hiszen $\cos x \geq -1$ minden x esetén.	2 pont	*Indoklás nélkül 1 pont.*
Az egyenlet megoldása közben ekvivalens átalakításokat végeztünk, így mindkét gyöksorozat megoldása az eredeti egyenletnek.	1 pont	*Ha a megoldásban nem ír periódust, de a kapott két gyököt visszahelyettesíti,*
		akkor is adjuk meg az ellenőrzésért járó 1 pontot.

Az útmutató szerint az ellenőrzésre 3 pont jár, 2 pont a modell helyességének vizsgálatáért, és 1 pont a technikai részért. Az utolsó megjegyzés szerint, ha a vizsgázó az eredményt hibásan, periódus nélkül adja meg, attól még kaphat pontot a behelyettesítéses ellenőrzésre. Sajnos arra nincs utalás, mi a teendő akkor, ha a periódussal együtt adja meg a megoldást a vizsgázó (helyesen), de a periódus nélkül ellenőriz. Valami ilyesminek kellene itt lennie:

Ha $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, akkor $\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$,

$3 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, a két oldal egyenlő. (Hasonlóan x_2-re is.)

Az eljárás bonyolult, az eddigi útmutatók közül egyetlen egy sem tartalmazott periódussal együtt történő visszahelyettesítést.

Az érettségi vizsgán a periódussal együtt történő visszahelyettesítés elvárása kissé irreális is lenne. Az eljárás munkaigényes – főleg a szerezhető minimális pontért! –, és a vizsgázókat nem is nagyon készítjük fel erre. (Sem a tanítási gyakorlatban, sem a korábbi évek útmutatói gyakorlata alapján.)

8.2. Az ellenőrzésért járó pontok szétosztása

Az előző **P.8.1.** feladatban az ellenőrzésért járó pontszámokat többféleképpen is értelmezhetjük. Az egyik értelmezés lehet a fenti: 2 pont a modell, 1 pont a felállított „tiszta” egyenlet ellenőrzéséért. Egy másik lehetséges értelmezés szerint az első 2 pont még a feladatmegoldás szerves része, maga az ellenőrzés csak az utolsó pontot jelenti. És hát kis túlzással 1-től 3 pontig bármennyit adhatunk az utolsó két sorra: a minimális 1 pontot például akkor, ha mindkét sort összesen 1 pontért az ellenőrzéshez soroljuk.

Vagy hasonló példa **P.7.4.** is, amelyet fentebb szintén 3 pontos modell-ellenőrzésként értelmeztünk, de más lehetőségek is vannak mind az értelmezésére, mind a pontszám megállapítására. (Mit tekintünk modellnek, mi tartozik még hozzá, milyen mélységig ellenőrizzük stb.)

P.8.2.1. Milyen alapú az a számrendszer, amiben a 132 tízes számrendszerbeli szám alakja 156?

Megoldás: Ha a számrendszer alapja x, akkor $x^2 + 5x + 6 = 132 \Leftrightarrow$
(1) $x_1 = -14$,
(2) $x_2 = 9$,
(3) x_1 a feladatnak nem megoldása (számrendszer alapja nem lehet negatív),
(4) $x_2 = 9$ lehetséges, mert pozitív egész szám,
(5) és 6-nál nagyobb.

Ez az öt gondolati egység 2-től 5 pontig is jutalmazható.

A maximum pontozás mindegyik gondolati egységet 1-1 ponttal jutalmazhat, az utolsó 3 pontot a modell ellenőrzéséért adva. Technikailag az $x_2 = 9$ elfogadása után még 1 pont adható, ha a megoldás hangsúlyozza (5)-öt. (A pontozás védhető, de természetesen egy 5 pontos feladatban irreálisnak tűnik, hogy 3 pontot adjunk az ellenőrzésre.)

A másik véglet a minimum: (1) és (2) ér 1 pontot (a két gyök meghatározása), a (3) – (5) egységekért pedig szintén 1 pontot adhatunk (mint ellenőrzésért összesen).

Az alábbi **P.8.2.2.** példában az ellenőrzésekért összesen az utolsó 1 pont jár (bár az első pont is ide sorolható).

P.8.2.2. ESz 2008. október, 1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $(x-2)\cdot\lg(x^2-8)=0$

b) $x^2-|x|=6$

1. a)		
A logaritmus értelmezése alapján: $x^2-8>0$. $\left(x<-2\sqrt{2}\ \text{vagy}\ x>2\sqrt{2}\right)$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó más megfelelő indoklással zárja ki a hamis gyököt.*
Egy szorzat értéke pontosan akkor 0, ha valamelyik szorzótényező 0, azaz ha $x-2=0$, vagy $\lg(x^2-8)=0$. 1. eset: $x-2=0 \iff x=2$.	1 pont	
2. eset: $\lg(x^2-8)=0 \iff \lg(x^2-8)=\lg 1$	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldásból derül ki, akkor is jár az 1 pont*
$x^2-8=1 \iff x^2=9 \iff x_1=3$ vagy $x_2=-3$.	1 pont	
Az $x=2$ érték nem eleme az értelmezési tartománynak. Az értelmezési tartomány $x=3$ és $x=-3$ elemei megoldások, mert az átalakítások ekvivalensek voltak. $M=\{-3\,;\,3\}$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha más módon indokolja a két gyök helyességét.*

Kissé szokatlan persze a két szélsőséges pontozás, és ha **P.8.2.1**-ben (5)-öt hangsúlyozzuk, akkor ismét szerepet kaphat a kitűzési elv (olyan feladat kitűzése, amelyben az egyik gyök 6-nál nem nagyobb pozitív egész szám). Összességében talán az állapítható meg, hogy az útmutatókban az ellenőrzésért járó pontok szétosztása nem történik mindig egységesen, és egy kis mozgásteret enged a javításban – de ez egyáltalán nem tűnik nagy problémának.

8.3. Nyilak használata (⇒, ⇔)

A megoldási útmutatókban néhány éven keresztül megjelentek az ekvivalens átalakításokat jelölő ’⇔’ nyilak. (Ilyen volt az előző **P.8.2.2.** példa is.) A jelölés alkalmazása figyelemre méltó: egyszerűbb, tömörebb, és a leírásból kihagyja a (gyakran nem túl sokatmondó) töltelékszavakat. A jelölési módszer nem vált általánosan elterjedté az útmutatókban, pedig használata – tudatos használata! – nagy segítség lehetne a diákok számára. (A jelölés természetesen nem szokatlan a tanítási gyakorlatban: például azonos egyenlőtlenségek igazolásakor hangsúlyozottan, soronként érdemes szerepeltetni.)

Az alábbi **P.8.3.** példában többször is megjelenik az ⇔ ekvivalencia-jelölés. Sajnos ez még nem elég, *minden* lépésnél alkalmazni kellene. A megoldás első sorában, a négyzetre emeléskor keletkezhettek hamis gyökök, így a visszahelyettesítéssel történő ellenőrzés kötelező. A nyilak alkalmazása nem érte el teljes mértékben a célját. (Az útmutató pedig „túlságosan nagyvonalúan” csak utal az ellenőrzés végrehajtására.)

P.8.3. ESz id 2008. május, 3. Határozza meg az α valós paraméter értékét úgy, hogy a
$4x^2-4(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot x+1+\sin\alpha=0$
egyenletnek egy darab kétszeres valós gyöke legyen! (13 pont)

Második megoldás		
$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin\alpha$ mindkét oldalt négyzetre emelve, rendezve $3\sin^2\alpha(3-4\sin^2\alpha)=0$	2 pont	
$\sin^2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = n\pi, n\in Z$	1 pont	
$\sin^2\alpha = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ vagy $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3}+2l\pi; k,l\in Z$	2 pont	
Hamis gyökök kiszűrése	2 pont	

Az útmutató így kissé hiányos is, hiszen nem árulja el, hogy melyek a hamis gyökök.

8.4. Ellenőrzés különböző témakörökben

Az ellenőrzés fogalmát elsősorban az algebrai területhez kötjük (egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek megoldása), bár az esetleges modell vizsgálata minden témakörben szerepelhet, és a tágabban értelmezett ellenőrzés akár egy geometriai feladat diszkusszióját is jelentheti. A különböző témakörökbeli ellenőrzést elsősorban a szöveges feladatok indukálják. A továbbiakban néhány példát mutatunk különböző témakörökből, vázlatos megoldásokkal; elsősorban olyanokat, amelyeknek az ellenőrzése valamilyen értelemben kérdéseket vet fel.

P.8.4.1. 50 kockadobás eredményét tartalmazza a táblázat, sajnos két cella utólag olvashatatlanná vált. Mik lehettek a hiányzó dobásértékek, ha a dobott számok átlaga 3,8 volt?

dobásérték	1	2	3	4	5	6
darabszám	7		8	9		11

Megoldás: Jelölje x a 2-es dobások számát, ekkor az 5-ös dobások száma $15 - x$. Az átlag $\frac{7\cdot1+x\cdot2+8\cdot3+9\cdot4+(15-x)\cdot5+11\cdot6}{50}=3{,}8$; innen $x = 6$; $15 - x = 9$. Ellenőrzés:
$\frac{7\cdot1+6\cdot2+8\cdot3+9\cdot4+9\cdot5+11\cdot6}{50}=3{,}8$ valóban.

Kérdés, hogy megköveteljük-e az ellenőrzést?

Az ellenőrzés a megadott formában újra-megoldás, tehát felesleges. Tekinthetjük az egyszerű feladatokban korábban jelzett, a válaszban megfogalmazott burkolt ellenőrzésnek azt is, hogy $x = 6$ megállapítása után $15 - x$ is pozitív egész szám.

P.8.4.2. Egy háromszög kerülete 21,96 cm, oldalainak hosszai (centiméterben mérve) egy olyan mértani sorozat egymást követő tagjai, melynek hányadosa $q = 0{,}8$. Számítsa ki a háromszög oldalainak hosszát!

Megoldás: Az a, $b = 0{,}8a$, $c = 0{,}8^2\cdot a$ oldalakkal $a + 0{,}8a + 0{,}8^2a = 21{,}96 \Rightarrow a = 9$. A háromszög oldalainak hossza $a = 9$ cm, $b = 7{,}2$ cm és $c = 5{,}76$ cm. Ellenőrzés: a háromszög-egyenlőtlenség alapján az oldalhosszak valóban lehetnek egy háromszög oldalai.

Kell-e ellenőrizni, hogy $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = 0{,}8$? Esetleg túl könnyű az egyenlet? Vagy ez csak újra-számolás lenne?

A 0,8 arányra véleményünk szerint nem kell ellenőrzés, adódik a megoldás menetéből; csakúgy, mint a kerület értéke.

P.8.4.3. Egy teljes gráf éleinek száma *N*. Az eggyel több pontból álló teljes gráf éleinek száma *M*. Az eredeti teljes gráfnál hárommal több pontból álló teljes gráf éleinek száma *N* + *M*. Határozza meg *N* értékét!

Megoldás: ha az eredeti gráf pontjainak száma *n*, akkor $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+3)(n+2)}{2} \Leftrightarrow n^2 - 5n - 6 = 0 \Leftrightarrow n_1 = -1$ vagy $n_2 = 6$. Az első gyök kizárható, a második esetben *N* = 15. Ellenőrzés a szöveg alapján: a hatpontú teljes gráf éleinek száma 15, a hétpontúé 21, a kilencpontúé 36. 15 + 21 = 36 valóban.

Itt is: valóban szükséges az n_2 ellenőrzése? Ez nem az eredeti megoldás újra-számolása lenne? Vagy esetleg az ellenőrzés annak megállapítása, hogy létezik a 6, 7 és 9 pontú teljes gráf?

Itt talán van funkciója a megadott ellenőrzésnek: elvileg negatív is lehetne valamelyik származtatott gráf pontjainak a száma.

P.8.4.4. Határozzuk meg azokat a kétjegyű pozitív egész számokat, amelyek 9-cel nagyobbak a számjegyeik szorzatánál!

Megoldás: Az $\overline{ab}$ számra felírható a 10*a* + *b* = *ab* + 9 egyenlet, ennek megoldása (*a*; *b*) = (1; 3) vagy (*a*; *b*) = (2; 7). Ellenőrzés: 13 = 1·3 + 9 és 27 = 2·7 + 9 valóban.

A megadott ellenőrzés inkább csak számolási próbának tűnik. De a mindennapi gyakorlatban ezt a feladattípust általában ellenőrizzük; talán csak azért, mert olyan *jól ellenőrizhető*.

P.8.4.5. Határozzuk meg azokat a kétjegyű pozitív egész számokat, amelyek a számjegyeik szorzatának a hétszeresével egyenlők!

Megoldás: Az $\overline{ab}$ számra felírható a 10*a* + *b* = 7(*a* + *b*) egyenlet, innen *a* = 2*b*, azaz a keresett szám 21, 42, 63 vagy 84.

Ez utóbbi feladatban már nem szoktunk ellenőrizni. Kicsit soknak tűnik a 4 szám (persze könnyen konstruálhatunk még több eredményt adó feladatot is), azonos struktúrájú és átlátható az eredmény.

P.8.4.6. Határozzuk meg *x* és *y* arányát, ha adott az alábbi egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad x^2 - 6xy + 2y^2 = -3, \\ &(2)\quad 2x^2 + 3xy - 7y^2 = -2. \end{aligned}\right\}$$

„**Megoldás (hibás)**: –2·(1) + 3·(2): ekkor $4x^2 + 21xy - 25y^2 = 0$. $y \neq 0$, így $\frac{4x^2}{y^2} + \frac{21x}{y} - 25 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 1$ vagy $\frac{x}{y} = -\frac{25}{4}$. Ekvivalens átalakításokat végeztünk.”

Ez a feladat csapda-jellegű. Nem nyilvánvaló, hogy a helytelen eredményt ki kell szűrni, és az sem, hogy miképpen. $\frac{x}{y} = -\frac{25}{4}$ nem lehetséges, ami például az $x = -\frac{25}{4}y$-nek (1)-be történő visszahelyettesítésével látható.

8.4. Megjegyzés

A fenti feladatban a problémát az okozta, hogy az egyenletrendszerből *egyenletet* állítottunk elő. Megmutatható, hogy ez a lépés általában nem ekvivalens, még a legegyszerűbb esetekben sem (egyik változó kifejezése, vagy egyenletekkel végzett, egyenletet adó lineáris kombinációk alkalmazása stb.) Az egyenletrendszerek ekvivalenciája nehéz témakör, túlmutat a középiskolás tananyagon. Most csak annyit jegyzünk meg, hogy egyenletrendszerrel ***csak egyenletrendszer*** lehet ekvivalens. (Mivel a középiskolában általában úgy oldunk meg egyenletrendszert, hogy az ismeretlenek fokozatos kiküszöbölésével egyismeretlenes *egyenletet* állítunk elő, így az ekvivalencia-probléma jellemzően fennáll – még akkor is, ha az egyszerű egyenletek miatt nem történik gyökvesztés vagy nem születik hamis gyök.) Gyakorlati szempontból a fenti egyenletrendszer-ekvivalencia megállapításnak két fontos következménye van.

– Ha egyenletrendszerből egyenletet kaptunk (lásd például a fenti feladat), akkor valamelyik korábbi egyenlet(ek)et is meg kell őriznünk az ekvivalencia teljesüléséhez;

– ellenőrzés szempontjából pedig azt fontos hangsúlyoznunk, hogy ***az összes eredeti egyenletet ellenőriznünk kell***.

8.5. Javaslatok (amik támogatottsága nem túl nagy)

Láttuk az egyes feladattípusok elemzésekor, hogy a legtöbb észrevételünkhöz tüstént találtunk kivételeket is. Ez a kétarcúság a témakör jellegéből adódik, és emiatt általános érvényű javaslatok nem is igen tehetők. Az egyszerűbb észrevételeket a megfelelő helyen jeleztük (ilyen volt például az, hogy a szövegbe való helyettesítés lehetőleg az útmutatóban is jelenjen meg, ne csak az erre való utasítás szerepeljen). Két rendszerjellegű javaslatot is megemlítünk, bár tudjuk, hogy csak részben valósíthatók meg, és mindkettő bevezetése (természetesen) további problémákat szülne.

8.5.1. Az egyik lehetőség az lehet (kitűzési oldal), hogy ***a feladat szövege jelezze, ha kell az ellenőrzés*** (azaz pontot ér a javítás során); illetve alkalmanként azt is jelezze, ha nem kéri. (Hasonló jellegű a középszintű érettségi sorok első részében az indoklás kérése.)

A javaslat támogatottsága nem nagy, a sok felvetődő probléma közül az egyiket megemlítjük: a „tiszta” egyenleteknél az ekvivalencia – visszahelyettesítés kérdésköre elég jól tipizálható, és ismerete (felismerése) szakmai tartalmat is hordoz, a feladatmegoldás szerves része. Az ellenőrzési kérés bevezetése szakmailag szegényebbé tenné a megoldást.

8.5.2. Egy másik lehetőség a „tiszta” egyenletek körében kiszűrné a „túl könnyű” vagy egyes esetekben a „túl bonyolult” ellenőrzéseket (**5.1–5.2.** pontok – amikor hiányzik az ellenőrzés). Egységes elvként kimondhatnánk, hogy ***az első- és másodfokú egyenletek megoldása esetén nem kérjük az ellenőrzést***. (Az első esetben túl könnyű a feladat; a másodikban pedig ismert a megoldóképlet, ennek levezetése ekvivalens lépésekkel történt a tanítási órán, elvileg tehát nincs szükség a gyökök ellenőrzésére.) Így elkerülhető lenne pl. a **P.4.3.1.** irracionális gyökeinek bonyolult helyettesítése ($x_1 = 1+\sqrt{2}$ és $x_2 = 1-\sqrt{2}$), vagy kitűzhető lenne a $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$ egyenlet, mert nem kellene ellenőrizni a $x_1 = \log_2 3$ gyökét.

Persze több ellenérvet is felsorolhatunk. Ha hivatkozhatunk az ekvivalenciára, akkor a nehéz helyettesítések jelenleg is elkerülhetők. Ha viszont történt nem-ekvivalens átalakítás is, akkor kifejezetten gondot okozna, hogy az ellenőrzés nem kötelező. (És ilyet könnyen találunk: például az egyszerű törtes egyenletek gyakran első- vagy másodfokú egyenletté alakíthatók, nem-ekvivalens átalakításokkal.) Ekvivalencia-problémák jelentkezhetnének az egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek megoldásakor is és így tovább. (Lásd a fenti **P.8.4.6**-ot.)

Az elv egységes bevezetése valószínűleg nem lehetséges a kivételek miatt sem, inkább csak „általában” használhatnánk, bár azért lenne még egy nagy előnye. Azokban a feladatokban, ahol csak eszközként szerepel az egyenletmegoldás, közmegegyezés alapján nem kérünk ellenőrzést. Ez a nagyfokú logikátlanság csökkenhetne a „másodfokú-elv” óvatos bevezetésével, mert ezekben a számolásos feladatokban túlnyomórészt első és másodfokú kifejezések szerepelnek.

Az alábbi azonos struktúrájú példák megoldásaiban **P.8.5.2.1**-ben nincs, **P.8.5.2.2**-ben pedig van ellenőrzés. (A jelenséggel már foglalkoztunk korábban pl. **5.8.** és **5.9**-ben, ahol igen fontos észrevételeket tettünk az ellenőrzés elmaradásával kapcsolatban. Most az első példában az egyenletet inkább eszközként használjuk egy függvényes feladatban; míg a második példában tiszta egyenletek megoldásáról van szó.

P.8.5.2.1. KSz 2009. május, 17. b)

17. A valós számok halmazán értelmezett f másodfokú függvény grafikonját úgy kaptuk, hogy a $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ függvény grafikonját a $\mathbf{v}\,(2;\,-4{,}5)$ vektorral eltoltuk.

a) Adja meg az f függvény hozzárendelési utasítását képlettel!
b) Határozza meg f zérushelyeit!
c) Ábrázolja f grafikonját a $[-2;6]$ intervallumon!

Oldja meg az egész számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!

d) $\frac{1}{2}x^2 \le 2x+\frac{5}{2}$

17. b)		
A $0{,}5(x-2)^2-4{,}5=0$ egyenletet kell megoldani.	1 pont	
$0{,}5x^2-2x-2{,}5=0$.	1 pont	
$x_1=5$.	1 pont	
$x_2=-1$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	*Ha az a) részben hibásan felírt másodfokú függvény képletével helyesen számol, 4 pontot kap.*

P.8.5.2.2. KSz 2009. október, 13. a)

13.

a) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!
$(x+2)^2-90=5\cdot(0{,}5x-17)$

b) Oldja meg a valós számok halmazán a $\frac{3-x}{7x}<2$ egyenlőtlenséget!

13. a)		
A zárójelek felbontása: $x^2+4x+4-90=2{,}5x-85$.	1 pont	
$x^2+1{,}5x-1=0$.	1 pont	
$x_1=0{,}5$, $x_2=-2$.	2 pont	
A gyökök a valós számok halmazán megfelelnek.	1 pont	*Ellenőrzésért vagy ekvivalenciára való hivatkozás esetén jár a pont.*
Összesen:	**5 pont**	

„Ellenőrzésért vagy ekvivalenciára való hivatkozás esetén jár a pont.” A megjegyzés azt mutatja, hogy itt az útmutató az ellenőrzés szűkebb értelmezését használja: ellenőrzés = visszahelyettesítés.

9. Az „ellenőrzés” néhány további megjelenése, értelmezése

Az itt következő értelmezések kissé távolabb állnak az eddig vizsgált feladattípusoktól, csak a teljesség kedvéért soroljuk fel őket.

9.1. Ellenőrzés a szó köznapi értelmében

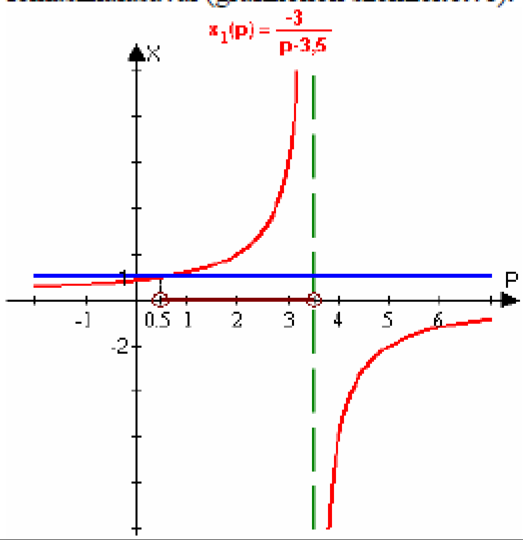
A napi munkatevékenység szerves része a kész munka „felmérése”. Ekkor áttekintjük, hogy mit is csináltunk, az eredmény megfelel-e a célnak, esetleg vannak-e további fejlesztési lehetőségek és így tovább. Ez a matematikai munkafolyamatokkal is így van, ilyen tevékenység lehet például a *megerősítő példák* keresése. Ekkor egy geometriai eredményt speciális ábra felvételével ellenőrzünk, vagy egy egyenlőtlenség jó és rossz megoldásai közül néhányat próbaképpen visszahelyettesítünk.

9.2. Grafikus megoldás „ellenőrzése”

Grafikus megoldás esetén tipikus eljárás függvények metszéspontjának leolvasása. Ekkor a metszéspont kiszámítása helyett „megsejtjük” azt, és behelyettesítéssel ellenőrizzük a helyességét.

P.9.2. ESz 2005. május 10, 6. Tekintsük a valós számokon értelmezett $f(x)=(p-3{,}5)x^2+2(p-2)x+6$ függvényt, ahol p tetszőleges valós paraméter!
a) Mutassa meg, hogy tetszőleges p érték mellett $x=-2$ zérushelye a függvénynek! (2 pont)
b) Milyen p értékek esetén lesz a függvény másik zérushelye 1-nél nagyobb? (14 pont)

b)

Megjegyzés: Az utolsó gondolati egység grafikus megoldása:		
Az $x_1(p)$ függvény monotonitásának felhasználásával (grafikonon szemléltetve): 	6 pont	*$x_1(p)$ grafikonjáért 4 pont.* *A metszéspont kiszámításáért 2 pont. (Ha leolvassa a metszéspont abszcisszáját és ellenőrzi, ugyancsak 2 pont. Ha pontatlanul olvassa le, vagy nem ellenőrzi, akkor csak 1 pont.)*

9.3. Ellenőrzés = sejtés igazolása

Az előző **9.2.** pont általánosításáról van szó. Egy megfogalmazott sejtést technikailag többféleképpen is ellenőrizhetünk, az eljárás a megoldási folyamat része.

9.4. Ellenőrzés = esetfelsorolás

Az összeszámolásos kombinatorika feladatokban általában nagyszámú eredményt kapunk, ezeket „nem is szokás” ellenőrizni. (Mi is lenne ekkor az ellenőrzés?) Ennek oka, hogy egyrészt az azonos struktúrájú eredmények egységesen kezelhetők, másrészt pedig általában is „átláthatók”. Persze elképzelhető olyan feladat, amelyben valamely feltételek mellett kisszámú eredmény adódik, és a kapott eredmény *felsorolása* tekinthető egyfajta ellenőrzésnek.

Ez az eljárás nem szükségképpen felesleges. Elképzelhető, hogy valamely további szűkítő feltétel miatt a sejtett megoldások száma tovább csökken, és ezt az ellenőrzéssel deríthetjük ki. (Más témakörű feladatokban is szerepelhet ez a fajta „ellenőrzés”.)

9.5. Egzisztencia és konstrukció

Az előző **9.4.** pont általánosításaként fogalmazhatjuk meg a megoldási konstrukció szerkesztését, de a téma – a kétfajta bizonyítási módszer alkalmazása – önmagában nagyobb, mint a jelenlegi „ellenőrzés-anyagunk”, így éppen csak érintjük.

Egzisztencia-bizonyításról akkor beszélünk, ha csak azt mutatjuk meg, hogy a feladatnak létezik megoldása, de a konkrét megoldási értékeket nem adjuk meg. A konstrukciós bizonyítás folyamán ténylegesen előállítjuk a megoldásokat, vagy eljárást adunk a megkeresésükre.

Bizonyos feladattípusoknál gyakori megoldási út – és valamilyen mértékben az ellenőrzés témaköréhez is sorolható –, amikor egy becslést vagy korlátot adunk a megoldások elemszámára, majd konstrukcióval igazoljuk ezek meglétét.

P.9.5. Öt sakkozó egyfordulós körmérkőzést játszik, a játszmák után a győztes kap 1 pontot, döntetlen esetén mindkét játékos 0,5 pontot kap. A játszmák után a versenyzők pontszámai számtani sorozatot alkotnak, és a végső eredményhirdetéskor kiderült, hogy minden játékos legyőzte az őt közvetlenül megelőzőt. Hány pontot szerezhettek a játékosok?

Megoldás: A játékosok között összesen 10 pont kerül szétosztásra, a harmadik helyezettnek 2 pontja van. Ha a számtani sorozat differenciája 0, akkor mindenki 2 pontos; ha a differencia 0,5, akkor a pontszámok 3; 2,5; 2; 1,5; 1. Mivel az első helyezett legfeljebb 3 pontot szerezhet (van egy veresége a másodiktól), így több lehetőség nincs.

Ez a megoldás még hiányos: mintegy „ellenőrzésképpen” meg kell adni mindkét esetre egy-egy konstrukciót, hogy a talált esetek valóban előállhatnak. A konstrukció lehet például az egyes eredményeket tartalmazó táblázat:

	A	B	C	D	E
A	–	0	0,5	0,5	1
B	1	–	0	0,5	0,5
C	0,5	1	–	0	0,5
D	0,5	0,5	1	–	0
E	0	0,5	0,5	1	–

	A	B	C	D	E
A	–	0	1	1	1
B	1	–	0	0,5	1
C	0	1	–	0	1
D	0	0,5	1	–	0
E	0	0	0	1	–

9.6. A feladat „hitelességének” az ellenőrzése

Nézzünk két példát, mindkettő megoldása hibás.

P.9.6.1. Egy 50 résztvevős szociológiai felmérés egyik kérdésére csak 48-an válaszoltak, 1-től 5-ig terjedő egész számmal. Az adatsokaság módusza 4, mediánja 3,5, átlaga kerek 4 volt. Hogyan változott meg a három statisztikai mutató, ha az utólagosan bekért két adat 4 és 5 volt?

Megoldás (hibás): A módusz maradt 4 (a leggyakoribb adat nem változott). A medián 4 lett. (Korábban a monoton növekvő sorozatba rendezett adatok 24. és 25. eleme 3 és 4 volt; utólag a 25. és 26. válasz egyaránt 4.) Az adatok összege korábban $48 \cdot 4 = 192$ volt, utólag $192 + 9 = 201$-re módosult. Az átlag tehát $\frac{201}{50} = 4{,}02$ lett.

P.9.6.2. Egy téglatest egyik csúcsában összefutó három határlap átlói 18 dm, 28 dm és 38 dm hosszúak. Mekkora a testátló?

Megoldás (hibás): Jelölje a téglalap egy csúcsba futó éleit a, b, c. Ekkor a lapátlók négyzetének hosszára $a^2 + b^2 = 18^2$, $a^2 + c^2 = 28^2$, $b^2 + c^2 = 38^2$ adódik; a d testátló hosszára $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{18^2 + 28^2 + 38^2}{2}$, innen $d = \sqrt{\frac{2552^2}{2}} \approx 35{,}72$ (cm).

Mindkét megoldással az a baj, hogy ha alaposabban megvizsgáljuk az adatokat („ellenőrzünk”), akkor kiderül, hogy a feladat feltételei nem lehetségesek. Kérdés, hogy ezt a megoldónak észre kell-e venni?

P.9.6.1-ben például úgy okoskodhatunk a megoldáskor, hogy ha valóban létezik a szociológiai felmérés, akkor a módusz, a medián és az átlag csak a leírtak szerint változhat. (És ez egy igaz állítás.) Ezt elmondhatjuk **P.9.6.2**-re is: ha létezik a feladatbeli téglalap, akkor átlója csak ≈ 35,72 cm hosszú lehet. (Hogy létezik, az pedig nyilvánvaló, mert a feladat ezt állítja.)

Nem szokás hamis állításokat szerepeltetni a kitűzött feladatokban, a fentiekhez hasonló helyzet jellemzően a feladat összeállítójának hibája miatt áll elő. A helyzet kezelése is kissé „zavaros”, ilyenkor a pontozás általában maximálisan jóindulatú. Ennek ellenére ez a fajta valóság-ellenőrzés éppenséggel hozzátartozhatna a megoldási kultúránkhoz. (Például egy tesztfeladat egy megadott kör adott pontjába húzott érintőjének egyenletét kérdezi. Könnyen elképzelhető egy „Nincs ilyen egyenes.” vagy „Egyik korábbi egyenlet sem jó.” választható válasz, ha pl. a megadott pont nincs a körön.)

Jelenleg tehát a „feladat hitelességének az ellenőrzése” ***általában nem követelmény***. (De csak általában. Mert azért olyan feladat is elképzelhető, ahol a kapott néhány érték hitelesség-ellenőrzésekor kiderül, hogy nem mindegyik megfelelő; és ebben a pillanatban a hitelesség-ellenőrzés már a megoldás szerves részévé válik. Kicsit hasonlók a metarejtvények, vagy ilyen helyzet állna elő, ha pl. **P.9.5.** (körmérkőzés eredménye) valamelyik táblázatát nem lehetne megkonstruálni.)

1.5. Vizsgálat („ellenőrzés 5.”)

Pólya György *A gondolkodás iskolája* c. művében a feladatmegoldás részeként értelmezi a megoldás ***vizsgálatát***. Ez nála a megoldás negyedik lépése, jelenti a megoldás vagy bizonyítás lehetséges ellenőrzését, más megoldási módszerek keresését, a további alkalmazhatóság elemzését (általánosítás). Ezzel a gondolattal minden matematika-témakörben találkozunk, például egy tipikus „vizsgálat” a geometriai szerkesztések diszkussziója. Az eljárás mást és többet jelent, mint az ellenőrzés korábbi értelmezései, hiszen itt például a bizonyítás ellenőrzéséről is szó van.

1.6. Persze további értelmezések is elképzelhetők, az Olvasó is kedvére elmerenghet a kérdésen. Mi egy utolsó példát adunk: egy másik gondolatmenettel, egy második megoldással (ami azonos végeredményt ad) bizonyosabbá tehetjük, hogy helyesen dolgoztunk. A gyakorlat azt mutatja, hogy ha valamit többféleképpen is meg lehet oldani, és minden esetben ugyanazt az eredményt kapjuk, akkor biztosabban állíthatjuk, hogy jól gondolkoztunk. Ez tehát egyfajta gondolatmenet-ellenőrzés.

10. Válasz

Korábban már találkoztunk a *válasz*, *eredmény*, *pontos érték* fogalmakkal, velük kapcsolatban most néhány problémát azonosítunk.

10.1. A válasz fogalma

Az érettségi dolgozatok előlapján szerepel a következő mondat: „8. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!”

Az utasítás ***nem írja elő, hogy egész mondattal kell válaszolni***, a gyakorlatban (és az útmutatókban) technikailag különféle eljárások szerepelnek. Sajnos hiányzik a közmegegyezés, nem egységes a „válaszadás” kezelése. Néhány példa:

10.1.1. Nincs semmi. (Például a megoldás befejezése: „$x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Ellenőrzés.”)
10.1.2. Az eredményt kétszer aláhúzza a vizsgázó.
10.1.3. Rövid közlés, például: „Eredmény: $x = 3$.”

10.1.4. A vizsgázói megoldásokban és az útmutatóban is nagyon gyakori az utolsó (általában 1 pontos) számolási lépés és a válasz egybemosása.
10.1.5. A válasz és az ellenőrzés is gyakran együtt szerepel.

10.1.2. Ellentmond a szó szerinti előírásoknak, de a gyakorlatban általában elfogadják a javítás során. („Mégis csak több, mintha semmi nem szerepelne.”) A **10.1.3.** ellen nem nagyon lehet kifogás, de **10.1.4.** és **10.1.5.** felvet néhány problémát.

Az alábbi megoldásrészletekben **P.10.1.1**-ben nincs szöveges válasz; **P.10.1.2**-ben az utolsó számolási lépés és a válasz egybeszerkesztett, **P.10.1.3**-ban pedig a válasz és az ellenőrzés egybeszerkesztett.

P.10.1.1. KSz 2006. május

18. Egy függőleges tartórúdra a talajtól 4 m magasan mozgásérzékelőt szereltek, a hozzákapcsolt lámpa 140°-os nyílásszögű forgáskúpban világít függőlegesen lefelé.

a) Készítsen vázlatrajzot az adatok feltüntetésével!
b) Milyen messze van a lámpától a legtávolabbi megvilágított pont?
c) Megvilágítja-e az érzékelő lámpája azt a tárgyat, amelyik a talajon a tartórúd aljától 15 m távolságra van?
d) A tartórúdon méterenként kampókat helyeztünk el, amelyekre fel tudjuk akasztani a mozgásérzékelő lámpáját. Alulról számítva hányadik kampót használjuk, ha azt akarjuk, hogy a vízszintes talajon ne világítson meg a lámpa 100 m²-nél nagyobb területet?

(megoldásrészlet)

18. b)		
$y=\dfrac{4}{\cos 70°}$	3 pont	
$\approx 11{,}7$ (m)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

A megoldásrészletben kicsit sokallhatjuk az első lépésre adott 3 pontot; viszont a rövid és könnyű feladat nem igényli, úgy érezzük, hogy két külön lépésben szerepeljen az eredmény és a válasz.

P.10.1.2. 2005. május 28. 18.c) (megoldásrészlet)

A keresett valószínűség: $\dfrac{\binom{32}{5}\cdot\binom{28}{5}}{\binom{60}{10}}\approx 0{,}26$.	1 pont	*A kerekített érték kiszámítása nélkül is jár a pont.*

Itt is eléggé „egybetartozónak” érezzük az eredményt és a választ. Bár a 0,26 kiszámolása érhetne további +1 pontot.

P.10.1.3. KSz 2010. május

13. Számítsa ki azt a két pozitív számot, amelyek számtani (aritmetikai) közepe 8, mértani (geometriai) közepe pedig 4,8.

(Jelölje a két keresett számot x és y.) A számtani közép $\frac{x+y}{2}$,	1 pont	
A mértani közép $\sqrt{x \cdot y}$.	1 pont	
$x + y = 16$,	1 pont	
$x \cdot y = 23{,}04$.	1 pont	
$y = 16 - x$; $(16-x)x = 23{,}04$	1 pont	
Az egyenletrendszerből adódó másodfokú egyenlet $x^2 - 16x + 23{,}04 = 0$,	2 pont	
melynek gyökei az $x_1=1{,}6$ és $x_2=14{,}4$.	2 pont	*Helyes gyökönként 1-1 pont.*
$y_1=14{,}4$ és $y_2=1{,}6$	2 pont	*A 2 pont akkor is jár, ha a keresett számok szimmetriájára hivatkozik.*
A két szám az 1,6 és a 14,4.	1 pont	*Megfogalmazott válasz, vagy ellenőrzött számpár esetén jár a pont.*

Ez utolsó példában talán még ellenőrizhetnénk a modellt: 1,6 és 14,4 számtani és mértani közepe valóban 8, illetve 4,8. Kissé nyugtázásnak tűnik (bár így egyúttal a tiszta egyenletet is ellenőriznénk). „Csaknem” újraszámolásról van szó, de azért a megoldásban $\sqrt{x(8-x)} = 4{,}8$ írható fel, és ez elég távol esik a $\frac{1{,}6 + 14{,}4}{2}$ és $\sqrt{1{,}6 \cdot 14{,}4}$ ellenőrzésbeli kiszámolásától.)

(És a modell vizsgálatához még a kapott számok pozitivitásának ellenőrzése is hozzátartozhat.)

10.2. A válasz problémái

10.2.1. Az utolsó megoldási lépés és a válasz egybemosása

A fenti **10.1.4.** eljárás gyakoriságát (utolsó megoldási lépés és válasz egybemosása) a vizsgázó szempontjából könnyű megérteni: nem kell még egyszer (feleslegesen?) leírni a szöveges választ. A javítási útmutató eljárása is érthető, hiszen így nem kell külön ponttal értékelni a választ; ezt a technikát alkalmazva kicsit nagyobb a mozgástér a feladat többi pontszámának szétosztására. A probléma akkor adódik, ha ***a két összetevőből hiányzik az egyik***. Például jó az utolsó lépésben $\frac{\binom{32}{5} \cdot \binom{28}{5}}{\binom{60}{10}}$ felírása, de a szöveges válasz hiányzik; ekkor a 0 vagy 1 pont között dönteni kell.

10.2.2. Az ellenőrzés és a válasz sorrendje

A **10.1.4.** eljárás szükségképpen meghatározza az ***ellenőrzés és a válasz sorrendjét***. ([3] szerint ez igencsak problematikus.) Elvileg *eredmény – ellenőrzés – válasz* a helyes logikai sorrend, de ha az utolsó megoldási lépést és a választ együtt adjuk meg, akkor csak az *ered-*

mény – válasz – ellenőrzés sorrend lehetséges. Az alábbi **P.10.2.1**-ben a helyes sorrendet szépen valósítja meg az útmutató.

P.10.2.1. KSz 2007. október

14. Az iskola rajztermében minden rajzasztalhoz két széket tettek, de így a legnagyobb létszámú osztályból nyolc tanulónak nem jutott ülőhely. Minden rajzasztalhoz betettek egy további széket, és így hét üres hely maradt, amikor ebből az osztályból mindenki leült.

a) Hány rajzasztal van a teremben? Hányan járnak az iskola legnagyobb létszámú osztályába?

a) (megoldásrészlet)

$x = 15$ és $y = 38$	1 pont	
Ellenőrzés	1 pont	
15 asztal van a teremben, és a kérdéses osztálylétszám 38 fő.	1 pont	

Ebben a korai útmutatóban nyitott kérdés maradt, hogy pontosan mit is várt el az útmutató ellenőrzésként.

Mindenesetre – főleg ha helyes a végeredmény – a logikai sorrend megváltoztatása nem tűnik súlyos problémának. A megoldó szempontjából érthető a helyzet: a kapott eredményt kétszer aláhúzza (esetleg még egy-két szót mellé is ír válaszként), majd ellenőriz.

A javítás során mindig elfogadják az *eredmény – válasz – ellenőrzés* sorrendet is.

10.2.3. Mértékegységek és válasz

A **10.1.4.** eljárás kiemeli a ***mértékegységekkel*** kapcsolatos nehézségeket is. (Alapvetés, hogy ***a válasz csak a mértékegységgel együtt teljes***; de sajnos a mértékegységek számonkérése szintén nem egységes az útmutatókban. [3]-ban több mértékegység-használattal kapcsolatos probléma található.)

A megoldás során általában kiválasztunk egy mértékegységet, amelyet egységesítünk, s amellyel végig dolgozunk, de amit a számolás közben (feleslegesen) már nem írunk ki. Ha az utolsó számolási lépés és a válasz egybeesik, akkor csak zárójellel szerepelhet a mértékegység, például így: „$2 \cdot 2 = 4$ (cm^2) a terület.” (A mértékegységet nem írhatjuk ki, mert az egyenlet bal oldalán nem szerepel.)

A javítási útmutatóban a zárójelezett alak (cm^2) általában azt (is) jelenti, hogy a mértékegység használata nem kötelező. (Például akkor, ha egy számolási részeredményt megkapunk, de a feladat ennek értékére nem kérdezett rá.) Ha az útmutató az utolsó számolási lépést és a választ egybemossa, akkor a fentiek értelmében csak zárójelezett alakot használhat a válaszadáskor, ami a nem kötelező jellegre is utalhat. Ez helytelen; ***mértékegység nélküli választ ne fogadjunk el teljes értékűnek***.

Mivel a mértékegység kiírása kötelező, ez esetben nincs más lehetőség: az útmutatóban külön mondattal kell válaszolni, amelyben szerepelnie kell a mértékegységnek. A választ pedig ponttal kell értékelni, amit a mértékegység hiánya esetén nem kap meg a vizsgázó. (Ilyen **P.10.3.2.** lentebb.)

10.2.4. Mértékegységek és a kitűzési elv

Egy lehetséges kitűzési technika pl. a ”Hány cm^3 a térfogata…” kérdéstípus. Ez csökkenti a mértékegységek használatának súlyát, célja (előnye) az, hogy a válasz mértékegység nélkül is elfogadható legyen. Így a pontozás elsősorban a feladat érdemi, „matematikai” részére tevődik át.

Az utóbbi években csökkent a „tiszta matematika” tanítási súlya, kissé „fellazult” a szakszerűség és a szakmai precizitás az oktatásban, kisebb lett a tanulás-tanítás során az absztrakció szerepe. Ennek elsősorban tematikai okai vannak: megjelentek a gyakorlati, valóságközeli feladatok, és az alkalmazások és modellek kezelése kevésbé precíz munkát követel meg – talán a mértékegységek területén is.

Ugyanakkor meg kell jegyeznünk, hogy a ***mértékegységekkel való tevékenység alapkompetencia***. A feladatot megoldó tanulónak ***tudatosan*** kell egyeztetnie az esetleg különböző mértékegységeket, és a megoldási lépések során is figyelemmel kell lennie a változásukra. (Ráadásul ennek a kompetenciának valóban van gyakorlati szerepe.) Akkor viszont miért ne követeljük meg a válaszban is a mértékegységet?

Úgyhogy a kitűzési elv alkalmazása (és bizonyos tananyagelemek „laza kezelése”) helyett inkább a mértékegységek precíz használatát javasolhatnánk. A számolások közben ez a vizsgázó magánügye, de a válasz csak mértékegységgel együtt legyen teljes értékű.

Jobbnak tűnik tehát a „Mekkora a térfogata …” kérdéstípus, bár ez felveti például a kerekítési problémát. Nehezen köthető a típushoz pontossági elvárás (két tizedesjegy pontossággal …), hiszen ilyen kérdéshez előre meg kell adni a mértékegységet is.

A mértékegységek fontosságát esetleg a feladatok kitűzésekor is hangsúlyozhatnánk, pl. különböző hosszúság-egységeket megadva. (Ez a gondolat ritkán jelenik meg a feladatsorokban.) Egy extrém példa: egy akvárium oldalai 45 cm, 0,6 m, 3,2 dm; hány liter a térfogata stb.

Az alábbi példát a trigonometria területéről választottuk.

P.10.2.4. KSz 2005. május 10, 13. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x.$ (12 pont)

Megoldásrészlet:

Ha $\cos x = \frac{1}{2}$, akkor $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$ vagy $x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,$	3 pont	*Ha a periódus valahol hiányzik, legfeljebb 2 pont. Elfogadható a fokokban megadott megoldás is. Ha keveri a fokot és a radiánt, legfeljebb 1 pontot kaphat.*
ahol $k \in Z$.	1 pont	

Az útmutatóban a fokokban megadott megoldás elfogadása helytelen, hiszen a feladat valós számokat kér eredményül.

Az utóbbi években e tekintetben kivétel nélkül egységesek a javítási útmutatók: ha az eredmény fokokban is megadható, akkor a kitűző az „oldja meg az egyenletet” formát szerepelteti, az alaphalmaz megadása nélkül. (Ekkor a vizsgázó választhat, milyen alaphalmazon dolgozik.) Ha pedig az egyenletet a valós számok halmazán kell megoldani, akkor a fokokban megadott eredmény nem kap maximális pontszámot. (Ez utóbbi megállapítás alól a középszint I. részében kitűzött feladatok kivételek lehetnek.)

10.2.5. Válasz és ellenőrzés együtt

A **10.1.5.** eljárás értékelésekor (válasz és ellenőrzés együtt szerepel) ismét az okoz nehézséget, ha *valamelyik összetevő hiányzik*. Ekkor tisztázatlan az adható pont sorsa.

10.3. Példák különböző választípusokra

10.3.1. KSz 2011. május

16. Egy 12 cm oldalhosszúságú négyzetet megforgatunk az egyik oldalával párhuzamos szimmetriatengelye körül.

a) Mekkora az így keletkező forgástest térfogata és felszíne?
A felszínt egész cm^2-re, a térfogatot egész cm^3-re kerekítve adja meg!

Ugyanezt a négyzetet forgassuk meg az egyik átlóját tartalmazó forgástengely körül!

b) Mekkora az így keletkező forgástest térfogata és felszíne?
A felszínt egész cm^2-re, a térfogatot egész cm^3-re kerekítve adja meg!

c) A forgástestek közül az utóbbinak a felszíne hány százaléka az első forgatással kapott forgástest felszínének?

a) (megoldásrészlet)

Felszíne: $A_1 = 2\cdot 6^2\cdot\pi + 2\cdot 6\cdot\pi\cdot 12$.	1 pont	
$A_1 = 216\pi \approx 679\ cm^2$.	1 pont	*Ha a π közelítéséből adódóan 678 cm^2 a válasza, jár a pont.*

b) (megoldásrészlet)

A forgáskúp palástja kiterítve körcikk, amelynek az ívhossza $2\cdot 6\cdot\sqrt{2}\cdot\pi(\approx 17\pi \approx 53{,}4)$(cm),	1 pont	
sugara 12 cm hosszú.	1 pont	
Így a területe: $T = \frac{2\cdot 6\cdot\sqrt{2}\cdot\pi\cdot 12}{2} = 72\sqrt{2}\,\pi\ (\approx 320\ cm^2)$.	1 pont	
A kettőskúp felszíne: $2T = 144\sqrt{2}\pi(\approx 640\ cm^2)$.	1 pont	

P.10.3.2. KSz 2005. május 29. 12.b) (megoldásrészlet)

A keletkező test térfogata $3\cdot 3^3\ cm^3 = 81\ cm^3$.	1 pont	*Mértékegység nélküli válaszért 0 pont jár.*

A **P.10.3.1. a)** példában $A_1 = 216\pi \approx 679\ cm^2$ így helytelen (még akkor is, ha egész cm^2-re kellett kerekíteni). A 216π-nek pl. az előző sor végén, zárójelben kellene szerepelnie.

A **P.10.3.1. b)**-ben az első zárójel ($\approx 17\pi \approx 53{,}4$) azt jelzi, hogy nem kötelező a benne szereplők kiírása (az ívhossz nem volt kérdés); a második (cm) zárójel ugyanezt jelzi (bár használata kényszer); az utolsó két sorban viszont a zárójel használata helytelen. Az utolsó előtti javítható $72\sqrt{2}\pi$ (≈ 320) (cm^2)-re, de az utolsó sor még ebben a $144\sqrt{2}\pi$ (≈ 640) (cm^2) alakban is hibás lenne, hiszen a mértékegység nélküli választ is elfogadhatóvá tenné.

P.10.3.2. Bár egy műveleti lépés és a válasz egybeszerkesztett, helyes és megkövetelt a mértékegység használata.

Az ellenőrzés és a válasz egybeszerkesztésére igen gyakori, egy korábbi példa **P.7.4.** („Ellenőrzés: … , ami valóban megoldás.”)

10. Megjegyzések, következtetések

1. Alapelv, hogy ***szöveges kérdésre szöveges választ kell adni***. (Bár a „szöveges kérdés” sem egyértelmű fogalom.)

2. *Jelenleg a „szöveges válasz” kezelése bizonytalan, nem egyértelmű*. Az útmutató előírása – miszerint *minden* eredmény szöveges formában közlendő – szokatlan, a kialakult tanítási gyakorlatnak nem felel meg. (Lehet, hogy a szó szerinti előírás kissé anakronisztikus?) Talán éppen ezért a vizsgáztatói-javítási gyakorlat nem kezeli túl szigorúan ezt a kérdést, de úgy tűnik, komolyabb probléma ebből nem adódik.

3. Vigyázni kell az egybemosásokkal: ha az utolsó megoldási lépés vagy az ellenőrzés és a válasz együtt szerepel a pontozási útmutatóban, akkor valamelyik összetevő hiánya esetén nehezen pontozható az egység.

A pontozási útmutató tanító típusú, leginkább ezen keresztül tud véleményt nyilvánítani a bizottság. Nagyon sokan felhasználják a tanításban és az egyéni felkészülés során is, így feltétlenül visszahatása van a tanítási folyamatra. Éppen ezért nagyon fontos az egyértelműség, a következetesség megvalósítása. Erre két példát adunk.

4. Ha már egyszer a szöveges válasz (a kötelező) előírás, akkor ez jelenjen meg az útmutatóban is, akár a töltelékszavak szintjén. Tehát pl. **P.10.1.1.**-ben a befejezés ne az legyen, hogy „≈ 11,7 (m)”, hanem „≈ 11,7 (m) a távolság.” (Még akkor is, ha a választ nem szeretnénk külön ponttal jutalmazni.)

5. Jelenleg a mértékegységek használatában sem egyértelműek a követelmények, és ez a bizonytalanság nyilván károkat okoz. Mivel a mértékegységek szerepeltetésétől nem tekinthetünk el, kézenfekvőnek látszik, hogy *egységesen, minden érintett feladatban*, válaszadáskor követeljük meg használatukat.

Végül még két megjegyzés a kitűzési oldalról.

6. A szöveges feladatok esetében célszerűnek tűnik egy-egy feladaton belül több mindenre rákérdezni. Ekkor a vizsgázó „kénytelen” az egyenlet megoldása után még további (gondolati és technikai) lépéseket tenni, és a többféle eredmény megkülönböztetése miatt szövegesen is válaszolni.

7. Vitatott szituációkban ***a vizsgázó javára kell dönteni*** – ez javítási alapelv. Például egy határeset a „válasz”-ra: a megoldás elején megjelenik a „jelöljük a kérdéses távolságot d-vel” formula; a feladat végén pedig „d = 2 cm”, esetleg kétszer aláhúzva. Az ilyen helyzetek kezelése – az érettségi dolgozatok javításának szelleme alapján – remélhetőleg egységes, és az értékelés jóindulatúan a vizsgázó javára történik.

11. Eredmény

11.1. Az „eredmény” fogalma a gyakorlatban

Nem tisztázott egyértelműen, milyen számokat fogadunk el eredmény gyanánt. Példák különböző „eredményekre:”

P.11.1.1. KSz 2005. május 10. 16. a), b)

a) (megoldásrészlet)

$A = 75\pi$. Vagy $A \approx 235{,}6\ \text{cm}^2$.	1 pont	
b)		
$V = \dfrac{r^2\pi \cdot m}{3}$. $V = \dfrac{25\pi \cdot 5\sqrt{3}}{3}$.	1 pont	
$V \approx 226{,}7\ \text{cm}^3$.	1 pont	

P.11.1.2. KSz 2005. május 28. 18. c) (megoldásrészlet)

A keresett valószínűség: $\dfrac{\binom{32}{5}\cdot\binom{28}{5}}{\binom{60}{10}} \approx 0{,}26$.	1 pont	*A kerekített érték kiszámítása nélkül is jár a pont.*

P.11.1.3. KSz 2005. május 29.

16. Tekintsük a koordinátarendszerben adott $A(6; 9)$, $B(–5; 4)$ és $C(–2;1)$ pontokat!

a) Mekkora az *AC* szakasz hossza? (2 pont)

b) Írja fel az *AB* oldalegyenes egyenletét! (4 pont)

c) Igazolja (számítással), hogy az *ABC* háromszög *C* csúcsánál derékszög van! (6 pont)

d) Írja fel az *ABC* háromszög körülírt körének egyenletét! (5 pont)

(megoldásrészlet)

a)		
$\overrightarrow{AC}(-8; -8)$ $AC = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{128} = 8\cdot\sqrt{2} \approx 11{,}31$	2 pont	*A helyes válaszért jár a 2 pont, bármilyen alakban is adja meg.*

P.11.1.4. KSz 2005. május 29. 18. Anna, Béla, Cili és Dénes színházba megy. Jegyük a bal oldal 10. sor 1., 2., 3., 4. helyére szól.

a) Hányféle sorrendben tudnak leülni a négy helyre? (2 pont)

$4! = 24$	2 pont	*Bármelyik formában megadott helyes eredményért jár a 2 pont.*

P.11.1.5. KSz 2006. október

5. Mekkora az egységsugarú kör 270°-os középponti szögéhez tartozó ívének hossza?

Az ívhossz: $\dfrac{3\pi}{2}$.	2 pont	*A válasz elfogadható közelítő érték (4,712) megadásával is, ha legalább egy tizedes pontossággal számol.*

P.11.1.6. KSz 2008. május

15. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával ötjegyű számokat készítünk az összes lehetséges módon (egy számjegyet többször is felhasználhatunk). Ezek között hány olyan szám van,

a) amely öt azonos számjegyből áll;
b) amelyik páros;
c) amelyik 4-gyel osztható?

b) (megoldásrészlet)

$3\cdot 6^4 (= 3888)$-féle páros szám lehet.	1 pont	*Az eredmény bármelyik helyes alakjáért jár az 1 pont.*

P.11.1.7. KSz 2012. október 18. b) (megoldásrészlet)

A kérdéses valószínűség: $P(A) = \dfrac{\binom{9}{7} + 4\cdot\binom{9}{6}}{\binom{13}{7}} =$	1 pont	
$= \dfrac{372}{1716} (\approx 0{,}2168)$.	1 pont	

P.11.1.1.a)-ban elfogadható végeredményként a 75π (mértékegység nélkül), a **P.11.1.1. b)**-ben a $\dfrac{25\pi\cdot 5\sqrt{3}}{3}$ már nem; igaz, ez bonyolultabb kifejezés. **P.11.1.2**-ben elfogadható $\dfrac{\binom{32}{5}\cdot\binom{28}{5}}{\binom{60}{10}}$, **P.11.1.7**-ben a hasonló kifejezést további részpontért ki kell számítani. **P.11.1.3-ban** „mindent” elfogadunk (az utolsó három alak közül), **P.11.1.4**-ben és **P.11.1.6**-ban sem kell a 4!, illetve a $3\cdot 6^4$ kifejezéseket kiszámolni. **P.11.1.5**-ben pedig a pontos irracionális szám az „alapmegoldás”, de mellette annak közelítő értéke is elfogadható (szerencsére, mert egyes tanulóknak a valós számot adja eredményül a számológépe).

11.2. Az „eredménnyel” kapcsolatos problémák

Egy javaslat [3]-ban, hogy ha a számszerű végeredményben műveleti jelek és függvény-jelek szerepelnek, akkor el kell végezni az egyszerűsítéseket, és végeredményként ***tizedestört-alakú, legalább két tizedesjegy pontosságú valós szám***ot kelljen megadni.

Ekkor azonban az ellenőrzéssel gondjaink lennének: a tizedestört-alak általában közelítő érték, amivel nem lehet ellenőrzést végezni. (Az pedig feltétlenül kívánatos, hogy ne legyen egy külön eredmény a válasz, egy másik pedig az ellenőrzés céljára.)

Fentebb láttuk, hogy az egységesítő konvenció hiányában az útmutató a legkülönfélébb alakú eredményeket adja meg: ha nincs kerekítési előírás, akkor szerepelhetnek racionális és irracionális számok, egyszerű vagy nagyobb számokból álló törtek, kevesebb vagy több mű-veleti és függvényjelet tartalmazó kifejezések. Használhatunk normál alakot, a „túl kicsi” vagy „túl nagy” eredményre vezető kifejezéseket nem szükségszerű egyszerűsíteni. A sor bonyolultabb végén a **P.11.1.2.** $\dfrac{\binom{32}{5}\cdot\binom{28}{5}}{\binom{60}{10}}$ vagy a **P.4.3.2**-beli $\log_{4,5}\dfrac{1}{3}$ áll…

Csak valami olyasmit várunk el tehát az „eredménytől”, hogy *viszonylag egyszerű alakú legyen, és ne tartalmazzon túl sok műveleti jelet*. (Ha a kifejezés könnyen további egyszerűbb alakra hozható, akkor az egyszerűsítéseket általában elvégzi az útmutató. Bár **P.11.1.7**-ben a $\dfrac{372}{1716}$ tört egyszerűsítése nem volt előírás…)

11.3. Az eredmény és a kitűzési elv

A kitűzési oldal bizonyos egyszerű módszerekkel befolyásolhatja az eredmény alakját. Néhány ezek közül:

1. Megfogalmazható közvetlen kérés, például: „az eredményt tovább már nem egyszerűsíthető, közönséges tört alakban adja meg”.

2. A „Határozza meg” helyett alkalmazott „Számítsa ki” forma számszerű végeredményre utalhat.

3. Előírható a végeredmény pontossága; ekkor az esetleges kerekítési előírás megköveteli a közelítő, tizedes tört alakot. (Mint korábban láttuk, ez egyúttal az ellenőrzés végrehajtását is eltörli, mivel közelítő értékkel nem lehet ellenőrizni.)

4. Korábban láttuk, hogy mértékegységek szereplése esetén az esetleges pontossági előírás már a kérdésfeltevéskor megköveteli a mértékegység rögzítését.

11.4. A részeredményeket ismétlő válasz problémája

A **P.2.5.** feladatban a [–2,5; 2,5] intervallumon kellett megoldani az $x^3 - 3x = 0$ egyenletet. A megoldás:

2. a)		
Mivel $x^3 - 3x = \left(x+\sqrt{3}\right)x\left(x-\sqrt{3}\right)$, ezért f zérushelyei lehetnek: $x_1 = -\sqrt{3}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \sqrt{3}$.	3 pont	*Zérushelyenként 1 pont.*
Az egyenlet mindhárom gyöke eleme az f értelmezési tartományának, ezért mindegyik zérushely.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

A válaszban megismételtük az $x \in$ [–2,5; 2,5] feltételt, de ez nem általános szokás. Gyakran megelégszünk a következő zárómondattal: „$x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x = -\sqrt{3}$ megoldások.” Vagy: „Eredmény: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x = -\sqrt{3}$.”

Az eredmény alakjával kapcsolatban jelenleg nincs elfogadott konvenció (szükséges-e a részeredmények összevonása, a kivételek megismétlése, a feltételekre való újrahivatkozás stb.), és az útmutatók sem kezelik egységesen a kérdést. Néhány hasonló példa:

P.11.4.1. Egy feladat két részeredménye $-2 \le x < 2$, valamint (’vagy’) $1 \le x < 3$. Készen vagyunk, vagy vonjuk össze az eredményt a $-2 \le x < 3$ egyszerűbb alakba? /*egyszerűbb alak*/

P.11.4.2. Egyenlőtlenség megoldását két részletben végezzük. I. Ha $x = 0$, akkor kiderül, hogy nincs megoldás. II. Ha $x \ne 0$, akkor az eredmény $-2 \le x < 3$. Ez így rendben van, vagy még egyszer le kell írni: $x \in [-2; 3[\setminus \{0\}$? /*feltételismétlés*/

P.11.4.3. Egy kikötés szerint $x \ne 1$, $x \ne 3$. Az eredmény $-2 \le x < 4$. A válaszban újra ki kell zárni a kikötésben szereplő elemeket? (És ha $-2 \le x < 2$ az eredmény?) /*kiküszöbölt elemek*/

P.11.4.4. „A háromjegyű természetes számok között nincs prím, mert mindegyik osztható 3-mal.” Ki kell-e írni azt a nyilvánvaló tényt, hogy 3-nál nagyobb számokról van szó? (És akkor ki kell írni, ha a megoldásban korábban szerepelt, hogy $100 < \overline{xxx}$?)

P.11.4.5. A 6-os számrendszerben kapott eredmény $x = 231_6$. Készen vagyunk, vagy még oda kell írni, hogy a számjegyek 6-nál kisebbek? És akkor mi a helyzet, ha a „6-nál kisebb számjegyek” feltétele korábban szerepelt a megoldás folyamán? /*helyesség megállapítása*/

P.11.4.6. „Oldja meg a $\frac{2x-2}{x-7} < 0$ egyenlőtlenséget az egész számok halmazán!

Megoldás: $1 < x < 7$.”

Meg kell ismételni a válaszban, hogy x egész szám? Esetleg fel kell sorolni a 2, 3, 4, 5, 6 eseteket?

Természetesen sorolhatnánk még tovább a példákat, de talán látható a vitás helyzet. Ekkor az a kérdés vetődik fel, hogy egy korábban már megállapított feltételt vagy részeredményt ismét ki kell-e írni a végeredmény szerepeltetésekor. (A javító tanár oldaláról a kérdés úgy szól, hogy a megoldó tudatában van-e annak, hogy a megoldása valóban helyes, a feltételeknek megfelel; vagy csak elfelejtette összevetni az eredményt a feltételekkel, és „szerencséje van”. A kitűzési elv oldaláról nézve a helyzet egyszerű: olyan feladatot kell szerepeltetni, amikor a feledékeny vagy blöffölő diák lebukik. Vagy amit korábban is jeleztünk: többféle kérdés is feltehető, és az ezekre kapott válaszok egyértelműsítik a helyzetet.)

Néhány esetben vannak kialakult konvenciók, például az ’és’ típusú megoldáshalmazokat általában összevonjuk, elkészítve a halmazok metszetét; míg például a trigonometrikus gyökrendszereket általában nem. Mint említettük, a témában sajnos nincs általánosan elfogadott, kialakult gyakorlat, és az útmutatók sem egységesek. Mindenesetre a problématípus egy része onnan származtatható, hogy az egész mondatos, eredményt tartalmazó záróválasz nem vált általános gyakorlattá.

A tisztázatlan helyzeteket általában a fontos javítási elv segítségével kezelhetjük: eszerint kétség esetén a vizsgázó javára kell dönteni.

11.5. „Pontos érték”

A feladatsorok megoldásakor – az útmutatók szerint – kifejezetten ritkán van szükség a pontos értékekkel történő számolásra. Tipikus kérdések, amik pontos választ igényelnek: melyik mennyiség a nagyobb; szögei szerint milyen fajta háromszöget kaptunk; mekkora az egyenesek vagy vektorok bezárt szöge (a merőlegesség problémája); igaz-e a húrnégyszög-tulajdonság stb. Néha formai előírás szerepel: „Az eredményt egész számok hányadosaként adja meg!”

Egy konkrét példa:

P.11.5. ESz 2012. október, 8. A derékszögű koordináta-rendszerben az *ABC* háromszög csúcsai: *A*(2; 1), *B*(7; −4), *C*(11; *p*). Határozza meg a *p* paraméter **pontos értékét**, ha a háromszög *B* csúcsánál levő belső szöge 60°-os.

Ennek az egyenletnek a gyökei: $p_1 = 4 + 4\sqrt{3}$, $p_2 = 4 - 4\sqrt{3}$.	2 pont	*Ha a vizsgázó közelítő értékekkel számol, akkor erre a részre legfeljebb 2 pontot kaphat.*
(Mivel $p > 0$, ezért) $p = 4 + 4\sqrt{3}$.	1 pont	

A „pontos érték” fogalma ***definiálatlan***.

Általában zavartalanul használjuk, és körülbelül tudjuk, mit jelent, vagy hogy mire gondoljunk alkalmazásakor. [3] szerint a „pontos érték” csak racionális szám lehet. Ezzel a definícióval azonban nehéz helyzetet teremtenénk: problémát jelentene az $x_1 = \sqrt{2}$ eredmény, a $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$ egyenlet megoldása ($x_1 = \log_2 3$), vagy az $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ gyökök ellenőrzése.

Ez utóbbi formával, a trigonometriában szereplő periodikus gyökök ellenőrzésével korábban már találkoztunk (**8.1.**). Ez volt az a szerencsés helyzet, amikor a pontos érték használata automatikus, és nem igényelt hosszadalmas indoklást. (Az eredményben és a válaszban is a pontos irracionális értéknek kell szerepelnie – ha ellenőrizni akarunk.)

11. Megjegyzések, következtetések

1. Az „eredmény” kezelése eléggé „változatos” az útmutatókban, és nem is nagyon képzelhető el egységesítő előírás. A szerény elvárásnak megfelelően általában jóindulatú a pontozás, és az eredménnyel kapcsolatos következetlenségekből nem szokott probléma származni.

2. A bonyolultabb kifejezések eredményként történő elfogadása szakmailag azzal indokolható, hogy kiszámításuk a mai számológépekkel általában nem okoz nehézséget. (Ha maga a géphasználat az értékelendő, akkor esetleg külön is megfogalmazható a számolási felhívás.) Mégis, a jelenlegi pontozási gyakorlat inkább a számszerű végeredmény előállítását követeli meg, hiszen bizony a géphasználat is egy fontos kompetencia.

3. Az itt lévő bizonytalanság gyakorlati problémákat szülhet. Ha az egyik vizsgázó nagy munkával kiszámol egy bonyolult kifejezést, hátrányba kerül azzal szemben, aki semmit nem csinált, de az útmutató alapján ugyanannyi pontot kapott. Az útmutatóban tehát lehetőleg el kell kerülni a hasonló eseteket. Praktikusan ez azt jelenti, hogy a bonyolult eredménykifejezések esetén már a feladat szövegénél érdemes jelezni, szükség van-e a számszerű végeredményre, vagy sem. (Az egységes gyakorlat is irányadó lehet, bár egyáltalán nem biztos, hogy a gyakorlattal kapcsolatban minden diák kellően tájékozott…)